



KATEDRA INFORMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

ROZKLAD PRISMY KUBICKÉHO GRAFU NA HAMILTONOVSKÉ KRUŽNICE

(Bakalárska práca)

MÁRIA KLIMOVÁ

Vedúci: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava, 2009

ROZKLAD PRISMY KUBICKÉHO GRAFU NA HAMILTONOVSKÉ KRUŽNICE

Bakalárska práca

MÁRIA KLIMOVÁ

KATEDRA INFORMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

Odbor: 9.2.1 Informatika

Vedúci: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava, 2009

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím citovaných zdrojov.

.....

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcej práci RNDr. Edite Máčajovej, PhD. za zaujímavú tému, cenné rady a študijné materiály.

Ďakujem aj svojej rodine a môjmu priateľovi za podporu a pripomínanie, aby som na bakalárke pracovala a za aj to, že sú.

Abstrakt

V tejto práci sa zaoberáme hamiltonovským rozkladom v prizmách nad kubickými grafmi. Popisujeme si dva rôzne prístupy k hľadaniu rozkladu, oboznamujeme sa s už známymi výsledkami a nakoniec overujeme hypotézu o hamiltonovskom rozklade na zovšeobecnených Petersenových grafoch.

Kľúčové slová: prisma, hamiltonovský rozklad, kubické grafy, zovšeobecnené Petersenove grafy

Obsah

1 Úvod	2
1.1 Úvodné slovo	2
1.2 Základné definície a označenie	2
2 Hamiltonovskosť prisiem	4
3 Riešenie pomocou lokálnych zmien grafov	8
3.1 Farbenia a 2-faktory	8
3.2 Párenia	10
3.3 Lokálne zmeny	11
3.4 Výsledky	12
4 Riešenie cez eulerovské sledy	17
4.1 Výsledky	19
5 Prisma nad zovšeobecnenými Petersenovými grafmi	22
5.1 Zovšeobecnené Petersenove grafy a perfektná 1-faktorizácia	23
5.2 Nové výsledky	23
6 Záver	26

Kapitola 1

Úvod

1.1 Úvodné slovo

Dôvod, prečo sa skúmajú hamiltonovské kružnice v prizmách nad 3-súvislými kubickými grafmi, je všeobecnejšia hypotéza vyslovená D. Barnettom[6] a to že všetky jednoduché 4-polytopy sú hamiltonovské. Ako si ukážeme v druhej kapitole, prisma nad 3-polytopmi nielen jednoduchými(jednoduché 3-polytopy sú špeciálnym prípadom jednoduchých 4-polytopov) je hamiltonovská.

Alspach a Rosenfeld[1] vyslovili hypotézu že *prisma nad ľubovoľným 3-polytopom má hamiltonovský rozklad*. V tretej a štvrtej kapitole si popíšeme dve rôzne metódy riešenia ako aj dosiahnuté výsledky [2, 1]. Ukážeme si tiež, že 2-súvislé kubické grafy nemusia mať hamiltonovský rozklad a aj chybu v [2] pri dokazovaní vety o hamiltonovskom rozklade kubických bipartitných 3-súvislých planárnych grafov a ako ju vieme opraviť. V piatej kapitole budeme túto hypotézu overovať pre zovšeobecnené Petersenove grafy.

1.2 Základné definície a označenie

Tu si uvedieme základné definície, ktoré budeme v práci používať. Niektoré ďalšie definície si uvedieme v jednotlivých kapitolách v momente, keď ich budeme potrebovať. S úplne najzákladnejšími pojmami sa čitateľ môže oboznámiť v [3].

Definícia 1.1 Graf nazveme k -súvislým ak v ňom existuje takých k hrán, ktorých odobratím sa hrán stane nesúvislým alebo 1-vrcholovým.

Definícia 1.2 Graf, ktorý má všetky vrcholy stupňa k budeme nazývať k -regulárny. 3-regulárny graf budeme nazývať kubický.

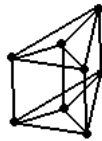
Definícia 1.3 Graf, ktorý je k -regulárny a k -súvislý budeme nazývať k -polytop.

Definícia 1.4 Podgraf grafu G budeme nazývať k -faktor, ak je k -regulárny a obsahuje všetky vrcholy G .

Definícia 1.5 Tetiva je hrana, ktorá spája 2 vrcholy kružnice, ale ona samotná do nej nepatrí.

Definícia 1.6 Prisma grafu G je graf $G \square K_2$

Jednoducho povedané: Z grafu urobíme jeho kópiu a každý vrchol spojíme s jeho kópiou. Pozri príklad na obr.1.1.



Obr. 1.1: Prisma kompletného grafu K_4

Označenie 1.1 V prisme grafu budeme pôvodný graf označovať G a jeho kópiu G^* a podobne kópiu vrchola v budeme označovať v^* .

Kapitola 2

Hamiltonovskosť prisiem

V tejto kapitole ukážeme, že prisma ľubovoľného 3-súvislého kubického grafu je hamiltonovská. Toto tvrdenie ako prvý dokázal P. Paulraja a dôkaz sa nachádza v [5]. My si uvedieme dôkaz, ktorý je uvedený v [2].

Najskôr si ukážeme dôkaz troch pomocných liem a na ich základe potom sformulujeme dôkaz vety.

Lema 2.1 *Ľubovoľný 3-súvislý kubický graf G obsahuje 2-súvislý bipartitný podgraf H taký, že $V(G) = V(H)$.*

Dôkaz: Lemu dokážeme sporom – budeme predpokladať, že maximálny 2-súvislý bipartitný podgraf neobsahuje všetky vrcholy a zakaždým ukážeme ako môžeme pridať ďalší vrchol, čo bude spor s maximalitou.

Označme H maximálny 2-súvislý bipartitný podgraf G . Nech neobsahuje všetky vrcholy, teda existuje $g \in V(G) - V(H)$. Keďže H je bipartitný môžeme vrcholy rozdeliť do 2 množín tak, že vrcholy v každej z množín spolu nesusedia. Vrcholy H ofarbíme čierne a bielo - podľa rozdelenia do týchto množín. Z toho, že G je 3-súvislý vyplýva, že obsahuje 3 vrcholovo disjunktné cesty P_1, P_2, P_3 spájajúce g s nejakým vrcholom v H . Nech h_i je prvý vrchol v H z cesty P_i . Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať že h_1, h_2 sú biele. Dĺžky ciest P_1 a P_2 majú rôzne parity- inak by sme g mohli pridať do H , čo by bol spor s maximalitou. Ak by bol vrchol h_3 biely, dve z troch ciest by mali rovnakú paritu a opäť by sme mali spor s maximalitou. Ak h_3 je čierny, jedna

z ciest P_1, P_2 má rozdielnu paritu ako P_3 a tieto cesty pridáme do H . Opäť prichádzame k sporu, a teda maximálny 2-súvislý bipartitný podgraf musí obsahovať všetky vrcholy grafu G , čo sme chceli dokázať. \square

Definícia 2.1 Kaktusom nazveme súvislý graf C taký, že:

- ľubovoľné 2 kružnice sú vrcholovo disjunktné
- každý vrchol s minimálnym stupňom 3 leží na kružnici

Kružnice grafu C nazveme listy.

Kaktus nazveme párnym, ak neobsahuje nepárne kružnice.



Obr. 2.1: Párny kaktus

Lema 2.2 (Petersenova) *Ľubovoľný bezmostový kubický graf obsahuje 1-faktor.*

Nakoľko táto lema je len pomocnou pre dokázanie nasledujúcej lemy, jej dôkaz si nebudeme uvádzať. Ak by čitateľa predsa len zaujímal nájde ho napr. v [3].

Lema 2.3 *Ľubovoľný 2-súvislý graf H s maximálnym stupňom $\Delta(H) \leq 3$ obsahuje podgraf C taký, že C je kaktus, $V(C) = V(H)$ a jeho listy obsahujú všetky vrcholy stupňa 3.*

Dôkaz: Lemu dokážeme indukciou vzhľadom na počet vrcholov H . Budeme predpokladať, že lema platí pre všetky grafy M s $|V(M)| < |V(H)|$ a z toho vyplynie platnosť lemy pre H .

Pre $|V(H)| \leq 4$ lema triviálne platí.

Ak H je kubický (a z toho že je 2-súvislý) podľa Petersenovej lemy obsahuje 1-faktor F . Jeho komplement \bar{F} je 2-faktor. Kontrakciou každého komponentu \bar{F} v H do 1 vrchola dostaneme súvislý graf H' . Pridaním hranej množiny niektorej kostry grafu H' do \bar{F} dostaneme kaktus grafu H obsahujúci všetky jeho vrcholy.

Nech H nie je kubický, teda obsahuje vrchol 2. stupňa. Nech h je taký vrchol a nech a, b sú jeho susedia. Ak $ab \in E(H)$ z 2-súvislosti a z toho, že $|V(H)| > 4$ vyplýva, že a a b majú od seba odlišného suseda a' , resp. b' , kde $a' \neq b'$. Skontraujeme trojuholník ahb do vrchola c , ktorý bude stupňa 2. Nový graf je opäť 2-súvislý a teda podľa indukčného predpokladu obsahuje kaktus C , v ktorom sa nachádzajú všetky vrcholy nového grafu. Ak cesta $a'cb'$ je súčasťou listu upravíme ju na cestu $a'ahbb'$ a dostaneme kaktus v grafe H so všetkými vrcholmi $V(H)$. Ak cesta $a'cb'$ nie je v liste bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a'c \in E(C)$. Upravíme C tak, že vymažeme c , pridáme trojuholník ahb a hranu aa' . Ak $b'c \in E(C)$, pridáme aj bb' .

Ak $ab \notin E(H)$, vymažeme vrchol h a pridáme hranu ab . Podľa indukčného predpokladu výsledný graf obsahuje kaktus C so všetkými vrcholmi grafu. Stupeň vrcholov a, b sa pritom nezmenil. Ak hrana $ab \in E(C)$ nahradíme ju cestou ahb . Nech $ab \notin E(C)$. Potom, ak jeden z vrcholov (napr. a) je stupňa 3 v H , je obsiahnutý v liste a teda stačí pridať hranu ah . Ak aj a, b sú stupňa 2 potom z toho, že $ab \notin E(C)$ vyplýva, že a je v C stupňa 1 a teda môžeme pridať hranu ah do C . Tým je lema dokázaná. \square

Lema 2.4 *Prisma nad ľubovoľným párnym kaktusom C s $\Delta(C) \leq 3$ je hamiltonovská.*

Dôkaz: Indukciou vzhľadom na počet vrcholov dokážeme, že $C \square K_2$ má hamiltonskú kružnicu F takú, že:

(*) F obsahuje hranu xx^* pre každý vrchol x so stupňom 2 patriaci listu kaktusu C .

Pre $|V(C)| = 2$ tvrdenie triviálne platí. Podobne jednoduché je to pre kružnicu - použijeme každú hranu $u_i u_i^*$ a hrany $u_i u_{i+1}$ pre i párne a $u_i^* u_{i+1}^*$ pre i nepárne.

Nech C nie je kružnica. Nech T je strom vytvorený skontrahovaním každej kružnice Q v C do vrchola v_Q a zmazaním slučiek. Keďže T má najmenej 2 vrcholy, môžeme vybrať vrchol t , ktorý je stupňa 1 v T . Ak $t \in V(C)$, teda jeho stupeň v C je 1 a neleží v liste, u je jeho jediný sused. Ak u je v liste $C - t$, podľa (*) prisma $(C - t) \square K_2$ obsahuje hranu uu^* . Ak u nie je v liste $C - t$, potom jeho stupeň v $C - t$ je 1, a teda ľubovoľná hamiltonovská kružnica musí obsahovať uu^* . V oboch týchto prípadoch nahradíme hranu uu^* cestou utt^*u^* .

Už nám zostal jediný prípad, a to keď $t = v_Q$ priradenému kružnici Q v C . Keďže stupeň vrchola t v T je 1, v Q existuje iba 1 vrchol w taký, že stupeň w v C je 3 a $w \in V(Q)$. Vytvoríme C' tak, že z C vymažeme všetky vrcholy Q okrem w . Na C' sa vzťahuje indukčný predpoklad, teda má hamiltonovskú kružnicu F' , ktorá obsahuje ww^* . Kružnicu F' upravíme na hamiltonovskú kružnicu grafu C použitím všetkých hrán medzi Q a Q^* okrem ww^* a totožnými s F' mimo Q . \square

Veta 2.1 Prisma nad ľubovoľným 3-súvislým kubickým grafom G je hamiltonovská.

Dôkaz: Podľa Lemy 2.1 G obsahuje 2-súvislý bipartitný podgraf H s najvyšším stupňom 3 a s $V(G) = V(H)$. Podľa Lemy 2.3 H obsahuje kaktus C taký, že $V(C) = V(H)$. Keďže H je bipartitný, C je párný. Nakoniec z Lemy 2.4 vyplýva, že $C \square K_2$ a teda aj $G \square K_2$ má hamiltonovskú kružnicu. \square

Kapitola 3

Riešenie pomocou lokálnych zmien grafov

V tejto kapitole si ukážeme spôsob riešenia, ktorý bol použitý v [2]. Uvedieme si výsledky dosiahnuté týmto spôsobom a opravíme chybu, ktorá sa vyskytla pri dôkaze jednej z viet.

3.1 Farbenia a 2-faktory

Nech G je kubický graf a F je 2-faktor prisky $G \square K_2$. F indukuje ofarbenie hrán grafu G štyrmi farbami podľa nasledovných pravidiel:

1. hranu ofarbíme modrou, ak $e \in E(F)$ a $e^* \notin E(F)$
2. žltou, ak $e \notin E(F)$ a $e^* \in E(F)$
3. zelenou, ak $e \in E(F)$ a $e^* \in E(F)$
4. červenou inak

Pre jednotlivé farby budeme používať skratky tak, ako ich autori uviedli autori článku. Modrú budeme skrátene označovať B, žltú Y, zelenú G a červenú R. Typ vrchola potom zdefinujeme podľa farieb hrán(v neutriedenom poradí), ktoré s daným

vrcholom incidujú.Ľahko nahliadneme, že

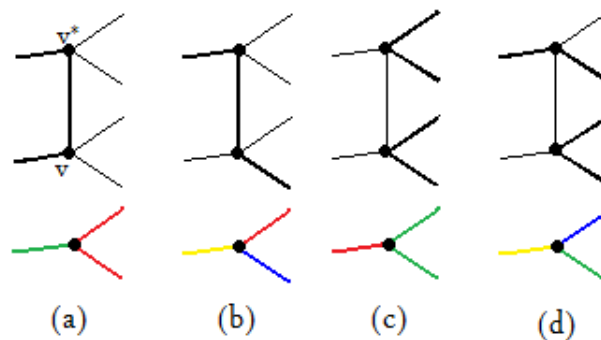
(*) Ľubovoľný vrchol je typu BYG, BYR, GGR alebo RRG.

Vezmime si ľubovoľný vrchol $v \in V(G)$ a budeme rozlišovať dva prípady. Ak $vv^* \in E(F)$, označme hranu z $E(G) \cap E(F)$ ako e . Ak $e^* \in E(F)$, potom v je typu RRG, inak je typu BYR. V prípade, že $vv^* \notin E(F)$, označíme si 2 hrany z $E(G) \cap E(F)$ ako e_1 a e_2 . Ak e_1^* aj e_2^* patria do $E(F)$ vrchol v je typu GGR, inak je typu BYG. Všimnime si, že *prechod ku komplementu \bar{F} grafu F spôsobí zámenu modrej farby so žltou a zelenej s červenou.*

Platí aj opačné tvrdenie - ak sú všetky vrcholy daných typov, tak farbenie indukuje 2-faktor v prisme. Nech $xy \in E(G)$, potom hrany F budú obsahovať:

- xy , ak je zafarbená modrou alebo zelenou,
- x^*y^* , ak xy je zafarbená žltou alebo zelenou,
- xx^* , ak x je typu BYR alebo RRG.

Ak x je typu BYG alebo GGR, použili sme po 2 hrany z G a G^* . Ak x je typu BYR alebo RRG, použili sme hranu xx^* a okrem nej po jednej hrane z G a G^* . Z toho vidíme, že každý vrchol bude stupňa 2 a teda F je 2-faktor. Tým sme dokázali bijekciu medzi 2-faktormi a hranovým farbením spĺňajúcim (*). Farbenie, ktoré spĺňa dané podmienky, budeme nazývať *prípustným*.



Obr. 3.1: Vrchol a jeho ofarbenie: (a)RRG, (b)BYG, (c)GGR, (d)BYR

3.2 Párenia

V nasledujúcich riadkoch si popíšeme párenie, ktoré indukuje 2-faktor v prisme nad G na množine vrcholov ľubovoľného podgrafu H grafu G . Toto párenie potom bude ďalej veľmi nápomocné pri dokazovaní.

Nech G je kubický graf a F je 2-faktor v prisme nad G . Pre ľubovoľný podgraf H grafu G $F|H$ bude ohraničenie F do vrcholovej množiny $V(H \square K_2)$ so všetkými hranami majúcimi konce v tejto vrcholovej množine okrem hrán xx^* , kde x je vrchol z H a jeho stupeň v H je párny.

Ďalej definujeme množinu terminálov H (s ohľadom na F), $T_F(H) \subset V(H \square K_2)$, do ktorej budú patriť všetky vrcholy prisky $H \square K_2$, ktorých stupeň v $F|H$ je 1. (Pozn.: Niektoré terminály majú v H stupeň väčší ako 1 a naopak, vrchol so stupňom 1 v H nemusí mať svoj terminál.)

$G - H$ bude graf vytvorený z G odstránením všetkých vrcholov, ktoré majú stupeň 3 v H a všetkých hrán z H . (Pozn.: Ak H nemá izolované vrcholy, potom $G - (G - H) = H$ a všeobecne $E(G - H) = E(G) - E(H)$. Hranové množiny $F|H$ a $F|(G - H)$ tvoria rozdelenie $E(F)$. Následkom toho je že množina terminálov $G - H$ koinciduje s $T_F(H)$).

Teraz môžeme prirodzene definovať 1-faktor na kompletom grafe z vrcholovej množiny $T_F(H)$: keďže všetky stupne v $F|H$ sú najviac 2, $F|H$ je disjunktné zjednotenie ciest a cyklov a koncové vrcholy ciest sú terminálmi. 2 terminály budú spojené hranou v $M_F(H)$ keď sú rozdielnymi koncovými vrcholmi tej istej cesty.

Všimnime si, že ak použijeme tento postup na 2-faktor \bar{F} dostaneme iné párenie na $T_{\bar{F}}(H) - M_{\bar{F}}(H)$.

Pri ďalšom riešení nám bude často nápomocné nasledujúce pozorovanie:

Veta 3.1 *Pre ľubovoľný podgraf H grafu G platí, že 2-faktor F je hamiltonovskou kružnicou práve vtedy, keď:*

1. $M_F(H) \cup M_F(G - H)$ vytvára kružnicu na $T_F(H)$ a
2. ani $F|H$, ani $F|(G - H)$ neobsahuje kružnice

Dva 1-faktory M_1, M_2 na rovnakej vrcholovej množine budeme nazývať *kompatibilné*, ak (podľa 3.1 2.) ich zjednotenie je jedna kružnica.

3.3 Lokálne zmeny

Teraz si utvoríme nástroje, ktoré nám pomôžu upraviť dané farbenie po lokálnej zmene základného grafu. Nech G, G' sú grafy s prípustnými farbeniami, ktoré indukujú 2-faktory F a F' v prismach týchto grafov a nech $H \subset G, H' \subset G'$ sú ich podgrafy také, že $G - H$ je zhodné s $G' - H'$ podľa farbenia. Potom:

Veta 3.2 *Ohraničenia $F|(G' - H')$ a $F|(G - H)$ sú ekvivalentné. Podrobnejšie, $T_{F'}(G' - H') = T_F(G - H)$ a $M_{F'}(G' - H') = M_F(G - H)$.*

Dôkaz: Podľa definície hrana e patrí $E(F|(G - H))$ práve vtedy, keď $e \in E(F)$, $e \in E(G - H)$ a $e \neq xx^*$ pre každý vrchol $x \in V(G - H)$ párneho stupňa v $G - H$. Keďže $G - H = G' - H'$, hranové množiny a stupne vrcholov v týchto grafoch sú rovnaké. Z faktu, že farbenie týchto grafov je identické vyplýva, že hrana z $G - H$ je v $E(F)$ práve vtedy, keď je v $E(F')$. Zvyšok je triviálny. \square

Veta 3.3 *Nech F je hamiltonovská kružnica. Ak $F'|H'$ neobsahuje kružnice a $M_{F'}(H')$ je kompatibilný s $M_F(G - H)$, potom F' je hamiltonovská kružnica.*

Dôkaz: Ak F je hamiltonovská kružnica, potom z Viet 3.1 a 3.2 vyplýva, že $F|(G' - H')$ neobsahuje kružnice a že $M_{F'}(H')$ je kompatibilný s $M_F(G' - H')$. Keďže predpokladáme, že $F'|H'$ neobsahuje kružnice, tak následne z Vety 3.1 vyplýva, že F' je hamiltonovská kružnica. \square

Vo väčšine situácií môžeme rátať s tým, že $M_{F'}(H')$ je ekvivalentný s $M_F(H)$, a teda podľa tvrdenia 3.1 je automaticky kompatibilný s $M_F(G - H)$.

Dôsledok 3.1 *Ak F je hamiltonovská kružnica, $F'|H'$ neobsahuje kružnice, a $M_F(H) = M_{F'}(H')$, potom F' je hamiltonovská kružnica.*

Dôsledok 3.2 *Nech F a F' sú hamiltonovské kružnice. Ak*

1. $F' \setminus H'$ a $\overline{F'} \setminus H'$ neobsahujú kružnice a
2. $M_F(H) = M_{F'}(H)$ a $M_{\overline{F'}}(H) = M_{\overline{F'}}(H)$,

potom $F' \cup \overline{F'}$ je hamiltonovský rozklad grafu $G' \square K_2$.

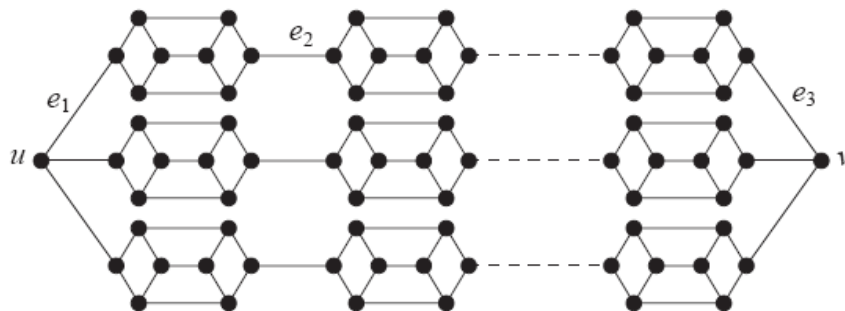
3.4 Výsledky

Veta 3.4 *Existuje 2-súvislý kubický graf, ktorý nemá hamiltonovský rozklad.*

Dôkaz: Pozrime si obr.3.2. Nech M je takýto graf. Použijeme označenie hrán tak, ako je uvedené na obrázku.

Predpokladajme, že $M \square K_2$ vieme rozložiť do hamiltonovských kružníc F, \overline{F} . Uvažujme farbenie M indukované F . Môžeme predpokladať, že jedna z hrán incidentných s vrcholom u je zelená (inak prejdeme k \overline{F}) a nech je to e_1 .

Keďže $\{e_1, e_1^*, e_2, e_2^*\}$ je hranový rez v $M \square K_2$ a každá z F, \overline{F} ho musí preťať v 2 hranách, hrana e_2 môže byť ofarbená jedine červenou. Z toho istého dôvodu e_3 je červená. Potom ale F nemôže byť hamiltonovská kružnica, lebo hrany e_2, e_3 rozdeľujú M a teda tento graf nemá hamiltonovský rozklad. \square



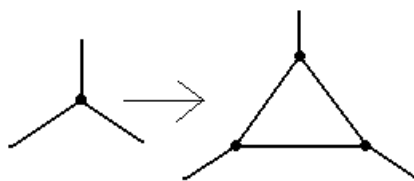
Obr. 3.2: 2-súvislý kubický graf ktorý nemá hamiltonovský rozklad

Definícia 3.1 *Kletop je planárny graf, ktorý vznikne z planárneho grafu K_4 opakovaným pridávaním vrchola do niektorej oblasti a jeho pripojením k 3 vrcholom vytvárajúcich túto oblasť.*

Veta 3.5 Prisma nad duálnym grafom ľubovoľného kletopa má hamiltonovský rozklad.

Poznámka 3.1 Duálny graf ľubovoľného kletopa je planárny graf s jedinečnou 4-zafarbitel'nosťou vrcholov a vznikne z grafu K_4 opakovaním triangulácie niektorého vrcholu [7].

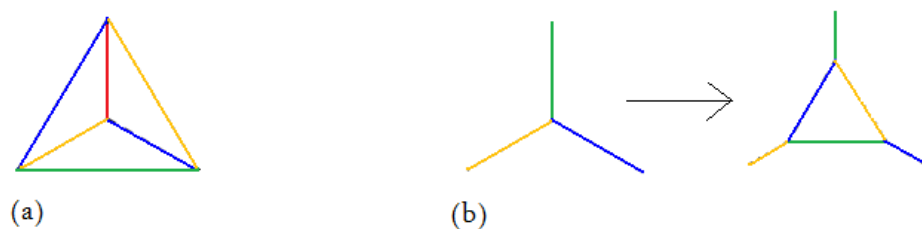
Poznámka 3.2 Definíciu oblasti ako aj duálneho grafu nájde čitateľ v [3].



Obr. 3.3: Triangulácia vrchola

Dôkaz vety: Nech G je kubický graf s hranovým farbením indukujúcim hamiltonovský rozklad v prisme nad G a nech G' vznikne z G trianguláciou v . Predpokladajme, že je to vrchol typu BYG. Označme novopridaný trojuholník T . Stotožníme $E(G') - E(T)$ s $E(G)$ a použijeme farbu ľubovoľnej hrany v G na ofarbenie zodpovedajúcej hrany v G' . Ostáva už len ofarbiť T . Pre $X \subset V$ budeme označovať $A_G(X)$ podgraf G vytvorený z hrán, ktoré majú aspoň jeden koniec v X , a všetkými koncovými vrcholmi týchto hrán. Pre $v \in V(G)$, $A_G(v)$ bude znamenať $A_G(\{v\})$. Nech $H = A_G(v)$ a $H' = A_{G'}(V(T))$ a k ofarbeniu H' je použité farbenie zobrazené na obrázku 3.4(b). Farbenie zodpovedá 2-faktoru F' v $G' \square K_2$. Hoci $M_F(H)$ a $M_{\bar{F}}(H)$ nie je pevne dané z typu samotného vrchola v nie je ťažké zistiť, že aplikovaním vety 3.2 zabezpečíme, že nové ofarbenie indukuje hamiltonovský rozklad v $G' \square K_2$.

Ak v je typu BYR je to podobné. V ostávajúcich dvoch prípadoch nie je jasné ako ofarbiť H' . Tieto prípady však nenastane vzhľadom nato, že všetky vrcholy v ofarbení K_4 (obr.3.4(a)) sú typu BYG alebo BYR a toto platí aj pri všetkých trianguláciách. Tým je veta dokázaná. \square

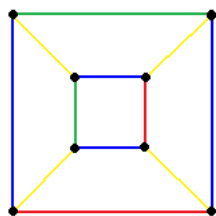


Obr. 3.4: (a) Ofarbenie grafu K_4 , (b) Ofarbenie pre trianguláciu vrchola

Veta 3.6 *Prisma nad bipartitnými planárnymi grafmi má hamiltonovský rozklad.*

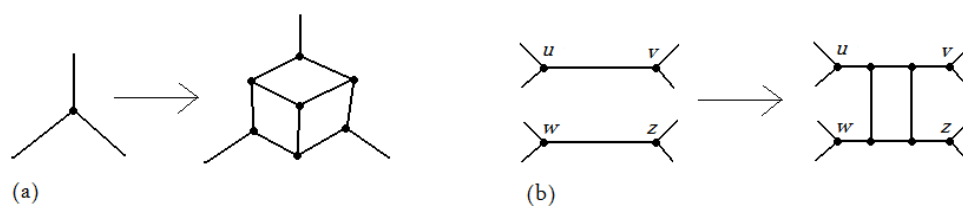
Z priestorových dôvodov si nebudeme uvádzať celý dôkaz tejto vety. Popíšeme si len jeho základnú myšlienku a podrobnejšie sa budeme venovať len časti v ktorej urobili autori chybu a ukážeme ako sa dá táto chyba opraviť. V prípade záujmu si čitateľ môže celý dôkaz pozrieť v [2].

Bagatelj[4] dokázal, že všetky 3-súvislé bipartitné planárne grafy je možné vytvoriť z kocky (jej farbenie je znázornené na obr. 3.5) postupnosťou 2 operácií: diamantovej expanzie ľubovoľného vrchola a A_1 delenia - obe sú znázornené na obrázku 3.6.



Obr. 3.5: Kocka

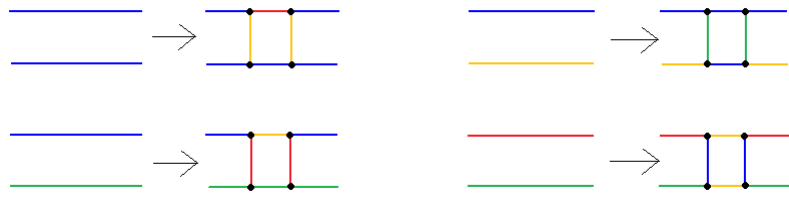
Podobne ako v predchádzajúcom dôkaze máme kubický graf G s prípustným hránovým farbením vytvárajúcim hamiltonovský rozklad a G' z neho vznikne použitím niektorej z dvoch vyššie uvedených operácií. Nech je ňou A_1 delenie. Budeme deliť hrany uv a wz na vytvorenie G' . H bude podgraf G vytvorený z týchto 2 hrán a ich koncových vrcholov a nech $H' = (A_{G'}(V(C)))$, kde C je kružnica na 4 novopridaných vrcholoch. Určíme si všetky kombinácie farieb uv a wz a potom určíme ofarbenie



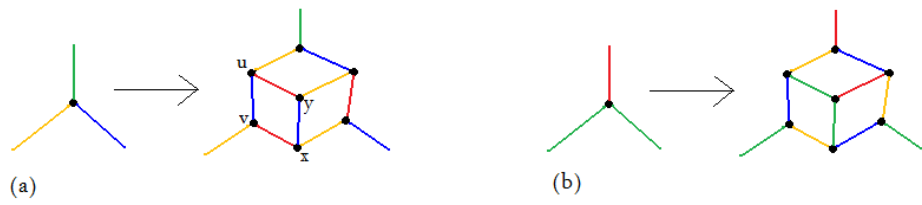
Obr. 3.6: Transformácie generujúce 3-súvislé bipartitné grafy: (a)diamantová expanzia, (b)A1 delenie

podgrafu H' . Štyri jednoduchšie prípady sú znázornené na obr.3.7. Piaty prípad, keď sú obe hrany ofarbené zelenou, je zložitejší a nebudeme si ho tu uvádzať.

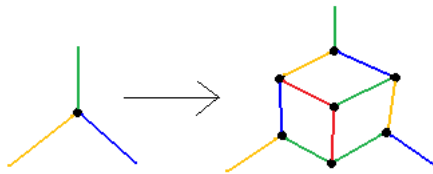
Pre diamantovú expanziu nech $H = A_G(v)$ a $H' = A_{G'}(X)$, kde X je novovzniknutých 7 vrcholov v G' . Budeme rozlišovať dva prípady: ak v je typu BYG alebo GGR, zvyšné dva sú k nim komplementárne. Na obr.3.8 vidíme ako ofarbenie H' v oboch prípadoch uviedli autori. Všimnime si ofarbenie v prípade, že v bol typu BYG. V komplemente nám na množine vrcholov $u^*v^*x^*y^*$ vznikne kružnica a teda toto ofarbenie nespĺňa podmienky Vety 3.2. Táto chyba sa dá opraviť ako vidno na obr.3.9. Nie je ťažké nazrieť, že ofarbenia 3.8b a 3.9 spĺňajú podmienky Vety 3.2. To dopĺňa celkový dôkaz vety a teda táto trieda grafov má hamiltonovský rozklad. \square



Obr. 3.7: Jednoduché prípady A_1 delenia



Obr. 3.8: Ofarbenia diamantovej expanzie z článku: (a)BYR, (b)RRG



Obr. 3.9: Nové ofarbenie diamantovej expanzie pre prípad RRG

Kapitola 4

Riešenie cez eulerovské sledy

V tejto kapitole si popíšeme metódu ktorú bola použitá v článku [1]. Ako neskôr uvidíme je vhodná najmä na hľadanie hamiltonovského rozkladu grafov v ktorých vieme o existencii hamiltonovských kružníc.

Nech G je graf s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. V G existuje vrcholovo-disjunktná množina párnych kružníc, ktorých hrany sú striedavo farbené modrou a žltou farbou,
2. všetky ostatné hrany G sú ofarbené zelenou tak, že ľubovoľný vrchol je incidentný s najviac dvoma zelenými hranami a ak v je incidentný s dvoma zelenými hranami, potom už nie je incidentný so žiadnou inou hranou,
3. G má eulerovský sled s nasledovnými cestovnými pravidlami:
 - (a) Pre tieto cestovné účely je zelená hrana interpretovaná ako zjednotenie modrej a žltej hrany. Zelená hrana musí byť prejdená raz v modrom a raz v žltom móde.
 - (b) Ľubovoľný vrchol môže byť použitý ako začiatočný vrchol cesty
 - (c) Ak je hrana jednej farby použitá na dosiahnutie vrchola a je tu iná hrana rovnakej farby incidentná s týmto vrcholom potom musí byť použitá na opustenie vrchola. Inak je použitá hrana opačnej farby.

- (d) Ak tieto pravidlá nútia použiť hranu, ktorá už bola použitá a ešte nie sú v eulerovskej ceste zahrnuté všetky hrany potom G nemusí mať potrebnú modro-žltú cestu.

Graf G budeme nazývať *BY-graf* (z anglického blue-yellow).

Veta 4.1 *Nech G je kubický graf. Ak $G \square K_2$ je hamiltonovská, potom G má BY-podgraf obsahujúci všetky vrcholy G .*

Dôkaz: Vetu nebudeme dokazovať tak ako je uvedené v [1], ale na základe ofarbovania zadefinovaného v predchádzajúcej kapitole. Nech H je hamiltonovská kružnica v $G \square K_2$. Nech G' je ofarbený graf podľa H bez červených hrán. Keďže H je hamiltonovská kružnica a je dokázaná bijekcia medzi 2-faktormi a ofarbením, ľahko vidieť, že G' obsahuje všetky vrcholy G . Ukážeme, že G' spĺňa vlastnosti 1,2,3 BY-grafov. Vlastnosti 1 a 2 okamžite vyplývajú zo 4 možných typov vrcholov. Potrebujeme ukázať že platí aj vlastnosť 4. Ak sledujeme hrany H po poradí, zjavne to korešponduje s modro-žltým eulerovským sledom v G' . Ako hovorí podmienka 3a, zelenú hranu budeme chápať ako zjednotenie modrej a žltej hrany. Zmena farby vo vrchole je ekvivalentná s tým, že $xx^* \in H$ a teda musíme prechádzať po hranách jednej farby pokým je to možné. Tým je veta dokázaná. \square

Veta 4.2 *Nech G je kubický graf. Potom $G \square K_2$ má hamiltonovský rozklad práve vtedy keď má 2 BY-podgrafy G' a G'' obsahujúce rovnaké modro-žlté komponenty (so zamenenými farbami) a zvyšné hrany sú zelené rozdelené medzi G' a G'' .*

Poznámka 4.1 *Pre zjednotenie s predchádzajúcou kapitolou do G' doplníme zelené hrany, ktoré patria G'' a budeme farbiť červenou. Podobne pre G'' . Preto budeme pri výsledkoch používať len obrázok pre G' .*

Dôkaz vety: Ako sme si hovorili v predchádzajúcej kapitole, prechod ku kompletu spôsobí zámenu modrej so žltou a zelenej s červenou. Ukázali sme aj bijekciu medzi farbeniami a 2-faktormi. Z tohto a z dôkazu Vety 4.1 (overovanie vlastnosti 4) priamočiaro vyplýva platnosť vety. \square

4.1 Výsledky

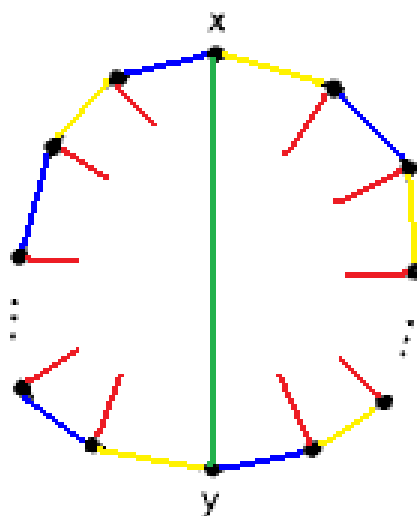
Definícia 4.1 1-faktorizácia je rozklad grafu na disjuktne 1-faktory. 1-faktorizáciu nazveme perfektnou, ak zložením dvoch ľubovoľných 1-faktorov vznikne hamiltonovská kružnica.

Veta 4.3 Ak G je kubický graf s perfektnou 1-faktorizáciou, potom $G \square K_2$ má hamiltonovský rozklad.

Dôkaz: Nech H je hamiltonovská kružnica vytvorená z dvoch 1-faktorov G a zvyšné hrany G sú teda tetivami H . Rozoberieme si dva prípady: Ak existuje tetiva, ktorá delí H na 2 cesty párnej dĺžky a ak taká tetiva neexistuje.

1.prípado: Predpokladajme, že niektorá tetiva rozdeľuje H na 2 cesty párnej dĺžky. Nech xy je tá tetiva. Potom obr. 4.1 znázorňuje 2 BY podgrafy G , ktoré spĺňajú predpoklady Vety 4.2. V prvom BY podgrafe je použitá iba tetiva xy ako zelená hrana a naopak, v druhom BY podgrafe sú použité všetky tetivy okrem xy . Táto metóda funguje pretože modré hrany a modré tetivy vytvárajú hamiltonovskú cestu z x do y (lebo zjednotenie dvoch ľubovoľných 1-faktorov je hamiltonovská kružnica). To isté platí aj pre žlté hrany a žlté tetivy.

2.prípado: Nech ľubovoľná tetiva H delí H na dve cesty nepárnej dĺžky. Hrany H označíme ako 1-hrany a 2-hrany podľa toho, v ktorom z dvoch 1-faktorov každá hrana leží. Ľahko nahliadneme, že musia existovať dve za sebou idúce tetivy, ktoré sa pretínajú, čiže tetivy xy a $x+1, y'$ také, že $x+1$ a y' ležia v rozdielnych výsekoch H určených x a y . Bez ujmy na všeobecnosti môžeme hranu spájajúcu x a $x+1$ nazvať 1-hranou. Potom z predpokladu prípadu 2 vieme, že hrana H incidentná s y' vo výseku medzi x a y' , ktorý neobsahuje $x+1$ je 1-hrana. Rozoberme si podprípado, kde hamiltonovská cesta z x do y pozostáva z tetív a 2-hrán tak, že y' je v tejto ceste pred $x+1$, teda že ide $y, y+1, \dots, y', x+1, x+2, \dots, x-1, x$. Vtedy BY podgrafy znázornené na obr.4.2(a) spĺňajú predpoklady Vety 4.2. Popíšme si to bližšie. V prvom podgrafe je použitá tetiva xy ako zelená a $x+1, y'$ nie je použitá a ostatné tetivy sú modré. Odštartujeme zelenou tetivou z vrchola x v modrom móde. Časom pridáme k y' s použitím všetkých modrých tetív, všetkých modrých hrán incidentných s nimi a všetkých žltých hrán H vo výseku medzi y a y' neobsahujúceho x . Tu prejdeme na žltý mód, obídeme celý výsek $y'x$ neobsahujúci y , cez zelenú hranu prejdeme do vrchola y , výsek po $x+1$ tam zmeníme farbu



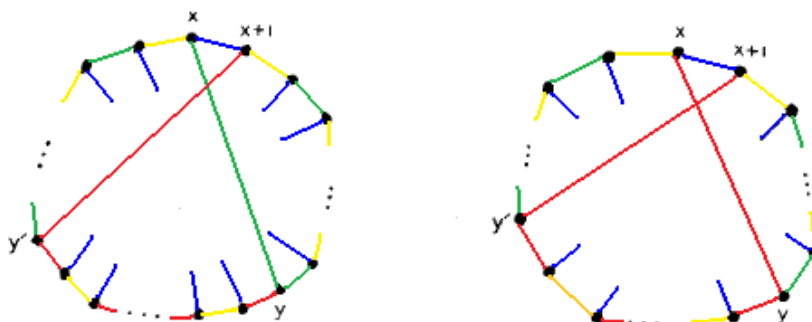
Obr. 4.1: Ofarbenie, ak existuje tetiva deliaca H na párne cesty

na modrú a uzavrieme sled. Ľahko nahliadneme, že je eulerovský. V druhom podgrafe začneme vo vrchole x použitím modrej 2-hrany (modrá hrana je na obr.4.2(a) vlastne žltá-pozri Pozn.4.1), prideme až do $x + 2$ a následne použijeme modrú hranu do $x + 1$. Ďalej používame modré hrany až po dosiahnutie y kde prejdeme späť na žltú a časom dosiahneme y' pozdĺž žltej hrany z $y' - 1$. Následne použijeme žlté hrany do x a sled je eulerovský.

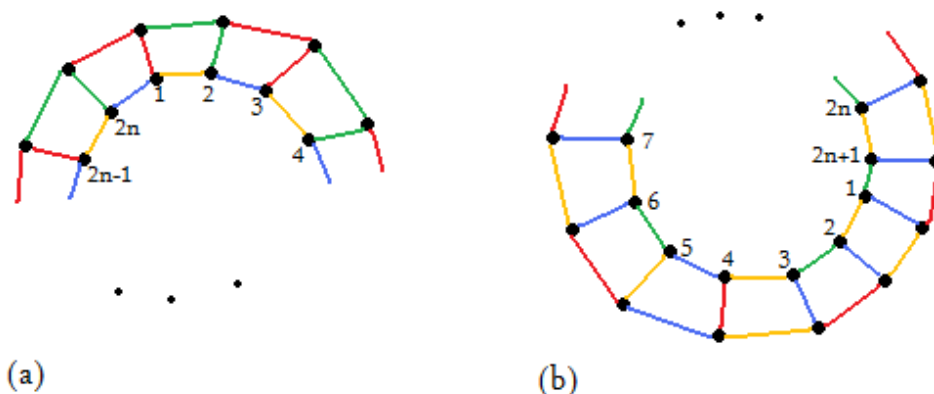
Teraz uvažujme podprípád, že hamiltonovská cesta z x do y pozostáva z tetív a 2-hrán tak, že $x + 1$ je pred y' , čiže ide $y, y + 1, \dots, x + 1, y', y' - 1, \dots, x - 1, x$. Potom BY podgrafy znázornené na obr.4.2(b) spĺňajú predpoklady vety 4.2. Popis by bol podobný ako pre predchádzajúci podprípád. \square

Veta 4.4 Dvojnásobná prisma grafu $C_n \square K_2 \square K_2 \simeq C_n \square C_4$, kde C_n je kružnica na n vrcholech, má hamiltonovský rozklad.

Dôkaz: vid' obrázok 4.3



Obr. 4.2: Ofarbenia, ak sú v grafe len tetivy deliace H na nepárne cesty



Obr. 4.3: Ofarbenie pre dvojnásobnú prismu C_n

Veta 4.5 Ak G je kubický graf s 1-faktorizáciou do 1-faktorov F_1, F_2, F_3 takou, že $F_1 \cup F_2$ a $F_1 \cup F_3$ sú hamiltonovské kružnice a $F_2 \cup F_3$ má 2 komponenty, potom $G \square K_2$ má hamiltonovský rozklad.

Náčrt dôkazu: Nech $F_2 \cup F_3$ pozostáva z párnych kružníc C_1 a C_2 . Nech uv je hrana z F_1 taká, že $u \in C_1$ a $v \in C_2$. Hrany F_2 ofarbíme modrou, hrany F_3 ofarbíme žltou a hranu uv zelenou. Potom $F_2 \cup F_3 \cup uv$ je BY-podgraf. V komplementárnom ofarbení cesta z u do v tvorená $F_1 \cup F_2$ je hamiltonovskou cestou modrej farby, obdobne cesta z u do v tvorená $F_1 \cup F_3$ je hamiltonovskou cestou žltej farby. Z toho vidíme, že toto ofarbenie tiež tvorí BY-podgraf, čo sme potrebovali ukázať. \square

Kapitola 5

Prisma nad zovšeobecnenými Petersenovými grafmi

V tejto kapitole preskúmame rozklad na hamiltonovské kružnice u zovšeobecnených Petersonových grafov. Pri dôkazoch budeme využívať postup z predchádzajúcej kapitoly.

Definícia 5.1 Zovšeobecnený Petersenov graf $GP(n, k)$ pre $n \geq 3$ a $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ je graf s vrcholovou množinou $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ a hranovou množinou $\{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : i = 0 \dots, n-1\}$, kde indexy sú brané modulo n .

Petersenov graf samotný je $GP(5, 2)$.

Poznámka 5.1 Zovšeobecnený Petersenov graf teda pozostáva z vonkajšej kružnice $u_0 u_1 \dots u_{n-1}$ a z vnútorných kružníc $v_0 v_k v_{2k} \dots v_0; v_1 v_{k+1} v_{2k+1} \dots v_1; \dots$, ktorých počet závisí od súdeliteľnosti parametrov n a k , a hrán spájajúcich vonkajšiu kružnicu s vnútornými.

Označenie 5.1 Vonkajšiu kružnicu budeme označovať U a vnútorné V_i pre $i = 0, 1 \dots$ tak, že i je najnižší index vrcholu v kružnici. Takýto vrchol kružnice V_i nazveme riadiaci.

5.1 Zovšeobecnené Petersenove grafy a perfektná 1-faktorizácia

Niektoré zovšeobecnené Petersenove grafy majú perfektnú 1-faktorizáciu a teda ich prisma podľa vety 3.2 má tiež hamiltonovský rozklad. Uvedieme si tu výsledky, ktoré boli publikované v článku [8] a jeho autori ich odvodili na základe Smithovej vety[9].

Veta 5.1 Grafy $GP(n, 1)$ nemajú perfektnú 1-faktorizáciu, okrem prípadu keď $n = 3$.

Veta 5.2 Grafy $GP(n, 2)$ majú perfektnú 1-faktorizáciu práve vtedy, keď $n \equiv 3, 4 \pmod{6}$.

Veta 5.3 Grafy $GP(n, 3)$ nemajú perfektnú 1-faktorizáciu okrem prípadu keď $n = 9$.

Veta 5.4 Grafy $GP(n, k)$ nemajú perfektnú 1-faktorizáciu pre n párne a k nepárne.

Veta 5.5 Grafy $GP(3m, k)$, kde $3m$ a k sú nesúdeliteľné a m je nepárne, majú perfektnú 1-faktorizáciu.

Veta 5.6 Grafy $GP(3k, k)$, kde k je nepárne, majú perfektnú 1-faktorizáciu.

5.2 Nové výsledky

Vyššie sme si uviedli prípady, keď zovšeobecnené Petersenove grafy majú perfektnú 1-faktorizáciu a niektoré prípady, keď vieme, že ju nemajú. Teraz dokážeme, že aj prisma nad ďalšími zovšeobecnenými Petersenovými grafmi má hamiltonovský rozklad.

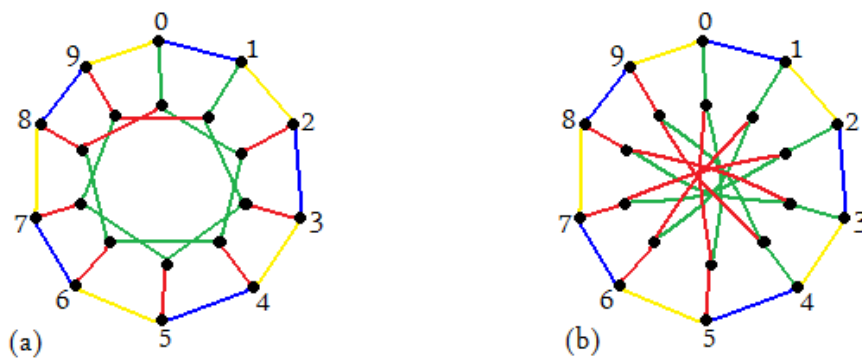
Veta 5.7 Prisma nad zovšeobecnenými Petersonovými grafmi $GP(n, 1)$ má hamiltonovský rozklad pre ľubovoľné n .

Dôkaz: Grafy $GP(n, 1) \square K_2$ sú zhodné s grafmi $C_n \square K_2 \square K_2$ a jeho obrázkový dôkaz je uvedený v predchádzajúcej kapitole. \square

Veta 5.8 Prisma nad zovšeobecnenými Petersonovými grafmi $GP(n,k)$, kde n je párne a k ľubovoľné, má hamiltonovský rozklad.

Dôkaz: Využijeme vetu z predchádzajúcej kapitoly. Kružnicu U ofarbíme striedavo modrou a žltou. Z hrán $u_i v_i$ a $v_i v_{i+k}$ budeme vytvárať a rozdeľovať zelené cesty do podgrafov tak, aby vždy jeden koniec cesty bol niektorý z vrcholov u_i a druhý koniec bol z množiny vrcholov u_i a aby sa v každom z podgrafov nachádzali všetky vrcholy. Do G' pridáme hrany $u_i v_i$ a všetky hrany $v_j v_{j+k}$ okrem hrany $v_i v_{i-k}$ kde v oboch prípadoch je v_i riadiaci vrchol. Zvyšné hrany budú v G'' . Popíšeme si prečo je G' aj G'' BY-podgraf. Pre G' začneme cestu vo vrchole u_0 cez zelenú hranu v modrom móde. Vo vrchole v_{n-k} prepne na žltý mód a vrátime sa späť do vrchola u_0 a pokračujeme cez žltú hranu v ceste. Ak má vnútro viac komponentov opäť cestujeme zelenou hranou a podobne ako v predchádzajúcom prípade sa vrátime do vrchola u_1 , ale v modrom móde. Takto pokračujeme až pokým neofarbíme všetky vnútorné komponenty. Potom už len ďalej cestujeme po vonkajšom cykle až po návrat do vrchola u_0 . Podobne budeme cestovať aj po grafe G'' . \square

Poznámka 5.2 V základnej definícii zovšeobecnených Petersonových grafov nie sú obsiahnuté grafy $GP(2k,k)$. Tieto môžeme doplniť tak, že hrany $v_i v_{i+k}$ budú dvojnásobné. Prisma nad takýmito grafmi má tiež hamiltonovský rozklad. Dôkaz by bol podobný ako je uvedené vyššie. Pre lepšie pochopenie odporúčam čitateľovi pozrieť si príklad na obrázku 5.1(b).



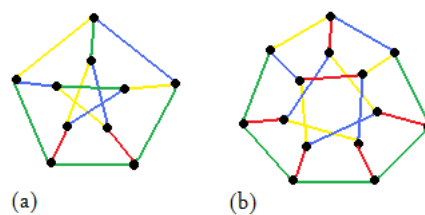
Obr. 5.1: (a) $GP(10,2)$, (b) $GP(10,5)$

Veta 5.9 Prisma nad zovšeobecnenými Petersenovými grafmi $GP(n, 2)$ má hamiltonovský rozklad pre ľubovoľné n .

Dôkaz: Pre párne n platí vyššie uvedený dôkaz. Pre nepárne n si dokážeme vetu teraz. Kružnicu $u_0u_1v_1v_3 \dots v_{n-1}u_{n-1}u_0$, označme ju H , ofarbíme striedavo modrou a žltou. Všimnime si jej tetivy u_0v_0 a v_1v_{n-1} a cestu $P = u_1u_2 \dots u_{n-1}$. Tetiva v_1v_{n-1} rozdeľuje H vždy na cesty nepárnej dĺžky a cesta $P = u_1u_2 \dots u_{n-1}$ na cesty párnej dĺžky. Pri tetive u_0v_0 to závisí od parametra n : ak $n \equiv 1(mod4)$, tak u_0v_0 delí H na cesty párnej dĺžky, v prípade, že $n \equiv 3(mod4)$ delí H na cesty nepárnej dĺžky. Podľa tohto potom budeme voliť ďalšie farbenie.

1.prípád: Nech $n \equiv 1(mod4)$. V prvom podgrafe ofarbíme zelenou cestu aj obe hrany. Odštartujeme vo vrchole u_0 modrou hranou. Sled potom bude vyzerat' nasledovne: $u_0u_1Pu_{n-1}v_{n-1}v_1v_3 \dots v_{n-2}v_0u_0u_{n-1}P^{-1}u_1v_1v_{n-1}v_{n-3} \dots v_2v_0u_0$. V úseku $v_1v_3 \dots v_{n-2}v_0$ sa v každom vrchole mení farba. Keďže sme začínali modrou farbou a dĺžka tohto úseku je párna, hrana $v_{n-2}v_0$ bude žltá a teda hranu u_0v_0 prechádzame v žltom móde. Podobne to bude vyzerat' aj pre zvyšok cesty. V druhom podgrafe priamočiario sledujeme H s odbočkami vo vrcholoch v_i do u_i pre $i = \overline{2, n-2}$. Teda sled v druhom podgrafe vyzerá takto: $u_0u_1v_1v_3u_3v_3v_5u_5v_5 \dots v_{n-3}u_{n-3}v_{n-3}v_{n-1}u_{n-1}u_0$.

2.prípád: Nech $n \equiv 3(mod4)$. Tu je úsek $v_1v_3 \dots v_{n-2}v_0$ nepárnej dĺžky a teda nemôžeme použiť rovnaké farbenie ako v prvom prípade. V prvom podgrafe ofarbíme zelenou farbou jedine cestu, tetivy u_0v_0 a v_1v_{n-1} ponecháme do druhého podgrafu. Potom prvému podgrafu prislúcha sled $u_0u_1Pu_{n-1}v_{n-1}v_{n-3} \dots v_1u_1Pu_{n-1}u_0$ a druhému $u_0u_1v_1v_{n-1}v_{n-3} \dots v_0u_0u_{n-1}v_{n-1}v_1v_3 \dots v_0u_0$.



Obr. 5.2: Ofarbenie pre (a) $GP(5, 2)$, (b) $GP(7, 2)$

Kapitola 6

Záver

V tejto práci sme sa venovali problematike hamiltonovského rozkladu v prizmách kubických grafov. Ukázali sme si, že 2-súvislosť nie je postačujúcou podmienkou na existenciu hamiltonovského rozkladu. Popísali sme si rôzne podtriedy kubických grafov o ktorých z literatúry vieme povedať, že majú hamiltonovský rozklad. Nakoniec sme overovali hypotézu na zovšeobecných Petersenových grafoch, z ktorých sa nám ju podarilo overiť pre $GP(n, 2)$ a $GP(2m, k)$. Niektoré ďalšie majú perfektnú 1-faktorizáciu a teda ich prisma tiež má hamiltonovský rozklad. Ďalej by sa dalo pokračovať skúmaním hamiltonovského rozkladu prisiem nad zovšeobecnými Petersenovými grafmi pre ktoré sme hypotézu neoverili.

Zoznam použitej literatúry

- [1] B. Alspach, M. Rosenfeld: On Hamilton decompositions of prisms over simple 3-polytopes, *Graphs and Combinatorics* 2 (1986) 1-8.
- [2] R. Čada, T. Kaiser, M. Rosenfeld, Z. Ryjáček: Hamiltonian decompositions of prisms over cubic graphs, *Discrete Math.* 286 (2004) 45 – 56.
- [3] R. Diestel: *Graph Theory*, Springer-Verlag Heidelberg, (2005).
- [4] V. Batagelj: Inductive definition of two restricted classes of triangulations, *Discrete Math.* 52 (1984) 113–121.
- [5] P. Paulraja, A characterization of hamiltonian prisms, *J. Graph Theory* 17 (1993) 161–171.
- [6] B. Grunbaum: Polytopes, graphs and complexes. *Bull. Amer. Math. Soc.* 76, (1970) 1145.
- [7] T. Fowler: Unique coloring of planar graphs, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, (1998).
- [8] S. Bonvicini, G. Mazzuocolo: On perfectly one-factorable cubic graphs, *Discrete Math.* 24 (2006) 47–51.
- [9] W. T. Tutte: On hamiltonian circuits, *J. London Math. Soc.* 21 (1946) 98-101.

Zoznam obrázkov

1.1	Prisma kompletného grafu K_4	3
2.1	Párny kaktus	5
3.1	Vrchol a jeho ofarbenie: (a)RRG, (b)BYG, (c)GGR, (d)BYR	9
3.2	2-súvislý kubický graf ktorý nemá hamiltonovský rozklad	12
3.3	Triangulácia vrchola	13
3.4	(a)Ofarbenie grafu K_4 , (b)Ofarbenie pre trianguláciu vrchola	14
3.5	Kocka	14
3.6	Transformácie generujúce 3-súvislé bipartitné grafy: (a)diamantová expanzia, (b) A_1 delenie	15
3.7	Jednoduché prípady A_1 delenia	16
3.8	Ofarbenia diamantovej expanzie z článku: (a)BYR, (b)RRG	16
3.9	Nové ofarbenie diamantovej expanzie pre prípad RRG	16
4.1	Ofarbenie, ak existuje tetiva deliaca H na párne cesty	20
4.2	Ofarbenia, ak sú v grafe len tetivy deliace H na nepárne cesty	21
4.3	Ofarbenie pre dvojnásobnú prismu C_n	21
5.1	(a)GP(10,2), (b)GP(10,5)	24
5.2	Ofarbenie pre (a)GP(5, 2), (b)GP(7, 2)	25