Katedra Informatiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Silné hranové farbenia regulárnych grafov

(Bakalárska práca)

Martin Veselý

Vedúci: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava, 2009

Silné hranové farbenia regulárnych grafov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Martin Veselý

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

9.2.1 Informatika

Vedúci záverečnej práce
RNDr. Edita Máčajová, PhD.

BRATISLAVA 2009

Čestne prehlasujem, že túto bakalársku prácu som vypracoval samostatne, len s použitím citovanej literatúry.

Bratislava 2009

Chcel by som poďakovať všetkým, ktorí mi akýmkoľvek spôsobom pomohli pri písaní tejto bakalárskej práce. Moje osobitné poďakovanie patrí vedúcej práce, RNDr. Edite Máčajovej, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a podnetné pripomienky pri vypracovávaní bakalárskej práce.

Abstrakt

Autor: Martin Veselý
Názov práce: Silné hranové farbenia regulárnych grafov.
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra informatiky
Vedúci: RNDr. Edita Máčajová, PhD.
Bratislava 2009

V tejto práci sa venujem silnému hranovému farbeniu regulárnych grafov. Najskôr popisujem, kde sa tento problém využíva v praxi a ako sa postupne historicky vyvíjali výsledky v tejto oblasti. V kapitole 4 a 5 zhŕňam niektoré základné alebo zaujímavé výsledky, ktoré už boli v tejto oblasti vyskúmané pre všetky grafy, alebo pre špeciálne triedy grafov a v 6. kapitole zhŕňam nastolené otvorené hypotézy.
V 7 kapitole overujem základnú hypotézu o silnom chromatickom indexe pre 4-regulárne grafy a v 8. kapitole určujem silný chromatický index pre niektoré nekonečné triedy 4-regulárnych grafov, konkrétne pre 2-rozmerné torusy a Cayleyho grafy.

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

Silné hranové farbenie je jedna z vlastností grafov, ktoré nie sú veľmi preskúmané. Prvýkrát sa o silnom chromatickom indexe hovorilo v roku 1984. Cieľom mojej bakalárskej práce je spraviť akýsi prehľad v problematike silného hranového farbenia grafov, ako aj určiť silný chromatický index pre niektoré nekonečné triedy regulárnych grafov. Základ pre tvorbu prehľadu som našiel v [1] od M. Mahdiana. Na skúmanie som si vybral podtriedy 4-regulárnych grafov. Budem sa snažiť pre tieto grafy nájsť, prípadne dokázať nejaké nové výsledky.
Vlastnosť silného hranového farbenia sa využíva aj v praxi. Napríklad má široké uplatnenie v mobilných sieťach.

Kapitola 1

Základné definície

Definícia 1. Dve hrany sú *vo vzdialenosti maximálne* 2 práve vtedy, keď zdieľajú koncový bod, alebo ak niektoré dva z ich koncových bodov sú susedné.

Definícia 2. *Silné hranové farbenie* grafu G je priradenie farieb hranám grafu G tak, že žiadne dve hrany vo vzdialenosti maximálne 2 nemajú rovnakú farbu.

Definícia 3. *Stupeň vrchola* v grafe je počet hrán incidentných s vrcholom. Stupeň vrchola v v grafe G sa označuje $\deg_G(v)$.

Definícia 4. *Maximálny stupeň grafu* je maximálny zo stupňov vrcholov v grafe G.

Definícia 5. *Indukované párenie* (alebo tiež *silné párenie*) v grafe G je množina A hrán takých, že žiadne dve hrany v A nie sú vo vzdialenosti maximálne 2. Inými slovami, indukované párenie grafu G je množina hrán v indukovanom podgrafe grafu G, ktoré je taktiež párenie. Silné hranové farbenie môže byť teda taktiež definované ako rozdelenie hrán do indukovaných párení.

Takisto je možné definovať silné hranové farbenie ako vrcholové farbenie špeciálneho typu grafu:

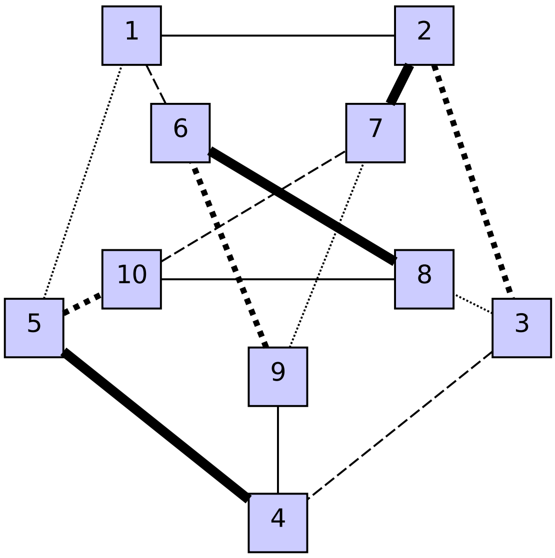
Definícia 6. *Hranový graf grafu G*, ktorý sa označuje $L(G)$ je graf, ktorý má vrchol korešpondujúci ku každej hrane grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď korešpondujúce hrany sú susedné (zdieľajú koncový bod).

Definícia 7. Štvorec grafu H, ktorý sa označuje H^2, je graf, ktorý má jeden vrchol korešpondujúci s každým vrcholom grafu H a jeho dva vrcholy sú susedné ak ich korešpondujúce vrcholy v H sú buď susedné, alebo majú spoločného suseda t.j. sú vo vzdialenosti maximálne 2 v H.

Podľa predchadzajúcich definícii, je jasné, že na silné hranové farbenie grafu G sa môžeme pozerať aj ako na klasické vrcholové farbenie štvorca hranového grafu G, ktorý označujeme $L(G)^2$.

Definícia 8. *Silný hranový chromatický index* grafu G, ktorý obyčajne označujeme $s\chi'(G)$ je minimálny počet farieb v silnom hranovom farbení grafu G.

Príklad 1. Silný hranový chromatický index Petersenovho grafu je 5. Na obrázku 1.1 je príklad silného hranového farbenia tohoto grafu.



Obr. 1.1: Silné hranové farbenie Petersenovho grafu

Definícia 9. *Obvodom grafu G* nazývame dĺžku minimálnej kružnice v grafe G.

Definícia 10. Najväčšie n také, že $K_n \subseteq G$ označíme $\omega(G)$.

Definícia 11. Graf G nazývame perfektný, ak každý indukovaný podgraf $H \subseteq G$ má chromatické číslo $\chi(H) = \omega(H)$.

Kapitola 2

Motivácia výskumu

Problém silného hranového farbenia má zaujímavé aplikácie najmä pre priradenie kanálov v mobilnej viacskokovej sieti a v mobilných sieťach: Bezdrôtová rádiová sieť pozostáva zo skupiny vysielačov komunikujúcich navzájom cez zdieľané médium. Každý vysielač má dosah, v ktorom dokáže komunikovať s ostatnými zariadeniami. Komunikácia sa uskutočňuje medzi párom uzlov, ktoré sú oba navzájom v dosahu cez protokoly, ktoré posielajú dátové pakety jedným smerom a správy o doručení v druhom smere.

Určovanie kanálov frekvencii linkám medzi vysielačmi vyhýbajúc sa primárnej a sekundárnej interferencii korešponduje s problémom silného hranového farbenia grafu, ktorý modeluje rádiovú sieť. Takýto graf má jeden uzol pre každý vysielač. Pre každý pár vysielačov, z ktorého každý vysielač je v dosahu toho druhého, je hrana medzi korešpondujúcimi vrcholmi. V tomto grafe, správne silné hranové farbenie musí prideliť rozdielne farby korešpondujúce s rozdielnymi kanálmi akémukoľvek páru hrán medzi ktorými je cesta o dĺžke maximálne 2. Sú tu dva príbuzné problémy:

Problém $D2EC(G)$: Počíta silné hranové farbenie daného grafu $G = (V, E)$ s najmenším možným počtom farieb. Ekvivalentne, počíta priradenie kanálov bez interferencie s použitím najmenšieho počtu kanálov.

Problém $D2EC(G, k)$: Maximalizuje počet hrán zafarbených silným hranovým farbením s maximálne k farbami daného grafu $G = (V, E)$. Ekvivalentne, počíta priradenie kanálov s maximálne k kanálmi, ktoré maximalizuje páry vysielačov, ktoré môžu komunikovať bez interferencie.

Mahdian and Erickson dokázali, že $D2EC(G)$ je NP úplný problém. Zložitosť $D2EC(G)$ implikuje, že aj problém $D2EC(G, k)$ je tiež NP úplný.

Pre väčšinu grafových farbení je prvá otázka, ktorá je kladená, nájdenie horného ohraničenia minimálneho počtu farieb potrebných na farbenie v závislosti od $\Delta(G)$. Pre silné hranové farbenie bol tento problém prvýkrát riešený Erdősom a Nešetřiom. Vyslovili hypotézu, že silný hranový chromatický index každého grafu s maximálnym stupňom $\Delta(G)$ je maximálne $\frac{5}{4}\Delta^2$. Táto hypotéza je stále otvorená.

Kapitola 3

História

Koncept silného chromatického hranového farbenia bol najskôr definovaný v roku 1984 J. L. Fouwuetom a J. L Jolivenom. Študovali silný chromatický index na kubických planárnych grafoch. Ich výstupom bola [17].

Na konferencii v Prahe v 1985, P. Erdős and J Nešetřil prezentovali nasledujúci problém:

Problém 3.1. *Nájdite najmenšie $t(k)$ také, že ak $\Delta(G) = k$, potom $s\chi'(G) \leq t(k)$.*

Pre akýkoľvek graf G s maximálnym stupňom $\Delta(G)$, $s\chi'(G) \leq 2\Delta^2–2\Delta + 1$. Je to preto, lebo každá hrana priamo susedí s $2\Delta - 2$ hranami a vo vzdialenosti dva má $2(\Delta - 1)^2$ hrán. Spolu teda každá hrana má maximálne $2\Delta^2 - 2\Delta$ susedných hrán do vzdialenosti 2. Každú hranu teda môžeme určite zafarbiť jednou z $2\Delta^2–2\Delta + 1$ farieb. Z toho vyplýva, že $t(k) \leq 2k_2–2k + 1$.

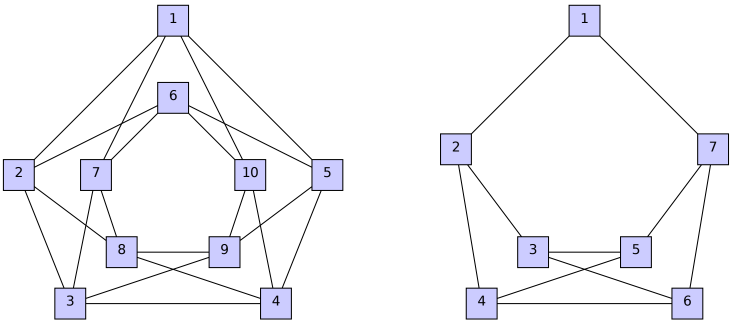
Erdős a Nešetřil vyslovili hypotézu:

Hypotéza 3.2. *(Hypotéza o silnom farbení) Pre akýkoľvek graf s maximálnym stupňom $\Delta(G)$, $s\chi'(G) \leq f(\Delta)$ kde $f(\Delta)$ je definovaná takto:*

$$f(\Delta) = \begin{cases} \frac{5\Delta^2}{4} & \textit{ak } \Delta \textit{ je párne} \\ \frac{5\Delta^2}{4} - \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{4} & \textit{ak } \Delta \textit{ je nepárne} \end{cases}$$

Nasledujúce príklady ukazujú, že odhad nemožno zlepšiť:
Pre k párne, môžeme nájsť príklad nahradením každého vrchola 5-cyklu nezávislou množinou s veľkosťou $\frac{k}{2}$ a spojením dvoch vrcholov ak korešpondujúce vrcholy v 5-cykle sú susedné. (Operácia nahrádzania každého vrchola v grafe nezávislou množinou sa volá vrcholové násobenie a výsledný graf označujeme

$C_5^{K/2}$).
Pre nepárne k môžeme príklad získať nahradením dvoch susedných vrcholov 5-cyklu nezávislou množinou o veľkosti $\frac{(k+1)}{2}$ a ostatné nezávislou množinou o veľkosti $\frac{(k-1)}{2}$. V každom prípade, môžeme ľahko vidieť, že neexistuje indukované párenie o veľkosti 2 v grafe a preto farba hrán musí byť odlišná.



Obr. 3.1: Príklad grafov, ktoré ukazujú, že hypotézu nie je možné zlepšiť

V roku 1989 bola v [9] vyslovená nasledujúca hypotéza pre silný chromatický index bipartitného grafu:

Hypotéza 3.3. *(Bipartitné silné hranové farbenie) Pre každý bipartitný graf G s maximálnym stupňom Δ, $s\chi'(G) \leq \Delta^2$*

Kompletný bipartitný graf $K_{\Delta,\Delta}$ ukazuje, že nasledujúca hypotéza je pravdivá a najlepšia možná.

V roku 1993 R. Bruadi a J. Quinn v [7] zovšeobecnili predchádzajúcu hypotézu takto:

Hypotéza 3.4. *(Zovšeobecnené bipartitné silné hranové farbenie) Pre každý bipartitný graf G s partíciami X a Y takými, že maximálny stupeň vrchola v partícii X je α a v partícií Y β platí, $s\chi'(G) \leq \alpha\beta$.*

Kapitola 4

Všeobecné ohraničenia

Horák, Qing a Trotter si v [19] všimli, že je veľmi zložité dokázať dokonca, že $s\chi'(G) \leq (2-\epsilon)\Delta^2$ pre nejaké $\epsilon > 0$.
M. Molly a B. Reed vyriešili tento problém nasledujúcou vetou. Toto je jediná známa všeobecná hranica pre silný hranový chromatický index:

Veta 4.1. *Ak graf G má maximálny stupeň Δ dostatočne veľký, potom $s\chi'(G) \leq 1.998\Delta^2$*

Dôkaz pozostáva z dvoch častí. V prvej časti je ukázané, že pre každý graf, štvorec hranového grafu grafu G je $\frac{1}{36}$-riedky, to znamená, že okolo ktoréhokoľvek vrchola je najviac $(1-\frac{1}{36})\binom{\Delta L(G)^2}{2}$ hrán v susedstve akéhokoľvek vrchola z $L(G)^2$. V druhej časti je dokázané, že pre nejaké $\delta > 0$ existuje $\gamma > 0$ taká, že graf H je Δ-riedky. Jeho chromatické číslo je maximálne $(1-\gamma)\Delta(H)$. Dôkaz tejto časti je pravdepodobnostný a je založený na jednoduchej iterácii procedúry náhodného farbenia.

Dôsledky hypotéz:

Definícia 12. Veľkosť najväčšieho indukovaného párenia grafu G sa označuje $sm(G)$.

Definícia 13. Veľkosť najväčšieho antipárenia grafu G sa označuje $am(G)$.

Antipárenie je množina A hrán takých, že každé dva prvky A sú vo vzdialenosti maximálne 2. Je jasné, že $sm(G)$ a $am(G)$ korešpondujú s veľkosťou maximálnej nezávislej množiny a maximálnej kliky štvorca hranového grafu.

Hypotéza silného chromatického indexu implikuje nasledujúce dve hypotézy:

Hypotéza 4.2. *Pre každý graf G, $|E(G)| \leq f(\Delta)sm(G)$ kde f je funkcia definovaná v hypotéze o silnom farbení.*

Hypotéza 4.3. *Pre každý graf G, $am(G) \leq f(\Delta)$, kde f je funkcia definovaná v hypotéze o silnom farbení.*

Špeciálny prípad hypotézy 4.2 môže byť formulovaný podľa $2K_2$-free grafov.

Definícia 14. Súvislý graf nazývame $2K_2$-free, ak neobsahuje indukovaný podgraf izomorfný ku $2K_2$.

Trieda $2K_2$-free grafov má veľa zaujímavých vlastností a vystupuje vo veľa aplikáciách v teorii grafov, ako napríklad hypotéza perfektého grafu a hypotéza silného chromatického indexu.

Keď $sm(G) = 1$, predpredchádzajúca hypotéza môže byť formulovaná nasledovne:

Veta 4.4. *(Bermondova veta). Každý $2K_2$-free graf s maximálnym stupňom Δ má maximálne f(Δ) hrán, kde f je funkcia definovaná v hypotéze o silnom farbení.*

Predchádzajúca veta bola vyslovená ako hypotéza Erdősom a Nešetřilom v [14]. Takisto bola vyslovená Bermondom v [8] v roku 1983. Ich hypotéza bola motivovaná problémom v dizajnovaní zbernicových prepojovacích sietí. Problém je o maximálnom počte procesorov v multiprocesorovom systéme. Procesory komunikujú cez zbernice. Každý procesor je na dvoch zberniciach a maximálne d procesov môže zdieľať jednu zbernicu. Úlohou je nájsť maximálny počet procesorov pre ktoré môžeme vytvoriť takú sieť, že každé dva procesory P1 a P2 môžu komunikovať priamo cez zbernicu alebo je tam iný procesor P taký, že P1 a P a takisto P2 a P vedia komunikovať priamo. Nie je ťažké vidieť, že maximálny počet procesorov v takomto systéme je ekvivalentný maximálnemu počtu hrán v $2K_2$-free grafe s maximálnym stupňom Δ.

V [8] je spomenuté, že D. J. Kleitman dokázal Bermondovú vetu pre párne stupne, ale jeho dôkaz nebol nikde publikovaný. Prvý publikovaný dôkaz Bermondovej vety patrí Chungovi ([13]).

Dôsledky Bermondovej vety:

Veta 4.5. *Pre každý graf G, ktorý nie je kružnicou s nepárnou dĺžkou alebo kompletným grafom, a má maximálny stupeň Δ platí: $s\chi'(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1)$.*

Dôkaz. Podľa Brookovej vety, pre každý graf G, $s\chi'(G) = \chi(L(G)^2) \leq \Delta(L(G)^2) = 2\Delta(\Delta - 1)$. pokiaľ $L(G)^2$ nie je kompletný graf alebo nepárny cyklus, ľahko overíme, že štvorec grafu nemôže byť nepárny cyklus s dĺžkou viac ako 3. Ak $L(G)^2$ je kompletný graf, znamená to, že G je $2K_2$-free graf. Ale v tom prípade, podľa Bermondovej vety, G má maximálne $f(\Delta)$ hrán, a preto $s\chi'(G) \leq |E(G)| \leq f(\Delta) \leq 2\Delta(\Delta–1)$. □

Hypotéza 4.3 je stále otvorená. Nasledujúca slabšia forma je dokázaná Faudree-om v [16].

Veta 4.6. *Existuje $\epsilon > 0$ také, že $am(G) \leq (2–\epsilon)\Delta^2$*

Pre bipartitné prípady je dokázané korešpondujúce vyjadrenie. Faudree dokázal v [16] nasledujúcu vetu:

Veta 4.7. *Pre každý bipartitný graf G, $am(G) \leq \Delta^2$.*

Tiež dokázali v [15], že každý bipartitný $(k+1)K_2$-free graf s maximálnym stupňom Δ má maximálne $k\Delta^2$ hrán. Toto implikuje nasledujúcu teorému.

Veta 4.8. *Pre každý bipartitný graf G, $|E(G)| \leq \Delta^2 sm(G)$.*

4.1 Grafy s malým maximálnym stupňom

Nerovnosť $s\chi'(G) \leq 2\Delta^2–2\Delta + 1$ implikuje, že hypotéza o silnom farbení je pravdivá pre $\Delta \leq 2$. Preto prvý netriviálny prípad je $Delta = 3$. L. Andersen v [6] a nezávisle P. Horák v [19] vyriešili tento problém nasledujúcou vetou:

Veta 4.9. *Ak G je graf s maximálnym stupňom $\Delta \leq 3$, potom $s\chi'(G) \leq 10$.*

V [6] je takisto dokázané, že pre akýkoľvek graf G s maximálnym stupňom $\Delta \leq 3$, existuje lineárny algoritmus na nájdenie silného hranového farbenia s použitím 10 farieb.

Pre $\Delta = 4$, podľa hypotézy, každý graf sa musí dať silno hranovo zafarbiť s použitím 20 farieb. Podľa Vety 4.5, vieme, že každý graf má silné hranové farbenie s použitím 24 farieb. Táto hranica bola vylepšená Horákom v [18] takto:

Veta 4.10. *Ak G je graf s maximálnym stupňom $\Delta \leq 4$, potom $s\chi'(G) \leq 23$.*

Bol dokázaný ešte lepší výsledok ohľadom grafov s $\Delta \leq 4$ v [4]:

Veta 4.11. *Každý graf s maximálnym stupňom 4 má silné hranové farbenie ktoré používa maximálne 22 farieb.*

Náznak dôkazu: Nasledujúca lema dokazuje vetu pre 4-regulárne grafy s obvodom aspoň 6. Dôkaz vety pre grafy, ktoré nie sú 4-regulárne, a grafy s obvodom menším ako 6 sa rozdeľuje na niekoľko častí. V prvej sa uvažuje o grafoch ktoré nie sú 4-regulárne a o grafoch s obvodom nanajvýš 3. V druhej a tretej časti sa uvažuje o grafoch s obvodom 4 a 5. Kompletný dôkaz tejto vety je [4]. V dôkaze sú použité nasledujúce lemy:

Lema 4.12. *Ak G je graf s maximálnym stupňom 4, potom G má silné hranové farbenie, ktoré používa 21 farieb, ktoré ale necháva neofarbené hrany incidentné s jednoduchým vrcholom. Ak C je cyklus v G, potom G má silné hranové farbenie, ktoré používa 21 farieb, ktoré necháva neofarbené hrany cyklu C.*

Lema 4.13. *Každý 4-regulárny graf s obvodom aspoň 6 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 22 farieb.*

Lema 4.14. *Každý graf s maximálnym stupňom 4, ktorý má vrchol so stupňom maximálne 3 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 21 farieb.*

Lema 4.15. *4-regulárny graf so slučkou, alebo dvojitou hranou má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 21 farieb.*

Lema 4.16. *4-regulárny graf s obvodom 3 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 21 farieb.*

Lema 4.17. *Každý 4-regulárny graf s obvodom 4 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 22 farieb.*

Lema 4.18. *Ak G je 4-regulárny graf s obvodom 5, potom G má silné hranové farbenie ktoré používa maximálne 22 farieb.*

Pre $\Delta \geq 5$ je problém nevyriešený. Pre bipartiné grafy je problém vyriešený pre $\Delta = 3$ A. Stegerom a M Yuom v [23].

Veta 4.19. *Ak G je bipartitný graf s maximálnym stupňom $\Delta \leq 3$, potom $s\chi'(G) \leq 9$.*

Hypotéza 3.3 je otvorená pre $\Delta > 4$. Pre Hypotézu 3.4, jediný známy výsledok iný ako predchádzajúca veta (ktorá rieši túto hypotézu v prípade $\alpha = \beta = 3$) je nasledujúci: Tento výsledok je dokázaný v [11].

Veta 4.20. *Nech G je bipartitný graf s bipartíciami X, Y a bez cyklu dĺžky 4. Ak maximálny stupeň vrchola X je dva a maximálny stupeň vrchola z Y je Δ, potom $s\chi'(G) \leq 2\Delta$.*

V [11] je vyslovené, že 2Δ v predchádzajúcej teoréme môže byť nahradené $\Delta + 2$. Táto hypotéza je stále otvorená a zdá sa byť veľmi ťažká.

Kapitola 5

Špeciálne triedy grafov

Hypotéza o silnom farbení je dokázaná pre veľa tried grafov. V tejto sekcii je zoznam niekoľkých takýchto tried grafov. Takisto sú tu doteraz známe výsledky niektorých tried grafov.

5.1 STROMY

Triviálne najnižšie ohraničenie pre silný chromatický index grafu G je nasledujúce: $\forall uv \in E(G)$, $s\chi'(G) \geq am(G) \geq max\{deg(u) + deg(v) - 1\}$

Definujme $o(G) := max(u, v \in E(G))deg(u) + deg(v) - 1$ Preto pre akýkoľvek graf $s\chi'(G) \geq o(G)$. Nasledujúca veta, ktorá je dokázaná v [16], ukazuje, že rovnosť sa dosahuje u stromov:

Veta 5.1. *Ak G je strom, potom $s\chi'(G) = o(G)$;*

Toto jasne implikuje, že hypotézy 3.2 a 3.3 platia pre stromy.

5.2 d-dimenzionálne kocky

Definícia 15. D-dimenzionálna kocka Q_d je graf, ktorého množina vrcholov je množina všetkých binárnych sekvencii dĺžky d. Dva vrcholy sú susedné, práve keď korešpondujúce sekvencie sú rozdielne práve na jednej pozícií.

Je ľahké vidieť, že Q_d je bipartitný graf.

Nasledujúca veta, ktorá je dokázaná v [8], implikuje že Hypotéza 3.3 je pravdivá pre d-dimenzionálne kocky.

Veta 5.2. *Pre d-dimenzionálne kocky Q_d, $s\chi'(Q_d) = am(Q_d) = 2d$ ak $d \geq 2$.*

5.3 Chordálne grafy

Definícia 16. Graf G nazývame chordálnym, ak pre každý cyklus C s dĺžkou minimálne 4 v G, existuje hrana iná ako hrany v C spojujúca dva vrcholy v C (takuto hranu voláme chorda v cykle).

Nasledujúce dve vety sú dokázané v [12].

Veta 5.3. *Ak G je chordálny, potom $L(G)^2$ je chordálny.*

Veta 5.4. *V chordálnom grafe, každé maximálne antipárenie je maximálne okolie kliky, kde okolie kliky je množina K hrán kliky spolu s niekoľkými hranami, z ktorých každá je incidentná s členom K.*

Veta 5.5. *Pre každý chodálny graf G, $L(G)^2$ je perfektný a preto jeho silný chromatický index je ekvivalentný s veľkosťou jeho maximálnej kliky, ktorá je ekvivalentná s veľkosťou maximálného antipárenia v G. Podľa predchadzajucej vety, veľkosť antipárenia v chordálnom grafe G je maximálne: max$\binom{k}{2} + k(\Delta - k + 1) = \frac{\Delta(\Delta+1)}{2}$.*

a preto chordálne grafy spĺňajú hypotézu o silnohranovom chromatickom indexe.

5.4 Kneserove grafy

Definícia 17. Kneserov Graf KN_n^m je definovaný pre $m > 2n$. Vrcholy sú n-prvkové množiny fixovanej m-prvkovej množiny a dva vrcholy sú sudedné, práve keď korešpondujúce množiny sú dizjunkné.

Faudree v [16] prezentoval dva krátke elegantné dôkazy pre nasledujúcu vetu.

Veta 5.6. *Silný chromatický index v Kneserovom grafe KN_n^m je rovný $\binom{m}{2n}$ pre každé $m > 2n$.*

Toto spolu s kombinatorickým: $\binom{m}{2n} \leq \binom{m-n}{n}^2$ implikuje, že hypotéza o silnom hranovom chromatickom indexe platí pre Kneserové grafy.

5.5 Grafy s cyklami, ktorých dĺžky sú deliteľné štyrmi

Dôležitou vlastnosťou grafov G, ktorých dĺžky cyklov sú deliteľné štyrmi je, že žiaden z cyklov nemá chordu. Nasledujúca veta, ktorá je dokázaná v [11], ukazuje, že Hypotéza 3.4 je pravdivá pre také grafy. Všimnime si, že každý taký graf je bipartitný.

Veta 5.7. *Nech G je bipartitný graf s partíciami X, Y. Nech maximálny stupeň vrchola v X je α a v Y je β. Predpokladajme, že všetky dĺžky cyklov sú deliteľné štyrmi. Potom: $s\chi'(G) \leq \alpha\beta$.*

V [16] bolo dokázané, že Hypotéza 2.2 platí pre takéto grafy. Takisto existuje hypotéza, že v skutočnosti silný chromatický index akéhokoľvek takého grafu je ohraničený lineárnou funkciou podľa Δ.

5.6 Planárne grafy

Nasledujúca veta je dokázaná v [16]. Dôkaz využíva Vetu o 4 farbách.

Veta 5.8. *Ak G je planárny graf, potom $s\chi'(G) \leq 4\Delta + 4$. Navyše, pre každé $\Delta \geq 2$, existuje planárny graf G s maximálnym stupňom Δ a $s\chi'(G) = 4\Delta - 4$.*

5.7 C_4-free grafy

Definícia 18. Graf sa nazýva C_4-free, ak neobsahuje žiady podgraf izomorfný s C_4, inak povedané, neobsahuje žiaden cyklus s dĺžkou 4.

Nasledujúca veta ukazuje doteraz najlepší výsledok:

Veta 5.9. *Pre každý C_4-free graf G:*
$s\chi'(G) \leq (2 + o(1))(\frac{\Delta^2}{ln\Delta})$

Všimnime si, že sa môžeme bez straty všeobecnosti domnievať, že graf je regulárny (toto môže byť dokázané ľahko; jediný problém je v udržiavaní neprítomnosti C_4 podgrafu). Tento fakt spolu s ekvivalenciou silného hranového farbenia a klasického vrcholového farbenia štvorca hranového grafu implikuje, že predchádzajúca veta je ekvivalentná s nasledujúcou, ktorá je dokázaná v [2]

Veta 5.10. *Pre každé $\epsilon > 0$, existuje Δ_0, také, že pre každý graf G s maximálnym stupňom $\Delta > \Delta_0$, ktorý je štvorcom hranového grafu z C_4-free regulárneho grafu, $\chi(G) \leq (2 + \epsilon)(\frac{\Delta}{ln\Delta})$.*

Dôkaz tejto vety je pravdepodobnostný a podobný Kimovmu dôkazu faktu, že chromatické číslo grafu s obvodom 5 je maximálne $(1 + o(1))\frac{\Delta}{ln\Delta}$ ktorý je v [10]. Použitá je Kimova polonáhodná ofarbovacia procedúra s rozdielnou analýzou. Nasledujúca veta ukazuje, že predchádzajúca veta je asymptoticky najlepšia možná.

Veta 5.11. *Pre každé $g \geq 3$ a dostatočne veľké Δ, existuje graf s obvodom maximálne g, maximálnym stupňom maximálne Δ a silným chromatickým indexom minimálne: $(\frac{1}{2}-o(1))\frac{\Delta^2}{ln\Delta}$.*

Táto veta je dokázaná v [2].

5.8 Halinove grafy

Definícia 19. Halinov graf $G = T\bigcup C$ je planárny graf, ktorý pozostáva z stromu a cyklu C spojujúceho všetky listy stromu, takže C je ohraničenie vonkajšej plochy. Stupeň každého interiérového vrcholu v T je minimálne 3. Strom T a cylkus C sa volajú *charasterický strom* a *pripojený cyklus* grafu G.

Strom sa nazýva (3,1)-strom, ak stupeň každého vnútorného vrchola je 3. (3,1)-pásový T je (3, 1)-strom ak odstránením listov (spolu s ich incidentnými hranami) vznikne cesta, ktorá sa nazýva chrbát stromu T.

V ďalšom texte "pásový" znamená (3,1) pásový

Nech G_h je množina všetkých kubických Halinových grafov, ktorých charestický stromy sú pásové rádu $2h + 2$.

Nech $G \in G_h$. Ak $\{0, 1\}, \{1, 2\}, ..., \{(h-1), h\}, \{h, h+1\}$, a $\{h+1, 0\}$ sú hrany pripojeného cyklu grafu G, potom G sa označuje N_{eh}

Predpokladajme že G je Halinov graf rádu $2h + 2$ s pásovým T ako jeho charasterickým stromom, $h \geq 1$. Pomenujeme vrcholy pozdĺž chrbtu P_h číslami $1, 2....h$. Vrcholy susedné s 1 sa volajú 0 a $1'$. Vrcholy susedné s h sa volajú $h+1$ a h'. Ostatné listy susedné s i sa volajú $i', 2 \leq i \leq h-1$. Všimnime si, že $0, 1' \dots h', h + 1$ sú vrcholy ležiace na pripojenom cykle C_{h+2}. Toto označenie budeme teraz používať. Nech G_h je množina všetkých kubických Halinových grafov, ktorých charakteristické stromy sú pásy rádu $2h + 2$.

Veta 5.12. *Pre $h \geq 4$ a $G \in G_h$, $6 \leq s\chi'(G) \leq 8$*

Dôkaz je v [3]

Lema 5.13. *Predpokladajme G je graf so silných hranovým chromatickým idexom minimálne 6. Nech dva susedné vrcholy a a b z G sú stupňa 3. Nech x, y a y, w sú sú ďalšími susedmi a a b. Nech $\overline{G}$ je graf získaný z G vymenením hranovo-indukovaných subgrafov $G[\{AB\}]$ rebríkovým grafom o dĺžke 4. Potom $s\chi'(\overline{G}) \leq s\chi'(G)$.*

Veta 5.14.

$$s\chi'(N_{eh}) = \begin{cases} 6 & ak\ h\ je\ nepárne \\ 7 & ak\ h\ \geq 6\ a\ h\ je\ párne \\ 8 & ak\ h = 4 \\ 9 & ak\ h = 2 \end{cases}$$

Veta 5.15. *Ak G je kubický Halinov graf, potom $6 \leq s\chi'(G) \leq 9$ a ohraničenie je tesné.*

Dôsledok 5.16. *Podľa predchadzajucej vety sme dostali, že každý kubický Halinovský graf je hranovo-rozložiteľný do 9 indukovaných párení.*

5.9 Karteziánsky, Kroneckerov a silný súčin

Definícia 20. *Karteziánsky súčin $G\square H$* dvoch grafov G a H má množinu vrcholov $V(G) \times V(H)$ a množinu hrán $\{(a, x)(b, y) : ab \in E(G)$ a $x = y$ alebo $xy \in E(H)$ a $a = b\}$.

Definícia 21. *Kreneckerov(kategorický) súčin $G \times H$* má množinu vrcholov $V(G) \times V(H)$ a množinu hrán $\{(a, x)(b, y) : ab \in E(G)$ a $xy \in E(H)\}$

Definícia 22. *Silný súčin $G \boxtimes H$* má množinu vrcholov $V(G) \times V(H)$ a množinu hrán $E(G\square H) \bigcup E(G \times H)$.

5.9.1 Karteziánsky súčin

Veta 5.17. *Pre akýkoľvek graf G a akýkoľvek graf H, ktoré obsahujú dva susedné vrcholy s maximálnym stupňom, máme $s\chi'(G\square H) \geq 2\Delta(G\square H)$*

Dôkaz. Nech ab je hrana v G a a vrchol s maximálnym stupňom. A nech xy je hrana v H a x aj y vrcholy s maximálnym stupňom. Označme si S množinu všetkých hrán incidentných s (a,x) alebo (a,y) plus hranu (b,x)(b,y). Potom všetky hrany v S musia byť ofarbené rozdielnymi farbami v každom silnom farbení. Jednoduchá matematika hovorí: $\mid S \mid = 2\Delta(G) + 2\Delta(H) = 2\Delta(G\square H)$. $\square$

Veta 5.18. *Nech* G *a* H *sú dva grafy. Pre Karteziánsky súčin máme:* $s\chi'(G\square H) \leq s\chi'(G)\chi'(H) + s\chi'(H)\chi'(G)$*.*

Dôkaz nájdeme v [5].

Veta 5.19. *Nech* G *a* H *sú dva grafy, potom* $s\chi'(G\square H) \geq f\chi'(G)\Delta(H)$*.*

Dôkaz nájdeme v [5].

5.9.2 Kroneckerov súčin

Veta 5.20. *Nech* G *a* H *sú dva grafy rozdielne od* K_2*. Pre Kroneckerov súčin* $G \times H$ *máme:* $s\chi'(G \times H) \leq s\chi'(G)s\chi'(H)$*.*

Dôkaz nájdeme v [5].

5.9.3 Silný súčin

Ako množinu hrán v silnom súčine $G \boxtimes H$ môžeme brať zjednotenie množiny hrán kartézskeho a Kroneckerovho súčinu. Skonštruujeme silné farbenie $G \boxtimes H$ farbením hrán karteziánskeho súčinu pomocou Vety 5.18 a hrán krockenorovho súčinu podľa modifikovanej verzie farbenia definovaného v dôkaze Vety 5.20. Nasledujúce dve lemy nás uistia, že každé z týchto dvoch farbení zostanú silnými vo finálnom $G \boxtimes H$. Obe sú dokázané v [5].

Lema 5.21. *Pre každý graf* G *a* H*, existuje silné farbenie* c *grafu* $(G\square H)$ *v* $s\chi'(G)\chi'(H)+s\chi'(H)\chi'(G)$ *farbách, ktoré splňa nasledujúcu doplňujúcu podmienku: pre každú hranu* ab *v* G *a pre každú hranu* xy *v* H*,* $S_c((a,x)) \bigcap S_c((b,y)) = \theta$ *(prázdna množina).*

Lema 5.22. *Pre akékoľvek grafy* G *a* H*, existuje silné farbenie* c *grafu* $G \times H$ *v* $2s\chi'(G)s\chi'(H)$ *farbách, ktoré spľňa nasledujúcu doplňujúcu podmienku: Pre každú hranu* ab *z* G *a pre každú hranu* xy *z* H*,* $S_c((a,x)) \bigcap S_c((a,y)) = \theta$ *(prázdna množina).* $S_c((a,x)) \bigcap S_c((b,x)) = \theta$ *(prázdna množina).*

Veta 5.23. *Nech* G *a* H *sú dva grafy. Pre silný súčin* $G \boxtimes H$ *máme:* $s\chi'(G \boxtimes H) \leq s\chi'(G)\chi'(H) + s\chi'(H)\chi'(G) + 2s\chi'(G)s\chi'(H)$*.*

Dôkaz opäť nájdeme v [5].

Všimnime si, že táto veta nám dáva presnú hodnotu silného chromatického indexu silného súčinu dvoch kompletných grafov. Keďže $K_m \boxtimes K_n = K_mn$, potom $s\chi'(K_{mn}) = \binom{mn}{2} = s\chi'(K_m)\chi'(K_n)+s\chi'(K_n)\chi'(K_m)+2s\chi'(K_m)s\chi'(K_n)$.

Kapitola 6

Ďalšie hypotézy

Existuje veľa otvorených problémov a hypotéz ohľadom silného chromatického indexu a indukovaného párenia. V tejto sekcii si vymenujeme niekoľko hypotéz.

Faudree v [15] dokázal, že maximálny počet hrán v $(k+1)K_2 - free$ grafe je $k\Delta^2$. Takisto dokázali, že ak dodáme dalšie obmedzenie, že graf je súvislý, maximálny počet hrán je maximálne $k\Delta^2$–Δ a vyslovili nasledujúcu hypotézu:

Hypotéza 6.1. *Existuje konštanta c taká, že pre k a Δ dostatočne veľké, každý súvislý $(k+1)K_2$-free graf s maximálnym stupňom Δ má maximálne $K\Delta^2$–$ck\Delta$ hrán.*

Nasledujúca hypotéza Faudreeho bola spomenutá vyššie:

Hypotéza 6.2. *Silný chromatický index každého grafu s dĺžkami cyklov deliteľnými štyrmi je ohraničený lineárnou funkciou podľa Δ.*

Nasledujúca hypotéza je spomínaná v [16], [20], Je takisto viditeľné, že komplement C_6 ukazuje, že táto hypotéza, aj je pravdivá, je najlepšia možná.

Hypotéza 6.3. *Ak G je kubický a planárny, potom $s\chi'(G) \leq 9$.*

Nasledujúce dve hypotézy su takisto spomenuté v [16], [20].

Hypotéza 6.4. *Ak G je bipartitný kubický $C_4 - free$ graf, potom $s\chi'(G) \leq 7$.*

Hypotéza 6.5. *Silný chromatický index každého C_5-free grafu je maximálne Δ^2.*

Nasledujúca veta podporuje túto hypotézu:

Veta 6.6. *Každý $C5$-free graf G, ktorý nemá indukované párenie o veľkosti 2 má maximálne Δ^2 hrán.*

Dôkaz je v [2].

Hypotéza 6.7. *Ak G je bipartitný kubický graf a jeho obvod je dostatočne veľký, potom $s\chi'(G) \leq 5$.*

Pre Halinove grafy:

Hypotéza 6.8. *Pre $h \geq 5, s\chi'(G) \leq 7$ pre každé $G \in G_h$.*

Hypotéza 6.9. *Pre $h \geq 5$ a h nepárne, $s\chi'(G) = 6$ pre každý $G \in G_h$.*

Hypotéza 6.10. *Predpokladajme $G = T \bigcup C$ je Halinov graph. Potom $s\chi'(G) \leq s\chi'(T) + 4$.*

Kapitola 7

Overenie hypotézy o silnom chromatickom indexe

V tejto časti sa budeme zaoberať overovaním základnej hypotézy o silnom chromatickom indexe pre 4-regulárne grafy s malým počtom vrcholov a teda overovaním, či náhodou neexistuje graf, ktorý nespĺňa túto hypotézu.

Hypotéza hovorí, že pre graf s $\Delta = 4$, $s\chi'(G) \leq 20$.

Pri overovaní sme postupovali podľa týchto krokov:

1. Vygenerovali sme grafy.
2. Naprogramovali som algoritmus, ktorý zisťuje silný chromatický index grafu.
3. Spustili sme algoritmus na vygenerovaných grafoch.

7.1 Generovanie grafov

Pri tomto kroku sme použili program s názvom Genreg od autora Dr. Markusa Meringera. Pre vstupné parametre n, k generoval n-vrcholové k-regulárne grafy a zapisoval ich do súboru, kde sa s nimi dalo ďalej jednoducho pracovať. Vygenerovali sme si 4-regulárne grafy s $5 - 15$ vrcholmi.

7.2 Programovanie algoritmu na zisťovanie silného chromatického indexu grafov

Algoritmus sme naprogramovali v programovacom jazyku Java. Jeho pomalosť však znemožňuje jeho použitie na veľké grafy. Momentálne je optimalizovaný pre 4-regulárne grafy. Nižšie popíšeme, ako funguje.

Dátová štruktúra - hlavné časti:
Trieda Vrchol: obsahuje pole, v ktorom sa uchovávajú čísla susedných vrcholov a pole v ktorom sa uchovávajú farby hrán s danými susedmi. Teda ak v poli SUS je na 1. pozícii číslo 3 a v poli FAR na prvej pozícii čislo 4 znamená to, že jeden zo susedov daného vrchola je vrchol číslo 3 a hrana k nemu má farbu číslo 4.

Trieda Graf: obsahuje pole Vrcholov, ktoré má takú veľkosť, koľko vrchlov má graf, ktorý práve spracovávam, 3 zásobníky, niekoľko polí o veľkosti stupňa grafu

Popis algoritmu:

1. načítanie grafu - algoritmus vie čítať súbor, ktorý vygeneroval program Genreg postupne po jednom grafe a postupne na každom z nich zistiť silný chromatický index.

2. samotné zisťovanie silného chromatického indexu grafu - Algoritmus najskôr skúša, či sa mu podarí zafarbiť graf počtom farieb 7. Ak sa mu to nepodarí, skúša ten istý graf zafarbit s počtom farieb o jeden vyšším, až pokiaľ sa mu nakoniec nepodarí graf zafarbiť. Keď algoritmus zafarbuje hranu, zistí aké najmenšie číslo farby môže použiť tak, aby nebol v konflikte s ostatnými, už zafarbenými hranami(zistí farby hrán, ktoré vychádzajú zo všetkých susedných vrcholov). Algoritmus používa backtracking a keďže prehľadáva graf do šírky, vieme určite povedať, že prvých 7 hrán, ktoré zafarbí, budú mať rozdielne farby a je jedno, aké čísla farieb sa použijú, nezávisí od nich výsledok. Preto akonáhle sa chce algoritmus vrátit k 7. hrane a prefarbiť ju, skončí pre daný počet farieb a pridá farbu. Keď sa algoritmus vracia v backtrackingu (nemal použiť akú ďalšiu farbu), tak môže prefarbiť hranu iba na číslo vačšie, ako je momentálne číslo farby tej hrany. Algoritmus teda funguje tak, že prehľadáva do šírky graf a vždy keď zafarbí hranu k nejakému vrcholu, uloží si tento vrchol v zásobníku(ak tam ešte nebol) a keď zafarbí všetkých susedov vrcholu, ktorý spracuváva, tak pokračuje so zafarbovaním

pre vrchol v zásobníku. V ďalších zásobníkoch si pamatá postupnosľ vrcholov a hrán, ktorú ofarbuje a podľa neho sa vracia v backtrackingu spať.

3. výpis výsledku- Pri zisťovaní silného chromatického indexu grafov viacerých grafov naraz si algoritmus pamatá všetky výsledky a na konci vypíše sumár, kde napíše, koľko z grafov ktoré ofarboval sa mu podarilo zafarbiť akou najmenšou farbou.

Odhad časovej zložitosti algoritmu:
Generovanie grafu a výpis výsledku sú veľmi zanedbateľné časové položky oproti samotnému zisťovaniu silného chromatického indexu, a tak sa zameriam na samotné zisťovanie silného chromatického indexu.

V najhoršom prípade:
n - počet vrcholov,
d - stupeň každého vrchola,
p - počet farieb, ktorými sa snažím ofarbiť graf

počet krokov v algoritme: $((p-d)(p-d-1)...(p-2d+2))^{(n-2)}c$
V každom vrchole okrem prvých dvoch zafarbujeme všetky hrany a každá z nich určite nemôže byť zafarbená aspoň d, $d+1$ ... $(2d-2)$ farbami.

7.3 Spustenie algoritmu na vygenerovaných grafoch

Algoritmus sme postupne spúšťali pre grafy s počtom vrcholov 5 až 12. Niektoré 13 vrcholové grafy už algoritmus nevedel zafarbiť rýchlo, a tak sme ho upravil tak, že sme odstránil backtracking a zafarbovali sme grafy greedy prístupom, t.j. použi vždy najmenšiu voľnú farbu. Pomocou neho sme dostali horné ohraničenie silného chromatického čísla pre všetky 12, 13, 14 a 15 vrcholové grafy. Výsledky tohto algoritmu pre 12 vrcholové grafy uvádzame pre porovnanie s výsledkom pôvodneho algoritmu. Počítali som s tým, že pre niektoré grafy algoritmus určí silný chromatický index > 20. Tieto grafy by sme ešte raz dali zafarbiť pôvodným algoritmom. Na naše prekvapenie, všetky grafy algoritmus zafarbil maximálne 20 farbami.

počet vrcholov	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
grafov spolu	1	1	2	6	16	59	265	1544
9	0	0	0	0	3	0	0	3
10	1	0	0	1	1	22	2	48
11	0	0	0	0	2	4	131	472
12	0	1	0	1	2	15	94	898
13	0	0	1	0	2	8	27	101
14	0	0	1	1	1	7	4	19
15	0	0	0	1	2	0	3	3
16	0	0	0	2	1	1	3	0
17	0	0	0	0	1	1	1	0
18	0	0	0	0	1	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	1	0	0

Tabuľka 7.1: Silný chromatický index 4-regulárnych grafov s 5 - 12 vrcholmi

V tabuľke 7.1 sú výsledky pre 5 až 12 vrcholové grafy:

V tabuľke 7.2 sú výsledky pre 12 - 15 vrcholové grafy s použitím "greedy algoritmu"

Zaujalo nás, že algoritmus našiel iba dva grafy, ktorých horné ohraničenie silného chromatického indexu je väčšie ako 19. Preto sme sa pokúsil tieto dva grafy zafarbiť pôvodným algoritmom 19 farbami. Oba sa podarilo zafarbiť.

Zistili sme teda, že pre 4-regulárne grafy s počtom vrcholov maximálne 15, platí hypotéza o silnom farbení. Navyše existuje iba jeden graf s počtom vrcholov < 16, ktorý má silný chromatický index 20. Je to práve ten graf, ktorý spomíname v tretej kapitole.

počet vrcholov	**12**	**13**	**14**	**15**
grafov spolu	1544	10778	88168	805491
9	1	0	4	7
10	6	67	456	461
11	29	491	4593	22015
12	175	1702	16916	153645
13	476	2957	27153	288979
14	511	2867	22848	225359
15	304	1764	11223	90737
16	41	781	3873	20997
17	1	147	966	2995
18	0	2	126	264
19	0	0	10	30
20	0	0	0	2

Tabuľka 7.2: Vrchný odhad silného chromatického indexu 4-regulárnych grafov s 12 - 15 vrcholmi

Kapitola 8

Určenie silného chromatického indexu pre nekonečnú triedu 4-regulárnych grafov

Vybrali sme si dve nekonečné triedy 4-regulárnych grafov, ktoré preskúmame a pokúsume sa určiť ich silný chromatický index.

8.1 Silný chromatický index na 2-rozmernom toruse

Definícia 23. 2-*rozmerný torus* (alebo len *torus*) je graf $C_l \square C_k$, kde l a k sú kladné prirodzené čísla a $\square$ je karteziánsky súčin definovaný v 5.9.1. Číslo k nazveme šírka torusu a číslo l nazveme výška torusu.

8.1.1 Analýza

V tejto časti sme si pomohli programom, ktorý sme použil aj v predchádzajúcej kapitole. Doprogramovali som do neho generovanie torusov a zistili sme silný chromatický index torusov s výškou 4:

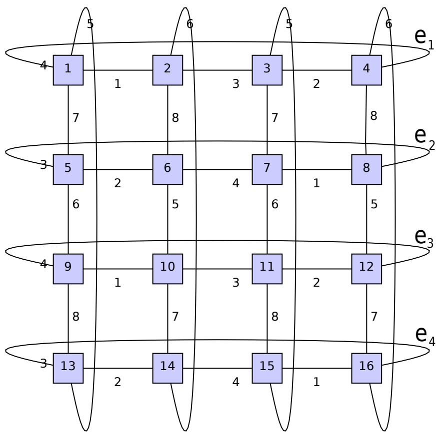
8.1.2 Výsledky

Veta 8.1. *Silný chromatický index torusu s výškou* $4k$, *kde* $k \in N > 0$ *a šírkou aspoň* 4 *je nanajvýš* 10.

šírka	$s\chi'(G)$	**šírka**	$s\chi'(G)$	**šírka**	$s\chi'(G)$
4	8	13	9	22	9
5	10	14	9	23	9
6	10	15	9	24	8
7	10	16	8	25	9
8	8	17	9	26	9
9	10	18	9	27	9
10	9	19	9	28	8
11	9	20	8	29	9
12	8	21	9	30	9

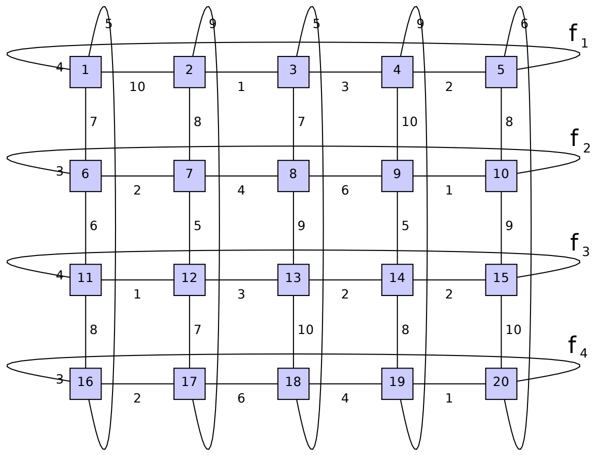
Tabuľka 8.1: Silný chromatický index torusu s výškou 4

Dôkaz. Bude stačiť, keď nájdeme spôsob, ako silno hranovo zafarbíme torus s výškou $4k$ a akoukoľvek šírkou väčšou ako 4, desiatimi farbami. Na obrázkoch 8.1 a 8.2 vidíme príklady farbenia torusov s výškou 4 a so šírkami 4 a 5 maximálne 10 farbami.



Obr. 8.1: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 4

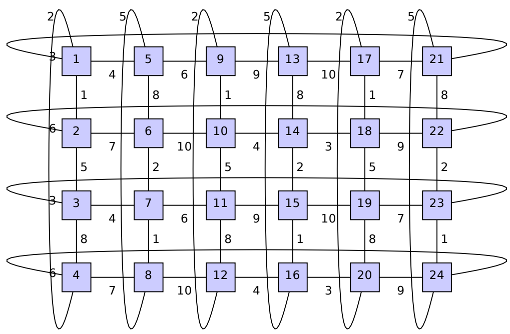
Najskôr ukážeme, že vieme akýkoľvek torus s výškou 4 a šírkou aspoň 4 silno hranovo zafarbiť 10 farbami. Graf na obrázku 8.1 môžeme spojiť s ďalším rovnakým grafom tak, že hrany e_1, e_2, e_3, e_4 spojím s príslušnými hranami z druhého grafu. Farbenie pritom zostane stále OK, pretože každá hrana v spojenom grafe má vo vzdialenosti 2 hrany s presne tými istými farbami, ako mala v pôvodnom grafe. To isté môžeme robiť s grafom na obrázku 8.2. Spojiť môžeme aj oba tieto grafy navzájom, a to tak, že hranu e_1 spojím s f_1, e_2 s f_2, e_3 s f_3, e_4 s f_4. Z obrázkov je vidieť, že silné hranové



Obr. 8.2: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 5

farbenie grafu bude stále OK. Z týchto dvoch torusov teda viem postaviť torusy s výškou 4 a so šírkou 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15.....

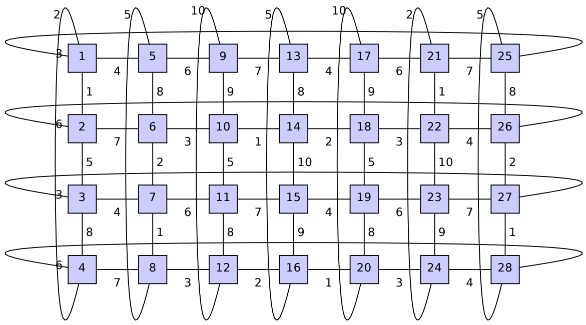
Ešte treba ukázať, že aj rebríky s výškou 4 a šírkou 6, 7 a 11 vieme silne hranovo zafarbiť 10 farbami. Algoritmus to dokázal. Na obrázkoch 8.3 8.4 8.5 je sú príklady takých farbení.



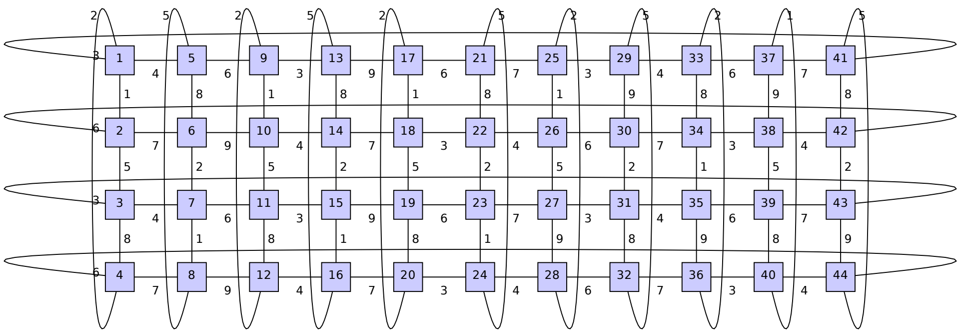
Obr. 8.3: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 6

Vieme teda, že akýkoľvek torus s výškou 4 a šírkou aspoň 4 sa dá zafarbiť 10 farbami.

Presne tak, ako sme spájali dva rovnaké torusy so šírkou 4 vedľa seba, môžeme teraz spájať dva rovnaké torusy s výškou 4 a šírkou aspoň 4 nad seba. Silné hranové farbenie zostane OK z toho istého dôvodu, t.j. žiadnej hrane sa nezmenia farby žiadnej zo susedných hrán (ani susedných hrán vo vzdialenosti dva).



Obr. 8.4: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 7



Obr. 8.5: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 11

Ak teda budeme spájať rovnaké torusy s výškou 4 a šírkou aspoň 4 nad seba, dosaneme farbenia torusov s výškou $4k$, kde $k \in N > 0$ a šírkou aspoň 4 desiatimi farbami.

□

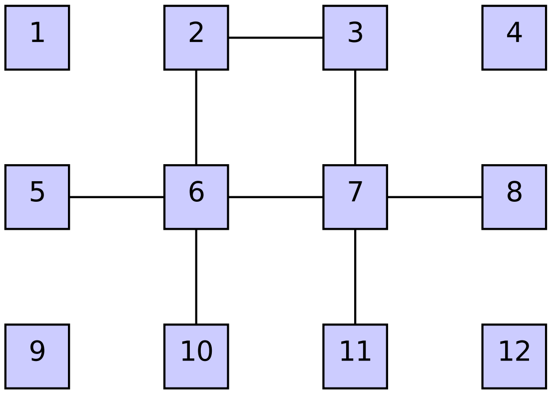
Veta 8.2. *Na silné hranové farbenie akéhokoľvek torusu s výškou aspoň* 3 *a šírkou aspoň* 4*, potrebujeme aspoň* 8 *farieb.*

Dôkaz. V každom takomto grafe existuje 8 hrán, z ktorých každá musí mať inú farbu. Na obrázku 8.6 je príklad takýchto 8 hrán.

□

Veta 8.3. *Nech* $k, j \in N > 0$. *Potom silný chromatický index torusu so šírkou* $4k$ *a s výškou* $4j$ *je* 8.

Dôkaz. Na prvú časť dôkazu využijeme predchádzajúcu vetu. Takýto graf musí mať určite silný chromatický index aspoň 8. Ešte treba ukázať, že každý



Obr. 8.6: Príklad 8 hrán v toruse s výškou aspoň 3 a šírkou aspoň 4, ktoré musia mať v silnom hranovom farbení rôznu farbu.

takýto graf vieme zafarbiť 8 farbami. Poslúži nám na to opäť obrázok 8.1. Tento tvorí akúsu vzorku, ktorá sa dá skladať vodorovne aj zvisle a tak vieme 8 farbami zafarbiť akýkoľvek torus so šírkou $4k$ a výškou $4j$. □

Veta 8.4. *Nech $k, j \in N > 0$. Potom silný chromatický index torusu so výškou $4k$ s šírkou aspoň 10 je nanajvýš 9.*

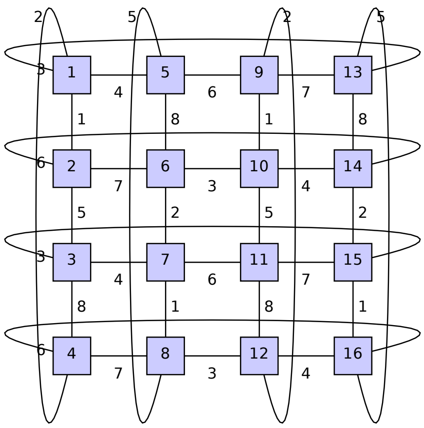
Dôkaz. Dôkaz pozostáva z konštrukcie farbenia pre každý torus s výškou $4k$ a šírkou aspoň 10. Túto triedu grafov si rozdelíme na 4 podtriedy, ktorých zjednotenie dáva celú takúto triedu. Pre každú podtriedu dokážeme vetu zvlášť konštrukciou farbenia na nej.

1. Torus s výškou $4k$ a šírkou $4j$
2. Torus s výškou $4k$ a šírkou $4j + 1$
3. Torus s výškou $4k$ a šírkou $4j + 2$
4. Torus s výškou $4k$ a šírkou $4j + 3$

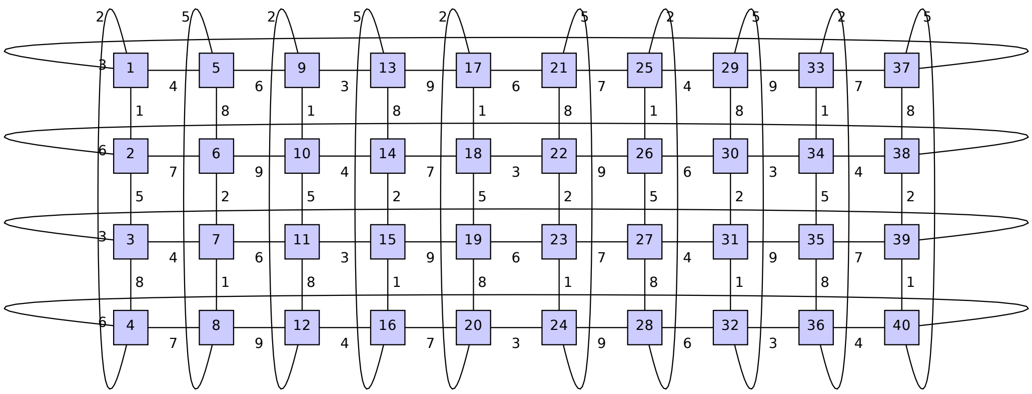
Pre prvú podtriedu máme dokázané silnejšie tvrdenie, takže dôkaz vyplýva priamo z vety 8.3.

Pre ostatné triedy dokážeme vetu tak, že ukážem farbenie torusu s výškou $4k$ a šírkou 10, 11 a 13 deviatimi farbami. Každý z týchto grafov vieme ľubovoľne veľakrát spojiť vedľa seba torusom so šírkou 4 a výškou $4k$.

Torusy s výškou $4k$ a šírkou 4, 10, 11 a 13 vzniknú spájaním nad seba grafov na obrázkoch 8.7, 8.8, 8.9 a 8.10. Silné hranové farbenie zostane OK opäť kvôli tomu, že žiadnej hrane sa nezmenia farby žiadnej zo susedných hrán (ani susedných hrán vo vzdialenosti dva).



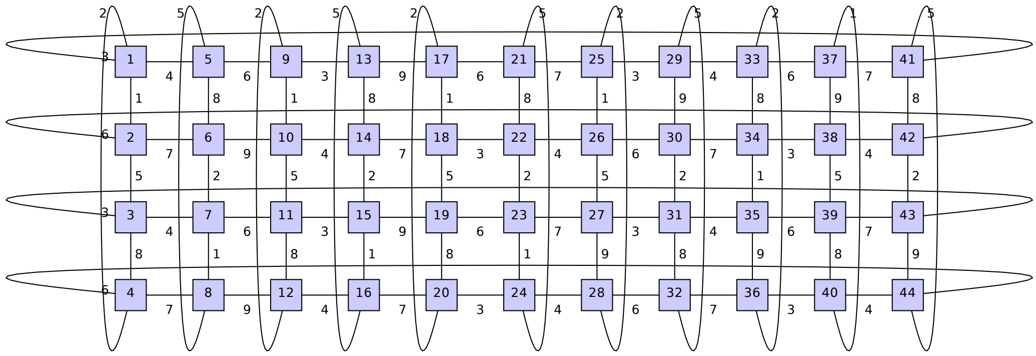
Obr. 8.7: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 4



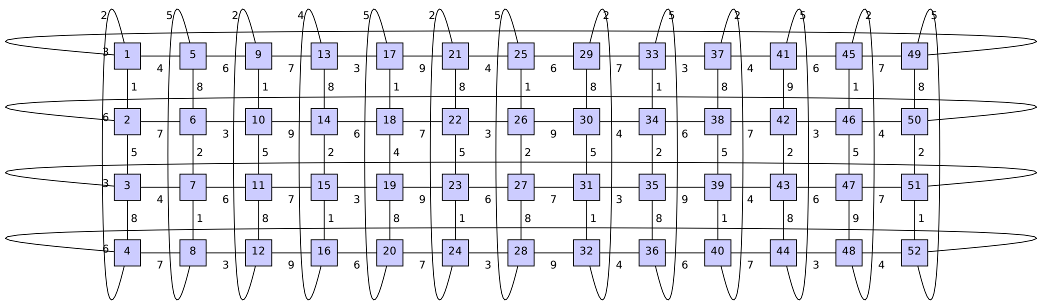
Obr. 8.8: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 10

To, že grafy so šírkou 10, 11 a 13 na obrázkoch 8.8, 8.9 a 8.10 môžeme spájať s grafom so šírkou 4 na obrázku 8.7 vidno z obrázkov. Po spojení sú totiž grafy stále silno hranovo zafarbené.

□



Obr. 8.9: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 11



Obr. 8.10: Príklad silného hranového farbenia torusu s výškou 4 a šírkou 13

8.2 Silný chromatický index na Cayleyho grafoch

Predpokladajme, že $(C, +)$ je grupa, $+$ je operácia na tejto grupe a $S = \{\pm 1, \pm b\}$, kde $b \in C$. Označme si b ako dĺžku skoku pri vytváraní grafu.

Definícia 24. Cayleyho graf $G = G(C, S)$ je graf skonštruovaný nasledovne: $V(G) = Z_n$. Medzi vrcholmi u a v je hrana práve vtedy, keď $u = v + x$, kde $x \in S$.

8.2.1 Analýza

Do programu sme doprogramovali generovanie Cayleyho grafov pre n-počet vrcholov a k-dĺžka skoku. Je jasné, že graf, ktorého dĺžka skoku bude b je rovnaký ako graf, ktorého skok bude $-b = n - b$.
Upravený program sme spustili na grafoch s maximálnym počtom vrcholov 15.

počet vrcholov	**skok**	$s\chi'(G)$	**počet vrcholov**	**skok**	$s\chi'(G)$
5	2	10	13	3	13
6	2	12	13	4	13
7	2	14	13	5	13
7	3	14	13	6	10
8	2	12	14	2	10
8	3	16	14	3	14
9	2	9	14	4	14
9	3	18	14	5	14
9	4	9	14	6	14
10	2	10	15	2	10
10	3	10	15	3	10
10	4	20	15	4	11
11	2	11	15	5	11
11	3	17	15	6	13
11	4	17	15	7	10
11	5	11	16	2	10
12	2	10	16	3	14
12	3	12	16	4	11
12	4	12	16	5	14
12	5	12	16	6	12
13	2	10			

Tabuľka 8.2: Silný chromatický index Cayleyho grafov s 5 - 16 vrcholmi.

počet vrcholov	**skok**	$s\chi'(G)$	**počet vrcholov**	**skok**	$s\chi'(G)$
5	2	10	18	2	10
6	2	12	19	2	10
7	2	14	20	2	9
8	2	12	21	2	10
9	2	9	22	2	10
10	2	10	23	2	10
11	2	11	24	2	9
12	2	10	25	2	9
13	2	10	26	2	10
14	2	10	27	2	9
15	2	10	28	2	9
16	2	10	29	2	9
17	2	10	30	2	9

Tabuľka 8.3: Silný chromatický index Cayleyho grafov so skokom 2

Vidíme teda, že silný chromatický index Cayleycho grafov je veľmi rôzny. Medzi grafmi od 5 do 14 vrcholov nájdeme také, ktorých silný chromatický index je 9 (najmenej zo všetkých $5-12$ vrcholových 4-regulárnych grafov) a aj graf, ktorého silný chromatický index je 20 (najviac zo všetkých $5-15$ vrcholových 4-regulárnych grafov).

Všimnime si ale grafy, ktorých dĺžka skoku je 2:

8.2.2 Výsledok

Na základe týchto výpočtov vyslovujeme nasledujúcu hypotézu:

Hypotéza 8.5. *Cayleyho grafy s aspoň* 12 *vrcholmi, ktorých dĺžka skoku je* 2*, majú silný chromatický index maximálne* 10*.*

Záver

V práci sa nám podarilo zhrnúť základné a zaujímavé výsledky z oblasti silného farbenia grafov a zhrnúť veľké množstvo hypotéz. Preskúmali sme najmä 4-regulárne grafy. Pre niektoré podtriedu 2-rozmerných torusov sme určili tesný silný chromatický index. Takisto sme vyslovili hypotézu o silnom chromatickom indexe niektorých Cayleyho grafov. Táto téma je veľmi obšírna a stále je čo skúmať. Verím, že v budúcnosti bude mať ešte väčšie využitie, ako teraz.

Literatúra

[1] M. Mahdian, *The Strong Chromatic Index of Graphs*, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139-4307, 2000

[2] M. Mahdian, *The Strong Chromatic Index of* $C_4 - free$ *Graphs*, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139-4307, 2000

[3] W.C. Shiu, P.C.B. Lam and W.K. Tam, *On Strong Chromatic Index of Halin Graph*, Department of Mathematics, Hong Kong Baptist University, 224 Waterloo Road, Kowloon Tong, Hong Kong.

[4] D. Cranston *A Strong Edge-Coloring of Graphs with Maximum Degree 4 Using 22 Colors*, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2005

[5] O. Togini *Strong chromatic index of products of graphs*, LE2I, UMR CNRS 5158, Universit de Bourgogne, BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France, 2007

[6] L.D. Andersen, *The Strong chromatic index of a cubic graph is at most 10*, discrete Mathematics 108, 231-252, 1992.

[7] J. C. Bermond, J. Bond, and S. Djellul, *Dense bus networks of diameter 2* DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 21, 9-19, 1995.

[8] J. C. Bermond, J. Bond, M. Paoli and C. Peyrat, *Graphs and interconnection networks: Diameter and vulnerability*, Proceedings of 9th British Combinatorial Conference, London Mathematical Society, Lecture Note Series 82, 1-30, 1983.

[9] J. C. Bermond, and F. O. Ergincan, *Bus interconnection networks* Discrete Applied Mathematics 68, 1-15, 1996.

[10] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with applications*, American Elsevier, 1976.

[11] R. A. Brualdi, and J. J. Quinn Massey, *Incidence and strong edge colorings of graphs*, Discrete Mathematics, 122, 51-58, 1993.

[12] K. Cameron, *Induced matchings*, Discrete Applied Mathematics 24, 97-102, 1989.

[13] F. R. K. Chung, A. Gyárfás, Zs. Tuza a W. T. Trotter *The maximum number of edges in $2K_2$-free graphs of bounded degree*, Discrete Mathematics 81, 129-135, 1990.

[14] P. Erdős, *Problems and results in combinatorial analysis and graph theory*, Discrete Mathematics, 72, 81-98, 1988.

[15] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp and Zs. Tuza, *Induced matchings in bipartite graphs*, Discrete Mathematics 78, 83 - 87, 1989

[16] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp and Zs. Tuza, *The strong chromatic index of graphs*, Ars Combinatoria 29B, 205-211, 1990.

[17] J. L. Fouquet and J. L. Jolivet, *Stronge edge-coloring of cubic planar graphs*, Progess in graph theory (Waterloo, 1982), 247-264, 1984.

[18] P. Horák, *The strong chromatic index of graphs with maximum degree four*, in R. Bodendiek (editor), Contemporary Methods in Graph Theory, 399-403, 1990.

[19] P. Horák, H. Qing and W. T. Trotter, *Induced matchings in cubic graphs*, Journal of Graph Theory 17, 151-160, 1993.

[20] T. R. Jensen, and B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons Inc., 1995.

[21] M. Molloy, and B. Reed *A bound on the strong chromatic index of a graph*, Journal of Combinatioral Theory B 69, 103-109, 1997.

[22] M. Molloy, *The probabilistic method*, in M. Habib, C. McDiarmid, J. Ramirez-Alfonsin, B. Reed(eds.), Probalistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics, Springer-Verlag, 1998.

[23] A. Steger and M. Yu, *On induced matchings*, Discrete Mathematics, 120, 291-295, 1993.

[24] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition 2005 c Springer-Verlag Heidelberg, (New York 1997, 2000, 2005).