Katedra Informatiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Rozšírenia a semirozšírenia cyklov v kubických grafoch

(Bakalárska práca)

Lukáš Špalek

Vedúci: RNDr. Edita Máčajová PhD.

Bratislava, 2008

Rozšírenia a semirozšírenia cyklov v kubických grafoch

BAKALÁRSKA PRÁCA

Lukáš Špalek

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY a INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

Študijný odbor: 9.2.1. Informatika

Vedúci záverečnej práce
RNDr. Edita Máčajová PhD.

BRATISLAVA, 2008

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

. . . .

Poďakovanie

Chcem sa poďakovať mojej školiteľke RNDr. Edite Máčajovej PhD. za inšpiratívne rady a nápady pri tvorbe tejto práce. Taktiež všetkým priateľom, krorí prispeli cennými radami a strojovým časom.

Abstrakt

Lukáš Špalek: Rozšírenia a semirozšírenia cyklov v kubických grafoch. (Bakalárska práca). Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky; Školiteľ: RNDr. Edita Máčajová PhD. Stupeň odbornej kvalifikácie: Bakalár informatiky.

Cieľom tejto bakalárskej práce je voviesť čitateľa do problematiky *semirozšírení*. Začneme problémom *dvojitého pokrytia cyklami*. Ukážeme, aké rôzne prístupy používali a používajú vedci na riešenie tohto desaťročia otvoreného problému. A práve jedným z najnovších smerov, ktorým sa zaoberajú, je problematika *semirozšírení*. Od úvodnej definície prejdeme až k dôkazu o tom, že tento problém implikuje problém *dvojitého pokrytia cyklami*. Potom predstavíme program, ktorý pre každú kružnicu a každú jej hranu hľadá *semirozšírenie* v kubickom 2-súvislom grafe. A nakoniec odprezentujeme výsledky testov, ku ktorým sme sa dopracovali.

Kľúčové slová: semirozšírenie, dvojité pokrytie cyklami, CDCC, SCDCC, 5-CDC

Predhovor

Teória grafov je oblasť teoretickej informatiky, ktorá ma zaujala ešte počas stredoškolských štúdií. Stretával som sa s ňou pri riešení rôznych programátorských súťaží ako napr. Korešpondenčného seminára z programovania, Matematickej olympiády z programovania. Z tohto dôvodu som bol vždy potešený z každého predmetu, ktorý sa tejto oblasti venoval. Teória grafov ma zaujala svojou praktickosťou. Často ju možno stretnúť v každodennom živote. Mnohokrát človek pri cestovaní rieši problém, ako sa čo najrýchlejšie dostať z jedného miesta do druhého a pritom si ani neuvedomuje, že práve rieši základnú úlohu z teórie grafov. Z týchto dôvodov som sa rozhodol vybrať si tému mojej bakalárskej práce práve z teórie grafov. K téme Rozšírenia a semirozšírenia cyklov v kubických grafoch som sa dostal vďaka mojej vedúcej RNDr. Edite Máčajovej PhD. Bol som z nej veľmi nadšený, lebo to bola výzva načerpať množstvo nových a zaujímavých vedomostí zo zatiaľ neprebádanej oblasti. Tiež som bol potešený, že moja práca mala teoretickú a tiež praktickú časť. Na jednej strane som sa venoval zosumarizovaniu získaných poznatkov a na druhej strane som tieto poznatky použil v praxi pri zostrojení programu, ktorý skúma problém nastolený v článku *On semiextensions and circuit double covers*[5].

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Kapitola 1

Úvod

Teória grafov sa zaoberá množstvom praktických problémov, ktoré trápia ľudí v každodennom živote. Je to napríklad nájdenie najrýchlejšej cesty do práce, čo môžeme v teórii grafov označiť ako hľadanie najkratšej cesty. V tejto vedeckej disciplíne však existuje množstvo problémov, ktoré vedci riešia už niekoľko desaťročí a zatiaľ sa im nepodarilo dospieť k riešeniu, nazývame ich *otvorené problémy*. Medzi takéto otvorené problémy patrí aj problematika dvojitého pokrytia cyklami. Ľudia sa už dlhú dobu snažia dokázať, alebo vyvrátiť niektoré tvrdenia a stále sa im to nie úplne darí. Z tohto dôvodu si v druhej kapitole priblížime túto problematiku, vysvetlíme základné hypotézy, ktoré vedci skúmajú. Poukážeme na ich doterajšie výsledky a vysvetlíme rôzne prístupy, ktorými sa uberali a uberajú. V tretej kapitole si bližšie popíšeme jeden z najnovších prístupov, ktorými sú *semirozšírenia*. Zadefinujeme si tento pojem a hypotézu, ktorej platnosť by zabezpečila vyriešenie problematiky dvojitého pokrytia cyklami. Taktiež si ukážeme dôkaz transformácie hypotézy o semirozšíreniach na Hypotézu o striktnom dvojitom pokrytí cyklami. Následne v kapitole štyri popíšeme program, ktorý skúma problém, ktorý nastolili v článku *On semiextensions and circuit double covers*[5] autori Enrique García Moreno Esteva a Tommy R. Jensen. Program testuje, či pre graf na vstupe toto tvrdenie platí alebo nie. Cieľom tejto práce bolo taktiež otestovať čo najviac grafov a prípadne nájsť graf, pre ktorý tvrdenie neplatí.

1.1 Základné definície

V tejto časti si zadefinujeme niekoľko základných pojmov, s ktorými budeme v tejto práci narábať.

Graf v tejto práci je neorientovaný, konečný a môže obsahovať viacnásoné hrany a slučky.

Kružnica bude znamenať súvislý 2-regulárny graf.

Cyklus je graf, ktorého všetky vrcholy majú kladný stupeň.

Dvojité pokrytie cyklami (Cycle Double Cover) grafu G je množina kružníc $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (môžu sa opakovať) takých, že $\forall e \in E(G) : |\{1 \leq i \leq n\} : e \in E(C_i)\}| = 2$. Inými slovami každá hrana grafu G je pokrytá 2 kružnicami.

Graf $C \triangle D$ znamená podgraf $C \cup D$ vzniknutý z hrán, ktoré patria do C alebo D, ale nepatria obom.

Kapitola 2

Dvojité pokrytie cyklami

V tejto kapitole si niečo povieme o problematike Dvojitého pokrytia cyklami (Cycle Double Cover), ktorú budeme označovať CDC. Táto zaujímavá hypotéza bola vytvorená nezávisle pánmi Szekeresom a Seymourom v 70-tych rokoch. Táto hypotéza je dnes považovaná za jeden z najdôležitejších otvorených problémov teórie grafov.

2.1 Základné definície

Hypotéza 2.1.1 *(Hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami (CDCC) (Szekeres [18] a Seymour [17])) Ak G je hranovo dvojsúvislý graf, potom G má dvojité pokrytie súvislými cyklami.*

Nasledujúce zosilnenie CDCC, ktoré vytvorili Seymour a Goddyn, bolo navrhnuté kvôli ich predpokladu, že ak tvrdenie platí, je prístupnejší indukčný dôkaz.

Hypotéza 2.1.2 *(Hypotéza o striktnom dvojitom pokrytí cyklami (SCDCC) (Seymour [8] and Goddyn [10])) Ak G je hranovo dvojsúvislý graf a C je* *kružnica v G, potom exituje dvojité pokrytie súvislými cyklami grafu G, ktoré obsahuje kružnicu C.*

Medzi zaujímavé a prospešné vlastnosti SCDCC patrí aj to, že SCDCC implikuje veľmi dlho nevyriešenú Sabidussiho hypotézu, ku ktorej sa vrátime ešte neskôr.

Usporiadanú dvojicu (G, C) nazývame *minimálnym protipríkladom* k SCDCC, ak G je hranovo 2-súvislý, C je kružnica v G, žiaden CDC grafu G neobsahuje C a SCDCC platí pre každý 2-súvislý podgraf grafu G. Ak je z kontextu jasné, ktorá kružnica je v G myslená, niekedy taktiež hovoríme, že G je minimálny protipríklad k SCDCC. Vlastnosť, ktorá nám pomôže zmenšiť množinu grafov, pre ktoré musíme CDCC dokazovať, je možnosť použitia štandardnej redukcie, ktorou môžeme ukázať, že CDCC aj SCDCC sú ekvivalentné s ich obmedzenou verziou pre 3-súvislé kubické grafy. Presnejšie povedané, ak nejaká z týchto hypotéz neplatí, potom existuje aspoň jeden minimálny protipríklad, a to taký, že je to kubický 3-súvislý graf. Teda ekvivalentná hypotéza k SCDCC je: Ak G je 2-súvislý kubický graf, alebo ľubovoľná subdivízia tohto grafu a C je ľubovoľná kružnica v G, potom existuje množina kružníc v G, ktoré pokrývajú každú hranu kružnice C práve jedenkrát a každú ostatnú hranu práve dvakrát. Z tohto môžeme vidieť, že ak SCDCC neplatí, potom existuje minimálny protipríklad (G, C) taký, že G je 3-súvislý kubický graf.

2.2 5-CDC

V tejto podkapitole si povieme niečo o dosiahnutých výsledkoch v skúmaní dvojitého pokrytia cyklov. Samotná hypotéza CDCC bola zatiaľ overená napr. pre grafy, ktoré neobsahujú poddivíziu Petersenovho grafu (pozri [1][2]).

Definícia 2.2.1 *Graf G má k-dvojité pokrytie cyklami (k-CDC), ak existuje* *zoznam $\mathcal{L}$ najviac k cyklov grafu G, takých, že každá hrana v G patrí práve do dvoch cyklov v $\mathcal{L}$, pričom cykly sa môžu opakovať.*

Existuje hypotéza, ktorú sformuloval Celmins [4] a v nej tvrdí:

Hypotéza 2.2.2 *Každý bezmostový garf má* 5-*CDC.*

Už sme si povedali, že problém CDC sa dá redukovať na kubické grafy a to taktiež platí aj o 5-CDC.

Nech H je cyklus v kubickom grafe G. Komponenty podgrafu H sú kružnice alebo izolované vrcholy. Komponent podgrafu H sa nazýva *nepárny*, ak je to kružnica nepárnej dĺžky alebo izolovaný vrchol.

Ak G je bezmostový kubický graf, potom minimálny počet nepárnych komponentov nazývame *nepárnosť* grafu G a označujeme ju $\xi(G)$. Počet vrcholov v kubickom grafe je párny a z toho vyplýva, že aj *nepárnosť* kubického bezmostového grafu je párne číslo. Ak G má most, potom je nepárnosť definovaná $\xi(G) = \infty$.

Nepárnosť kubického grafu G je 0, práve vtedy, keď je hranovo 3-zafarbiteľný (a z lemy 2.2.3 vieme, že potom existuje 3-CDC). Teda prvý netriviálny prípad je $\xi(G) = 2$. V nasledujúcej časti si ukážeme, že 2.2.2 platí pre grafy s nepárnosťou 2 a tiež si dokážeme, že každý bezmostový graf s Hamiltonovskou kružnicou má 5-CDC.

Lema 2.2.3 *[12] Nech G je kubický graf, potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

1. *G je* 3-*zafarbiteľný*
2. *G má* 3-*CDC*
3. *G má* 4-*CDC*
4. $\xi(G) = 0$

5. *$\forall$ 2-regulárny podgraf H grafu G existuje 4-CDC $\mathcal{L} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ grafu G také, že $C_4 = H$.*

Dôkaz. Tvrdenia $1 - 3$ su ekvivalentné podľa [13]. Je ľahké vidieť, že 3 a 4 sú ekvivalentné. V [17] je dokázané, že $2 \Rightarrow 5$. A implikácia $5 \Rightarrow 3$ je jasná.

Na začiatok si povieme niekoľko definícii, ktoré budeme v tejto podkapitole používať.

$(2,3)$-graf je graf, ktorý obsahuje len vrcholy stupňa 2 a 3. Ak G je $(2,3)$-graf, potom 2-*faktor* G je ľubovoľný faktor, ktorý je cyklom v G bez izolovaných vrcholov.

Ak H je podgraf grafu G, potom $G - H$ označuje graf získaný z G zmazaním hrán, ktoré patria do H. Graf $G.H$ označuje graf získaný po kontrakcii všetkých hrán z H.

3-*cestným grafom* (presnejšie 3-*(s,t)-cestným grafom*) F nazývame základný graf acyklického orientovaného grafu P so zdrojom s a ústim t takým, že P je zjednotenie troch orientovaných hranovo disjunktných (s,t)-ciest(Pozor na to, že P je acyklický.).

Teraz si dokážeme niekoľko pomocných tvrdení.

Lema 2.2.4 *Nech G je hranovo 3-súvislý graf a s, t sú dve rozličné vrcholy v G. Potom existuje podgraf F z G taký, že F je 3-(s,t)-cestný graf.*

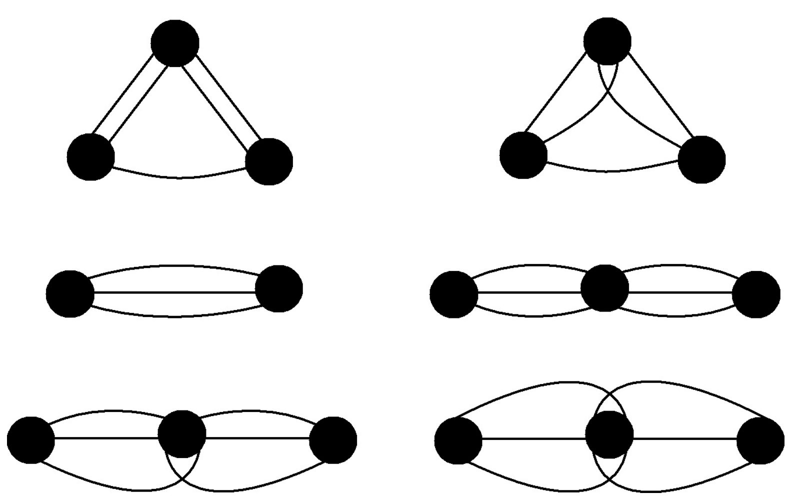
Dôkaz. Keďže G je 3-súvislý graf, potom obsahuje 3 hranovo disjunktné (s,t)-cesty p_1, p_2, p_3. Priraďme každej hrane z týchto ciest takú orientáciu, že p_1, p_2 a p_3 sú orientované (s,t)-cesty. Zoberme zjednotenie týchto ciest a označme ho P_1. Ak P_1 má orientovaný cyklus C, potom $P_1 - C$ obsahuje tiež 3 hranovo disjunktné (s,t)-cesty. (Pre dôkaz si zoberme tok f v P_1 taký, že $f(e) = 1$, pre ľubovoľnú orientovanú hranu e z P_1. Potom hodnota toku f je 3 a ostane 3 tiež aj pre $P_1 - C$. Graf $P_1 - C$ obsahuje 3 orientované hranovo disjunktné (s,t)-cesty). Nech P_2 je zjednotenie troch nových ciest.

Ak P_2 obsahuje orientovaný cyklus, potom môžeme zopakovať tento postup až pokiaľ nedostaneme acyklický graf P_k, ktorý je zjednotením troch hranovo disjunktných (s,t)-ciest. Potom zdrojový graf F grafu P_k je $3-(s,t)$-cestný graf a podgraf grafu G.

Lema 2.2.5 *Nech G je bezmostový $(2,3)$-graf a H je 2-faktor v G, taký, že ľubovoľný komponent z H obsahuje párny počet vrcholov, ktoré majú v grafe G stupeň vrcholu 3. Potom tu existuje 3-CDC $\mathcal{L} = \{C_1, C_2, C_3\}$ taká, že $C_3 = H$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že G je kubický graf, potom H je 2-hranovo zafarbiteľný farbami 1,2. Farba hrán $G - H$ bude 3. Potom zoberieme cykly pochádzajúce z hrán ofarbených 2 z 3 farieb. Z týchto cyklov sme získali požadované 3-CDC graf G.

Ak G obsahuje všetky vrcholy stupňa 2, potom je dôkaz priamočiarym dôsledkom predchádzajúceho prípadu. □

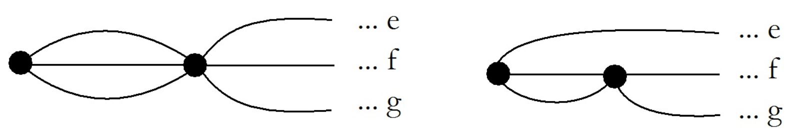


Obr. 2.1: Obrázok k leme 2.2.6

Lema 2.2.6 *Nech G je bezmostový $(2,3)$-graf a H je 2-faktor v G taký, že ak odstránime všetky izolované vrcholy z $G.H$, získame 3-cestný graf. Potom existuje 4-CDC $\mathcal{L} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ grafu G taký, že $C_4 = H$.*

Dôkaz. Zoberme si kubický graf G taký, že $G.H$ má iba vrcholy stupňa aspoň 3. Použijeme indukciu vzhľadom na počet vrcholov v $G.H$ a ukážeme, že G je hranovo 3-zafarbiteľný.

Ak počet vrcholov v $G.H$ je dva alebo tri, potom ľahko skontrolujeme, že G je izomorfný s jedným z grafov zobrazených na obrázku 2.1. Potom G je 3-zafarbiteľný.



Obr. 2.2: Obrázok k leme 2.2.6

Nech $G.H$ má viac ako 3 vrcholy. Keďže $G.H$ je 3-cestný graf, potom obsahuje 2 vrcholy s, t také, že $G.H$ je 3-(s,t)-cestný graf. Zoberme si susedov vrcholu s. Môžu nastať dva prípady, ktoré oba možno vidieť na obrázku 2.2. V oboch prípadoch je $s \neq u \neq t$ a $\{e, f, g\}$ je hranový 3-rez v grafe $G.H$ a tiež v grafe G. Rez nám rozdelí vrcholy grafu G na 2 disjunktné množiny V_1, V_2. Nazvime $G_1(G_2)$ graf, ktorý získame z G, keď zkontrahujeme všetky vrcholy z množiny $V_1(V_2)$ do vrcholu $v_1(v_2)$ a odstránime všetky susedné slučky s $v_1(v_2)$. Potom z indukčného predpokladu získavame, že G_1, G_2 sú hranovo 3-zafarbiteľné. (Ak by sme chceli byť viac precízni, tak nahradíme v_1, v_2 trojuholníkmi, ale toto nič nezmení na stave, že G_1, G_2 sú hranovo 3-zafarbiteľné.) Z 3-zafarbiteľnosti G_1, G_2 dospejeme k tomu, že aj graf G je 3-zafarbiteľný.

Z hranovej 3-zafarbiteľnosti G a Lemy 2.2.3 dostávame 4-CDC grafu G s požadovanou vlastnosťou.

Dôkaz pre grafy so stupňami vrcholov 0 a 2 sú zrejmým dôsledkom predchádzajúceho prípadu.

Veta 2.2.7 *Nech G je bezmostový kubický graf s nepárnosťou nanajvýš 2, potom G má 5-CDC.*

Dôkaz. Ak $\xi(G) = 0$, potom použijeme lemu 2.2.3. Nech $\xi(G) = 2$ a H je faktor, ktorý je cyklom v G s práve 2 nepárnymi komponentmi. Predpokladajme, že H je 2-faktor v grafe G a G . H je hranovo 3-súvislý graf.

Označme vrcholy s, t v grafe $G.H$ s nepárnym stupňom (pochádzajú z kontrakcie nepárnych kružníc v H). Z lemy 2.2.4 vyplýva, že $G.H$ má podgraf F, ktorý je 3-(s, t)-cestným grafom. Nech A a B je označenie množín hrán z F a $(G.H) - F$. Potom graf $H + A$ dokopy s 2-faktorom H spĺňa podmienku z lemy 2.2.6. Graf $H + B$ dokopy s 2-faktorom H spĺňa podmienku z lemy 2.2.5. Potom dostávame, že existuje 4-CDC $\mathcal{L} = \{C_1, C_2, C_3, H\}$ z $H + A$ a 3-CDC $\mathcal{L} = \{C_4, C_5, H\}$ z $H + B$ a teda $\mathcal{L} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ je 5-CDC grafu G.

Ak graf H má izolovaný vrchol, potom ho nahradíme trojuholníkom a použijeme štandardnú redukciu (pozri [13]). Podobné redukcie použijeme aj v prípade, ak $G.H$ má hranový 2-rez. $\square$

Dôsledky vety 2.2.7

Pre kubický graf G a hranu e z grafu G označme $G * e$ jediný kubický homomorfný graf k $G - e$. Ak e, f sú hrany grafu G, potom označme $G(e, f)$ kubický graf získaný subdivíziou hrán e, f a spojením nových vrcholov novou hranou.

Dôsledok 2.2.8 *Nech G je hranovo 3-zafarbiteľný kubický graf a e, f hrany v G. Predpokladajme, že $G * e$ je bezmostový graf, potom $G * e$ a $G(e, f)$ majú 5-CDC.*

Dôkaz. Nech G je zafarbenými farbami $1, 2$ a 3. Predpokladajme, že e je zafarbená 1 a hrana f farbou 2. Nech $H_1(H_2)$ je 2-faktor grafu G pozostávajúci z hrán farby $2, 3(1, 2)$. Potom $H_1(H_2)$ spôsobuje, že vzniknutý 2-faktor má v $G * e(G(e, f))$ nepárnosť najviac 2. Potom $\xi(G * e), \xi(G(e, f)) \leq 2$ a môžeme použiť vetu 2.2.7. Dôkaz je podobný aj v prípade, ak e a f sú ofarbené rovnakou farbou.

Dôsledok 2.2.8 bol čiastočne dokázaný Celminsom [4] (pozri tiež [13]), ktorý v podstate dokázal, že ak G je hranovo 3-zafarbiteľný kubický graf a e, f sú hrany v G, potom $G(e, f)$ má 5-CDC.

Tarsi [19] a Goddyn [9] dokázali, že každý bezmostový graf s Hamiltonovskou kružnicou má 6-CDC. Huck s Kocholom toto tvrdenie zosilnili a dokázali toto:

Veta 2.2.9 *Každý bezmostový graf s hamiltonovskou kružnicou má* 5*-CDC.*

Dôkaz. Použitím štandardnej redukcie(pozri napr. [13]) môžeme predpokladať, že G je kubický graf. Potom je jednoduché skontrolovať, že $G = G' * e$ pre hamiltonovský graf G' a hranu e z G'. Následne dostávame, že kubický hamiltonovský graf je zafarbiteľný a môžeme použiť Dôsledok 2.2.8 . □

2.3 Rozšírenie

Rozšírenie je jeden z prístupov, ktorým sa pustili vedci pri dokazovaní CDC. Preto si v nasledujúcej časti povieme niečo viac o tomto prístupe.

Definícia 2.3.1 *Rozšírenie kružnice C je kružnica D, pre ktorú platí $C \neq D \wedge V(C) \subseteq V(D)$*

V roku 1990 počas workshopu o cykloch v grafoch pán Seymour položil otázku: Má každá kružnica 3-súvislého grafu G rozšírenie v G? Pokiaľ by odpoveď na jeho otázku bola "áno", potom by platila SCDCC. Lebo ak G je 3-súvislý kubický graf a kružnica C má rozšírenie D, kde $C, D \subseteq G$, potom $F = G - (E(C) \setminus E(D))$ je 2-súvislý podgraf G s $D \subseteq F$. Postupujme induktívne, každá množina kružníc v F, ktorá pokrýva hrany D jedenkrát a všetky ostatné hrany grafu F dvakrát. Pridaním komponentov $C \triangle D$, z pravdivosti SCDCC pre (F, D) sa dostávame k tomu, že G obsahuje množinu kružníc pokrývajúcich hrany C jedenkrát a všetky ostatné hrany dvakrát. Teda $C \triangle D$ označuje podgraf grafu $C \cup D$ indukovaný hranami patriacimi do C alebo D, ale nie do oboch zároveň. (pozri tiež [15])

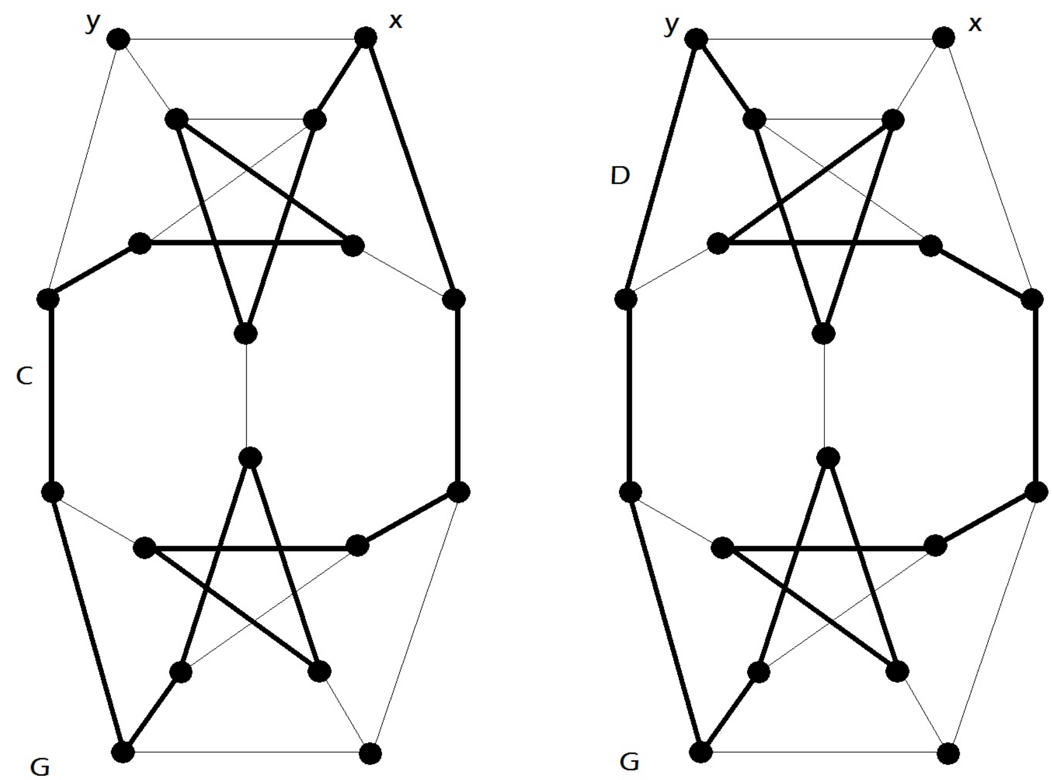
Tvrdenie 2.3.2 *Nech G je kubický graf a C je kružnica v G. Ak existuje rozšírenie kružnice C, potom G nie je kontrapríklad pre SCDCC.*

Nanešťastie nie každá kružnica C ľubovoľného kubického grafu má rozšírenie. Toto demonštroval ako prvý Fleischner [6]. Jeho protipríklad je možno vidieť na obrázku 2.3 nižšie. Ďalšie príklady boli vytvorené Kocholom, ktorý našiel aj nekonečnú množinu cyklicky 4-súvislých grafov, ktoré nemajú rozšírenie (pozri [15]).

2.4 Semirozšírenie

Vzhľadom na to, že sa pomocou rozšírenia nepodarilo dokázať CDCC ani SCDCC, bola vytvorená štruktúra, ktorá sa nazýva semirozšírenie a jej špeciálnym prípadom je aj rozšírenie. O semirošíreniach sa predpokladá, že vďaka nim by sa mohlo podariť dokázať SCDCC. Pre ľubovoľný graf H, *H-cesta* označuje cestu, ktorá má prienik s H práve v jej koncových vrcholoch.

Definícia 2.4.1 *[5] Semirozšírenie cyklu C v grafe G je súvislý cyklus D grafu G, pre ktorý platí: $D \cap C \neq \emptyset$ a $E(D) \setminus E(C) \neq \emptyset$ a ak G obsahuje*



Obr. 2.3: Fleischnerov protipríklad

$(C \cup D)$-cestu s koncovými vrcholmi x a y, kde $x \in V(C) \setminus V(D) \Rightarrow \exists xy$-cesta v $C \triangle D$

V nasledujúcej kapitole si ukážeme, že hypotéza 2.4.2 implikuje SCDCC.

Hypotéza 2.4.2 *Pre všetky kružnice C v 2-súvislom kubickom grafe G existuje semirozšírenie kružnice C v grafe G.*

Kapitola 3

Semirozšírenia

Na nasledujúcich stranách si ukážeme, k čomu sú semirozšírenia vhodné, ako môžeme redukovať problém semirozšírení na problém SCDCC a s tým súvisiace vety.

3.1 Od semirozšírenia k dvojitému pokrytiu cyklami

Na nasledujúcich riadkoch si ukážeme, že ak platí hypotéza 2.4.2, potom platí aj SCDCC.

Veta 3.1.1 *Nech G je 2-súvislý kubický graf a C je kružnica v G. Ak existuje semirozšírenie C v G, potom G nie je kontrapríklad k SCDCC.*

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje D, ktoré je semirozšírením C a predpokladajme, že žiaden vlastný podgaf G nie je kontrapríkladom pre SCDCC. Zostrojíme CDC grafu G, ktorý bude obsahovať C a tým dokážeme túto vetu.

Keďže G je kubický graf, je zrejmé, že D je kružnica. Nech $A_1, \ldots, A_K$ sú komponenty $C \triangle D$. Každý samotný komponent je tiež kružnica. Z podmienky $E(D) \setminus E(C) \neq \emptyset$ vieme, že $k > 0$.

Nech $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nazvime $(C \cup D)$-cestu P v G *i-uchom*, ak aspoň jeden koncový vrchol z P patrí do $V(A_i) \setminus V(D)$(v skutočnosti patrí do $V(C) \setminus V(D)$). Označme H_i zjednotenie A_i so všetkými i-uchami.

Teraz si ukážeme nasledujúci fakt:

$$\text{Ak } u \in V(H_i) \setminus V(D) \text{ a } uv \in E(G), \text{ potom } uv \in E(H_i) \tag{3.1}$$

Uvažujme ľubovoľné i-ucho P obsahujúce u a ľubovoľnú minimálnu cestu Q v $G - u$, ktorá spája v s $P \cup C \cup D$. Potom G obsahuje i-ucho, ktoré sa skladá z cesty $Q + uv$ predĺženej o jednu alebo dve vhodne vybrané časti P.

Keďže G je kubický graf a $C \cap D \neq \emptyset$, potom existuje hrana e patriaca do C aj D zároveň. Táto hrana e nepatrí do žiadneho A_i ani do žiadneho i-ucha, lebo e nie je hrana zo žiadneho H_i. Teda H_i je vlastný podgraf G.

Keďže D je semirozšírenie C, potom existuje pre každé i-ucho aspoň jedna cesta v $C \triangle D$, teda cesta v A_i medzi jej koncovými vrcholmi. Potom každé i-ucho pretína $C \cup D$ iba vo vrchole A_i, a teda platí $V(H_i) \cap V(C \cup D) \supseteq V(A_i)$. Opačná inklúzia je triviálna, a teda platí $V(H_i) \cap V(C \cup D) = V(A_i)$. Z konštrukcie H_i ako zjednotenia A_i s oboma koncovými vrcholmi patriacimi do A_i. Je jasné, že H_i je 2-súvislé a tiež vieme, že žiadne i-ucho nepretína j-ucho pre $i \neq j$. Teda $H_1, \ldots, H_k$ sú nezávislé podgrafy grafu G.

Definujeme:

$$F = G - \Big(\bigcup_{i=1}^{k} V(H_i) \setminus V(D) \Big) - \Big(\bigcup_{i=1}^{k} E(H_i) \setminus E(D) \Big)$$

Každý prvok z $E(C) \setminus E(D)$ patrí do nejakého A_i, a preto nie do F, teda F je vlastný podgraf grafu G.

Pre ľubovoľnú hranu $e \in E(G) \setminus E(D)$ je zrejmé, že e je hrana patriaca nanajvýš jednému z podgrafov $F, H_1, \ldots, H_k$, okrem toho tiež $e \in E(H_i)$

alebo e nemá žiaden koncový vrchol. Definícia F implikuje, že e je hrana F alebo prvok $E(H_i) \setminus E(D)$ pre nejaké $i = 1, \ldots, k$. Odtiaľ e patrí aspoň do jedného z podgrafov $F, H_1, \ldots, H_k$ a z toho dostávame:

$$E(G) \setminus E(D) \text{ je zjednotenie množín, ktoré nemajú spoločný prienik,}$$
$$E(F) \setminus E(D) \text{ s } \Big(\bigcup_{i=1}^{k} E(H_i) \setminus E(D)\Big) \quad (3.2)$$

Ďalej ukážeme, že F je 2-súvislý. Predpokladajme, že ϱ je nejaká cesta v G z vrcholu $x \in V(F) \setminus V(D)$ do vrcholu D a to taká, že ϱ nemá žiaden vnútorný vrchol v D. Z toho vyplýva, že $\varrho \subseteq F$. Je to zrejmé, keďže D je 2-súvislý podgraf F a môžeme teda spojiť každý vrchol vo $V(F) \setminus V(D)$ s vrcholom z D dvoma cestami v F, ktoré nemajú spoločný prienik, okrem koncových vrcholov z takých ciest, ktoré existujú v G.

Predpoklad $x \in V(F) \setminus V(D)$ s pomocou definície F implikuje tvrdenie, že x nepatrí do $V(H_i)$ pre žiadne $i = 1, \ldots, k$. Označme $e \in \varrho$ hranu incidentnú s x. Je zrejmé, že $e \notin E(H_i)$ pre žiadne $i = 1, \ldots, k$ a z 3.2 vyplýva, že platí $e \in E(F)$. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na dĺžku ϱ a dostaneme, že platí $\varrho \subseteq F$, ako sme potrebovali. Teda sme ukázali, že F je 2-súvislý vlastný podgraf grafu G.

Pomocou tohto vybudovaného repertoáru teraz zostrojíme CDC grafu G obsahujúce kružnicu C. Z nášho predpokladu F obsahuje množinu kružníc C_0, takých, že každá hrana z D patrí práve do jednej kružnice z množiny C_0. Podobne $\forall i = 1, \ldots, k$, 2-súvislý vlastný podgraf H_i obsahuje množinu kružníc C_i, takých, že každá hrana z A_i patrí práve do jednej kružnice a ostatné hrany z H_i patria páve do 2 prvkov C_i.

Nech e je ľubovoľná hrana z G. Z tvrdenia 3.2 vyplýva, že môže nastať týchto 5 prípadov:

1. $e \in E(C) \setminus E(D)$

2. $e \in E(C) \cap E(D)$

3. $e \in E(D) \setminus E(C)$

4. $e \in E(F) \setminus (E(C) \cup E(D))$

5. $e \in E(H_i) \setminus (E(C) \cup E(D)) \exists i \in N \wedge i \in \{1, \dots, k\}$

Ukážeme, že v každom prípade e je pokryté množinou $\bigcup_{i=0,1,\dots,k} C_i$, a to práve raz, ak $e \in E(C)$, a práve dvakrát, pokiaľ $e \notin E(C)$.

1. Ak $e \in E(C) \setminus E(D)$, potom existuje práve jedno $i \in \{1, \dots, k\}$ také, že $e \in E(A_i) \subseteq E(H_i)$, a teda e je pokryté práve raz C_i a žiadnou inou množinou C_j, takou, že $i \neq j$.

2. Ak $e \in E(C) \cap E(D)$, potom $e \in E(F)$, ale $\nexists i \in \{1, \dots, k\}$ také, že $e \in H_i$. V tomto prípade je e pokryté raz C_0.

3. Ak $e \in E(D) \setminus E(C)$, potom $\exists$ práve jedno $i \in \{1, \dots, k\} : e \in E(A_i) \subseteq E(H_i)$. Tiež platí $e \in E(F)$. Z tohto nám vyplýva, že e je pokryté práve 2-krát a to C_i a C_0, a teda $\nexists j \notin \{0, i\} : e \in C_j$.

4. Ak $e \in E(F) \setminus (E(C) \cup E(D))$, potom $\nexists i \in \{1, \dots, k\} : e \in H_i$, teda e je pokrytá 2-krát a to C_0 a $\nexists i \notin \{0\} : e \in C_i$.

5. Ak $e \in E(H_i) \setminus (E(C) \cup E(D)) \exists i \in N \wedge i \in \{1, \dots, k\}$, potom $e \in E(H_i) \setminus E(A_i) \Rightarrow e$ je pokryté 2-krát C_i a keďže $e \notin E(F) \cup \bigcup_{j \neq i} E(H_j)$, nie sú žiadne ďalšie kružnice, ktoré by pokrývali e.

Teda zostrojili sme CDC grafu G, ktorý obsahuje kružnicu C, ako sme potrebovali. $\square$

Ako bolo sľúbené, povieme si niečo o Sabidussiho hypotéze. Táto hypotéza je ekvivalentná tvrdeniu, že každá dominantná kružnica v subdivízii kubického grafu patrí do CDC. (Pre bližšie informácie o originálnej hypotéze a spomínanej ekvivalencii pozri [7].) Kružnica C je dominantná v G, ak aspoň jeden koncový vrchol každej hrany grafu G leží na kružnici C. Nasledujúca úprava dôkazu 3.1.1 nám pomôže ukázať, že ak existuje semirozšírenie dominantnej kružnice v ľubovoľnom kubickom grafe, potom platí ekvivalent Sabidussiho hypotézy. Minimálny protipríklad (G, C), skrátene G, k Sabidussiho hypotéze je definovaný analogicky ako v prípade SCDCC.

Veta 3.1.2 *Ak C je dominantná kružnica v kubickom grafe G a ak C má semirozšírenie v G, potom G, nie je minimálny protipríklad k Sabidussiho hypotéze.*

Dôkaz. Myšlienka dôkazu je podobná, ako v prípade vety 3.1.1. Definujeme si podgrafy $D, A_1, \dots, A_k, H_1, \dots, H_k$ a F ako predtým. Ostáva nám len ukázať, že $\forall i \in \{1, \dots, k\} : A_i$ je dominantná kružnica v H_i a D je dominantná kružnica v F.

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$: každá hrana z H_i má koncový vrchol v C. Teda vrchol patrí do $V(H_i) \cap V(C \cup D) = V(A_i)$ teda $V(A_i)$ je skutočne dominantná kružnica v H_i.

Teraz dokážeme, že $D \subseteq F$. Predpokladajme, že $v \in V(F) \setminus V(D)$. Potom z definície F máme, že $\nexists i \in \{1, \dots, k\} : v \in V(H_i)$ a z toho vyplýva, že $v \notin V(C)$. Nech u je ľubovoľný sused vrcholu v. Z $uv \in E(G) \wedge$ 3.1 dostaneme: $u \notin V(C) \setminus V(D)$. Odtiaľ sme dostali $u \in V(D)$, ktorý poukazuje na to, že D je dominantnou kružnicou F.

Ďalej dôkaz postupuje podobne, ako v prípade vety 3.1.1. $\square$

3.2 Redukcia a existenčný výsledok

Nasledujúci klasický výsledok implikuje výsledok, ktorý je v zmysle najlepšej možnosti rozšírenia dlhých kružníc v kubickom grafe. Veta zovšeobecňuje grafy, ktorých vrcholy majú nepárny vrcholový stupeň.

Veta 3.2.1 *(Smith [20]) Pre ľubovoľnú hranu e v kubickom grafe G, počet rozdielnych hamiltonovských kružníc v G, ktoré obsahujú e je párny.*

Dôsledok 3.2.2 *Pre každú hamiltonovskú kružnicu C v kubickom grafe G a pre každú hranu $e \in C$ existuje hamiltonovská kružnica v G, ktorá je rôzna od C a obsahuje e.*

Nech C je kružnica v kubickom grafe G. Dôsledok 3.2.2 implikuje, že ak C je hamiltonovská kružnica, potom existuje rozšírenie C v G. Ak C obsahuje všetky vrcholy okrem v, potom existencia rozšírenia C môže byť odvodená nasledovne. Vymažeme vrchol v z G a pridáme novú hranu medzi dvoch susedov v v G. Zostávajúci tretí sused vrcholu v v grafe G nemôže byť incidentný s novou hranou e. Použitím Smithovej vety na výsledný kubický hamiltonovský graf ľahko dostávame želané rozšírenia C v G.

Veta 3.2.3 *Ak existuje graf G, ktorý obsahuje súvislé cykly C a C', také, že $C' \cap C \neq \emptyset$ a $E(C') \setminus E(C) \neq \emptyset$, ale neexistuje semirozšírenie C v G, potom existuje taký 3-súvislý kubický graf.*

Dôkaz. Predpokladajme, že G je graf s vlastnosťou opísanou v definícii vety a C, C' sú dva súvislé cykly, ktoré to dosvedčujú. Ak G nie je 3-súvislý a kubický, zostrojíme graf $\hat{G}$ a súvislé cykly $\hat{C}$, $\hat{C}'$ v $\hat{G}$ také, že platí $\hat{C} \cap \hat{C}' \neq \emptyset$ a $E(\hat{C}') \setminus E(\hat{C}) \neq \emptyset$, ale neexistuje žiadne semirozširenie $\hat{C}$ v $\hat{G}$. Taktiež $\hat{G}$ spĺňa $\sum_{v \in V(\hat{G})} |d_{\hat{G}}(v) - 3| \leq \sum_{v \in V(G)} |d_G(v) - 3|$. Ak $\sum_{v \in V(\hat{G})} |d_{\hat{G}}(v) - 3| = \sum_{v \in V(G)} |d_G(v) - 3|$, potom $\hat{G}$ má ostro menej hrán ako G. Dôkaz tejto podmienky je dosť priamočiary v každom prípade, ktorý môže nastať, preto ho prenechám na čitateľa. Želaný výrok teraz ľahko dokážeme na základe indukcie. Ak C je faktor, ktorý je cyklom v $\hat{G}$, potom naša konštrukcia vedie k tomu, že $\hat{C}$ je faktor, ktorý je cyklom v $\hat{G}$.

Ak G nie je 2-súvislý, potom existuje blok B v grafe G, ktorého hrany patria do $E(C') \setminus E(C)$ a tiež platí $B \cap (C' \cap C) \neq \emptyset$. Potom $B \cap C$ obsahuje viac ako jeden vrchol, inak $B \cap C'$ by bolo semirozšírenie C v G. Nech teda $\hat{G} = B$, $\hat{C} = B \cap C$ a $\hat{C}' = B \cap C'$, potom $\hat{C}$ a $\hat{C}'$ sú súvislé cykly v $\hat{G}$. Teraz je ľahké skontrolovať, že semirozšírenie $\hat{D}$ kružnice $\hat{C}$ v $\hat{G}$ je tiež semirozšírenie súvislého cyklu C v grafe G. Je dobré si uvedomiť, že zo súvislosti C vyplýva: každá $(C \cup \hat{D})$-cesta v G ostane spojená s niektorým blokom z G. Teda môžeme predpokladať, že jednoduchý graf G je 2-súvislý a nemá slučky.

Vyberme si ľubovoľný hranový 2-rez e_1, e_2 v G. Keďže G je 2-súvislý, $G - e_1 - e_2$ a má práve 2 komponenty G_1, G_2. Nech G_1 je ten, ktorý pretína C a obsahuje aspoň jednu hranu z C', ktorá nepatrí do C. Nazvime koncové vrcholy hrany e_1 u_1, u_2 a koncové vrcholy hrany e_2 v_1, V_2, kde $u_i, v_i \in G_i, i \in \{1, 2\}$. Zostrojíme $\hat{G}$ z grafu G_1 pridaním hrany $\hat{e}$ medzi vrcholy $u_1 a v_1$. Definujeme $\hat{C}$, ako graf získaný z $G_1 \cap C$ pridaním hrany $\hat{e}$, ak C obsahuje e_1, e_2. Inak $\hat{C} = C$. $\hat{C}'$ definujeme podobne. Vychádzame z nášho výberu G_1 a G_2, že $\hat{C}$ a $\hat{C}'$ sú súvislé cykly, pre ktoré platí: $\hat{C} \cap \hat{C}' \neq \emptyset$ a $E(\hat{C}) \setminus E(\hat{C}') \neq \emptyset$. Predpokladajme, že existuje semirozšírenie $\hat{D}$ kružnice $\hat{C}$. Ak $\hat{e} \notin E(\hat{D})$, potom nech $D = \hat{D}$, inak nech D je ľubovoľný súvislý cyklus grafu G spĺňajúci $D \cap G_1 = \hat{D} - \hat{e}$ a taktiež spĺňajúci podmienku $D \cap G_2 = C \cap G_2$, ak $C \cap G_2 \neq \emptyset$. Toto nás vedie k popretiu toho, že D je semirozšírením C. Preto môžeme ďalej predpokladať, že G je hranovo 3-súvislý.

Teraz predpokladajme, že G nie je kubický a nech v je vrchol grafu G, pre ktorý platí $d_G(v) \neq 3$. Keďže G je 3=súvislý, stupeň vrcholu v v G je k, kde $k \geq 4$. Nech $e_1, e_2, \ldots e_k$ sú rozdielne hrany v grafe G incidentné s vrcholom v a nech v_i je koncový vrchol e_i, rôzny od v pre $i = 1, 2, \ldots, k$.

Zoberme si prípad $d_G(v) = d_C(V)$, potom e_i je hrana C pre každé $i = 1, 2, \ldots, k$. Ak v je vrchol rezu v C, potom zoberieme rôzne bloky B_1 a B_2 z C. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme povedať, že $e_1 \in B_1$ a $e2 \in B_2$. Z tohto môžeme ďalej predpokladať, že ak $v \in C'$, potom $e_1 \in C' \wedge e_2 \in C'$.

Toto je zrejmé, ak v nie je vrcholom rezu v C, alebo v je vrcholom rezu v C a viac ako jeden blok v C obsahuje hranu z C' incidentnú s v. V ostatných prípadoch v je vrchol rezu C a existuje práve jeden blok v C, ktorý obsahuje hranu z C' incidentnú s v, nech je to blok B_1. V tomto prípade nahradíme C' iným súvislým cyklom C'' nasledovne. Nech C'' je komponent z $C' \triangle B_2$, ktorý obsahuje v. Teraz C'' je súvislý cyklus a je zrejmé, že platí: $C'' \cap C \neq \emptyset$. Naviac, keďže C' je súvislý a nie je podgrafom C a teda tiež nie je podgraf B_1, potom existuje cesta v C' so začiatkom vo vrchole v a poslednou hranou tejto cesty e, ktorá nepatrí do B_1. Potom e patrí do C'', ale nie do C, teda platí $E(C'') \setminus E(C) \neq \emptyset$. Pred pokračovaním v argumentácii nahradím C' za C''.

Nech $\hat{G}$ je graf získaný z $G - e_1 - e_2$ pridaním novej hrany e spájajúcej vrcholy v_1 a v_2. Nech $\hat{C}$ a $\hat{C}'$ sú podgrafy G, ktoré prislúchajú v nezmenenom poradí k C a C'. Z výberu hrán e_1, e_2 vyplýva, že ak v je vrchol rezu v C, potom $\hat{C}$ je súvislý cyklus. Každý komponent v $\hat{C}'$ je súvislý cyklus a obsahuje aspoň jedného suseda vrchol v. Následne po nahradení $\hat{C}'$ vhodným komponentom $\hat{C}'$ dostávame $\hat{C}' \cap \hat{C} \neq \emptyset$ a $E(\hat{C}') \setminus E(\hat{C}) \neq \emptyset$. Predpokladajme existenciu semirozšírenia $\hat{D}$ súvislého cyklu $\hat{C}$ v $\hat{G}$. Ak e je hrana v $\hat{D}$, potom nahradením e v $\hat{D}$ hranami e_1 a e_2 získame podgraf D grafu G. V opačnom prípade $D = \hat{D}$. Potom je zrejmé, že D je súvislý cyklus, ktorý spĺňa $D \cap C \neq \emptyset \wedge E(D) \setminus E(C) \neq \emptyset$. Uvažujme ľubovoľnú $(C \cup D)$- cestu P v G s koncovým vrcholom x a y, kde $x \in V(C) \setminus V(D)$. Ukážeme cestu Q v $C \triangle D$ s koncovými vrcholmi x a y. Keďže všetky hrany incidentné s x patria do C, je jasné, že P neobsahuje v, teda P je tiež $(\hat{C} \cup \hat{D})$-cesta v $\hat{G}$ s koncovým vrcholom x a y, kde $x \in V(\hat{C}) \setminus V(\hat{D})$, teda existuje cesta Q v $\hat{C} \triangle \hat{D}$ s koncovými vrcholmi x a y. Ak Q neobsahuje hranu e, potom Q je hľadaná cesta v $C \triangle D$. V opačnom prípade zostrojíme takúto cestu ako zjednotenie najkratšieho podgrafu Q, ktoré spája x s vrcholmi $\{v, v_1, v_2\}$ s najkratším podgrafom, ktorý spája y s vrcholmi $\{v, v_1, v_2\}$ dokopy aspoň s jednou hranou z $\{e_1, e_2\}$ (Obe hrany e_1, e_2

patria do $C\triangle D$, keď $e \in \hat{C}\triangle\hat{D}$). Dospeli sme k sporu, z ktorého vyplýva, že neexistuje žiadne semirozšírenie $\hat{C}$ v $\hat{G}$.

Nakoniec predpokladajme, že $d_C(v) < d_G(v)$. Predpokladajme, že $e_1 \notin C$ a naviac: ak $v \in C$, potom $e_2 \in C$. Ďalej môžeme predpokladať, že ak existuje hrana incidentná s v, ktorá patrí do C', ale nepatrí do C, potom e_1 je práve táto hrana a ak existuje hrana incidentná s v, ktorá patrí do C, ale nepatrí do C', potom e_2 je práve táto hrana. Nech $\hat{G}$ je graf získaný z $G - v$ pridaním dvoch nových vrcholov u, w a novej hrany uw a nech u nahradí v ako koncový vrchol hrán e_1, e_2, a w nahradí v ako koncový vrchol $e_3, \ldots, e_k$. Nech $\hat{C}'$ je súvislý cyklus v $\hat{G}$, ktorý súhlasí s C. Ďalej vieme, že uw je hrana z $\hat{C}$, ak $v \in C$. Nech $\hat{C}$ je podobne definovaný podgraf $\hat{G}$, ktorý zodpovedá C'. Teda ak $v \in C'$, potom $uw \in \hat{C}'$ práve vtedy, keď jedna z hrán e_1, e_2 patrí do C', aby všetky stupne vrcholov v $\hat{C}'$ boli párne. Je možné, že $\hat{C}'$ nie je súvislý. Ak $\hat{C}'$ nie je súvislý, potom e_1 aj e_2 patria do C' a teda neexistuje hrana medzi $e_3, \ldots, e_k$, ktorá by patrila do C, ale nepatrila do C', alebo takáto hrana je práve hrana e_2. Následne dostávame, že ak $\hat{C}'$ nie je súvislý, potom aspoň jedna z hrán $e_3, \ldots, e_k$ patrí do $\hat{C} \cap \hat{C}'$. Preto po nahradení $\hat{C}'$ komponentom $\hat{C}'$, ktorý obsahuje hranu v $E(C') \setminus E(C)$ dostaneme, že sú splnené podmienky: $\hat{C}' \cap \hat{C} \neq \emptyset$ a $E(\hat{C}') \setminus E(\hat{C}) \neq \emptyset$. Teraz predpokladajme, že $\hat{D}$ je semirozšírenie $\hat{C}$ v $\hat{G}$. Nech D je zodpovedajúci podgraf v G, ktorý vznikol z $E(\hat{D}) \setminus uw$. Potom D je súvislý cyklus s aspoň jedným vrcholom spoločným s C. Ak v je vrchol v C, potom uw je hrana v $\hat{C}$ a odtiaľ dostávame $E(\hat{D}) \setminus E(\hat{C}) \neq \{uw\}$, a teda existuje hrana $\hat{e} \neq uw$ patriaca do $\hat{G}$ a tiež do $E(\hat{D}) \setminus E(\hat{C})$. Potom $\hat{e}$ tiež patrí do $E(D) \setminus E(C)$ a teda $E(D) \setminus E(C) \neq \emptyset$. Uvažujme ľubovoľnú $(C \cup D)$-cestu P v G, ktorá má koncové vrcholy x, y, kde $x \in V(C) \setminus V(D)$. Nech $\hat{P}$ je zodpovedajúca cesta v $\hat{G}$. Teda ak v je koncový vrchol P, potom $uw \notin \hat{P}$ a jedným z vrcholov u, w nahradíme vrchol v ako zodpovedajúci koncový vrchol. Ak v nie je koncový vrchol P, potom uw je hrana v $\hat{P}$ práve vtedy, keď práve jedna hrana z e_1, e_2 patrí do P. Označme koncové vrcholy v $\hat{P}$, zodpovedajúce vrcholom x, y v P, $\hat{x}$ a $\hat{y}$. Je jasné, že ak x nie je ekvivalentné v, potom $\hat{x} = x \in V(\hat{C}) \setminus V(\hat{D})$. Ak x je ekvivalentné v, tak preto, lebo $v \in V(C)$ a teda $uw \in E(\hat{C})$, preto $\hat{x} \in \hat{C}$, toto taktiež vyplýva z konštrukcie D z $\hat{D}$, takej, že $\hat{x}$ nepatrí do $V(\hat{D})$. Následne z toho vyplýva, že $\hat{x} \in V(\hat{C}) \setminus V(\hat{D})$. Podobne platí aj $\hat{y} \in V(\hat{C}) \cup V(\hat{D})$. Nech $\hat{Q}$ je cesta v $V(\hat{C}) \triangle V(\hat{D})$ s koncovými vrcholmi $\hat{x}$, $\hat{y}$. Označme zodpovedajúcu cestu v G Q(odstránime hrany každej časti cesty $\hat{Q}$ medzi vrcholmi u a w, ak taká existuje). Je zrejmé, že koncové vrcholy Q sú x a y. Z konštrukcie $\hat{C}$ z C a D z $\hat{D}$ vyplýva, že každá hrana z Q patrí práve do jedného súvislého cyklu C alebo D. Teda zo sporu sme dostali, že D je semirozšírenie súvislého cyklu C v grafe G. $\square$

Kapitola 4

Implementácia

V tejto kapitole sa dozvieme niečo bližšie ohľadom vytvoreného programu, ktorý testuje, či grafy na vstupe majú semirozšírenie pre každú kružnicu a hranu tejto kružnice. Ide o aplikáciu poznatkov z Kapitoly 3 v praxi. Tento problém nastolili páni Enrique García Moreno Esteva a Tommy R. Jensen v článku [5] .

Problém 4.0.4 *Nech G je 2-súviský kubický graf a nech a pre všetky hrany $e \in C$ potom G obsahuje semirozšírenie D kružnice C také, že $e \in D$.*

4.1 Úvodný pohľad na problém

Hlavnou úlohou programu bolo: skontrolovať, či graf na vstupe spĺňa problém 4.0.4. Následne týmto programom skontrolovať čo najväčšie množstvo grafom. Pri prvom pohľade na tento problém sa nám vynára niekoľko otázok:

- Odkiaľ budeme brať grafy, ktoré budeme dávať nášmu programu na vstup?
- Ako nájdeme všetky kružnice v grafe?

- Ako skontrolujeme, či kružnica D je semirozšírením kružnice C?

4.1.1 Odkiaľ budeme brať grafy, ktoré budeme dávať nášmu programu na vstup?

Rozhodoli som sa využiť program **Genreg**[16]. Už podľa názvu je možné rozpoznať, čo tento program robí: Generuje regulárne grafy. Nastavením správnych prepínačov sme docielili vygenerovanie všetkých kubických grafov pre zadaný počet vrcholov. Keďže nie je možné v rozumnom čase skontrolovať všetky grafy pre daný počet vrcholov, lebo grafov s 20 vrcholmi je 510489 a 22 vrcholových grafov je 7319447, rozhodoli sme sa pri vyšších počtoch vrcholoch zamerať na snarky do 30 vrcholov a potom na špeciálne grafy od mojej vedúcej, ktoré boli niečim výnimočné pri jej vedeckej činnosti.

4.1.2 Ako nájdeme všetky kružnice v grafe?

Vygenerovali sme všetky kružnice z bázy cyklového priestoru a následne sme vytvorili všetky ich lineárne kombinácie. Tým sme dostali množinu všetkých cyklov v grafe. Každý cyklus skontrolujeme, či je súvislý a ak áno, tak je to kružnica v grafe, toto vyplýva z definície cyklu a predpokladu, že graf je kubický. Takto dostávame množinu všetkých kružníc v zvolenom kubickom grafe.

Generovanie bázy cyklového priestoru

Zoberme kostru H grafu G. Pre každú hranu $e \in G$ a $e \notin H$ vytvoríme kružnicu C_e, ktorej všetky hrany okrem e patria do kostry H. Takáto kružnica je pre každú hranu e práve jedna.

Dôkaz: O kostre grafu vieme, že medzi každými dvoma vrcholmi grafu G existuje cesta a neobsahuje kružnicu. Keby tam existovali 2 cesty medzi vrcholmi v_1 a v_2, ktoré majú spoločné len tieto vrcholy, potom ich spojením dostaneme graf, ktorý obsahuje kružnicu, čo je spor.

O kostre grafu ďalej vieme, že pridaním ľubovoľnej ďalšej hrany vznikne v grafe kružnica. Z toho vyplýva, že pridaním hrany e nám vznikne práve jedna kružnica. Keď si zoberieme všetky kružnice takto vygenerované z mimokostrových hrán, dostávame bázu cyklového priestoru grafu G. Kružnice sú lineárne nezávislé, lebo vždy sa líši minimálne vo vybranej mimokostrovej hrane. Keďže každá kružnica obsahuje aspoň jednu mimokostrovú hranu(lebo v kostre kružnica neexistuje), tak vieme každú kružnicu vygenerovať ako lineárnu kombináciu všetkých kružníc C_i. Teda máme skutočne bázu cyklového priestoru grafu G.

4.1.3 Ako skontrolujeme, či kružnica D je semirozšírením kružnice C?

Budeme vychádzať z definície 2.4.1. Najskôr overíme, či sú splnené podmienky $D \cap C \neq \emptyset$ a $E(D) \setminus E(C) \neq \emptyset$. Potom pre každý vrchol $v \in (C \setminus D)$ skonštruujme množinu A_v všetkých koncových vrcholov v-úch. Ďalej použijeme prehľadávanie do hĺbky na graf $C \triangle D$, začneme vo vrchole v. Všetky prejdené vrcholy nám budú tvoriť množinu B_v. Označme x 2. koncový vrchol v-ucha. Z definície 2.4.1 vyplýva, že pre každé v-ucho musí existovať $v - x$ cesta v $C \triangle D$. Teda z tohto vidieť, že musí platiť $A \subseteq B$, lebo keby to neplatilo, tak by existoval vrchol $q \in A$, ktorý nepatrí do B, ale potom existuje $v - q$ cesta ktorá má s $C \cup D$ spoločné len koncové vrcholy, ale neexistuje $v - q$ cesta v $C \triangle D$, čo je spor s definíciou 2.4.1.

4.2 Optimalizácia a výber dátových štruktúr

Hlavné myšlienky programu sme si už predstavili v predchádzajúcej podkapitole. V tejto časti sa zamyslíme nad voľbou vhodných reprezentácií našich objektov a výberom konkrétnych dátových štruktúr v zvolenom programovacom jazyku. Následne sa na rad dostane aj optimalizácia.

Voľba programovacieho jazyka

Pri rozhodovaní, aký programovací jazyk zvoliť, to bolo viac menej jednoznačné. Potrebovali som jazyk, ktorý bude vhodný hlavne na výpočty a bude rýchlo pracovať so vstupom a výstupom. Preto rozhodnutie padlo na osvedčený jazyk C++ s využitím knižnice STL, ktorá ponúka rozmanité optimalizované dátové štruktúry.

Voľba štruktúr

- Graf je reprezentovaný `dvojrozmerným poľom`, kde si pre každý vrchol i v $edges[i][1], \ldots, edges[i][3]$ pamätáme jeho susedov, tým docielime, že prehľadávanie hrán ku konkrétnemu vrcholu a zistenie, či hrana patrí do grafu v čase $O(1)$. Vyplýva to z predpokladu, že grafy sú kubické. Taktiež máme prístup k jednotlivým hranám v čase $O(1)$.

- Pre reprezentáciu kružnice som zvolil `bitset` zo STL, čo je inteligentné pole bitov a podľa toho, aké veľké je definované, je reprezentované napr. ako typ long, teda binárne operácie s kružnicami sú veľmi rýchle. Toto nám pomôže napr. pri generovaní kružníc, kde používame operáciu $\oplus$, alebo pri teste na semirozšírenie.

- Pre každú hranu budeme mať zoznam indexov kružníc, ktoré touto hranou prechádzajú. Na toto využijeme pole `vectorov`, čím zabezpečíme konštantné pridávanie kružnice ku konkrétnej hrane a taktiež lineárny prechod všetkými kružnicami prechádzajúcimi zvolenou hranou.

Optimalizácia

Uvedomme si, že všetkých kružníc v grafe je exponenciálne veľa O(2^n). Teraz pre každú hranu každej kružnice hľadáme semirozšírenie, teda v najhoršom prípade musíme pre každú hranu kružnice skontrolovať všetky možné dvojice, ktorých je 4^n. Ešte je potrebné overiť, či dané kružnice majú semirozšírenie, čo podľa vyššie uvedeného postupu je v čase $O(n^2)$. Celková časová zložitosť celého programu je $O(4^n * n^3)$

Postačujúca podmienka:

Semirozšírenie cyklu C v kubickom grafe G je súvislý cyklus D grafu G, ak platí: ak $E(D) \backslash E(C) \neq \emptyset$, potom $E(D) \backslash E(C) \neq \emptyset$, $V(C \cup D) = V(C \triangle D)$ a podgraf $C \triangle D$ je súvislý.

Dôkaz. Nech platí: ak $E(D) \setminus E(C) \neq \emptyset$, potom $E(D) \setminus E(C) \neq \emptyset$, $V(C \cup D) = V(C \triangle D)$ a podgraf $C \oplus D$ je súvislý. Potom vieme, že pre každú dvojicu vrcholov v $C \cup D$ platí, že existuje cesta v $C \triangle D$. Následne z definície 2.4.1 vidieť, že potom je skutočne D semirozšírením cyklu C v kubickom grafe G.

Pri skúmaní problému sme sa zamýšľali, či nie je efektívnejšie testovať len postačujúcu podmienku, pri kontrole D je semirozšírenie C. Existuje relatívne malé množstvo grafov, pre ktoré táto podmienka neplatí. Pri teste grafov do 20 vrcholov (okolo 600000) ich bolo len do 10. Tým sme chcel ušetriť strojový čas a moholi by som skontrolovať viac grafov. Nakoniec sa ale táto domienka nepotvrdila aj napiek tomu, že testovanie postačujúcej podmienky je rýchlejšie, ako testovanie podľa definície, ale problém, je, že pre niektoré kružnice dostaneme výsledok, že nie sú semirozšírením zvolenej kružnice, pričom to nie je pravda(je to len postačujúca podmienka). Nakoniec najrýchlejšie riešenie je pokiaľ najskôr použijeme postačujúcu podmienku, pričom si rovno pripravíme vstupné dáta pre kontrolu podľa definície, nasledne ak táto neplatí postačujúca podmienka tak použije kontrolu podľa definície.

Samozrejmosťou je, že nehľadáme semirozšírenie pre každú hranu xy v kružnici, ale iba v tom prípade, že $x <= y$(keďže hnany grafu nie sú orientované, ale ich reprezentácia je, ako keby boli orientované), tým zabránime duplicitnej kontrole tej istej hrany.

4.3 Popis programu

Prehľad funkcií:

Funkcia **open_file**

Parametre:

string *name* - meno vstupného formátu

Obsah:

Funkcia starajúca sa o otvorenie vstupného súboru so zoznamom grafov a obslúženie výnimiek, ktoré môžu v danej situácii nastať.

Funkcia **close_file**

Obsah:

Náplňou tejto funkcie je zatvoriť vstupný súbor.

Funkcia **add_edge**

Parametre:

int x, y - čísla vrcholov, ktoré tvoria hranu

Obsah:

Táto funkcia pridá do reprezentácie grafu G hranu x-y a y-x.

Funkcia **load_graph_genreg**

Obsah:

Pokiaľ nie je koniec súboru, načíta ďalší graf zo vstupného súboru, ktorý je vygenerovaný progamom GENREG.

Funkcia **load_graph_snark**

Obsah:

Úloha je obdobná ako fukncie load_graph_genreg, rozdiel je len vo formáte vstupu.

Funkcia **two_connected**

Obsah:

Táto funkcia slúži na otestovanie, či náš zadaný graf má artikuláciu, alebo nie. Hľadanie artikulácie je postavené na prehľadávaní do hĺbky. Ak má graf artikuláciu, potom nie je 2-súvislý a funkcia vráti "false", inak vráti hodnotu "true".

Funkcia **connected**

Parametre:

bitset<BITSETMAX> x - zoznam hrán, ak i-ta hrana je v podgrafe, potom $x[i] = true$

Obsah:

Táto funkcia má za úlohu skontrolovať, či je graf reprezentovaný zoznamom hrán x kružnica. Graf prechádzame pomocou prehľadávania do hĺbky a ak dvojnásobok navštívených vrcholov sa rovná počtu hrán v X, tak návratová hodnota je "*true*" inak "*false*". Táto podmienka vyplýva z toho, že kružnica je súvislý podgraf so všetkými vrcholmi stupňa 2.

Funkcia **print_graph**

Obsah:

Úlohou tejto funkcie je vypísať aktuálny graf. Pre každý vrchol v sa vypíše jeden riadok so susedmi vrcholu v.

Funkcie **export_to_graph_viz**

Parametre:

bitset<BITSETMAX> $c[, d]$ - kružnica(e), ktorá(é) majú byť v grafe zvýraznené

unsigned long long edge_without_semi - hrana ktorá má byť špeciálne zvýraznená

Obsah:

Funkcia, ktorej cieľom je export graf vo formáte akceptovanom open source programom **GraphViz**[14], ktorý z textového vstupu vygeneruje vizualizáciu grafu a následne ju exportuje do obrázku v zvolenom formáte. Objekty, ktoré funkcia export_to_graph_viz dostáva ako parametre sa farebne zvýraznia, aby bol graf prehľadnejší.

Funkcia **generete_circuits**

Obsah:

Je to jedna z hlavných funkcií programu. V prvej časti si vygenerujeme bázu cyklového priestoru načítaného grafu G. Toto spravíme tak, že použitím prehľadávanie do hĺbky si vytvoríme kostru H grafu G a následne, pre každú hranu $e \in G$ a $e \notin H$ vytvoríme kružnicu C_e, ktorej všetky hrany okrem e patria do kostry H.

V druhej časti funkcie vygenerujeme všetky podmnožiny bázy a tým získame všetky kružnice v grafe. Len vždy musíme skontrolovať, či sme dostali skutočne kružnicu, lebo dostávame cykly a nie každý cyklus je kružnica.

Tieto kružnice vložíme do dátovej štruktúry vector, ktorá je podobná poľu, len ju je možné dynamicky zväčšovať. Taktiež si prichystáme pre každú hranu zoznam kružníc, ktoré ňou prechádzajú.

Funkcia **is_semiextension**

Parametre:

bitset<BITSETMAX> C, D - kružnice

bool detail = false - prepínač, ktorým si volíme, či kontrolujeme len postačujúcou alebo aj nutnou podmienkou

Obsah:

Táto funkcia nám kontrolujem, či kružnica D je semirozšírením kružnice C. Najskôr skontrolujeme podmienky z definície 2.4.1 Keďže kružnice sú vyberané tak, že majú spoločnú hranu e, túto podmienku máme vybavenú. Skontrolujeme, či existuje hrana v D, ktorá nepatrí do C. Ak neexistuje, D nie je semirozšírenie C. Inak skontrolujeme, či existuje vrchol v $C \setminus D$, lebo ak neexistuje, tak D je semirozšírenie C. Ďalej skontrolujeme, či $(V(C \triangle D) = V(C \cup D)$ a či podgraf $C \triangle D$ je súvislý. Ak tieto podmienky platia, tak D je semirozšírenie C, lebo pre všetky dvojice vrcholov v $C \cup D$ platí, že existuje cesta v $C \triangle D$. Teda toto je postačujúca podmienka, ale nie nutná. Ak toto neplatí a chceme kontrolovať aj nutnú podmienku, tak potom vrátime hodnotu, ktorú dostaneme z funkcie `s_semiextension_2`.

Funkcia **is_semiextensions_2**

Obsah:

V tejto procedúre kontrolujeme, či pre každé i-ucho existuje cesta v $C \triangle D$. Pri kontrole postupujeme nasledovne. Pre každý vrchol $v \in (C \setminus D)$ skonštruujme množinu A_v, všetkých koncových vrcholov v-úch. Následne z vrcholu v spustíme prehľadávanie do hĺbky na graf $C \triangle D$. Všetky prejdené vrcholy nám tvoria množinu B_v. Označme x 2. koncový vrchol v-ucha. Podľa definície 2.4.1 vieme, že pre každé v-ucho, musí existovať $v-x$ cesta v $C \triangle D$. Z tohto dostávame, že musí platiť $A \subseteq B$. Lebo ak to neplatí, tak existuje vrchol $q \in A$, ktorý nepatrí do B, ale potom existuje $v-q$ cesta, ktorá má s $C \cup D$ spoločné len koncové vrcholy, ale neexistuje $v-q$ cesta v $C \triangle D$, čo je spor s definíciou 2.4.1. Otestujeme teda, či platí $A \subseteq B$.

Ak nám vyššie uvedené testovanie prebehlo úspešne na všetkých vrcholoch $(C \setminus D)$, potom D je semirošírenie C a vrátime hodnotu *true*, inak *false*.

Funkcia **check_semiextensions**

Obsah:

V tejto procedúre pre každú kružnicu C a každú jej hranu e, prechádzame zoznam kružníc obsahujúcich hranu e, až pokiaľ nenájdeme kružnicu, ktorá je semirozšírením C. Na hľadanie semirozšírenia použijeme funkciu *is_semiextensions* s parametrom, aby v prípade neplatnosti postačujúcucej podmienky bola overená aj nutnej podmienky. Z mojich rôznych prístupov sa mi tento postup osvedčil ako najrýchlejší.

Nakoniec vypíšeme, či tvrdenie pre aktuálne načítaný graf platí, alebo nie. Ak neplatí, vypíšeme konkrétne pri ktorom grafe, kružnici a hrane sme nenašli semirozšírenie.

Funkcia **main**

Obsah:

V *maine* sa staráme o inicializáciu globálnych premenných a postupne spúšťame hľadanie semirozšírení pre každý súvislý graf zo vstupu.

Počet vrcholov	Počet grafov	Procesor	Jadier	Čas 1
8	5	1,73GHz	1	0.016 s.
10	19	1,73GHz	1	0.141 s.
12	85	1,73GHz	1	2.281 s.
14	509	1,73GHz	1	49.938 s.
16	4060	1,73GHz	2	12 min. 27.64 s.
18	41301	1,73GHz	2	3 hod. 24 min. 32.25 s.
20	510489	2,33GHz	8	47 min. 37.56 s.
24	38	1,73GHz	1	23.953 s.
26	280	1,73GHz	1	8 min. 34.313 s.
28	2900	3000+(1,8GHz)	1	3 hod. 4 min. 27.375 s.
30	28399	2,33GHz(+ 3000+)	8(+1)	2 hod. 1 min. 39.8 s.

Tabuľka 4.1: Časy behu programu

4.4 Zhodnotenie testov

Ako už bolo v tejto kapitole napísané, vzorka vstupných grafov bola rôznorodá. Na jednej strane boli otestované všetky grafy, ktoré mali maximálne 20 vrcholov. Na druhej strane boli otestované všetky snarky do 30 vrcholov a potom rôzne ojedinelé zaujímavé grafy, ktoré boli vždy výnimočné niečim iným.

Výsledok všetkých testov bol negatívny, teda nepodarilo sa mi nájsť ani jeden graf, na ktorom by podmienka 4.0.4 nebola splnená.

Na záver prikladám orientačnú tabuľku časov, ktoré hovoria o tom, ako dlho program pracoval na kontrole jednotlivých vstupov.

Kapitola 5

Záver

V rámci tejto práce sme sa venovali semirozšíreniam v kubických grafoch. Najskôr sme si ukázali rôzne prístupy, ktorými sa ľudia snažili vyriešiť problém *Dvojitého pokrytia kružnicami*. Potom som vysvetlil dôvod, prečo má zmysel zaoberať sa semirozšíreniami. Dokázali sme si, že tento problém je možné redukovať na kubické grafy a taktiež aj to, že pokiaľ by sa nám podarilo dokázať platnosť hypotézy 2.4.2, dokázali by sme aj SCDCC, čo by v teórii grafov znamenalo veľký posun, keďže je to už niekoľko desaťročí otvorený problém. V druhej časti sme podrobne popísali vytvorený program, ktorý slúži na testovanie problému uverejneného v článku *On semiextensions and circuit double covers*[5]. Aj keď sme skontrolovali všetky kubické grafy do 20 vrcholov a všetky snarky do 30 vrcholov, nepodarilo sa nám nájsť graf, v ktorom by to neplatilo. Z vety 3.1.1 vyplýva, že ani jeden z týchto grafov nie je protipríkladom k SCDCC a teda SCDCC platí pre otestované grafy. Dozvedeli sme sa veľa nových a zaujímavých informácii z teórie grafov a teší nás, že sme mohli skúmať túto mladú problematiku semirozšírení. Je možné, že toto tvrdenie platí a preto do budúcnosti by bolo veľmi zaujímavé nájsť netriviálnu množinu grafov, pre ktoré tvrdenie platí.

Literatúra

[1] B. R. Alspach and C.-Q Zhang. Cycle cover of cubic multigraphs. *Discrete Math.*, 111:11–17, 1993.

[2] L. Goddyn B. R. Alspach and C.-Q Zhang. Graph with the circuit cover property. *Trans.Amer. Math. Soc.*, to appear.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applocations.* Macmillan & Co., 1976.

[4] U. A. Celmins. *On Cubic Graphs That Do Not Have an Edge 3-Coloring.* Department of Combinatorics and Optimalization, University of Waterloo, 1984.

[5] Tommy R. Jensen Enrique García Moreno Esteva a. On semiextensions and circuit double covers. *Journal of Combinatorial Theory*, 97:474–482, 2007.

[6] H. Fleichner. Eulersche linien und kreisüberdeckungen, die vorgegebene durschgänge in den kanten vermeiden. *J. Comb. Theory Ser. B*, 29:145–167, 1980.

[7] H. Fleichner. Eulerian graphs and related topicsdcycle cover of cubic multigraphs. *Ann. Discrete Math.*, 45:11–17, 1990.

[8] H. Fleishner. Cycle decomposition 2-covers removable cycles, and the four-color-disease, in: J.A. Bondy, U.S.R. Murty(Eds.), Progress in Graph Theory. pages 233–246, 1984.

[9] L. Goddyn. Cycle double covers of graphs with Hamilton paths. *J. Comb. Theory Ser. B*, 46:253–254, 1989.

[10] L. A. Goddyn. Cycle covers of graphs, PHD thesis. 1988.

[11] J. Holyer. The NP-completeness of edge coloring. *SIAM J. Comp.*, 10:718–720, 1981.

[12] Andreas Huck and Martin Kochol. Five cycle double covers of some cubic graphs. *J. Comb. Theory Ser. B*, 64(1):119–125, 1995.

[13] F. Jaeger. A survey of the cycle double cover conjecture, in "Cycles in Graph". *Annals Disc. Math.*, 27:1–12, 1985.

[14] Emden Gansner John Ellson. Graphviz - Graph Visualization Software. `http://www.graphviz.org/`.

[15] M. Kochol. Stable dominanting circuits in snarks. 233:247–256, 2001.

[16] Dr. Markus Meringer. Genreg. `http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/markus/reggraphs.html`.

[17] P.D.Seymour. *Sums of circuits in "Graph Theory and Related Topics"*. Academic Press, 1979.

[18] G. Szekeres. Polyhedral decomposition of cubic graphs. *J. Austral. Math. Soc.*, 8:367–387, 1973.

[19] M. Tarsi. Semi-duality and the cycle double cover conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, 41:332–340, 1986.

[20] W. T. Tutte. On hamilton circuits. *J. London Math. Soc.*, 21:98–101, 1946.

[21] Eric W. Weisstein. Cycle Double Cover Conjecture. *MathWorld–A Wolfram*, 2001. `http://mathworld.wolfram.com/CycleDoubleCoverConjecture.html`.

[22] C.-Q Zhang. Minimum cycle coverings and integer flows. *J. Graph Theory*, 14:535–546, 1990.

Dodatok A

Príloha

K bakalárskej práci prikladám CD, na ktorom je napálený program opisovaný v 4. kapitole. Súčasťou CD sú aj zdrojové kódy tohto programu a vstupné dáta.