



KATEDRA INFORMATIKY  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

---

# FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

A JEJ POUŽITIE

(bakalárska práca)

PETER PEREŠÍNI

---



Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

.....



Moje poďakovanie patrí môjmu školiteľovi, RNDr. Michalovi Forišekovi za cenné námety, pripomienky a všetok strávený čas, bez ktorého by táto práca asi nevznikla.



## Abstrakt

**Názov práce:** Fourierova transformácia a jej použitie

**Autor:** Peter Perešíni

**Vedúci práce:** RNDr. Michal Forišek

**Abstrakt:** Práca sa zaoberá Fourierovou transformáciou a jej aplikáciami v informatike. V prvej časti sa snaží podať ucelený prehľad problematiky Fourierových radov a následné zovšeobecnenie dosiahnutých výsledkov na diskretnú a spojitú transformáciu. V druhej časti sa snaží prezentovať najdôležitejšie použitia tejto transformácie v informatike, rozoberať ich súvislosti a taktiež vysvetľovať dôvody použitia jednotlivých varintov Fourierovej resp. diskretnéj kosínovej transformácie.

**Kľúčové slová:** Fourierova transformácia, vlastnosti, aplikácie, DCT, DFT





# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
1.1	Motivácia . . . . .	1
1.2	Členenie práce . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Fourierova transformácia</b>	<b>3</b>
2.1	História . . . . .	3
2.2	Fourierove rady . . . . .	4
2.2.1	Harmonické funkcie . . . . .	4
2.2.2	Periodické rozšírenia . . . . .	9
2.2.3	Exponenciálna forma Fourierovho radu . . . . .	11
2.2.4	Dirichletov kernel . . . . .	12
2.2.5	Bodová konvergencia . . . . .	14
2.2.6	Derivácie, integrály a rovnomerná konvergencia . . . . .	16
2.3	Vektorový priestor $L^2(a, b)$ . . . . .	19
2.4	Gibbsov fenomén . . . . .	22
2.5	Vlastnosti Fourierových radov . . . . .	25
2.6	Fourierova transformácia . . . . .	27
2.6.1	Spojité Fourierova transformácia . . . . .	28
2.6.2	Diskrétna Fourierova transformácia . . . . .	28
2.7	Viacrozmerná Fourierova transformácia . . . . .	30
2.8	Príbuzné transformácie . . . . .	32
2.8.1	Transformácie príbuzné spojitej Fourierovej transformácii . . . . .	32
2.8.2	Transformácie príbuzné diskkrétnej Fourierovej transformácii . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Použitie v informatike</b>	<b>37</b>
3.1	Signal processing . . . . .	37
3.1.1	Je možné digitalizovať analógový signál? . . . . .	37
3.2	Signal processing - digitálne filtre . . . . .	38
3.2.1	Ideálny lowpass a highpass filter . . . . .	38
3.2.2	Hladké filtre . . . . .	40
3.2.3	Súvis medzi frekvenčnými a priestorovými filtrami . . . . .	47
3.2.4	Dekonvolúcia . . . . .	48
3.3	Image processing . . . . .	50
3.3.1	Fourierova transformácia - fáza a magnitúda . . . . .	50
3.3.2	Hľadanie patternov . . . . .	51
3.4	Image compression . . . . .	52
3.4.1	Základný náčrt kompresie údajov . . . . .	52
3.4.2	Jpeg - farebná predpríprava . . . . .	53
3.4.3	Jpeg - kosínová transformácia . . . . .	53
3.4.4	Prečo DCT a nie DFT? . . . . .	54
3.4.5	Jpeg kompresia . . . . .	55
3.4.6	Ďalšie aspekty JPEGu . . . . .	55

3.5	Kompresia videa/objemových obrázkov . . . . .	57
3.5.1	XYZ Video kompresia . . . . .	57
3.6	Audio kompresia . . . . .	58
3.6.1	Modifikovaná diskretná kosínová transformácia . . . . .	58
3.6.2	Psychoakustický model . . . . .	61
3.6.3	Kompresia . . . . .	63
3.7	Rýchle násobenie polynómov . . . . .	63
3.7.1	Rýchle vyhodnocovanie polynómov . . . . .	65
3.7.2	Rýchla interpolácia polynómov . . . . .	66
3.7.3	Súvislosť s DFT . . . . .	66
3.8	Hashing . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Záver</b>	<b>69</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Fourierova transformácia je v súčasnej dobe významný nástroj vo viacerých vedeckých oblastiach. Jej výhody, problémy a zákutia boli už mnohonásobne preskúmané desiatkami matematikov, fyzikov a inžinierov. Táto práca sa snaží zhrnúť významné poznatky o tejto transformácii a tiež akumulovať čo najviac rôznorodých použití v súčasnej vede s dôrazom na ukázanie súvislostí medzi nimi.

### 1.1 Motivácia

Hlavnou motiváciou k vzniku tohto diela bola absencia uceleného prehľadu o aplikáciach Fourierovej transformácie. Hoci je samotná transformácia diskutovaná v stovkách kníh, rozsah aplikácií je natoľko rôznorodý a obsiahly, že väčšina publikácií uvádza iba ich malú časť. Ďalšie publikácie sú priamo zamerané na určité použitie, pre ktorý bola daná publikácia písaná. Toto je veľká škoda, lebo čitateľ tak nedostáva kompletný prehľad súvislostí medzi týmito aplikáciami a teda aj súvislosti medzi rôznymi vedeckými disciplínami. Autorovým cieľom bola snaha čo najviac skompletizovať poznatky a ukázať, kde a na čo sa daná transformácia používa s dôrazom na súvislosti medzi jednotlivými aplikáciami.

### 1.2 Členenie práce

Na úvod, v 2. kapitole si postupne ukážeme Fourierove rady, ktoré sú historickým predchodcom Fourierovej transformácie (ďalej len FT) ako takej. Následne venujeme podstatnú časť kapitoly formalizácii problému, rôznym vlastnostiam Fourierových radov a ich konvergencii. Po vybudovaní dostatočného aparátu spravíme rýchly prechod na spojitú Fourierovu transformáciu, ktorú rýchlo prebehne bez väčšieho dôrazu na matematické dôkazy. Kapitulu ukončíme diskretnou FT a transformáciami založenými na FT. Tretia kapitola sa venuje samotným aplikáciám FT alebo príbuzným transformáciám. Ukážeme použitie transformácie v súčasnom informatickom svete, kde sa ukazuje ako sľubný nástroj na manipuláciu a kompresiu digitálneho signálu. Rozvedieme postupne rôzne techniky a modifikácie FT. Najskôr ako živnú pôdu pre manipuláciu a filtrovanie signálu, neskôr aplikácie v oblasti kompresie obrazu, videa a zvuku. Kapitulu zavýšime použitím FT v teórii algoritmov, ako nástroj na rýchle násobenie veľkých čísel a polynómov.



## Kapitola 2

# Fourierova transformácia

Cieľom nasledujúcej kapitoly bude oboznámiť čitateľa so základmi Fourierovej analýzy. Na úvod odvodíme Fourierove rady, ich rôzne formy zápisu. Neskôr sa budeme venovať matematickým podmienkam, za ktorých sa dajú Fourierove rady použiť, ich konvergencii a trochu sa budeme venovať Gibbsovmu fenoménu vznikajúcemu pri transformácii nespojitých funkcií. Ďalej vymenujeme ich vlastnosti s dôkazmi. Od Fourierových radov rýchlo prejdeme na samotnú transformáciu, kde si len zhrnieme základné poznatky a analógie s radmi. Kapitulu ukončíme strohým prehľadom transformácii súvisiacich s FT a porovnáme ich vlastnosti.

### 2.1 História

Za úplný začiatok Fourierovej transformácie sa dá považovať rok 1768, kedy sa narodil francúzsky matematik a fyzik Jean Baptiste Joseph Fourier v meste Auxerre. Jeho prínos, ktorý sa stretol s najväčšou odozvou možno nájsť v memoári z r. 1807. Neskôr bol publikovaný v knihe *La Théorie Analytique de la Chaleur* (Analytická teória tepla), ktorá uzrela svetlo sveta v roku 1822. Zjednodušene, Fourierov prínos matematike bol v pozorovaní, že každá periodická funkcia s istými nie veľmi obmedzujúcimi predpokladmi môže byť vyjadrená ako kombinácia sínusov a kosínusov s rôznymi frekvenciami a amplitúdami (v dnešnej dobe sa táto suma volá Fourierov rad). Nie je dôležité, ako komplikovaná daná funkcia je, ak spĺňa matematické základy, môže byť vyjadrená ako spomínaný rad. Možno sa to nezdá ako veľmi podivné, avšak v dobe keď Fourier prišiel s touto myšlienkou to bolo prelomové a neintuitívne a tak sa Fourierovo dielo zo začiatku stretlo so skepticizmom.

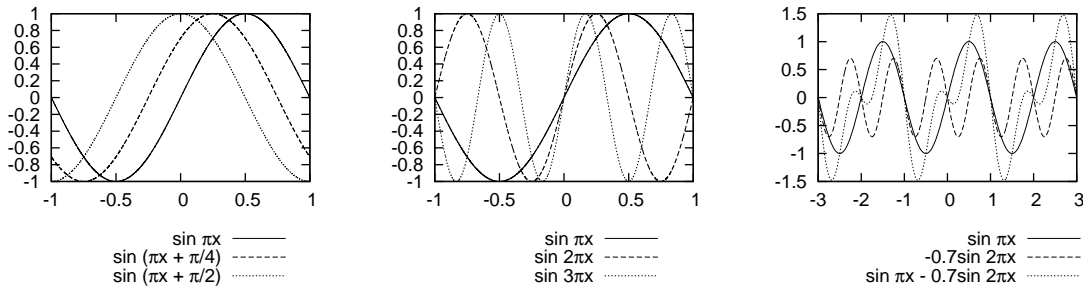
Navyše aj funkcie ktoré nie sú periodické, ale spĺňajú isté matematické podmienky, sa dajú zapísať ako integrál sínusov a kosínusov. Formulácia v tejto podobe sa nazýva Fourierova transformácia a jej využitie je ešte významnejšie ako využitie Fourierovho radu. Obe reprezentácie ale zdieľajú spoločné známky, a to síce, že pôvodné funkcie vieme zrekonštruovať inverznou transformáciou a to v presne tej istej podobe ako sa vyskytli. Toto nám umožňuje riešiť úlohu v inej doméne ako bola pôvodne formulovaná, mnohokrát jednoduchšej, a riešenie preniesť do pôvodnej domény. Koniec koncov - Fourierova transformácia vznikla z praktickej potreby matematiky počítať isté úlohy a toto ju učinilo dobre skúmanou oblasťou a výborným nástrojom.

Začalo to pôvodnou úlohou o difúzii tepla, ktorú Fourier formuloval a vyriešil v spomínanej publikácii. Za svoje roky však použitie transformácie prešlo rôznymi podobami a v dnešnej dobe je snáď najväčším použitím diskrétna Fourierova transformácia, ktorá sa používa v počítačovom spracovaní signálu, obrázkov a zvuku.

## 2.2 Fourierove rady

### 2.2.1 Harmonické funkcie

Teória okolo Fourierových radov sa zaoberá základnou otázkou „Ako aproximovať funkciu pomocou základných funkcií?“. Za základné funkcie si môžeme zvoliť ľubovoľnú sadu funkcií a potom študovať, či je daná aproximácia možná. Jedným zo zaujímavých odrazových mostíkov, ktorým sa venoval Fourier a teda aj celá táto publikácia sú harmonické funkcie ako  $\sin(nx)$ ,  $\cos(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Na obrázkoch 2.1 je znázornený ich priebeh a skladanie.



Obr. 2.1: Fázový posun, rôzne frekvencie a skladanie harmonických funkcií

Ako sa presvedčíme v ďalšom texte, pomocou harmonických funkcií a ich skladania budeme vedieť vyjadriť veľkú triedu iných funkcií a celá táto práca sa venuje ich využitiu.

**Definícia 2.2.1** Nech  $f(x)$  je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale  $(-\pi, \pi)$ . Napíšme

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.1)$$

a daný rad nazvime *Fourierovým radom*.

*Pozornému oku neunikne konštanta  $\frac{1}{2}$  pred  $a_0$ , ktorá zatiaľ nemá žiadny zjavný význam. Môžeme však ubezpečiť čitateľa, že je to vhodne zvolená konštanta, aby boli zvyšné výsledky a zápisy krajšie. Taktiež je to zaužívaná konvencia a nebudeme ju meniť.*

Rad v tejto podobe, kde konštanty  $a_n, b_n$  ešte treba bližšie špecifikovať sa nazýva *trigonometrický nekonečný rad*. Môže a nemusí konvergovať, a pre tie hodnoty  $x$  kde konverguje, môže a nemusí konvergovať k  $f(x)$ . Celou úlohou tejto kapitoly bude špecifikovať aké sú hodnoty  $a_n, b_n$  a kedy rad konverguje.

Začneme základnými závislosťami. Integrovaním môžeme overiť, že pre ľubovoľné  $m, n \in \mathbb{Z}$  platí

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n > 0 \\ 2L, & m = n = 0 \end{cases} \\ \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n > 0 \end{cases} \\ \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= 0, \quad \text{pre všetky } m, n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Taktiež platí pre  $n \in \mathbb{N}, n > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= 0 \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pokračujme teda v našom probléme určiť koeficienty  $a_n, b_n$  ak poznáme funkciu  $f(x)$ . Predpokladajme, že funkcia  $f(x)$  sa dá zapísať podľa (2.1). Navyše predpokladajme, že daný rad môže byť integrovateľný člen po člene, teda že integrál zo sumy je suma integrálov (a teda tiež predpokladajme, že  $f(x)$  je integrovateľná). Potom integrovaním od  $-\pi$  po  $\pi$  dostaneme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right)$$

Využitím (2.3) zmiznú všetky integrály v sume a výsledok je

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Ako ďalší krok zoberme (2.1), vynásobme obe strany  $\cos(nx)$  a budeme integrovať podobne ako minule.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx \right) \end{aligned}$$

Aplikovaním (2.3) na prvý integrál a (2.2) na integrály v sume, všetky integrály až na jeden budú nulové a ostane len integrál za koeficientom  $a_n$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi$$

Podobne môžeme odvodiť

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = b_n \pi$$

Zhrnutím dosiahnutých výsledkov dokopy, môžeme tvrdiť

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ak  $f(x)$  je integrovateľná a dá sa rozvinúť na trigonometrický rad, a ak trigonometrický rad získaný násobením  $\cos nx$  a  $\sin nx$  pre  $n \in \mathbb{N}_0$  sa dá integrovať člen po člene, potom koeficienty  $a_n, b_n$  sú dané podľa vzorca (2.4).

**Definícia 2.2.2** Koeficienty vypočítané podľa vzorca (2.4) nazveme Fourierove koeficienty funkcie  $f(x)$ .

**Príklad 2.2.1** Majme funkciu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanú nasledovne

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0) \\ 1 & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Všimnime si, že naša funkcia nie je definovaná v bode 0. Avšak pretože Fourierove koeficienty sú počítané integrovaním, zmena funkcie na konečnom počte bodov nemení hodnotu výsledku a teda ju možno dodefinovať na akúkoľvek hodnotu.

Pre  $n \in \mathbb{N}_0$  platí

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \quad (2.5)$$

Integrovaním dostávame

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0, \quad n > 0$$

Podobne, pre  $n \in \mathbb{N}$  máme

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}$$

Čo po výpočte dáva výsledok

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ je párne} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

Výsledný Fourierov rad pre  $f(x)$  je

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

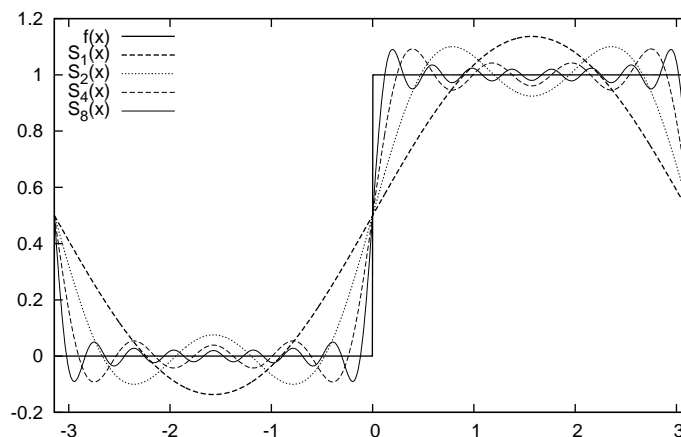
$$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1}$$

Označme čiastočný súčet  $S_n$  tohoto radu ako

$$S_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1} \quad n > 0$$

Graf funkcie  $f(x)$  a prvých pár čiastočných súčtov  $S_n$  sa dá nájsť na obrázku 2.2



Obr. 2.2: Čiastočné súčty Fourierovho radu obdĺžnikovej funkcie



**Príklad 2.2.2** Uvažujme funkciu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Pretože funkcia  $x \cos nx$  je nepárna, môžeme tvrdiť

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0$$

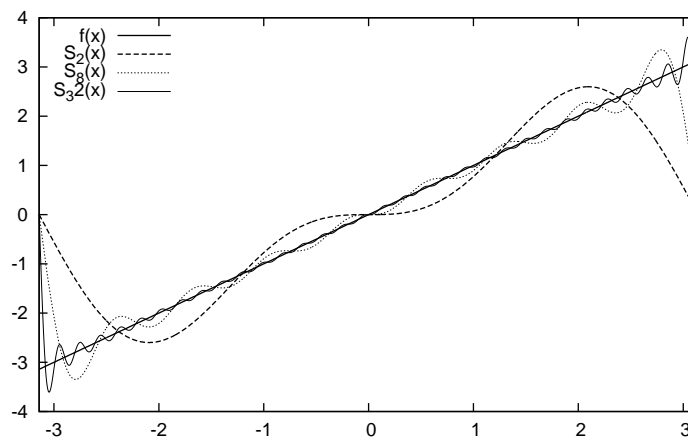
Koeficienty  $b_n$  dopočítame jednoduchou integráciou

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left. \frac{-x \cos nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-1}{n} \cos nx \, dx \\ &= \frac{-2 \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2 \cos nx}{n} \end{aligned}$$

A teda Fourierov rad  $f(x)$  je

$$\begin{aligned} f(x) &\sim 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x + \dots \\ &\sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \end{aligned}$$

Graf funkcie  $f(x)$  a prvých pár čiastočných súčtov  $S_n$  sa dá nájsť na obrázku 2.3



Obr. 2.3: Čiastočné súčty Fourierovho radu funkcie  $f(x) = x$  na intervale  $(-\pi, \pi)$

**Príklad 2.2.3** Ako tretí príklad si uvedieme funkciu

$$f(x) = |x|, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Vieme, že  $|x| \sin nx$  je nepárna funkcia a preto

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx = 0$$

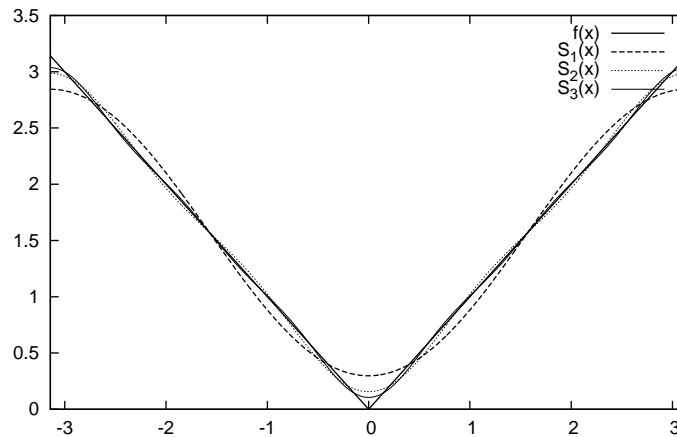
Pre výpočet členov  $a_n$  si rozdelíme integrál na dva intervaly:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x \sin nx}{n} \right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left. \frac{-\cos nx}{n^2} \right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^2} \end{aligned}$$

A výsledný Fourierov rad je

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x - \dots \\ &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos((2m-1)x)}{(2m-1)^2} \end{aligned}$$

Graf funkcie  $f(x)$  a prvých pár čiastočných súčtov  $S_n$  sa dá nájsť na obrázku 2.4



Obr. 2.4: Čiastočné súčty Fourierovho radu funkcie  $f(x) = |x|$  na intervale  $(-\pi, \pi)$

V tomto príklade vidíme, že čiastočné súčty sa približujú k funkcii rýchlejšie ako v predchádzajúcich prípadoch a rovnomerne. Formálnejšie si tento jav popíšeme neskôr, keď budeme mať vybudovaný dostatočný aparát.

Na záver si uvedieme užitočné identity pre harmonické funkcie

#### Lema 2.2.1 (Rozklad sínusu)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

#### Lema 2.2.2 (Rozklad kosínusu)

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

#### Lema 2.2.3 (O lineárnej kombinácii)

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi)$$

kde  $\phi = \arg(b + ia)$  (Funkcia  $\arg z$  reprezentuje uhol medzi reálnou osou a vektorom reprezentujúcim komplexné číslo  $z$ ).

**Lema 2.2.4 (Lineárna kombinácia harmonických funkcií)** *Nech  $f_i(x) = a_i \cos(x + \phi_i)$ . Potom môžeme zapísať  $F(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  ako  $F(x) = a \cos(x + \phi)$ .*

## 2.2.2 Periodické rozšírenia

**Definícia 2.2.3** *Funkciu  $f(x)$  definovanú na  $\mathbb{R}$  nazveme periodickou s periódou  $P > 0$  ak*

$$f(x) = f(x + P), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*Ak je funkcia periodická s periódou  $P$ , potom je periodická aj s periódou  $nP$  pre  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Taktiež, každá konštantná funkcia je periodická s ľubovoľnou periódou  $P > 0$ .*

**Lema 2.2.5** *Nech  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  sú periodické funkcie so spoločnou periódou  $P$ . Potom ich suma  $F(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  je taktiež periodická s periódou  $P$ .*

Špeciálnym dôsledkom lemy 2.2.5 je fakt, že  $n$ -tý čiastočný súčet Fourierovho radu ako sme ho definovali v definícii 2.2.1 je periodický s periódou  $2\pi$ . Zjavne, táto perióda je definovaná prvým nekonštantným členom daného súčtu.

**Definícia 2.2.4 (Periodické rozšírenie)** *Nech  $f(x)$  je definovaná na intervale  $[-L, L)$ . Túto funkciu môžeme rozšíriť na celý interval nasledujúcim spôsobom:*

$$\bar{f}(x) = f\left(x - 2L \left\lfloor \frac{x - L}{2L} \right\rfloor\right)$$

Nasledujúca lema nám vyjasní otázky okolo spojitosti takéhoto rozšírenia.

**Lema 2.2.6**  *$\bar{f}(x)$  je spojitá na  $(-\infty, \infty)$  vtedy a len vtedy ak  $f(x)$  je spojitá na  $[-L, L)$  a súčasne  $\lim_{x \rightarrow L^-} f(x) = f(-L)$*

Nateraz sa vrátíme k príkladom spomínaným v predchádzajúcej sekcii. Všimnime si, že v príklade 2.2.2 výsledný Fourierov rad pozostáva iba zo sínusov, zatiaľ čo Fourierov rad v príklade 2.2.3 pozostáva iba z kosínusov. Toto správanie je dôsledkom všeobecnejšieho tvrdenia, ktoré tu budeme prezentovať.

**Definícia 2.2.5 (Párne a nepárne funkcie)** *Funkciu  $f(x)$  nazveme párnou ak  $\forall x : f(x) = f(-x)$ . Podobne, funkciu nazveme nepárnou ak  $\forall x : f(x) = -f(-x)$ .*

Ľahko nahliadneme, že  $\sin x$  je nepárna funkcia a  $\cos x$  je párna funkcia. Môžeme si tiež všimnúť, že jedinou párnou a súčasne nepárnou funkciou je funkcia  $f(x) = 0$ . Veľká väčšina funkcií nie je ani párna ani nepárna, vieme ich ale zapísať ako súčet párnej a nepárnej funkcie ako vyplýva z nasledujúcej lemy.

**Lema 2.2.7** *Každú funkciu  $f$  vieme zapísať ako súčet párnej funkcie  $f_p$  a nepárnej funkcie  $f_n$  kde*

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$

$$f_n(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

D: Ľahko sa overí, že  $f = f_p + f_n$ . Taktiež, elementárnymi úpravami sa dá ukázať  $f_p(x) = f_p(-x)$  a  $f_n(x) = -f_n(-x)$   $\square$

**Veta 2.2.1** *Nech  $f$  je párna funkcia a  $g$  je nepárna funkcia. Potom integrál ich súčinnu*

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = 0, \quad L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \infty$$

D:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)g(x) dx &= \int_{-L}^0 f(x)g(x) dx + \int_0^L f(x)g(x) dx \\ &= \text{zavedením substitúcie } y = -x \text{ v prvom integráli} \\ &= - \int_0^L f(-y)g(-y) dy + \int_0^L f(x)g(x) dx \\ &= \int_0^L f(x)g(x) - f(-x)g(-x) dx = \int_0^L 0 dx = 0 \end{aligned}$$

□

Špeciálne pre Fourierov rad máme

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ f_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin nx \end{aligned}$$

Ľahko teda môžeme pozorovať, že pre párnú funkciu  $f$  sú koeficienty  $b_n$  nulové a naopak, pre nepárnu funkciu sú koeficienty  $a_n$  nulové. Môžeme však tvrdiť ešte viac

**Lema 2.2.8** *Pre každú párnú funkciu  $f$  platí*

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, & n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= 0, & n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

*Podobne pre každú nepárnu funkciu  $f$  platí*

$$\begin{aligned} a_n &= 0, & n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, & n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

D: Tvrdenia jednoducho dostaneme využitím symetrie a rozdelením integrálu na dve časti ako v dôkaze vety 2.2.1 □

Predchádzajúca lema nám dáva nasledujúce pozorovanie: Uvažujme funkciu  $f$  definovanú len na polovičnom intervale  $[0, \pi)$ . Potom môžeme položiť  $b_n = 0$  a dopočítať Fourierove koeficienty  $a_n$  podľa lemy 2.2.8. Na druhú stranu tiež môžeme položiť  $a_n = 0$  a dopočítať  $b_n$ . Dané rozvoje nazveme Fourierov sínusový/kosínový rad na pol-intervale a sú ekvivalentné párnemu/nepárnemu rozšíreniu funkcie  $f$ . Vidíme teda, že osová a stredová symetria spôsobujú absenciu niektorých členov Fourierovho rozvoja. Rôzne iné typy symetrie určujú zaujímavé závislosti medzi členmi Fourierovho rozvoja, ale v tejto publikácii ich necháme nepreskúvané.

### 2.2.3 Exponenciálna forma Fourierovho radu

Začneme základnou identitou, ktorá sa bude niest' celou sekciou a ktorá nám umožní spraviť kompaktnjší zápis Fourierovho radu pomocou komplexnej exponenciálnej funkcie.

#### Veta 2.2.2 (Eulerova identita)

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$$

Z danej vety sa dajú odvodiť nasledujúce zákonitosti

#### Lema 2.2.9

$$\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

Našou snahou bude ukázať, že Fourierov rad tak ako bol napísaný v definícii 2.2.1 sa dá napísať aj v nasledujúcej forme.

**Definícia 2.2.6 (Exponenciálna forma Fourierovho radu)** *Nech  $f(x)$  je definovaná na  $(-\pi, \pi)$ . Potom rad*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

*nazvime exponenciálnou formou Fourierovho radu*

Všimnime si že

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{i-nx} = (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + (c_n - c_{-n}) i \sin(nx)$$

Preto musí platiť

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n + c_{-n} = a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$c_n - c_{-n} = i b_n, \quad n \in \mathbb{N}$$
(2.6)

Dané rovnice možno ľahko prepísať do podoby

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + i b_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - i b_n), \quad n \in \mathbb{N}$$
(2.7)

Posledným krokom k završeniu nášho poznania bude vyjadrenie  $c_n$  pomocou vzorca (2.4).

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-0ix} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx + i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos -nx + i \sin -nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Dospeli sme teda k finálnemu vzorcu

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.8)$$

Čo sa týka čiastočných súčtov, pre obe reprezentácie je  $n$ -tý čiastočný súčet rovnaký, ak zadefinujeme  $n$ -tý čiastočný súčet exponenciálnej formy ako  $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ . Tento fakt je dôležitý, nakoľko nám umožňuje voľné zamieňanie oboch reprezentácií, čo budeme v tejto publikácii aj následne robiť.

Ešte predtým ako ukončíme toto rozprávanie však treba poznamenať, že táto cesta odvodenia nebola jediná možná a rovnako dobre sa dajú odvodiť koeficienty podobnou cestou ako sme na začiatku odvodili koeficienty  $a_n, b_n$ . Využitím nasledujúcej lemy a opakovaním postupu taktiež vieme dopočítať koeficienty  $c_n$ .

**Lema 2.2.10 (Ortogonalita exponenciálnych funkcií)**

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases}$$

## 2.2.4 Dirichletov kernel

**Definícia 2.2.7** Triedou po častiach spojitých funkcií na intervale  $[a, b]$  nazveme triedu funkcií  $f(x)$  definovaných na intervale  $[a, b]$  okrem konečného počtu bodov ak pre každú takú funkciu  $f(x)$  existuje  $n \in \mathbb{N}$ , body  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  a funkcie  $f_1, \dots, f_n$  každá spĺňajúca nasledovné podmienky

- $f_i$  je definovaná na  $(x_{i-1}, x_i)$
- pre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  je funkcia  $f_i$  spojitá
- $\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f_i$  a  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f_i$  existujú a sú konečné
- $f(x) = f_i(x)$  pre  $x$  spĺňajúce  $x_{i-1} < x < x_i$

Túto triedu budeme označovať  $PC[a, b]$ . Navyše, funkciu nazveme po častiach spojitú na intervale  $(-\infty, \infty)$  ak  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  platí  $f \in PC[a, b]$  a budeme to značiť  $f \in PC(-\infty, \infty)$ .

**Lema 2.2.11** Ak  $f \in PC[a, b]$ , potom  $f$  je ohraničená na intervale  $[a, b]$ .

**Lema 2.2.12**  $PC[a, b]$  je vektorový priestor

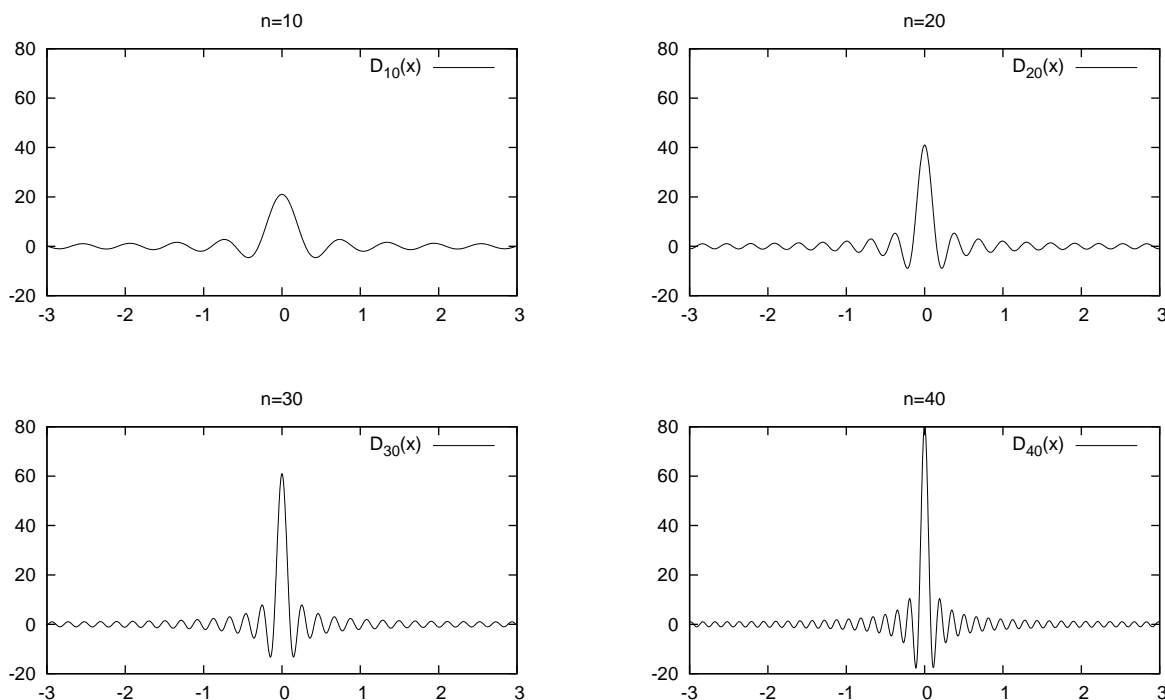
K našim pojmom ešte pripojíme pojem po častiach hladkej funkcie.

**Definícia 2.2.8** Hovoríme, že funkcia  $f$  je po častiach hladká, ak  $f \in PC[a, b]$ ,  $f'$  existuje až na konečný počet bodov a  $f' \in PC[a, b]$ . Fakt že funkcia  $f$  je po častiach hladká na intervale  $[a, b]$  budeme označovať  $f \in PS[a, b]$ .

**Definícia 2.2.9** Dirichletovým kernelom rádu  $n$  s periódou  $2L$  nazveme periodickú funkciu s periódou  $2L$  definovanú na  $(-L, L)$  vzorcom

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} & x \neq 0 \\ 2n+1 & x = 0 \end{cases}$$

Priebeh Dirichletovho kernelu s periódou  $2\pi$  je zobrazený na obrázku 2.5



Obr. 2.5: Dirichletov kernel

**Lema 2.2.13** Dirichletov kernel je súčtom exponenciálnych funkcií

$$D_n(x) = \sum_{m=-n}^n e^{2\pi i m x / 2L} \quad (2.9)$$

D: Ak  $x = 0$ , dostávame  $D_n(0) = \sum_{m=-n}^n e^0 = 2n + 1$ . Za predpokladu  $x \neq 0$  platí

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{m=-n}^n e^{2\pi i m x / 2L} = e^{-2\pi i n x / 2L} \sum_{k=0}^{2n} e^{2\pi i k x / 2L} \\ &= e^{-2\pi i n x / 2L} \frac{e^{2\pi i (2n+1)x / 2L} - 1}{e^{2\pi i x / 2L} - 1} \\ &= \frac{2i e^{\pi i x / 2L}}{2i e^{\pi i (2n+1)x / 2L}} \cdot \frac{e^{2\pi i (2n+1)x / 2L} - 1}{e^{2\pi i x / 2L} - 1} \\ &= \frac{2i e^{\pi i x / 2L}}{e^{2\pi i x / 2L} - 1} \cdot \frac{e^{2\pi i (2n+1)x / 2L} - 1}{2i e^{\pi i (2n+1)x / 2L}} \\ &= \frac{2i}{e^{\pi i x / 2L} - e^{-\pi i x / 2L}} \cdot \frac{e^{\pi i (2n+1)x / 2L} - e^{-\pi i (2n+1)x / 2L}}{2i} \\ &= \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right)}{\sin\frac{\pi x}{2L}} \end{aligned}$$

□

**Veta 2.2.3**  $N$ -tý čiastočný súčet Fourierovho radu funkcie  $f \in PC[a, b]$  je rovný konvolúcií s Dirichletovým kernelom

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) D_n(x - y) dy$$

D:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \sum_{m=-n}^n \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-2\pi i n y / 2L} dy \right) e^{2\pi i n x / 2L} \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) \left( \sum_{m=-n}^n e^{2\pi i n (x-y) / 2L} \right) dy \end{aligned}$$

Výsledok dostaneme aplikovaním (2.9) na danú sumu.  $\square$

Jednoduchým dôsledkom predchádzajúcej vety je ďalšia lema.

**Lema 2.2.14 (Integrál Dirichletovho kernelu)**

$$\int_{-L}^L D_n(y) dy = 2L$$

D: Podľa predchádzajúcej vety platí  $S_n(f, x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) D_n(x-y) dy$ . Špeciálne pre funkciu  $f(x) = 1$  platí  $S_n(x) = 1$  a teda

$$1 = S_n(0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L 1 D_n(-y) dy = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L D_n(y) dy$$

$\square$

Veta 2.2.3 nám hovorí, že  $n$ -tý čiastočný súčet vieme vypočítať ako jednoduchý konvolučný integrál. Z obrázka 2.5 možno vidieť, že Dirichletov kernel sa so zväčšujúcim  $n$  koncentruje okolo stredu. Naším ďalším cieľom bude ukázať, že v limitnom prípade  $n \rightarrow \infty$  Dirichletov kernel „vyberie“ iba hodnotu  $f(x)$ . Ako ďalej uvidíme, Dirichletov kernel hlboko súvisí s delta funkciou.

## 2.2.5 Bodová konvergencia

**Lema 2.2.15 (Riemann-Lebesgueova lema)** *Nech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in PC[a, b]$ . Potom*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0$$

D: Lema vyzerá intuitívne, nakoľko ak zväčšujeme  $\lambda$ , perióda oscilácií sa znižuje a príspevky z kladných a záporných častí integrandu sa anulujú.

Nech  $(c, d)$  je podinterval  $[a, b]$  na ktorom je  $f$  spojitá. Definujme

$$I(\lambda) = \int_c^d f(x) \sin \lambda x dx \tag{2.10}$$

Substitúciou  $x = y + \pi/\lambda$  dostávame

$$I(\lambda) = \int_{c-\pi/\lambda}^{d-\pi/\lambda} f(y + \pi/\lambda) \sin \lambda y dy \tag{2.11}$$

Sčítaním (2.10) a (2.11) dostávame

$$\begin{aligned} 2I(\lambda) &= - \int_{c-\pi/\lambda}^c f(x + \pi/\lambda) \sin \lambda x dx \\ &\quad + \int_{d-\pi/\lambda}^d f(x) \sin \lambda x dx \\ &\quad + \int_c^{d-\pi/\lambda} (f(x) - f(x + \pi/\lambda)) \sin \lambda x dx \end{aligned}$$



Podľa lemy 2.2.11 existuje maximum z  $|f|$  na intervale  $[c, d]$ , označme ho  $K$ . Predpokladajme navyše že  $\lambda$  je dostatočne veľká, aby  $\pi/\lambda \leq d - c$ . Potom využijúc  $|\sin \lambda x| \leq 1$  máme

$$|I(\lambda)| \leq K\pi/\lambda + \frac{1}{2} \int_c^{d-\pi/\lambda} |f(x) - f(x + \pi/\lambda)| \quad (2.12)$$

Pretože  $f$  je spojitá na  $(c, d)$  a oboje krajné limity sú konečné, je na  $(c, d)$  aj rovnomerne spojitá. Potom  $\forall \varepsilon \exists \lambda_0 : \forall \lambda > \lambda_0$  platí

$$|f(x) - f(x + \pi/\lambda)| < \frac{\varepsilon}{d - c - \pi/\lambda}$$

Zvoľme  $\lambda_0$  také, aby  $K\pi/\lambda_0 < \varepsilon/2$ . Potom podľa (2.12) platí  $\forall \lambda > \lambda_0 : |I(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  a teda  $I(\lambda) \rightarrow 0$  ak  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Použitím rovnakého argumentu pre kosínus a aplikovaním výsledku na všetky podintervaly  $[a, b]$  na ktorých je  $f$  spojitá môžeme zakončiť dôkaz.  $\square$

**Veta 2.2.4 (Fourierova veta)** Ak  $f \in PS[a, b]$  je funkcia s periódou  $2L$ , potom pravá strana rovnice (2.2.6) v definícii 2.2.6 s  $c_n$  podľa (2.8) konverguje bodovo k

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \right) && \text{pre } x \in (-L, L) \\ & \frac{1}{2} \left( \lim_{y \rightarrow -L^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow -L^-} f(y) \right) && \text{pre } x = -L \text{ alebo } L \end{aligned}$$

Navyše ak v bode  $x$  je  $f(x)$  spojitá, pravá strana (2.2.6) konverguje bodovo k  $f(x)$ .

D: Nech  $t \in (-L, L)$ . Potom  $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = f_-(t)$  a  $\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f_+(t)$ . Podobne, pretože  $f' \in PC[a, b]$ , platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_-(t) - f(t-h)}{h} = f'_-(t), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f_+(t)}{h} = f'_+(t)$$

Ak zvolíme  $h$  dostatočne malé na to aby  $f$  bola spojitá na  $(t-h, t)$ , podľa vety o strednej hodnote existuje  $c \in (t-h, t)$  spĺňajúce  $f_- - f(t-h) = f'(c)h$ . Nakoľko podľa lemy 2.2.11 aplikovanej na  $f'$  je  $f'$  ohraničená, existuje  $M$  také že

$$|f_- - f(t-h)| \leq \frac{1}{2} Mh$$

Použitím rovnakého argumentu pre  $t+h$  môžeme dospieť k tvrdeniu

$$|f_- - f(t-h)| + |f(t+h) - f_+| \leq Mh \quad (2.13)$$

pre všetky  $h > 0$  také, že  $f$  je spojitá na  $(t-h, t)$  a  $(t, t+h)$ .

Ak vo vete 2.2.3 zavedieme substitúciu  $y = t + y'$  a využijeme fakt  $D_n(t) = -D_n(t)$

$$S_n(f, t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t+y') D_n(y') dy'$$

Podobne dostaneme

$$S_n(f, t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t-y') D_n(y') dy'$$

A sčítaním máme

$$S_n(f, t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{1}{2} (f(t+y')f(t-y')) D_n(y') dy'$$

Čo môžeme pomocou lemy 2.2.4 upraviť na tvar

$$S_n(f, t) - \frac{1}{2}(f_- + f_+) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(t, y') \sin\left((2n+1)\frac{\pi y'}{2L}\right) dy' \quad (2.14)$$

kde

$$g(t, y') = \frac{f(t+y') - f_+ + f(t-y') - f_-}{2 \sin(\pi y'/2L)}$$

Ak uvažujeme funkciu  $g(t, y')$  ako funkciu premennej  $y'$ ,  $g(t, y')$  je po častiach spojitá a ohraničená, s možnou výnimkou v bode  $y' = 0$ . Avšak, pre dostatočne malé  $y'$  (2.13) ukazuje

$$|g(t, y')| \leq \frac{M|y'|}{2|\sin(\pi y'/2L)|} \quad (2.15)$$

Čo je ohraničené pre  $y' \rightarrow 0$ . Funkcia  $g$  preto spĺňa podmienky Riemann-Lebesguovej vety a z (2.14) môžeme usudzovať  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}(f_- + f_+)$ . Využitím periodickosti  $f, f'$ , ten istý dôkaz môžeme použiť pre  $t = -L$  a  $t = L$ .  $\square$

## 2.2.6 Derivácie, integrály a rovnomerná konvergencia

Cieľom tejto sekcie bude ukázať podmienky rovnomernej konvergencie Fourierovho radu. Cestou však preskúame nemenej dôležité vlastností a to správanie sa Fourierovho radu vzhľadom na integrovanie a derivovanie. Taktiež, v tejto sekcii sa budeme odkazovať na niektoré vety a lemy, ktoré budú uvedené až neskôr. Čitateľa by to mohlo zmiast' a môže si myslieť, že sa snažíme o nejaký spôsob cyklického dôkazu. Môžeme ho však ubezpečiť, že dané vety sa dokážu úplne bez tejto kapitoly.

Začneme fundamentálnou vetou matematickej analýzy:

**Veta 2.2.5** *Nech  $f$  je spojitá funkcia na intervale  $[a, b]$  a  $f \in PS[a, b]$ . Potom*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Túto vetu využijeme v nasledujúcom texte hneď niekoľkokrát. Ale vrhnime sa rovno do problému:

*V nasledujúcich vetách budeme používať formuláciu „Nech  $f$  je  $2\pi$ -periodická spojitá a po častiach hladká funkcia“. Týmto nechceme povedať, že daná veta neplatí pre funkcie definované iba na intervale  $[-\pi, \pi]$ , ale chceme zjednodušiť formuláciu „Nech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkcia  $f \in PS[a, b]$  pre ktorú navyše platí  $f(-\pi) = f(\pi)$ “ a tiež sa zbaviť zvytočného dokazovania v okrajových bodoch.*

**Veta 2.2.6** *Nech  $f$  je  $2\pi$ -periodická spojitá a po častiach hladká funkcia. Nech  $a_n, b_n, c_n$  sú Fourierove koeficienty ako bolo definované v rovniciach (2.4) a (2.8). Nech  $a'_n, b'_n, c'_n$  sú Fourierove koeficienty  $f'$ . Potom*

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n, \quad c'_n = \hat{n}c_n \quad (2.16)$$

D: Využijeme integráciu per partes.

$$c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left( f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -in f(x) e^{-inx} dx \right)$$

Kde

$$f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

pretože  $f(-\pi) = f(\pi)$  a  $e^{\hat{i}n\pi} - e^{-\hat{i}n\pi} = 2\hat{i}\sin(n\pi) = 0, \forall n \in Z$ . Dôkaz pre  $a'_n, b'_n$  je podobný a prenecháme ho čitateľovi.  $\square$

Skombinovaním prechádzajúcej vety s vetou 2.2.4 dostaneme tvrdenie

**Veta 2.2.7** *Nech  $f$  je  $2\pi$  periodická, spojitá a po častiach hladká a nech  $f'$  je tiež po častiach hladká. Ďalej nech*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\hat{i}nx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

je Fourierov rad  $f$ . Potom rad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{i}nc_n e^{\hat{i}nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

konverguje bodovo k  $f'(x)$  pre všetky body  $x$  kde  $f'$  je spojitá a k  $\frac{1}{2}(f'(x_-) + f'(x_+))$  v bodoch nespojitosti.

D: Pretože  $f' \in \text{PS}(-\infty, \infty)$ , podľa 2.2.4 jej Fourierov rad konverguje bodovo k vyššie popísaným hodnotám. Zároveň však vieme podľa vety 2.2.6 jednotlivé koeficienty a preto daná suma musí bodovo konvergovať k popísaným hodnotám.  $\square$

Integrácia má oproti derivácii jeden problém navyiac. Predstavme si, že  $f$  je spojitá a periodická. Potom jej primitívna funkcia  $F(x) = \int f(x) dx$  nemusí byť periodická funkcia. Typický príklad je funkcia  $f(x) = 1$ , potom  $F(x) = x$ . Na druhej strane, všetky nekonštantné členy Fourierovho radu sú po integrácii periodické funkcie a tak môžeme dospieť k záveru, že funkcia má periodickú primitívnu funkciu práve vtedy ak jej konštantný člen Fourierovho radu je 0. Presnejšou formuláciou je nasledujúca veta.

**Veta 2.2.8** *Nech  $f$  je  $2\pi$  periodická a po častiach spojitá s Fourierovými koeficientami  $a_n, b_n, c_n$ . Označme  $F(x) = \int_0^x f(x) dx$ . Ak  $c_0 = a_0 = 0$ , tak pre  $\forall x \in \mathbb{R}$  platí*

$$F(x) = C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{\hat{i}n} e^{\hat{i}nx} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right) \quad (2.17)$$

kde konštantný člen je vypočítaný ako

$$C_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$$

Pokiaľ  $c_0 \neq 0$ , suma na pravej strane (2.17) konverguje k  $F(x) - c_0 x$ .

D:  $F$  je spojitá a po častiach hladká, pretože je integrálom po častiach spojitej funkcie. Navyše, ak  $c_0 = 0$ ,  $F$  je  $2\pi$ -periodická

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi c_0 = 0$$

Potom podľa vety 2.2.4 je Fourierov rad  $F(x)$  bodovo konvergentný. Použitím vety 2.2.7 na funkciu  $F$ , Fourierove koeficienty  $A_n, B_n, C_n$  sú viazané ku Fourierovým koeficientom  $a_n, b_n, c_n$  funkcie  $f$  vzťahom

$$A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n}, \quad C_n = \frac{c_n}{\hat{i}n}, \quad n \neq 0$$

Pokiaľ  $c_0 \neq 0$ , môžeme použiť predchádzajúce argumenty na funkciu  $f(x) - c_0$  a tým zavříšime tvrdenie vety.  $\square$

Vety, ktoré sme spomínali hovorili o bodovej konvergencii. Ako však vieme, bodová konvergencia môže byť zradná a omnoho radšej by sme používali rovnomernú konvergenciu. Na jej dôkaz použijeme Weierstrassov M-test. Ešte predtým sa ale ubezpečíme, že konvergencia radu v trigonometrickom a exponenciálnom tvare je jedno a to isté

**Lema 2.2.16**

$$\begin{aligned} |c_{\pm n}| &\leq |a_n| + |b + n| \\ |a_n| &\leq |c_n| + |c_{-n}| \\ |b_n| &\leq |c_n| + |c_{-n}| \end{aligned}$$

D: Dôkaz je jednoduchým aplikovaním trojuholníkovej nerovnosti komplexných čísel na rovnice (2.6) a (2.7)  $\square$

**Lema 2.2.17 (Suma obrátených štvorcov je konvergentná)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

D: Dôkaz je klasickým výsledkom modernej matematiky a nebudeme ho uvádzať  $\square$

Postačujúce (ale nie nutné) podmienky rovnomernej konvergencie Fourierovho radu si sformulujeme v nasledujúcej vete

**Veta 2.2.9 (Rovnomerná konvergencia)** *Ak  $f$  je  $2\pi$ -periodická spojitá a po častiach hladká funkcia, potom Fourierov rad konverguje k  $f$  rovnomerne na  $\mathbb{R}$ .*

D: Podľa vety 2.2.4 vieme, že Fourierov rad konverguje bodovo k  $f$ . Preto stačí ukázať pomocou Weierstrassovho M-testu aj rovnomernú konvergenciu a dôkaz je hotový. Navyše, podľa lemy 2.2.16 stačí ukázať  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$  pretože  $\forall x : |c_n e^{inx}| = |c_n|$ . Použitím Besselovej nerovnosti (veta 2.3.2) na  $f'$  dostávame

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx \quad (2.18)$$

Podľa (2.16) je  $c_n = \frac{c'_n}{in}$ ,  $n \neq 0$ . Potom

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{c'_n}{n} \right| \leq |c_0| + \sqrt{\left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right) \left( \sum_{n \neq 0} |c'_n|^2 \right)} \quad (2.19)$$

kde sme využili vetu 2.3.1 (Cauchy-Schwarzova nerovnosť). Využitím lemy 2.2.17 a Besselovej nerovnosti aplikovanej na  $f$  dostávame

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \leq |c_0| + \sqrt{\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx} < \infty \quad (2.20)$$

Podľa Weierstrassovho M-testu teda daný exponenciálny ( a teda aj trigonometrický) Fourierov rad rovnomerne konverguje k  $f$ .  $\square$

Koniec tejto sekcie venujeme veci ktorá priamo súvisí s konvergenciou. Ako sme mohli pozorovať hneď na začiatku na príkladoch, rád konvergencie Fourierovho radu sa môže medzi funkciami

líšiť. Pre nespojité funkcie z príkladov 2.2.1 a 2.2.2 Fourierov rad konverguje pomaly. Naproti tomu Fourierov rad spojitej funkcie z príkladu 2.2.3 konvergoval rýchlejšie. Je preto načas zahľadieť sa trochu viac do tejto problematiky.

Vráťme sa preto k vete 2.2.7. Pokiaľ je  $f$  dostatočne hladká a má veľa derivácií, opakovaním vety niekoľkokrát postupne na vypočítanie Fourierových koeficientov  $f', f'', f''', \dots$ . Zakaždým, keď spravíme deriváciu, veľkosť koeficientu  $c_n$  (ale aj  $a_n, b_n$ ) sa zväčší  $|n|$  násobne. Teda derivované série postupne konvergujú pomalšie a pomalšie. Alebo obrátene - ak derivovaná séria konverguje, pôvodná séria musela konvergovať rýchlo. Tu je precízna formulácia

**Veta 2.2.10** *Nech  $f$  je  $2\pi$ -periodická. Pokiaľ  $f \in C^{(k-1)}$  a  $f^{(k-1)} \in PS(-\infty, \infty)$ , teda  $f^{(k)} \in PC(-\infty, \infty)$ , potom pre Fourierove koeficienty  $f$  platí*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k b_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n|^2 < \infty \quad (2.21)$$

Špeciálne,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k c_n = 0 \quad (2.22)$$

Na opačnú stranu, nech Fourierove koeficienty  $c_n$  spĺňajú  $|c_n| \leq D|n|^{-(k+\alpha)}$ ,  $n \neq 0$  alebo ekvivalentne  $|a_n| \leq Dn^{-(k+\alpha)}$  a  $|b_n| \leq Dn^{-(k+\alpha)}$  pre nejaké konštanty  $D > 0$ ,  $\alpha > 1$ . Potom  $f \in C^{(k)}$ .

D: Najskôr aplikujeme vetu 2.2.7  $k$  krát a dospejeme k výsledku  $c_n^{(k)} = (in)^k c_n$  (a podobne pre  $a_n, b_n$ ). Aplikovaním vety 2.3.2 (Besselova nerovnosť) dostávame požadovanú nerovnosť nakoľko  $f^{(k)} \in PC(-\infty, \infty)$  a teda  $\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)|^2 dx < \infty$ .

Dôkaz druhej časti začneme pozorovaním pre  $j \leq k$

$$\sum_{n \neq 0} |n^j c_n| \leq D \sum_{n \neq 0} |n|^{j-(k+\alpha)} \leq 2D \sum_{n=1}^{\infty} |n|^{j-k-\alpha} \leq 2D \sum_{n=1}^{\infty} |n|^{-\alpha} < \infty \quad (2.23)$$

kde posledná nerovnosť vyplýva z faktu  $\alpha > 1$ . Potom, podľa Weierstrassovho M-testu je rad  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n e^{inx}$  rovnomerne konvergentný. Podľa vety 2.2.4 ale vieme, že postupne daný rad (bodovo) konverguje k  $f^{(j)}$ . Tým pádom je ale  $f^{(j)}$  spojitá pre  $j \in 1, 2, \dots, k$ .  $\square$

Dané dve časti vety nie sú presným opakom. V skutočnosti tu neexistuje jednoduché „vtedy a len vtedy“. Ale pointa je zjavná - čím viac derivácií funkcia má, tým rýchlejšie konverguje jej Fourierov rad.

## 2.3 Vektorový priestor $L^2(a, b)$

**Definícia 2.3.1** *Množinu všetkých absolútne Lebesgueovsky integrovateľných funkcií z  $R(a, b)$  resp.  $C(a, b)$  pre ktoré platí*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

*budeme označovať  $L^2(a, b)$ .*

**Lema 2.3.1**  *$L^2(a, b)$  je vektorový priestor.*

**Definícia 2.3.2** *Skalárny súčin v  $L^2(a, b)$  definujeme ako  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$  resp.  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$  v prípade komplexných čísel.*

**Definícia 2.3.3** *Normou funkcie  $f$  v  $L^2(a, b)$  nazveme číslo  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$ . Všimnime si, že  $\|f\| \geq 0$  pre všetky  $f \in L^2(a, b)$ .*

**Definícia 2.3.4** Dve funkcie  $f, g \in L^2(a, b)$  nazveme rovnaké, ak  $\|f - g\| = 0$ . Ako sme už videli, toto nutne neznamená, že sú identické bodovo. Funkcie v  $L^2(a, b)$  si preto môžeme predstaviť ako triedy ekvivalencie bodových funkcií. Pri počítaní s funkciami v  $L^2(a, b)$  budeme stále počítat' s funkciami ako bodovými, avšak budeme rozumieť, že zmenením hodnôt funkcie na množine miery 0 neovplyvníme výsledok.

**Definícia 2.3.5** Funkcie  $f, g \in L^2(a, b)$  nazveme ortogonálne, ak  $\langle f, g \rangle = 0$  a budeme to značiť ako  $f \perp g$ .

**Definícia 2.3.6 (Ortonormálna množina)** Nech  $f_i \in L^2(a, b)$  je množina funkcií pre ktorú platí  $\forall i \neq j : f_i \perp f_j$  a zároveň  $\forall i : \|f_i\| = 1$ . Potom danú množinu nazveme ortonormálnu množinu funkcií na  $L^2(a, b)$ .

**Lema 2.3.2 (Pythagorova veta)** Nech  $f, g$  sú elementy vektorového priestoru a  $f \perp g$ . Potom  $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \|f + g\|^2$ .

D:

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = (\text{z linearity vektorového súčinu}) \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 \end{aligned}$$

Kde posledná rovnosť vyplýva z ortogonalít  $f, g$ .  $\square$

**Veta 2.3.1 (Cauchy-Schwarzova nerovnosť)** Nech  $f, g$  sú prvky vektorového priestoru so skalárnym súčinom  $\langle f, g \rangle$ . Potom  $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$ .

D: Ak  $g = 0$ , tak tvrdenie triviálne platí. Preto predpokladajme  $g \neq 0$ . Nech  $\alpha$  je komplexné číslo. Potom

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - \alpha g\|^2 = \langle f - \alpha g, f - \alpha g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \bar{\alpha} \langle f, g \rangle - \alpha \langle g, f \rangle + |\alpha|^2 \langle g, g \rangle \end{aligned}$$

Ak za  $\alpha$  zvolíme  $\langle f, g \rangle \langle g, g \rangle^{-1}$  (využijeme predpoklad  $g \neq 0$  a fakt  $x\bar{x} = |x|^2$ ), dostaneme nerovnosť

$$0 \leq \langle f, f \rangle - |\langle f, g \rangle|^2 \langle g, g \rangle^{-1}$$

ktorá platí vtedy a len vtedy ak

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$$

$\square$

**Lema 2.3.3 (Trojuholníková nerovnosť)** Trojuholníková nerovnosť: Nech  $f, g$  sú prvky vektorového priestoru. Potom  $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$ .

D: Z dôkazu pytagorovej vety máme

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \|f\|^2 + 2\Re \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \leq \text{podľa Cauchy-Schwarzovej nerovnosti} \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

Dokazovanú nerovnosť dostaneme odmocnením  $\square$

**Lema 2.3.4**

$$\left( x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right) \perp \left( \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right) \quad (2.24)$$

D:

$$\begin{aligned}
\left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle &= \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle x, \langle x, x_i \rangle x_i \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \langle x, x_i \rangle x_i, \langle x, x_j \rangle x_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\langle x, x_i \rangle} \langle x, x_i \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_j \rangle} \langle x_i, x_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\langle x, x_i \rangle} \langle x, x_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_i \rangle} \langle x_i, x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\langle x, x_i \rangle} \langle x, x_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_i \rangle} = 0
\end{aligned}$$

□

**Veta 2.3.2 (Besselova nerovnosť)** *Nech  $x_1, \dots, x_n$  je ortonormálna množina a  $x$  ľubovoľný prvok vektorového priestoru. Potom*

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

D: Platí

$$x = \left( x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right)$$

Podľa lemy 2.3.4 je pravá strana súčet dvoch kolmých vektorov. Aplikovaním trojuholníkovej vety na tieto 2 vektory dostávame

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2$$

resp.

$$\|x\|^2 \geq \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle$$

Na druhú stranu

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle &= (\text{podobne ako v dôkaze lemy 2.3.4}) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_i \rangle} \langle x_i, x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_i \rangle} = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2
\end{aligned}$$

□

## 2.4 Gibbsov fenomén

V príkladoch 2.2.1, 2.2.2 sme si ukázali Fourierove rady pre niektoré nespojité funkcie. Táto kapitola bude venovaná ich spoločnej vlastnosti - fenoménu „zvonenia“ a prestrelenia hodnoty funkcie v blízkosti bodu nespojitosti. Zopakujme si grafy týchto dvoch príkladov.

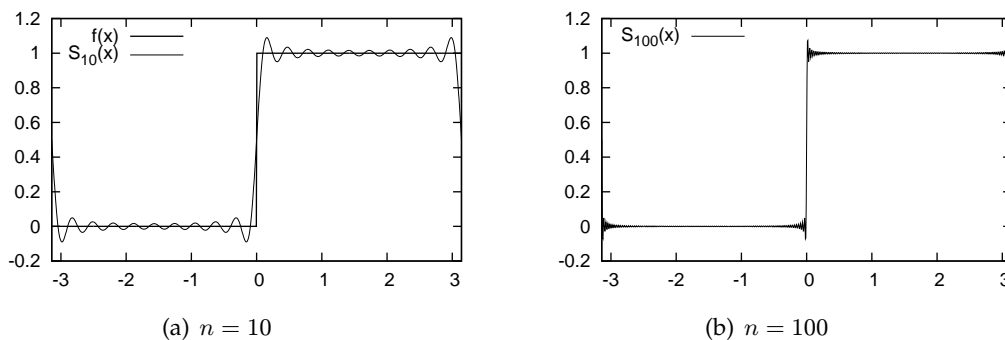
**Príklad 2.4.1** Obdĺžniková funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0) \\ 1 & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Jej  $n$ -tý čiastočný Fourierov súčet je

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1}, \quad n > 0$$

Ukážka grafu čiastočných súčtov pre  $n = 10, 100$  je na obrázku 2.6.



Obr. 2.6: Ukážka Gibbsovoho fenoménu na obdĺžnikovom signále

Môžeme si všimnúť zaujímavú vlastnosť, a síce že čiastočné súčty nemajú charakter konvergovať rovnomerne k pôvodnej funkcii. Na druhú stranu podľa 2.2.4 platí  $S_n \rightarrow f$  bodovo. V praktickom slova zmysle nám to hovorí, že čiastočné súčty síce konvergujú k danej funkcii, ale ich graf vykazuje isté nezrovnalosti. Jeho nepríjemnou vlastnosťou je tendencia prestreliť hodnotu funkcie, a to nezanedbateľnou hodnotou, ako sa môžeme presvedčiť na príkladoch 2.4.1 a 2.4.2.

**Príklad 2.4.2** Uvažujme nasledujúcu funkciu:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad x \in (0, 2\pi)$$

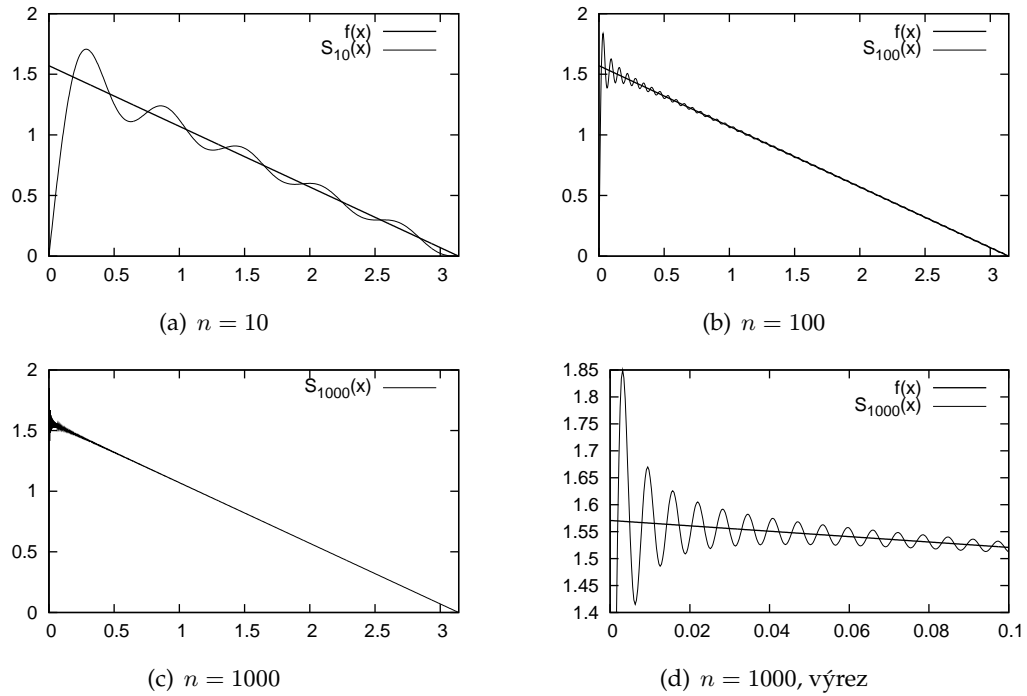
Jej čiastočný Fourierov súčet je

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$$

ktorý sa dá odvodiť podobne ako riešenie príkladu 2.2.2. Sľúbený graf pre hodnoty  $n = 10, 100, 1000$  sa nachádza na obrázku 2.7.

Zvyšok tejto kapitoly venujeme práve tejto funkcii, jej čiastočným súčtom a odhadu o koľko čiastočné súčty  $S_n$  prestrelia hodnotu  $f(x)$ . Prijemným výsledkom tohoto nášho snaženia bude záver pre všetky funkcie  $\in PC[a, b]$ .



Obr. 2.7: Gibbsov fenomén pre  $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ 

**Lema 2.4.1** Funkcia  $S_n(x)$  má na intervale  $(0, \pi)$  extrémálne body  $\frac{2k}{n}\pi, \frac{2k+1}{n+1}\pi$  pre  $k \in \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$

D:

$$\begin{aligned}
 S'_n(x) &= \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2}x)} \sum_{k=1}^n 2 \sin(\frac{1}{2}x) \cos(kx) = \\
 &= \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2}x)} \sum_{k=1}^n \sin(\frac{1}{2}x + kx) + \sin(\frac{1}{2}x - kx) = \\
 &= \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2}x)} \sum_{k=1}^n \sin(kx + \frac{1}{2}x) - \sin(kx - \frac{1}{2}x) = \\
 &= \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2}x)} \left( \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \right) = \\
 &= \frac{\sin(\frac{1}{2}nx) \cos(\frac{1}{2}(n+1)x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}
 \end{aligned}$$

Na danom intervale je funkcia  $\sin(\frac{1}{2}x)$  kladná a preto extrémálne body  $S_n(x)$  sú nulové body  $S'_n(x)$  a to sú nulové body funkcií  $\sin(\frac{1}{2}nx)$  a  $\cos(\frac{1}{2}(n+1)x)$  čiže body  $\frac{2k\pi}{n}, k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$  a  $\frac{(2k+1)\pi}{n+1}, k \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ . Zároveň však vieme, že pre body kde  $\sin(\frac{1}{2}x) = 0$  je  $\cos(\frac{1}{2}(n+1)x) \neq 0$  a naopak. Preto  $S'_n(x)$  v týchto bodoch strieda znamienko a teda to nie sú inflexné body  $S_n$ .  $\square$

**Lema 2.4.2** Funkcia  $S_n(x)$  má na intervale  $(0, \pi)$  maximá  $\frac{2k+1}{n+1}\pi$  pre  $k \in \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor\}$  a minimá  $\frac{2k}{n}\pi$ , pre  $k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor\}$

D: Platí

$$\frac{2k}{n}\pi < \frac{2k+1}{n+1}\pi < \frac{2(k+1)}{n}\pi, \quad k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$$

a tiež

$$\frac{2k+1}{n+1}\pi < \frac{2k+2}{n}\pi < \frac{2k+3}{n+1}\pi, \quad k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1\}$$

Teda, dané dve postupnosti bodov sa striedajú. Využitím výsledku predchádzajúcej lemy a uvážení, že extrémálne body sa striedajú, máme výsledok na dosah. Stačí dokázať, že bod  $\frac{1}{n+1}\pi$  je maximom  $S_n(x)$ . To je ale zrejmé, lebo  $S'_n(x)$  je kladná na intervale  $(0, \frac{1}{n+1}\pi)$ .  $\square$

**Definícia 2.4.1 (Sinc funkcia)** *Ne-normalizovanou funkciou sinc  $t$  nazveme funkciu*

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Okrem ne-normalizovanej funkcie sinc  $t$  existuje aj takzvaná normalizovaná funkcia  $\text{sinc}' y = \text{sinc } \pi y$ . V tejto publikácii budeme až na zdôraznené výnimky používať ne-normalizovanú definíciu.

**Veta 2.4.1** *Pre každé  $s \in \mathbb{N}$ , postupnosť  $\left\{ S_n \left( \frac{2s-1}{n+1} \pi \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $\int_0^{(2s-1)\pi} \text{sinc } t \, dt$ . Podobne, postupnosť  $\left\{ S_n \left( \frac{2s}{n} \pi \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $\int_0^{2s\pi} \text{sinc } t \, dt$ .*

D:

$$\begin{aligned} S_n \left( \frac{2s-1}{n+1} \pi \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin \left( \frac{k(2s-1)}{n+1} \pi \right) \\ &= \frac{2s-1}{n+1} \pi \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{k(2s-1)\pi} \sin \left( \frac{k(2s-1)}{n+1} \pi \right) \\ &= \frac{2s-1}{n+1} \pi \sum_{k=1}^n \text{sinc} \left( \frac{k(2s-1)}{n+1} \pi \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Na druhú stranu, zoberme si Riemannov horný a dolný integrálny súčet funkcie sinc  $t$  na intervale  $(0, L)$ . Uvažujme rovnomerné rozdelenie intervalu na  $n$  rovnakých častí. Potom  $H_n \geq \frac{L}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{sinc} \left( \frac{kL}{n} \right) \geq D_n$  ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Porovnaním s (2.25) a uvážením faktu  $\text{sinc } 0 = 1$  dostávame

$$H_{n+1} \geq S_n \left( \frac{2s-1}{n+1} \pi \right) + \frac{2s-1}{n+1} \pi \geq D_{n+1}$$

Následne

$$\begin{aligned} \int_0^{2s-1} \text{sinc } t \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} H_{n+1} - \frac{2s-1}{n+1} \pi \geq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left( \frac{2s-1}{n+1} \pi \right) \geq \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} D_{n+1} - \frac{2s-1}{n+1} \pi = \int_0^{2s-1} \text{sinc } t \, dt \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme aj druhú nerovnosť  $\square$

Označme  $G(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi x} \text{sinc } t \, dt$ . Keďže pre ľubovoľné  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{2s-1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{2}$ , môžeme hovoriť, že  $n$ -tý čiastočný súčet prestrelí hodnotu funkcie v svojom  $k$ -tom maxime  $G(2k-1)$  krát ak  $n$  pošleme do nekonečna. Funkciu  $G(k)$  môžete vidieť na obrázku 2.8.

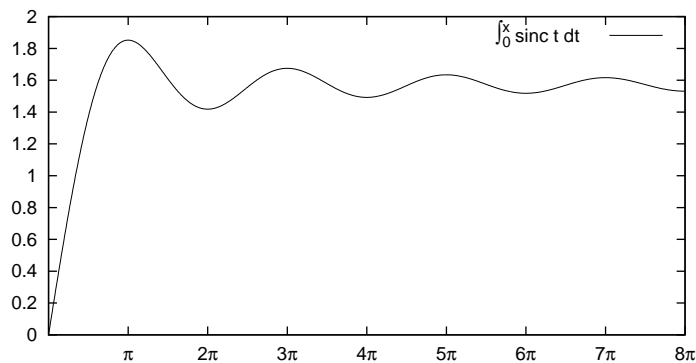
Tabelované hodnoty pre prvých niekoľko miním a maxím môžeme nájsť v tabuľke 2.1.

k	1	2	3	4	5
Minimá	0.90282	0.94994	0.96641	0.97475	0.97978
Maximá	1.17898	1.06619	1.04021	1.02883	1.02246

Tabuľka 2.1: Tabelované hodnoty miním a maxím funkcie  $G(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi x} \text{sinc } t \, dt$

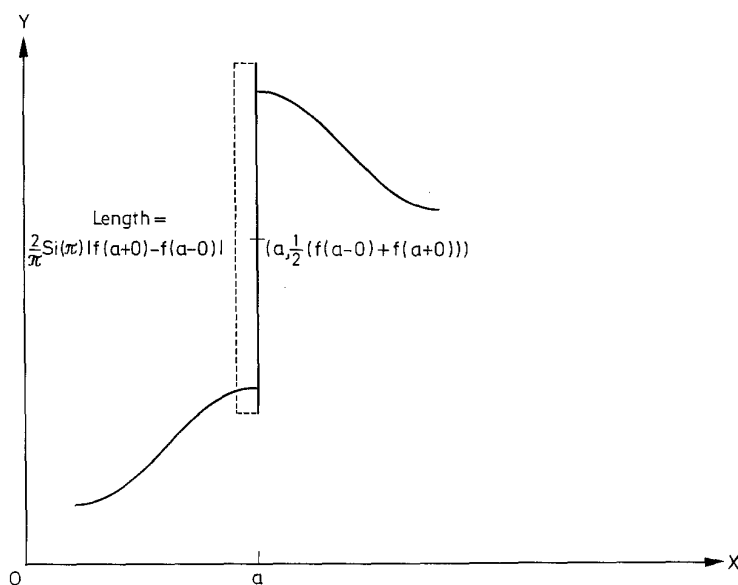
Z hodnôt je zrejmé, že čiastočné súčty prestrelia funkciu takmer o 18%, čo je prekvapivo veľa. Ak by sme počítali túto hodnotu nie vzhľadom na aktuálnu hodnotu  $f(x)$  ale vzhľadom na veľkosť skoku, táto hodnota bude polovičná.

Kapitolu zavříme zovšeobecnením

Obr. 2.8: Integrál funkcie sinc  $x$ 

**Veta 2.4.2** Nech  $f, f' \in PC(0, 2\pi)$ . Nech  $S_n$  je  $n$ -tý čiastočný súčet. Potom graf  $S_n$  konverguje k náčrtu na obrázku 2.4. Na obrázku je  $a$  všeobecný bod nespojitosti funkcie  $f$ . Vertikálny rozdiel je  $\frac{2}{\pi} |\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)| \int_0^\pi \text{sinc } t \, dt$  a je centrováná okolo  $\frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^-} f(x))$

D: Nebudeme uvádzať. Zvedavý čitateľ ho môže nájsť v [HH79], kde sa taktiež môže dočítať viac o Gibbsovom fenoméne, jeho histórii a nájsť užitočné odkazy na ďalšiu literatúru.  $\square$



Obr. 2.9: Náčrt Gibbsovho fenoménu vo všeobecnosti

## 2.5 Vlastnosti Fourierových radov

Cieľom tejto sekcie je v stručnosti pozbierať a dokázať najdôležitejšie vlastnosti Fourierových radov. V ďalšom texte budeme uvažovať exponenciálnu reprezentáciu z (2.8) a budeme ju označovať ako  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ .

**Veta 2.5.1 (Linearita)** Nech  $f(x), g(x) \in L^2(a, b)$  a  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ ,  $\mathcal{F}g(x) = \{d_n\}$ . Potom  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  platí

- $\mathcal{F}\alpha f(x) = \{\alpha c_n\}$
- $\mathcal{F}f(x) + g(x) = \{c_n + d_n\}$

$$\bullet \mathcal{F}\alpha f(x) + \beta g(x) = \{\alpha c_n + \beta d_n\}$$

D: Tvrdenie jednoducho vyplýva z linearít skálárneho súčinu (integrálu) na  $L^2(a, b)$ .  $\square$

**Veta 2.5.2 (Posúvanie v čase)** Nech  $f(x) \in L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ . Nech  $f'(x)$  je  $2\pi$ -periodické rozšírenie  $f$ . Potom  $\mathcal{F}f'(x - x_0) = \{e^{-inx_0}c_n\}$ .

D:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}f'(x - x_0)\}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x - x_0) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f'(x) e^{-inx} e^{-ix_0n} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-ix_0n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = e^{-ix_0n} c_n \end{aligned}$$

$\square$

**Veta 2.5.3 (Časový reverz)** Nech  $f(x) \in L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ . Potom  $\mathcal{F}f(-x) = \{c_{-n}\}$ .

D:

$$\{\mathcal{F}f(-x)\}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iny} dy = c_{-n}$$

$\square$

**Veta 2.5.4 (Škálovanie času)** Nech  $f(x) \in L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ . Potom  $f(ax) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ian}$ .

D: Priama substitúcia do vzorca (2.2.6)  $\square$

**Veta 2.5.5 (Konjugácia)** Nech  $f(x) \in L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ . Potom  $\mathcal{F}\bar{f}(x) = \{\bar{c}_{-n}\}$ .

D:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}\bar{f}(x)\}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) e^{-inx} dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx} \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx} = \bar{c}_{-n} \end{aligned}$$

$\square$

Integráciu a derivovanie sme už rozoberali, preto iba zhrnieme dosiahnuté výsledky.

**Veta 2.5.6 (O derivovaní)** Nech  $f(x)$  je po častiach hladká funkcia,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ . Potom  $\mathcal{F}f'(x) = \{in c_n\}$ .

D: Pozri vetu 2.2.7  $\square$

**Veta 2.5.7 (O integrovaní)** Nech  $f(x)$  je po častiach spojité funkcia,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ . Potom  $\mathcal{F}F(x) - c_0x = \{\frac{c_n}{i} : n \neq 0\}$ . Špeciálne,  $C_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$ .

D: Pozri vetu 2.2.8  $\square$

**Veta 2.5.8 (O modulácii)** Nech  $f(x), g(x) \in L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ ,  $\mathcal{F}g(x) = \{d_n\}$ . Potom  $\mathcal{F}f(x)g(x) = \{\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i d_{n-i}\}$

D:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}f(x)g(x)\}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(n-k)x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k} \end{aligned}$$

□

**Veta 2.5.9 (O konvolúcii)** Nech  $f(x), g(x) \in L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ ,  $\mathcal{F}g(x) = \{d_n\}$ . Nech  $f', g'$  sú  $2\pi$ -periodické rozšírenia  $f, g$ . Potom  $\mathcal{F}f(y) * g(y) = \mathcal{F}(\int_{-\pi}^{\pi} f'(y)g'(x-y) dy) = \{2\pi c_n d_n\}$

D:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F} \int_{-\pi}^{\pi} f'(y)g'(y-x) dy\}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \int_{-\pi}^{\pi} f'(y)g'(x-y) dy dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(x-y)e^{-inx} dx dy \\ &= (\text{podľa vety 2.5.2}) \int_{-\pi}^{\pi} f'(y)d_n e^{-iny} dy \\ &= 2\pi c_n d_n \end{aligned}$$

□

**Veta 2.5.10 (Parsevalova veta)** Nech  $f(x) \in L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{F}f(x) = \{c_n\}$ . Potom

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Parsevalova veta je teda akýsi zákon zachovania - celková hodnota energie v priestorovej doméne je rovnaká ako celková hodnota energie v časovej doméne.

D:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} c_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

□

## 2.6 Fourierova transformácia

Po pomerne zdĺhavej rozprave o Fourierových radoch teraz konečne prejdeme na hlavnú tému tejto práce a to Fourierovu transformáciu. Nebudeme do detailov rozoberať jej vlastnosti a robiť podrobné dôkazy, pretože väčšina vecí sa dá odvodiť analogicky, ako sme ich odvodzovali u radov, avšak treba využívať matematický aparát s väčšou obozretnosťou. Najskôr si popíšeme spojitú Fourierovu transformáciu a v druhej časti prejdeme na diskretnú verziu, ktorá bude hlavným predmetom skúmania v kapitole o aplikáciách.

### 2.6.1 Spojitá Fourierova transformácia

Prvou prekážkou, ktorá bude pôsobiť pri generalizovaní Fourierových radov na interval  $(-\infty, \infty)$  je absencia ortogonálnej sady vektorov. Totižto, pre každú periodickú funkciu  $f(x) \neq 0$  na množine nenulovej miery platí  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \infty$ . Preto nie je možné preniesť dôkazy konvergencie z vektorového priestoru  $L^2(a, b)$ . Napriek tomu ale vieme Fourierove rady zovšeobecniť na celý interval  $(-\infty, \infty)$ .

**Definícia 2.6.1** *Fourierovou transformáciou integrovateľnej funkcie  $f(x)$  nazveme funkciu  $\tilde{f}$  definovanú ako*

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

Ak  $f$  je integrovateľná (t.j.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ ), potom jej Fourierova transformácia  $\tilde{f}(\omega)$  je ohraničená, ale nie nutne integrovateľná. Ako príklad môže slúžiť obdĺžniková funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -\pi \text{ alebo } x > \pi \\ \frac{1}{2\pi} & -\pi < x < \pi \end{cases}$$

ktorej Fourierova transformácia je  $\text{sinc } \pi\omega$ . Táto funkcia nie je integrovateľná hoci jej integrál  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x) dx = 1$ . Je to analógia striedavého harmonického radu, ktorý konverguje, ale rad jeho absolútnych hodnôt diverguje. Preto nie je možné vo všeobecnosti napísať inverznú transformáciu. Avšak, ak  $f(x)$  aj  $\tilde{f}(\omega)$  sú obe integrovateľné, potom platí

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (2.26)$$

skoro všade<sup>1</sup>. Ak  $f(x)$  je spojitá, potom rovnica (2.26) platí na celom  $\mathbb{R}$ .

Okrem definície 2.6.1 sa v praxi používajú aj minimálne 2 ďalšie varianty. Uvedieme tu variantu v štandardnej frekvencii (Definícia 2.6.1 je v takzvanej angulárnej frekvencii).

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \omega} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{2\pi i x \omega} d\omega \end{aligned}$$

Podobne ako pri radoch, aj pri Fourierovej transformácii máme na výber z veľkého počtu vlastností. Ich zhrnutie sa dá nájsť v tabuľke 2.2. Zhrnutie základných transformačných párov je uvedené v tabuľke 2.3. Obe tabuľky sú prevzaté z [Wik09c].

*V tabuľkách 2.2 a 2.3 pod symbolom sinc označujeme normalizovanú sinc funkciu  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ , pod symbolom rect označujeme obdĺžnikovú funkciu  $\text{rect}(x) = 1, |x| < \frac{1}{2}$ , inak  $\text{rect}(x) = 0$  a pod symbolom tri označujeme trojuholníkovú funkciu  $\text{tri}(x) = \max(1 - |x|, 0)$ .*

### 2.6.2 Diskrétna Fourierova transformácia

Diskrétna Fourierova transformácia na rozdiel od spojitej verzie operuje nad periodickým signálom, ktorý je zadaný v diskretných bodoch.

*Existuje takzvaná „Diskrétna časová Fourierova transformácia“, ktorá pracuje s neperiodickým signálom zadanom v diskretných bodoch, tejto sa ale nebudeme venovať.*

<sup>1</sup>Funkcie sú rovnaké „skoro všade“, ak sa ich funkčné hodnoty líšia len na množine miery 0

Vlastnosť	Funkcia	FT, obyčajná frekvencia	FT, angulárna frekvencia
Transformácia	$f(x)$	$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \omega} dx$	$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i x \omega} dx$
Linearita	$a f(x) + b g(x)$	$a \tilde{f}(\omega) + b \tilde{g}(\omega)$	$a \tilde{f}(\omega) + b \tilde{g}(\omega)$
Posuv v čase	$f(x - a)$	$e^{-2\pi i a \omega} \tilde{f}(\omega)$	$e^{-i a \omega} \tilde{f}(\omega)$
Posuv vo frekvencii	$e^{2\pi i a x} f(x)$	$\tilde{f}(\omega - a)$	$\tilde{f}(\omega - 2\pi a)$
Škálovanie v čase	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Dvojitá transformácia	$\tilde{f}(x)$	$f(-\omega)$	$2\pi f(-\omega)$
Diferencovanie v čase	$f'(x)$	$2\pi i \omega \tilde{f}(\omega)$	$i \omega \tilde{f}(\omega)$
Diferencovanie vo frekvencii	$x f(x)$	$\frac{i}{2\pi} \tilde{f}'(\omega)$	$i \tilde{f}'(\omega)$
Konvolúcia	$(f * g)(x)$	$\tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$	$\tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$
Modulácia	$f(x) g(x)$	$(\tilde{f} * \tilde{g})(\omega)$	$\frac{1}{2\pi} (\tilde{f} * \tilde{g})(\omega)$
Parsevalova veta	$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx =$	$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\omega) \overline{\tilde{g}(\omega)} d\omega$	$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\omega) \overline{\tilde{g}(\omega)} d\omega$

Tabuľka 2.2: Vlastnosti Fourierovej transformácie

Funkcia	FT štandardná frekvencia	FT angulárna frekvencia
1	$\delta(\omega)$	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(\omega)$	1	1
$\text{rect}(ax)$	$\frac{1}{ a } \text{sinc}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\text{sinc}(ax)$	$\frac{1}{ a } \text{rect}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\text{tri}(ax)$	$\frac{1}{ a } \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$\text{sinc}^2(ax)$	$\frac{1}{ a } \text{tri}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } \text{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$
$e^{-ax^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(\pi\omega)^2}{a}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2+4\pi\omega^2}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{iax}$	$\delta\omega - \frac{a}{2\pi}$	$2\pi\delta\omega - a$
$\cos(ax)$	$\frac{\delta(\omega-\frac{a}{2\pi})+\delta(\omega+\frac{a}{2\pi})}{2}$	$\pi(\delta(\omega-a) + \delta(\omega+a))$
$\sin(ax)$	$\frac{\hat{i}\delta(\omega+\frac{a}{2\pi})-\delta(\omega-\frac{a}{2\pi})}{2}$	$\hat{i}\pi(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$
$\frac{1}{x}$	$-\hat{i}\pi \text{sgn}(\omega)$	$-\hat{i}\pi \text{sgn}(\omega)$

Tabuľka 2.3: Vybraté funkcie a ich Fourierova transformácia

Jej základom je ortogonalita postupností  $\{\sin 2\pi nk\}_{n=0}^{N-1}$  a  $\{\cos 2\pi nk\}_{n=0}^{N-1}$ . Nakoľko spomínané postupnosti vieme vyjadriť ako vektory vo vektorovom priestore  $\mathbb{C}^N$ , budú všetky vlastnosti odvodené pre Fourierove rady (okrem vlastností týkajúcich sa kalkulu) analogicky prenesiteľné na diskretnú FT. Aby sme nenapínali, v nasledujúcej definícii si transformáciu aj zadefinujeme.

**Definícia 2.6.2 (Diskrétna Fourierova transformácia)** Diskrétnou Fourierovou transformáciou veľkosti  $N$  nazveme transformáciu  $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  pre ktorú platí

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}$$

Inverzná transformácia je definovaná ako

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N} kn}$$

Narozdiel od Fourierovej transformácie a Fourierových radov, diskretná verzia je vždy invertovateľná - nekladíme žiadne špeciálne nároky na vstupné údaje. V tabuľke 2.4 prevzanej z [Jon06] sú zhrnuté najdôležitejšie vlastnosti diskretnej Fourierovej transformácie.

## 2.7 Viacrozmerná Fourierova transformácia

Niekedy je potrebné vedieť aplikovať Fourierovu transformáciu vo viacerých rozmeroch. Typické použitia sú vo fyzike (3-rozmerný priestor), matematike (diferenciálne rovnice o viacerých neznámych) a informatike (2D signály ako napríklad obraz). Je preto výhodné venovať problematike viacerých rozmerov. Prvou otázkou ktorú si treba zodpovedať sú základné funkcie použité na rozklad. Po vzore jednorozmerného prípadu by sme mohli použiť sínusy a kosínusy. Prvým nápadom môže byť použiť vlny, aké vznikajú napríklad pri dopade kvapky do vody. Ich rezom cez stred je sínusoida resp. kosínusoida. Takéto riešenie ale nie je vhodné, pretože požaduje kruhovú symetriu<sup>2</sup>. Namiesto toho sa používajú funkcie, ktoré sú násobkom dvoch Fourierových funkcií

<sup>2</sup>Pre problémy s kruhovou symetriou je vhodné sa oboznámiť s Fourier-Besselovými radmi



Operácia	Priestorová/časová doména	Frekvenčná doména
transformácia	$x_n$	$X_k$
Rotácia	$x_{n-m \bmod N}$	$X_k e^{-\frac{2\pi i}{N} km}$
Časový reverz	$x_{-n \bmod N}$	$X_{(-k) \bmod N}$
Konjugácia	$\overline{x_n}$	$\overline{X_{(-k) \bmod N}}$
Cyklická konvolúcia	$(x * y)_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{(n-m) \bmod N}$	$X_k Y_k$
Modulácia	$x_n y_n$	$(X * Y)_k$
Symetria	$\forall n : x_n \in R$	$X_k = \overline{X_{(-k) \bmod N}}$
Parsevalova veta	$\sum_{n=0}^{N-1} ( x_n ^2) =$	$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} ( X_k ^2)$

Tabuľka 2.4: Vlastnosti diskkrétnej Fourierovej transformácie

pre dve rôzne premenné. V prípade (exponenciálnych) Fourierových radov na štvorcovej oblasti  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  je to  $e^{-in_x} e^{-im_y}$ . Môžeme si overiť ortogonalitu

$$\int_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} (e^{-in_1 x} e^{-im_1 y}) (e^{-in_2 x} e^{-im_2 y}) dx, y = \begin{cases} 4\pi^2 & n_1 = n_2 \text{ a } m_1 = m_2 \\ 0 & \text{v opačnom prípade} \end{cases}$$

Daná forma sa tiež dá kompaktnejšie vektorovo zapísať ako  $e^{-i(n,m) \cdot (x,y)}$ .

Nás bude predovšetkým zaujímať viacrozmerná diskrétna Fourierova transformácia, ktorej vzorec je

$$X_{k_1, k_2, \dots, k_d} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{n_d=0}^{N_d-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} \dots e^{-\frac{2\pi i}{N_d} n_d k_d} x_{n_1, n_2, \dots, n_d} \quad (2.27)$$

Prepísané do vektorovej podoby, kde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$ ,  $\mathbf{N} - \mathbf{1} = (N_1 - 1, N_2 - 1, \dots, N_d - 1)$  a  $\mathbf{n}/\mathbf{N} = (n_1/N_1, n_2/N_2, \dots, n_d/N_D)$  prejde na tvar

$$X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1} e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n}/\mathbf{N})} x_{\mathbf{n}}$$

Inverzná transformácia je definovaná analogicky ako

$$x_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\prod_{l=1}^d N_l} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1} e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n}/\mathbf{N})} X_{\mathbf{n}}$$

Nás však bude omnoho viac zaujímať forma (2.27). Zaoberajme sa chvíľu 2-rozmerným prípadom.

$$\begin{aligned} X_{k_1, k_2} &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} x_{n_1, n_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} x_{n_1, n_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} Y_{n_2}[n_1] \end{aligned}$$

kde  $Y_{n_2}[i]$  je definované ako

$$Y_{n_2}[n_1] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} x_{n_1, n_2}$$

Celá transformácia sa dá teda zložiť z dvoch častí. Každá časť je Fourierovou transformáciou v jednom indexe. Presnejšie povedané, ak  $x$  zapíšeme do matice, potom  $Y$  získame aplikovaním Fourierovej transformácie na každý riadok matice a  $X$  získame aplikovaním Fourierovej transformácie na každý stĺpec matice  $Y$ . Vidíme teda, že viacrozmerná diskretná Fourierova transformácia sa dá efektívne počítať pomocou jednorozmernej verzie - postupne aplikujeme Fourierovu transformáciu v každej dimenzii. Toto robí viacrozmernú DFT atraktívnu pre spracovanie priestorových dát, nakoľko vieme využívať efektívne algoritmy pre výpočet jednorozmernej DFT.

## 2.8 Príbuzné transformácie

Fourierova transformácia súvisí s veľa rôznymi transformáciami, postupne si uvedieme niektoré z nich a porovnáme.

### 2.8.1 Transformácie príbuzné spojitaj Fourierovej transformácii

#### Taylorove rady

Začiatok nášho porovnávanie transformácii venujeme súvislosti medzi Fourierovými a Taylorovými radmi. Prvým faktom je, že obe sú nekonečné rady. Nie veľmi zaujímavý fakt. Hoci tieto dve transformácie nemajú veľa spoločného, existujú isté spoločné črty. Uvažujme Taylorov rad funkcie  $f(x)$  okolo bodu 0 s polomerom konvergencie  $r$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -r < x < r$$

Prirodzene, Taylorov rad sa dá napísať aj pre komplexné funkcie, v tom prípade

$$f(se^{i\phi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n e^{i\phi n}, \quad 0 \leq s < r$$

Daná rovnica je veľmi podobná rovnici v definícii 2.2.6 exponenciálnej formy Fourierovho radu v premennej  $\phi$ . Samozrejme, toto nie je jediná spoločná črta. V [RA96] sa čitateľ môže dočítať o ich súvislostiach pri ultrasférických polynómoch.

#### Laplaceova transformácia

**Definícia 2.8.1** (Obojstrannou) Laplaceovou transformáciou funkcie  $f(x)$  nazveme

$$L(y) = \mathcal{L}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy} f(x) dx$$

*Jednostranná Laplaceova transformácia využíva integrovanie na intervale  $[0, \infty)$  a je v bežnej praxi používaná viacej. Na porovnávanie sa nám však viacej hodí obojstranný variant.*

Vidíme, že Laplaceova transformácia je brat Fourierovej transformácie. Jediným rozdielom medzi nimi je absencia imaginárnej jednotky a konštanta  $2\pi$ , ktorá je určená variantom Fourierovej

transformácie použitej v tejto publikácii. Inverzná Laplaceova transformácia je podľa [Wik09f] definovaná ako komplexný integrál

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xy} F(y) dy$$

kde  $\gamma$  je reálne číslo také, aby kontúra integrácie bola v regióne konvergencie  $F(y)$ .

Dôsledkom náramnej podobnosti oboch transformácií je veľký počet spoločných vlastností. Obe transformácie sú lineárne. Obe sa správajú veľmi podobne pri integrácii, derivácii, posúvaní, škálovaní a konvolúcii.

Tabuľka 2.8.1 porovnáva základné vlastnosti Laplaceovej transformácie a Fourierovej transformácie vedľa seba. Dá sa tak ľahko presvedčiť o ich veľkej podobnosti.

Operácia	Laplace doména		Fourier doména	
	priestorová	frekvenčná	priestorová	frekvenčná
Transformácia	$l(t)$	$L(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
Linearita	$al(t) + bg(t)$	$aL(\omega) + bG(\omega)$	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
Derivácia frekvencie	$-tl(t)$	$L'(\omega)$	$-2\pi i t f(t)$	$F'(\omega)$
Derivácia v čase	$l'(t)$	$\omega L(\omega) - l(0^-)$	$f'(t)$	$2\pi i \omega F(\omega)$
Škálovanie	$l(at)$	$\frac{1}{ a } L(\frac{\omega}{a})$	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F(\frac{\omega}{a})$
Posúvanie	$e^{at}l(t)$	$L(\omega - a)$	$e^{2\pi i at} f(t)$	$L(\omega - a)$
Konvolúcia	$l(t) * g(t)$	$L(\omega)G(\omega)$	$f(t) * g(t)$	$F(\omega)G(\omega)$

Tabuľka 2.5: Porovnanie Laplaceovej a Fourierovej transformácie

### Hartleyova transformácia

Podobne ako Fourierova transformácia používa kernel zložený zo sínusov a kosínusov, konkrétne exponenciálny kernel  $e^{-2\pi i \omega t} = \cos(2\pi \omega t) - i \sin(2\pi \omega t)$ , Hartleyouva transformácia používa takzvaný kosínovo-sínusový kernel  $\text{cas}(2\pi \omega t) = \cos(2\pi \omega t) + \sin(2\pi \omega t)$ . Transformácia je preto na rozdiel od FT reálna.

$$H(\omega) = \{\mathcal{H}f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{cas}(2\pi \omega t) dt$$

Hartleyova transformácia je inverzom samej seba, t.j.

$$f = \mathcal{H}\mathcal{H}f$$

Jej hlboký súvis s Fourierovou transformáciou sa dá popísať nasledujúcimi prevodnými rovnicami medzi oboma transformáciami

$$F(\omega) = \frac{H(\omega) + H(-\omega)}{2} - i \frac{H(\omega) - H(-\omega)}{2}$$

a opačným prevodom

$$H(\omega) = \Re(F(\omega)) - \Im(F(\omega))$$

### Čiastková Fourierova transformácia

Predstavme si na chvíľu Fourierovu transformáciu ako operátor v rovine reprezentovanej priestorovou/časovou doménou ako osou  $x$  a frekvenčnou doménou ako osou  $y$ . Jednu aplikáciu  $\mathcal{F}$  môžeme chápať ako otočenie o 90 stupňov proti smeru hodinových ručičiek. Dve postupné aplikácie dávajú  $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x)$ , čo nie je nič iné ako otočenie o 180 stupňov v našej rovine. Napokon,  $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(x)$  zodpovedajúc otočeniu o plnú kružnicu, teda identitu. Fourierova transformácia rádu  $a$  kde  $a$  je celé číslo spĺňa nasledujúce podmienky:

- konzistencia  $\mathcal{F}^a = \mathcal{F}$  pre  $a = 1$
- aditivita  $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = \mathcal{F}^{a+b}$
- comutativita  $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = \mathcal{F}^b \mathcal{F}^a$
- linearita  $\mathcal{F}^a(f + g) = \mathcal{F}^a f + \mathcal{F}^a g$

Preto, ak by existovalo algebraické rozšírenie definície  $\mathcal{F}^a$  pre  $a \in \mathbb{R}$  spĺňajúce tieto podmienky, mohli by sme ho považovať za čiastkovú Fourierovu transformáciu. Takéto rozšírenie naozaj existuje a je definovaná pre angulárne frekvencie napríklad v [SS05]. Pre  $a \in [0, 1]$

$$\mathcal{F}^a f(t) = F_a(\omega) = \frac{e^{\hat{i}(1/4\pi - 1/2\phi)}}{\sqrt{2\pi \sin \phi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp \left[ -\hat{i} \frac{\omega t - \frac{1}{2}(t^2 + \omega^2) \cos \phi}{\sin \phi} \right] dt \quad (2.28)$$

kde  $\phi = \frac{1}{2}\pi a$ . Dosadením za  $a = 1$  môžeme nahliadnuť, že rovnica (2.28) prejde na štandardnú Fourierovu transformáciu v angulárnej frekvencii, čiže

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^1 f(t) &= \frac{e^{\hat{i}(1/4\pi - 1/4\pi)}}{\sqrt{2\pi \sin \frac{\pi}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp \left[ -\hat{i} \frac{\omega t - \frac{1}{2}(t^2 + \omega^2) \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \right] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-\hat{i}\omega t] \end{aligned}$$

Proces pre  $a = 0$  je bolestivý, avšak dá sa ukázať, že  $\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}^a f(t) = f(t)$ .

Na ilustráciu ako sa postupne prelieva energia z priestorovej do časovej domény sme spravili čiastkovú Fourierovu transformáciu obdĺžnikového signálu postupne pre rôzne koeficienty  $a$ . Ilustrácia je na obrázku 2.8.1.

Čiastková Fourierova transformácia je teda generalizáciou normálnej transformácie. Má aj veľa vlastností, ktoré sme už poznali z klasickej FT. Novým a zaujímavým javom je plynulý prechod medzi priestorovou a frekvenčnou doménou. Čiastková FT našla preto svoje miesto v optike a pri riešení diferenciálnych rovníc vo vlnovej fyzike.

### 2.8.2 Transformácie príbuzné diskkrétnej Fourierovej transformácii

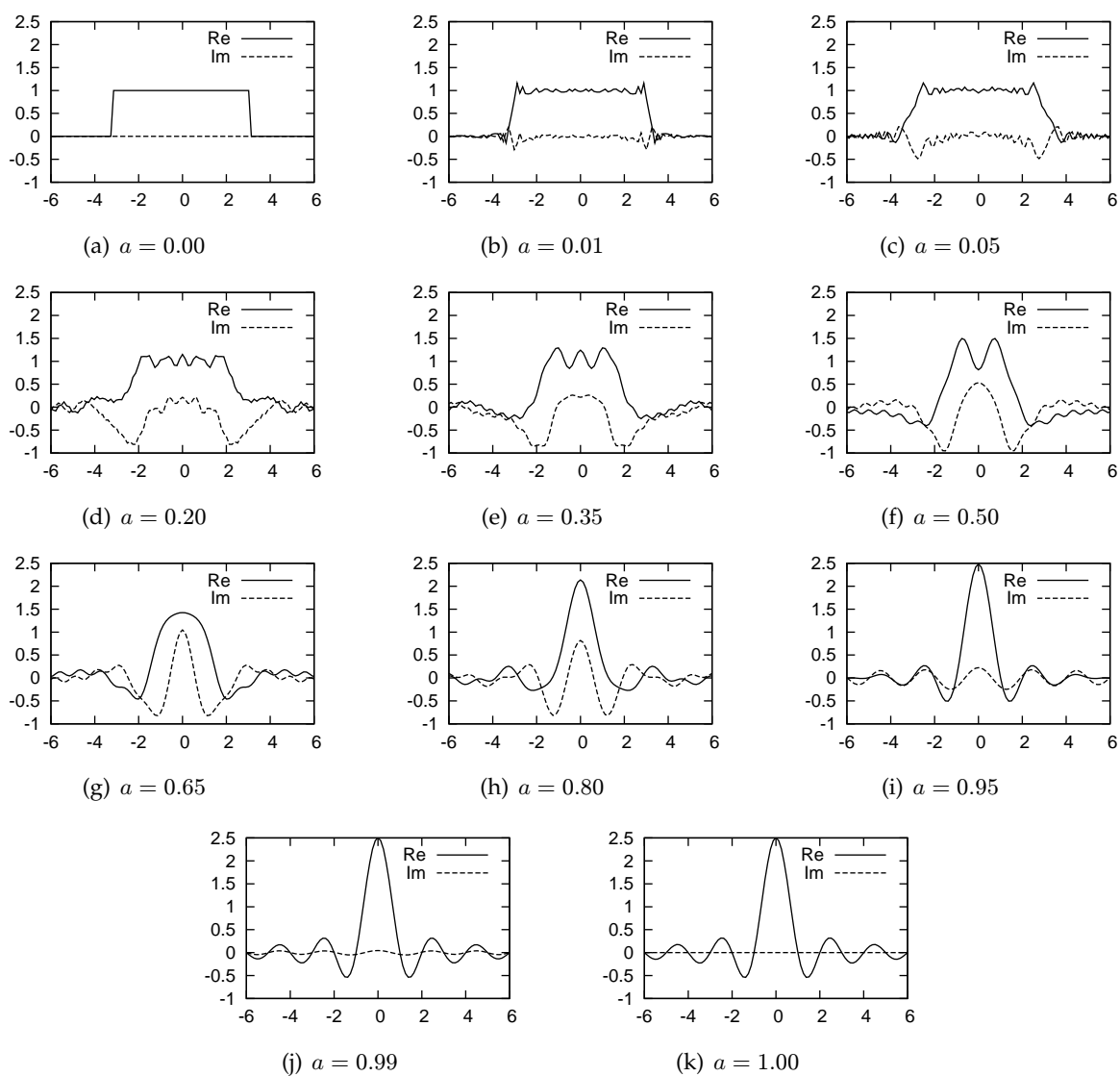
Tak ako spojitá FT má svojich príbuzných, nie je tomu inak ani pre jej diskrétnu verziu. Samozrejme, poniektoré z predtým uvedených transformácií majú aj svoje diskrétny verzie, my sa však budeme viacej venovať dvom špeciálnym transformáciám.

#### Z-transformácia ako rozšírenie DFT

Zaujímavým prirodzeným rozšírením DTFT (Diskrétna časovej Fourierovej transformácie) a DFT je z-transformácia. Obojstranná verzia je napísaná v rovnici (2.29), jednostranná verzia v rovnici (2.30).

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (2.29)$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (2.30)$$

Obr. 2.10: Ilustrácia čiastkovej FT pre rôzne koeficienty  $a$

Môžeme si všimnúť, že ak  $z = e^{-i2\pi/N}$ , potom z-transformácia prechádza do Fourierovej transformácie. Špeciálne, pre nás je veľmi zaujímavá je konečná verzia

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{-n}$$

pretože je použitá práve v Bluesteinovom algoritme na výpočet FFT. Bluesteinov chirp z-algoritmus je celý navrhnutý na počítanie ľubovoľnej z-transformácie. Je preto ešte užitočnejší ako FFT. Rôzne aplikácie z-transformácie zahrňujú analýzu signálov s lineárnou zmenou frekvencie, ako sa dá nájsť napríklad v [BS90].

### Diskrétna kosínová transformácia

Na záver kapitoly sme si nechali asi najznámejšieho príbuzného diskkrétnej Fourierovej transformácie. Diskrétna kosínová transformácia (ďalej len DCT) je v súčasnej informatike používaná snád' ešte výraznejšie ako DFT. Je to spôsobené jej niektorými príjemnými vlastnosťami. Asi najvýznamnejším faktorom je jej čisto reálna povaha - DCT nie je nutné počítat' s komplexnými číslami. Druhý dôvod je koncentrácia energie okolo menších frekvencií, ako si ukážeme pri kompresii obrazu a zvuku (obrázok 3.11). Diskrétna kosínová transformácia oproti DFT používa za svoje základné funkcie iba (posunuté) kosínusy. Existujú aspoň 4 v praxi používané varianty definície DCT My si uvedieme pravdepodobne tú najpoužívanejšiu (známu pod menom DCT II). Jej vzorec je popísaný rovnicou (2.31).

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.31)$$

Inverzná transformácia má rovnicu

$$x_k = \frac{1}{N}X_0 + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{\pi}{N}n\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Zaujímavou vlastnosťou je, že DCT je až na faktor 2 presne rovná DFT z  $4N$  reálnych čísel s párnou symetriou, kde vstupy na párnych indexoch sú nulové. Na výpočet DCT sa teda teoreticky dá priamo aplikovať DFT algoritmus, stačí mu predpracovať vstup na symetrický iba s nepárny indexami. Táto spojitosť však zachádza ďalej - algoritmy použité na výpočet DFT idú spravidla jednoducho prepísať a zjednodušiť priamo na DCT, čím sa transformácia ukazuje v lukratívnom svetle. Napokon - jej využitia budú spomínané v nasledujúcej kapitole.

# Kapitola 3

## Použitie v informatike

### 3.1 Signal processing

Či chcete alebo nechcete, spracovanie digitálneho signálu je veľmi dôležitou súčasťou každodenného života. Okolo nás sa každú sekundu prenesú veľké množstvá údajov rôzneho typu. A práve tu hrá životne dôležitú hereckú rolu konverzia analógového a digitálneho signálu. Vysielanie televízie, rádia, alebo rozprávanie sa modemom, to všetko sú analógové signály, ktoré treba nejakým spôsobom preniesť do digitálneho sveta. V rannej dobe boli technológie čisto analógové, ale v dnešnej dobe sa stretávame s náročným digitálnym spracovaním. Či ide o záznam zvuku mikrofónom alebo meranie napätia voltmetrom, všade sa vynára tá istá otázka.

#### 3.1.1 Je možné digitalizovať analógový signál?

Odpoveď je nie. Nie bez ďalších predpokladov. Signál môže byť ľubovoľný a nech by sme akokoľvek rýchlo zaznamenávali, stále nemusíme zaznamenávať dostatočne rýchlo. Taktiež nemôžeme zaznamenávať s nekonečnou presnosťou. Toto sú limitujúce faktory, ktoré prekážajú záznamu signálu. Zaoberajme sa preto otázkou, či za nejakých zjednodušených predpokladov je možné rekonštruovať signál iba z čiastočných údajov. Možno je to prekvapujúce, ale dá sa to. Základ tejto teórie vypracovali páni Nyquist a Shannon. Sformulujme a dokážme si preto jednu základnú vetu zo signal processingu.

**Veta 3.1.1 (Nyquist-Shannon sampling theorem)** *Nech  $f$  je ľubovoľná spojitá funkcia z  $L^2(-\infty, \infty)$ . Ak  $\exists B$  také že  $f$  je zhora ohraničená frekvenciou  $B$ , tak  $f$  sa dá zrekonštruovať z bodov  $f(\frac{k\pi}{B})$  pre  $k \in \mathbb{Z}$  podľa vzorca  $f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\frac{l\pi}{B}) \text{sinc}(l\pi - Bx)$ .*

D: Pretože signál je frekvenčne obmedzený, platí

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \exp[i\alpha x] d\alpha = \int_{-B}^B F(\alpha) \exp[i\alpha x] d\alpha \quad (3.1)$$

Z podmienky  $f \in L^2(a, b)$  vieme, že  $F$  existuje a  $F \in L^2(-\infty, \infty)$ . Taktiež pretože  $F(x) = 0$  pre  $|x| > B$ , môžeme tvrdiť  $F \in L^2(-B, B)$ . Preto sa dá písať<sup>1</sup>

$$F(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \exp\left[\frac{i\pi\alpha k}{B}\right], \quad |\alpha| < B \quad (3.2)$$

Táto suma konverguje k  $F$  v norme  $L^2(a, b)$ . Samozrejme, mimo intervalu  $(-B, B)$  konverguje k periodickému rozšíreniu. Koeficienty  $F_k$  vieme jednoznačne určiť ako analógiu vzorca 2.8.

$$F_k = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B F(\alpha) \exp\left[\frac{-i\pi k\alpha}{B}\right] d\alpha \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>V dôkaze používame verziu Fourierovho radu na intervale nie  $(-\pi, \pi)$  ale na intervale  $(-B, B)$ . Veríme, že čitateľ si je sám schopný odvodiť si variácie viet, ktoré sme dokazovali v prvej časti publikácie

Teraz porovnaním (3.1) a (3.3) odvodíme

$$F_k = \frac{1}{2B} f(-\pi k/B)$$

a dosadením do (3.2) s použitím substitúcie  $l = -k$  dostaneme

$$F(\alpha) = \frac{1}{2B} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{l\pi}{B}\right) \exp\left[-\frac{\hat{l}\pi\alpha}{B}\right] \quad (3.4)$$

Nakoniec, skombinovaním (3.4) a (3.1) dostávame

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-B}^B \frac{1}{2B} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{l\pi}{B}\right) \exp\left[-\frac{\hat{l}\pi\alpha}{B}\right] \right) \exp[\hat{i}x\alpha] d\alpha \\ &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{l\pi}{B}\right) \exp\left[-\frac{\hat{l}\pi\alpha}{B} + \hat{i}x\alpha\right] d\alpha \end{aligned}$$

Potrebovali by sme zameniť poradie integrovania a sumácie. Označme  $S_n(\alpha) = \sum_{l=-n}^n f\left(\frac{l\pi}{B}\right) \exp\left[-\frac{\hat{l}\pi\alpha}{B}\right]$ . Vieme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\alpha) = 2BF(\alpha)$ . Špeciálne dosadením  $\alpha = 0$  dostávame  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = 2BF(0)$ . Preto  $\exists C : \forall n : |S_n(0)| < C$ . Lenže  $|S_n(\alpha)| \leq |S_n(0)|$  a teda  $\forall n : C > S_n(\alpha)$ . Zároveň,  $\int_{-B}^B |C| d\alpha = 2BC < \infty$ . Preto podľa vety o dominantnej konvergencii môžeme zameniť poradie integrácie a sumácie.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2B} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{l\pi}{B}\right) \int_{-B}^B \exp\left[-\frac{\hat{l}\pi\alpha}{B} + \hat{i}x\alpha\right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2B} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{l\pi}{B}\right) 2B \frac{\sin(l\pi - Bx)}{l\pi - Bx} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{l\pi}{B}\right) \text{sinc}(l\pi - Bx) \end{aligned}$$

□

## 3.2 Signal processing - digitálne filtre

Digitálne filtre sú dôležitou súčasťou spracovania digitálneho signálu. Podobne ako analógové filtre, ich úlohou je zo vstupného signálu vybrať pre nás podstatnú časť, prípadne ju zosilniť alebo inak modifikovať signál. V tomto dokumente si spomenieme niekoľko najzákladnejších filtrov používaných v praxi a súvisiacich s Fourierovou transformáciou. Budeme ich demonštrovať na spracovaní obrazu, hoci mnohé z nich sú viac dôležité v spracovaní zvuku/elektrického signálu.

Najskôr si popíšeme filtre pracujúce vo frekvenčnom rozsahu, potom spomenieme filtre pracujúce na priestorovej doméne a kapitolu zavříme ukázaním súvisu medzi týmito dvoma prístupmi a dekonvolúciou, ktorá sa snaží invertovať následky nežiadúcich filtrov.

### 3.2.1 Ideálny lowpass a highpass filter

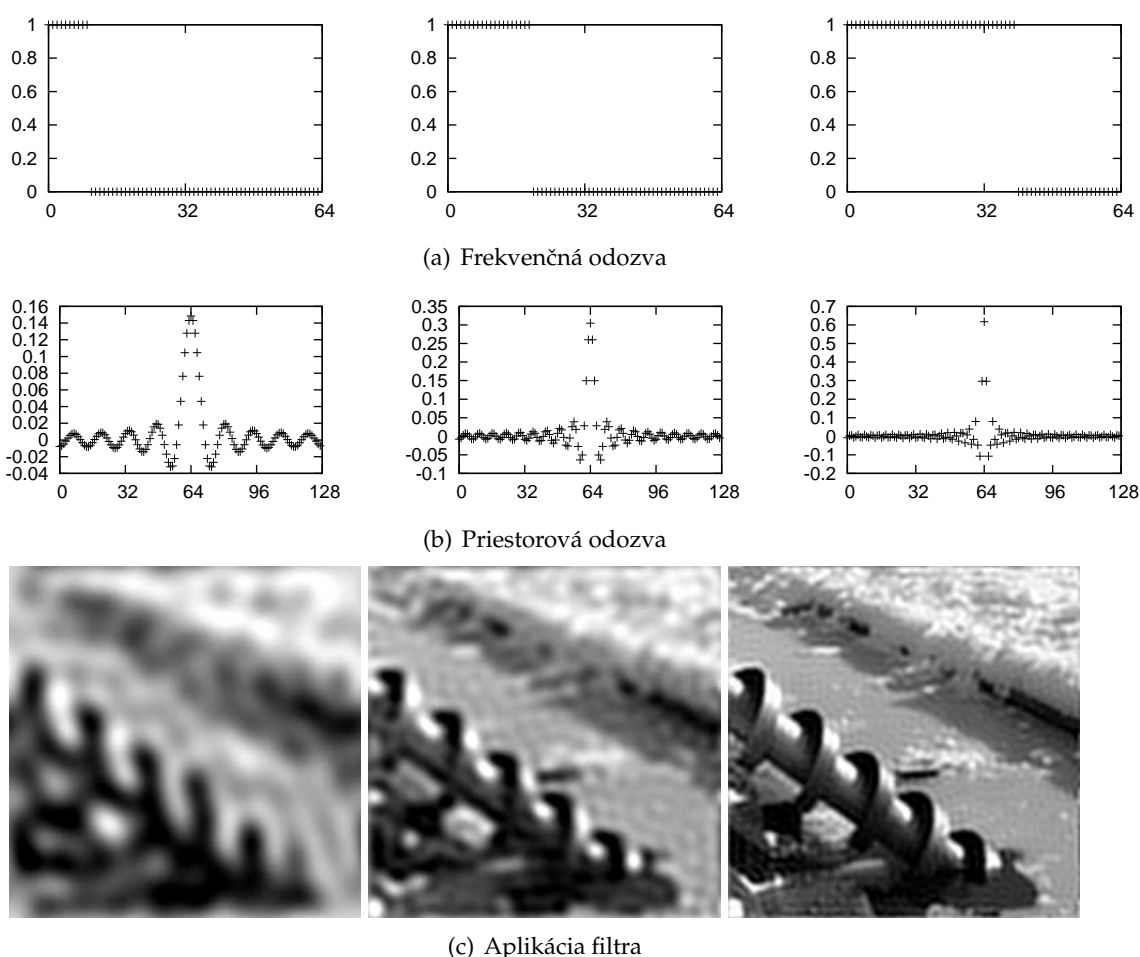
Najjednoduchšími filterami, s ktorými sa čitateľ môže stretnúť sú takzvaný lowpass a highpass filter. Ako už ich názov napovedá, budú prepúšťať len určité pásmo frekvencií. Lowpass filter prepustí všetky nízke frekvencie, vysoké odstráni. Príkladom lowpass filtra môže byť napríklad ekvalizér, keď si necháme iba „basy“. Highpass filter je pravým opakom lowpass filtra - prepustí len vysoké tóny. Príkladom môže byť aplikácia highpass filtra na obrázok - ponechá iba hrany, t.j. miesta, kde sa rýchlo mení intenzita obrazu a teda obsahujú vysoké frekvencie.



Ideálny lowpass a highpass filter o limitujúcej frekvencii  $f$  môžeme popísať obrázkom 3.1, kde na  $x$ -ovej osi je frekvencia vstupného signálu a na  $y$ -ovej osi je hodnota výstupného signálu.

*Väčšina filtrov vo frekvenčnej oblasti sa dá popísať podobným grafom. Čitateľ ale musí brať ohľad na istú nepresnosť - daný graf nešpecifikuje presne filter. Špecifikuje len zmenu amplitúdy. Bežné filtre fázu nemenia a preto sa ticho predpokladá  $\phi(f) = 0$ .*

Dané filtre prepúšťajú všetky frekvencie na jednu stranu od hraničnej a na druhú stranu neprepustia nič. Ako si ukážeme vizuálne, tieto filtre majú spoločný problém - „zvonenie“. Najvýraznejšie sa prejavuje práve pri highpass filtri. Preto sa v praxi nepoužívajú. Zvonenie úzko súvisí s Gibbsovým fenoménom, ktorý sme už skúmali v kapitole 2.4. Ideálny lowpass filter je totiž variant čiastočného súčtu Fourierovho radu prenesený na diskretnú Fourierovu transformáciu. Pri filtroch nás teda okrem ich frekvenčnej odozvy bude zaujímať aj „priestorová“ odozva na jednoduchý impulz, ktorým je v diskretnom prípade jednotkový bod. V spojitom prípade je to Diracova delta funkcia<sup>2</sup>. Kombinovaním grafu pre frekvenčnú odozvu a zodpovedajúceho grafu pre priestorovú odozvu sa môžeme presvedčiť o vlastnostiach filtra. Dobrý filter by mal mať rýchly úpadok pri prechode cez hraničnú frekvenciu, zároveň by však nemal vykazovať prvky zvonenia v priestorovej doméne.



Obr. 3.1: Ideálny lowpass filter pre  $f = 10, 20, 40$

Na obrázku 3.1 môžeme nájsť frekvenčnú odozvu filtra, jeho priestorovú odozvu na bodový

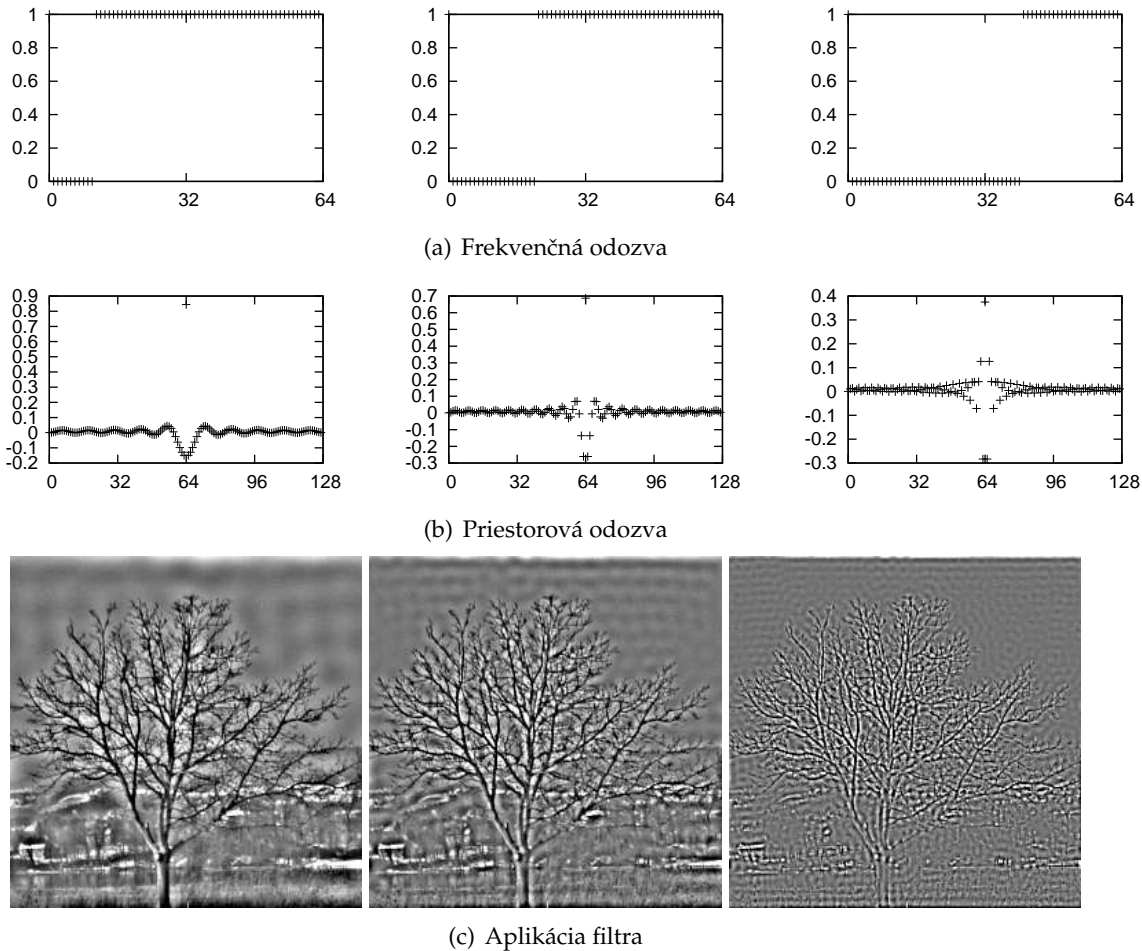
<sup>2</sup>Diracova delta funkcia spĺňa  $\forall a > 0 : \int_{-a}^a \delta(x) dx = 1$ . Delta funkcia nie je funkciou v pravom slova zmysle. Zjednodušene,  $\delta(x) = 0$  ak  $x \neq 0$  a  $\delta(0) = \infty$ .

impulz a ukážku filtrovania obrazu. Je dôležité si všimnúť najmä zvonenie v priestorovej odozve a následný dopad na kvalitu obrazu. Obrázok má rozlíšenie  $256 \times 256$  a sú naň postupne aplikované filtre o hraničnej frekvencii<sup>3</sup> 10,20,40.

Ideálny highpass filter bude mať presne opačnú odozvu ako ideálny lowpass filter. Viac všeobecne, môžeme hovoriť, že frekvenčná odozva highpass filtra je

$$f_H(\omega) = 1 - f_L(\omega) \quad (3.5)$$

Pretože súčet oboch filtrov dodáva pôvodný obraz, je ihneď zjavné že aj ideálny highpass filter bude mať podobné zvoniace efekty ako jeho brat. Jeho charakteristika sa dá nájsť na obrázku 3.2.



Obr. 3.2: Ideálny highpass filter pre  $f = 10, 20, 40$

Pri highpass filtroch ešte spomenieme jednu výnimku rovnice (3.5). Ide konkrétne o frekvenciu 0, čiže aritmetický priemer signálu. Ak počítame výpočty v hodnotách bez znamienka (0-255), efektívne vynulovanie rovnicou (3.5) by spôsobilo posun jasu k čiernym farbám. V tomto prípade je vhodné nastaviť výslednú hodnotu buď konštantne na polovicu jasu, alebo ponechať pôvodný priemer, čiže mať jednotkovú odozvu.

### 3.2.2 Hladké filtre

Ako sme v predchádzajúcej sekcii ukázali, ideálne filtre majú zvoniaci efekt. Preto sa v praxi používajú filtre, ktoré majú spojitý a hladký prechod medzi frekvenciami, ktoré filtrujú a frekvenciami,

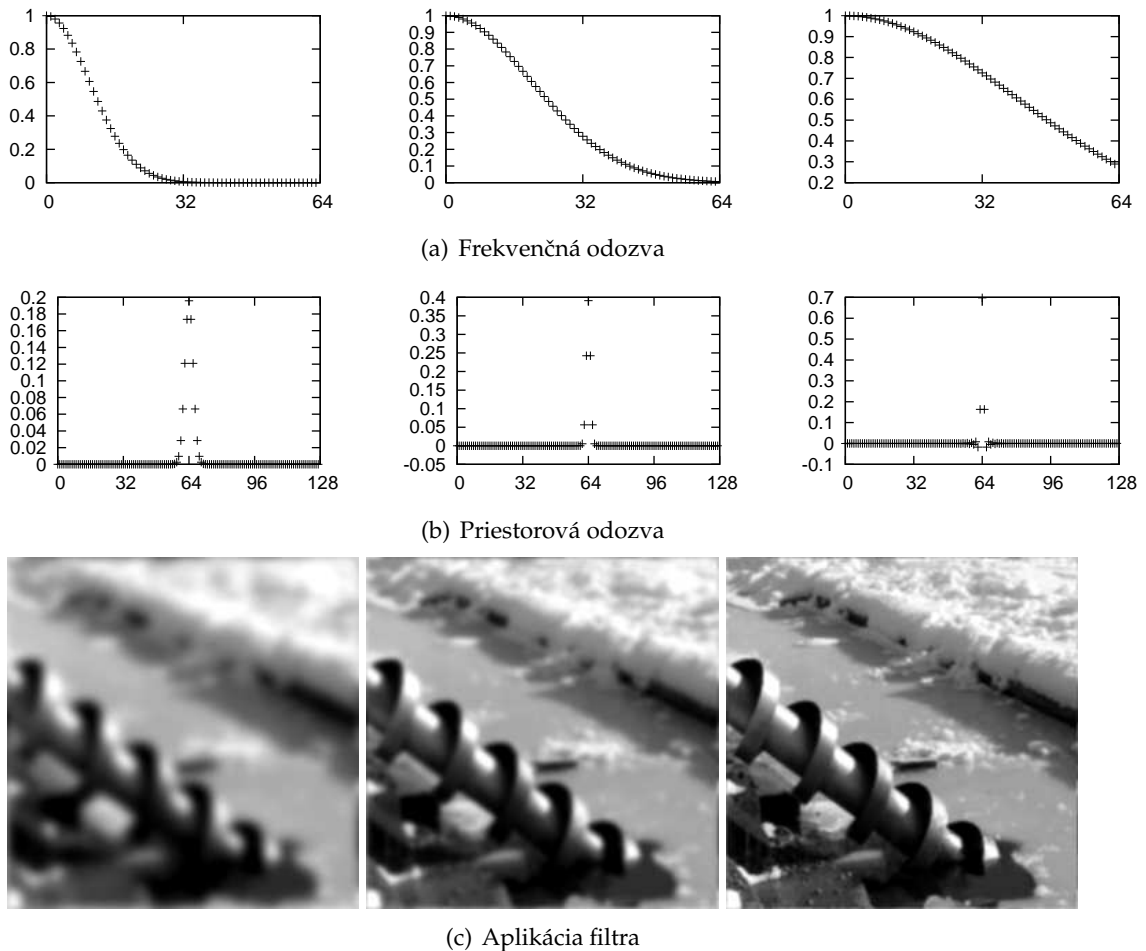
<sup>3</sup>Pri diskretnej transformácii frekvencia 1 zodpovedá sínusovému signálu o perióde dĺžky obrázku

ktoré nefiltrujú. Ukážeme si dva rôzne filtre - Butterworthov a Gaussov. Začneme Gaussovým (lowpass) filtrom, ktorý je definovaný rovnicou

$$g_L(f) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

$$g_H(f) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

Gaussov filter je priamym opakom ideálneho filtra. Jeho pozoruhodnou vlastnosťou je rovnaká hladká podoba vo frekvenčnej a priestorovej doméne. Preto ho môžeme považovať akosi za „ideálne hladký“ filter. Gaussov filter sa využíva napríklad na rozmazávanie obrazu.



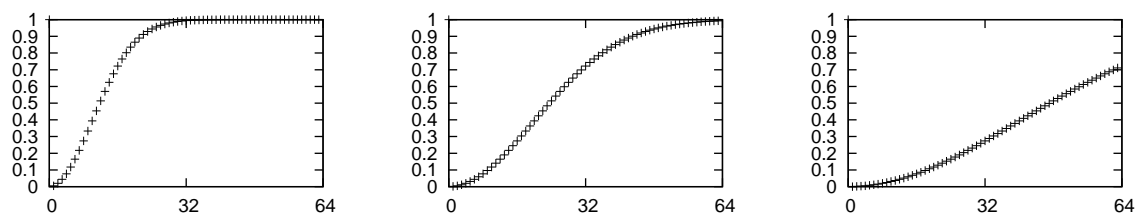
Obr. 3.3: Gaussov lowpass filter pre  $f = 10, 20, 40$

Gaussov filter ale tiež nie je ideálne riešenie. Má síce nádhernú priestorovú odozvu bez zvonenia, jeho frekvenčná odozva je však pomerne rozťahaná. Prax by preto potrebovala filter bez zvonenia, ktorý sa ale blíži ideálnemu a má čo najstrmejší prechod. Takýmto filtrom je napríklad Butterworthov filter. Butterworthov filter rádu  $n$  s hraničnou frekvenciou  $f_0$  môžeme zapísať ako

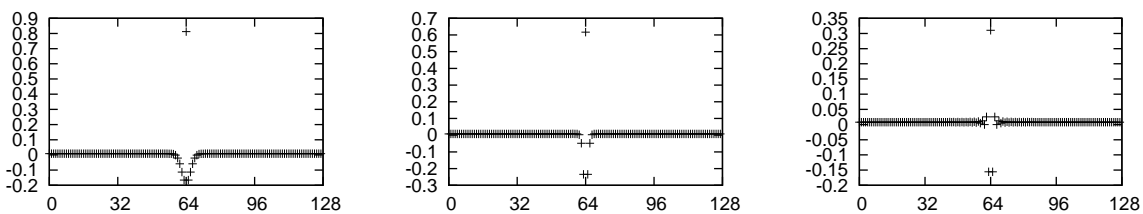
$$b_L(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2n}}$$

$$b_H(f) = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2n}}$$

Menením rádu  $n$  meníme hladkosť filtra a zároveň jeho zvonenie. Filtre do rádu  $n = 2$  majú zvoniaci efekt zanedbateľný, so vzrastajúcim  $n$  ale efekt postupne začína byť čím viac citeľnejší, ako vidieť na obrázkoch 3.6 a 3.8.



(a) Frekvenčná odozva

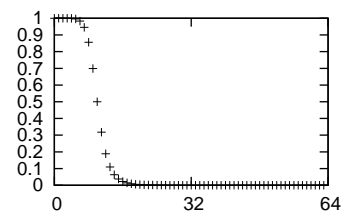
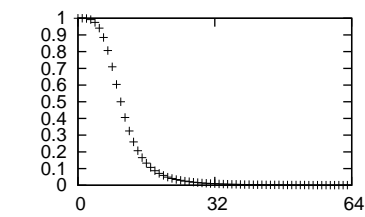
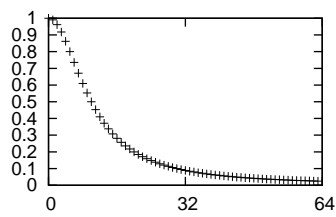
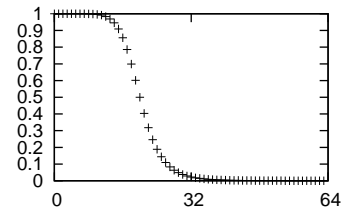
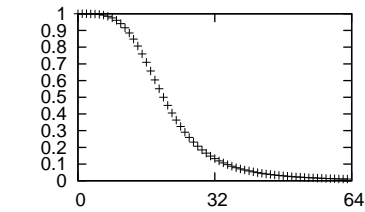
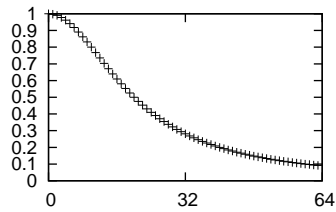
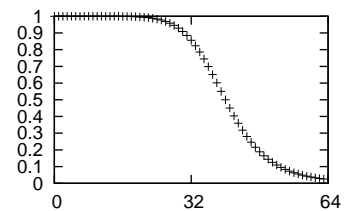
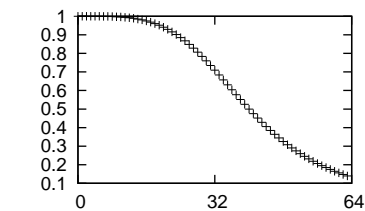
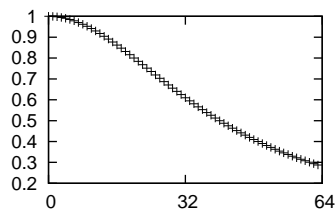
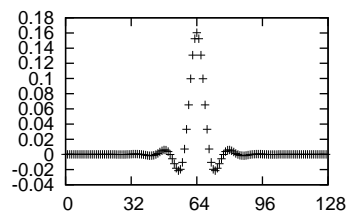
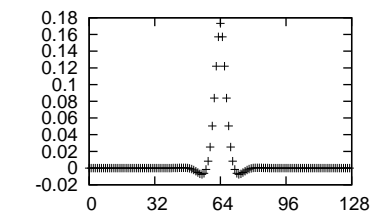
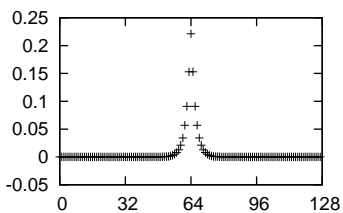
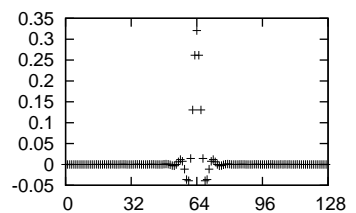
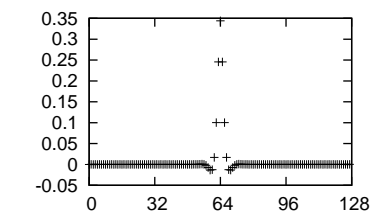
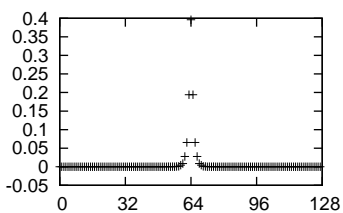
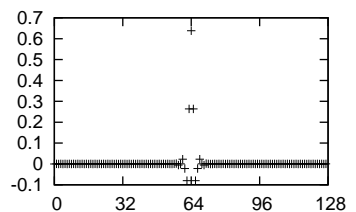
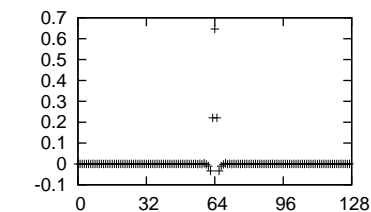
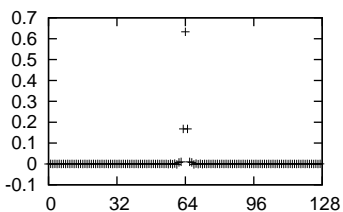


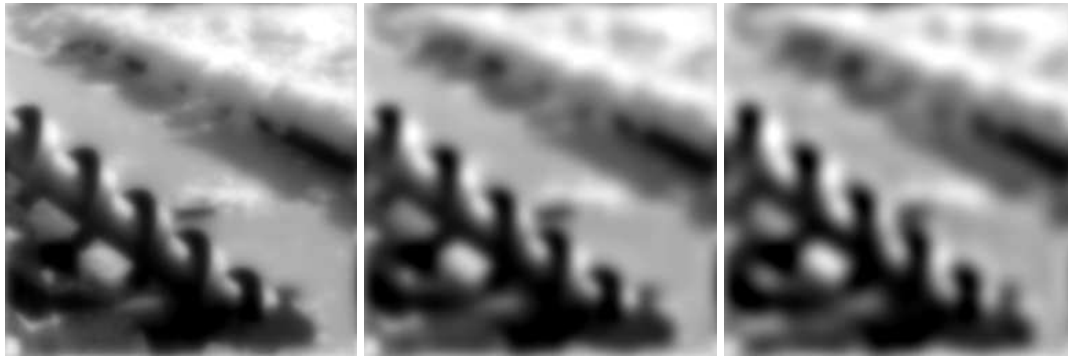
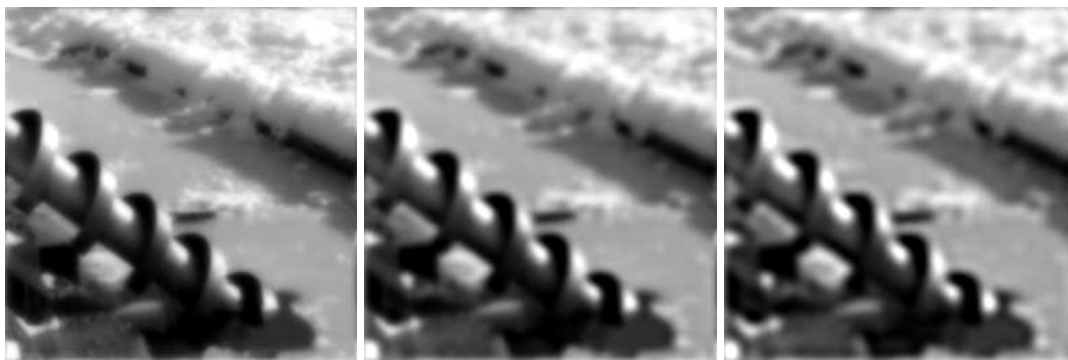
(b) Priestorová odozva

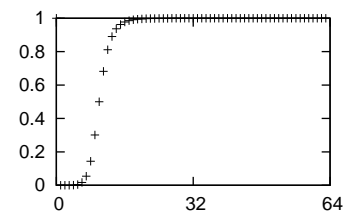
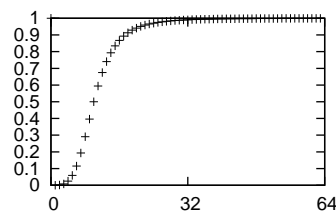
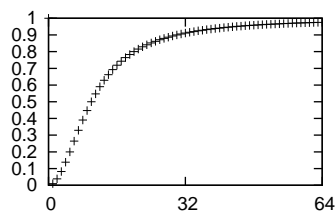
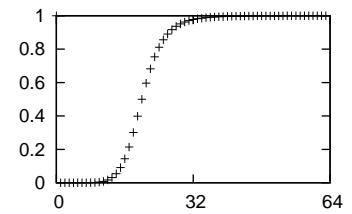
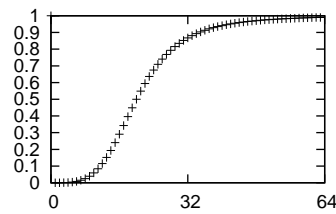
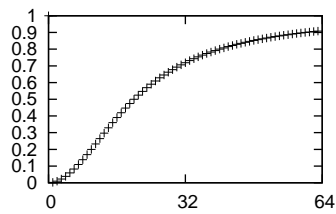
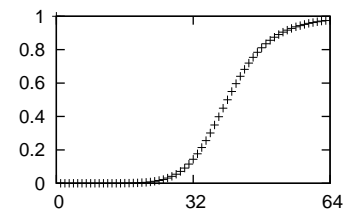
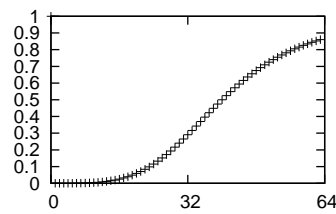
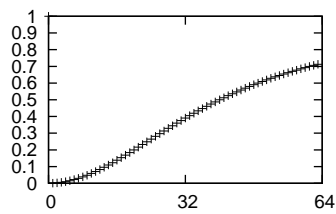
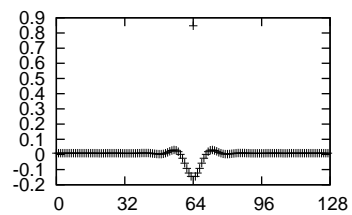
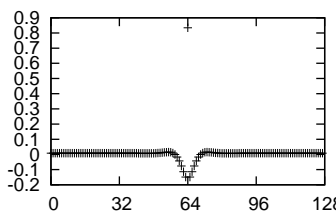
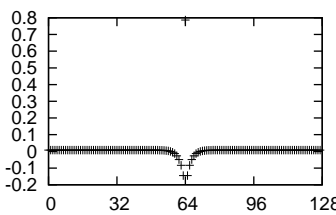
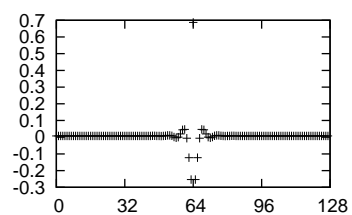
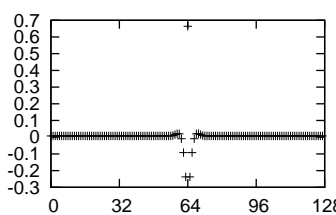
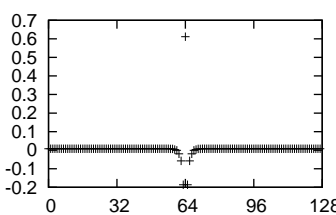
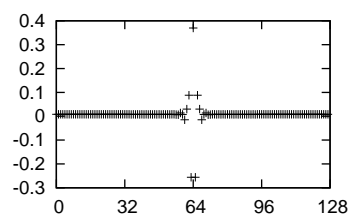
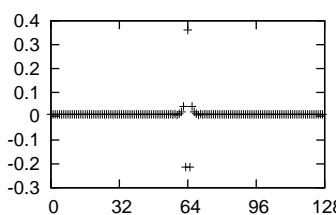
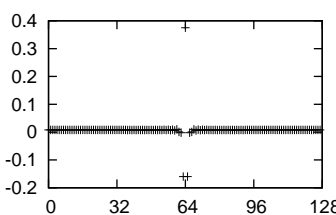


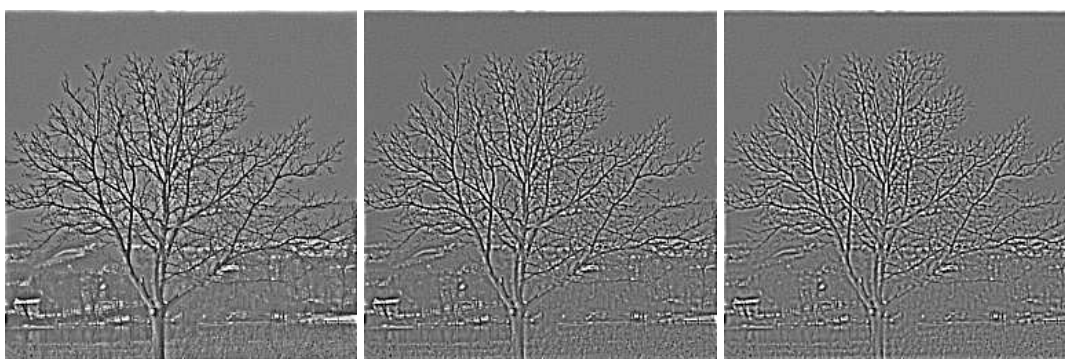
(c) Aplikácia filtra

Obr. 3.4: Gaussov highpass filter pre  $f = 10, 20, 40$

(a) Frekvenčná odozva  $f = 10$ (b) Frekvenčná odozva  $f = 20$ (c) Frekvenčná odozva  $f = 40$ (d) Priestorová odozva  $f = 10$ (e) Priestorová odozva  $f = 20$ (f) Priestorová odozva  $f = 40$ Obr. 3.5: Butterworthov lowpass filter pre rád  $n = 1, 2, 4$

(a) Aplikácia filtra  $f = 10$ (b) Aplikácia filtra  $f = 20$ (c) Aplikácia filtra  $f = 40$ Obr. 3.6: Butterworthov lowpass filter pre rád  $n = 1, 2, 4$

(a) Frekvenčná odozva  $f = 10$ (b) Frekvenčná odozva  $f = 20$ (c) Frekvenčná odozva  $f = 40$ (d) Priestorová odozva  $f = 10$ (e) Priestorová odozva  $f = 20$ (f) Priestorová odozva  $f = 40$ Obr. 3.7: Butterworthov highpass filter pre rád  $n = 1, 2, 4$

(a) Aplikácia filtra  $f = 10$ (b) Aplikácia filtra  $f = 20$ (c) Aplikácia filtra  $f = 40$ Obr. 3.8: Butterworthov highpass filter pre rád  $n = 1, 2, 4$



### 3.2.3 Súvis medzi frekvenčnými a priestorovými filtermi

Klasické obrazové filtre v priestorovej doméne ako napríklad medián, ostrenie hrán a ich komplikovanejšie verzie vieme popísať ako maticu  $M$  rozmerov  $2k + 1 \times 2k + 1$  spĺňajúcu

$$A_{x,y} = \sum_{i=0}^{2k} \sum_{j=0}^{2k} a_{x+i-k,y+j-k} M_{i,j}$$

*Táto matica vlastne popisuje výslednú hodnotu  $A_{i,j}$  ako lineárnu kombináciu okolitých bodov  $a_{x,y}$ . Matica je navyše centrovaná aby stred matice zodpovedal bodu, ktorý ostáva na mieste.*

Pre jednorozmerné signály samozrejme použijeme vektor namiesto matice. Identita sa dá zapísať ako

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a filter na detekciu hrán je napríklad

$$I = \begin{pmatrix} -1/8 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 1 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

Filtrovanie v časovej doméne je pomerne jednoduché a existuje veľké množstvo filtrov. Súvislosť s filtrowaním vo frekvenčnej doméne je preto veľmi zaujímavým cieľom. Je výhodné vedieť prevádzať filtre medzi týmito doménami. Užitočným príkladom môže byť napríklad postupná aplikácia niekoľkých filtrov v časovej doméne za sebou na jeden obrázok. Daný výpočet môže byť pomalý, ak sa začnú aplikovať veľké filtre. Navyše, pri neustálych výpočtoch môže dochádzať k strate presnosti v dôsledku zaokrúhľovania. Preto je výhodnejšie previesť filtre na ich frekvenčné dvojčatá a aplikovať ich vo frekvenčnej doméne. Už na prvý pohľad výpočet filtra v časovej doméne matne pripomína konvolúciu. Túto konvolúciu si teraz explicitne zapíšeme.

**Lema 3.2.1** *Nech  $M'$  je matica filtra  $M$  „posunutá“ do stredu a preklopená podľa oboch osí. Presnejšie, nech*

$$M'_{i,j} = \begin{cases} M_{k-i,k-j}, & -k \leq i, j \leq k \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch} \end{cases}$$

*Potom aplikácia filtra  $M$  je (necyklická) konvolúcia obrazu  $a$  s filtrom  $M'$ .*

D:

$$\begin{aligned}
(a * M')_{x,y} &= \sum_i \sum_j a_{i,j} M'_{x-i,y-j} \\
&= \sum_{\substack{-k \leq x-i \\ x-i \leq k}} \sum_{\substack{-k \leq y-j \\ y-j \leq k}} a_{i,j} M_{-x+i+k,-y+j+k} \\
&= \sum_{\substack{-k \leq i-x \\ i-x \leq k}} \sum_{\substack{-k \leq j-y \\ j-y \leq k}} a_{i,j} M_{-x+i+k,-y+j+k} \\
&= \sum_{i=-k+x}^{k+x} \sum_{j=-k+y}^{k+y} a_{i,j} M_{-x+i+k,-y+j+k} \\
&= \sum_{r=0}^{2k} \sum_{s=0}^{2k} a_{r+x-k,s+y-k} M_{-x+(r+x-k)+k,-y+(s+y-k)+k} \\
&= \sum_{r=0}^{2k} \sum_{s=0}^{2k} a_{r+x-k,s+y-k} M_{r,s}
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.1 nám umožňuje prevádzať jednoduché filtre medzi časovou a frekvenčnou doménou. Podľa konvolučnej vety (tabuľka 2.4) je totiž konvolúcia ekvivalentná jednoduchému násobeniu vo frekvenčnej doméne. Samozrejme, ak uvažujeme diskretnú Fourierovu transformáciu, musíme uvažovať cyklickú konvolúciu. V praxi to znamená rozšíriť obrázok a filter na takú veľkosť, aby súčet ich rozmerov bol menší ako rozmery Fourierovej transformácie (Napríklad pre filter veľkosti  $5 \times 5$  a obrázok veľkosti  $100 \times 100$  treba použiť Fourierovu transformáciu o veľkosti aspoň  $105 \times 105$ ). Filtrovanie v časovej a frekvenčnej doméne sa teda opäť prevádza pomocou Fourierovej transformácie.

### 3.2.4 Dekonvolúcia

V niektorých prípadoch má užívateľ na vstupe signál, ktorý bol upravený konvolúciou. Táto zmena nie je nutne žiadaná. Príkladom môže byť starý gramofón, ktorý výraznejšie lepšie prehrával zvuk na svojej rezonančnej frekvencii. Alebo napríklad jemne rozostrená fotografia, hudba prehrávaná z pásky atď. Ďalším príkladom konvolúcie je napätový priebeh obdĺžnikového signálu v reálnych elektrických obvodoch. Všetky tieto príklady majú spoločný bod - signál z pôvodnej (chcenej) podoby prešiel fyzikálnym javom na konvolvovaný. Princíp dekonvolúcie je preto veľmi jednoduchý - našim cieľom je nájsť filter rušiaci pôvodnú konvolúciu. Ak pôvodný signál označíme  $x$ , konvolvovaný  $y$ , konvolučný filter  $f$  a náhodný šum  $v$ , potom

$$y(t) = h(t) * x(t) + v(t)$$

Našou úlohou je nájsť filter  $g$  taký, aby

$$\hat{x}(t) = g(t) * y(t)$$

kde  $\hat{x}$  je odhad  $x$  minimalizujúci strednú kvadratickú chybu  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned}
\varepsilon(f) &= \mathbb{E}|X(f) - \hat{X}(f)|^2 \\
&= \mathbb{E}|X(f) - G(f)Y(f)|^2 \\
&= \mathbb{E}|X(f) - G(f)[H(f)X(f) + V(f)]|^2 \\
&= \mathbb{E}|[1 - G(f)H(f)]X(f) - G(f)V(f)|^2
\end{aligned}$$

Roznásobením druhej mocniny dostávame

$$\begin{aligned}\varepsilon(f) = & [1 - G(f)H(f)]\overline{[1 - G(f)H(f)]}\mathbb{E}|X(f)|^2 \\ & + [1 - G(f)H(f)]\overline{G(f)}\mathbb{E}(X(f)\overline{V(f)}) \\ & + G(f)\overline{[1 - G(f)H(f)]}\mathbb{E}(V(f)\overline{X(f)}) \\ & + G(f)\overline{G(f)}\mathbb{E}|s(f)|^2\end{aligned}$$

Predpoklad, že šum je nezávislý od signálu môžeme reprezentovať ako

$$\mathbb{E}(X(f)\overline{V(f)}) = \mathbb{E}(V(f)\overline{X(f)}) = 0$$

Ak si zadefinujeme

$$\begin{aligned}S(f) &= \mathbb{E}|X(f)|^2 \\ N(f) &= \mathbb{E}|V(f)|^2\end{aligned}$$

Tak dostávame

$$\varepsilon(f) = [1 - G(f)H(f)]\overline{[1 - G(f)H(f)]}S(f) + G(f)\overline{G(f)}N(f)$$

Aby sme našli minimálnu chybu, zderivujeme celú rovnicu podľa  $G(f)$  a položíme rovnú nule<sup>4</sup>. Aby sme nemuseli minimalizovať cez 2 premenné (imaginárnu a reálnu časť), pre reálnu funkciu  $f$  premennej  $z$  existuje skratka: Ak označíme  $z_r = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $z_i = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ , potom

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|_z = \frac{\partial z_r}{\partial \bar{z}}|_z \frac{\partial f}{\partial z_r}|_{z_i} + \frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}}|_z \frac{\partial f}{\partial z_i}|_{z_r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial z_r}|_{z_i} + i \frac{\partial f}{\partial z_i}|_{z_r} \right)$$

Preto na minimalizáciu cez všetky potrebné hodnoty nám stačí položiť'

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|_z$$

Aplikovaním na  $\varepsilon$  dostávame

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon(f)}{dG(f)} &= -\overline{H(f)}S(f)[1 - G(f)H(f)] + G(f)N(f) = 0 \\ G(f) &= \frac{\overline{H(f)}S(f)}{Hf\overline{Hf}Sf + Nf}\end{aligned}$$

Daný dekonvolučný filter sa nazýva Wienerov filter. Rovnica Wienerovho filtra môže byť ďalej prepísaná do viac vysvetľujúcej podoby

$$G(f) = \frac{1}{Hf} \frac{|H(f)|^2}{|H(f)|^2 + \frac{1}{SNRf}}$$

kde  $SNRf = S(f)/N(f)$  je „signal-to-noise ratio“, čiže pomer sily signálu voči šumu. Ak je šum nulový, člen v zátvorke je nulový a dekonvolučný filter je iba inverzným filtrom. Akonáhle sa ale šum zväčší, člen v zátvorke sa zmenší. Wienerov filter preto utlmuje frekvencie na základe ich SNR.

Pre funkčnosť Wienerovho filtra potrebujeme vedieť frekvenčné charakteristiky jednak signálu a jednak šumu. Tieto charakteristiky sa síce nedajú bez pôvodného signálu zistiť presne, v praxi však často postačuje približný odhad.

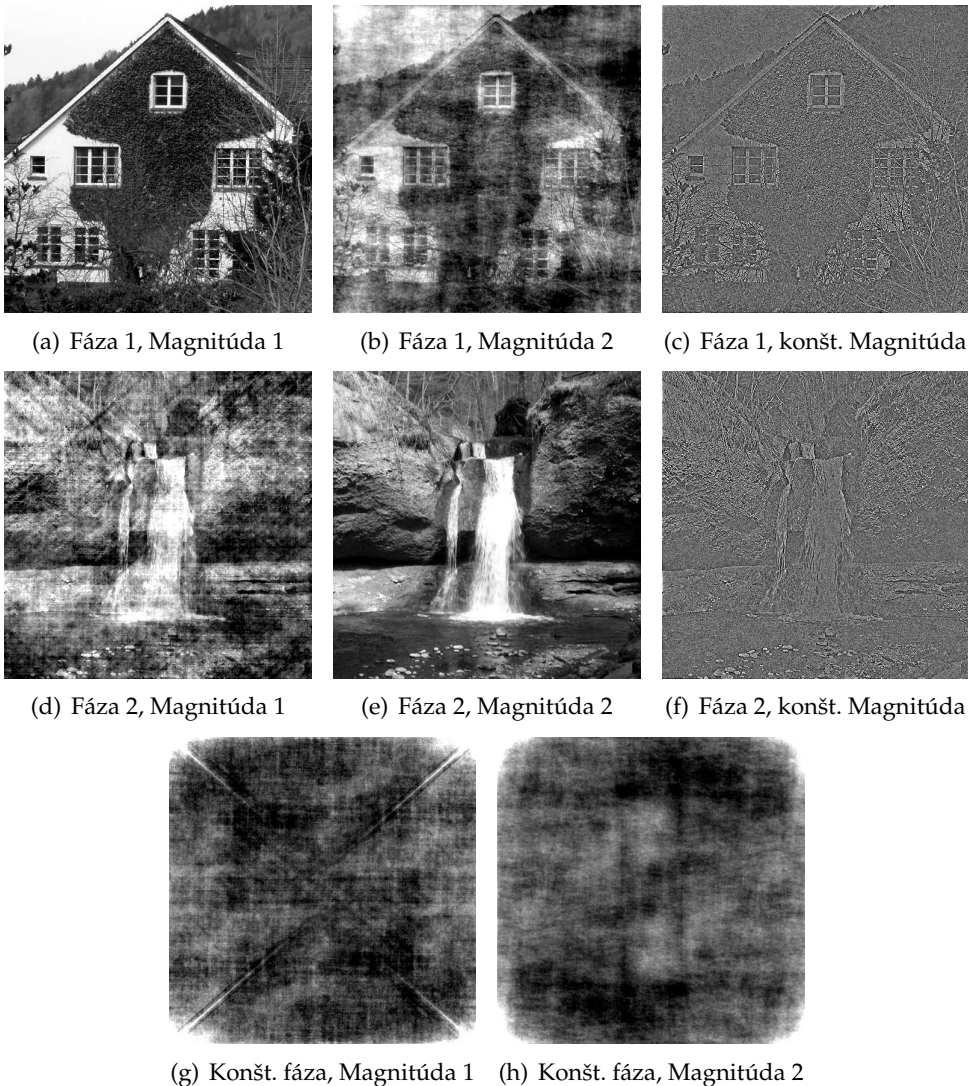
<sup>4</sup>Po správnosti by sa patrilo ešte overiť, že sme dostali naozaj minimum a nie maximum, toto ale prenecháme na čitateľa

### 3.3 Image processing

Táto kapitola bude venovaná spracovaniu obrazovej informácie a ako sa pri tom dá využiť Fourierova transformácia. Ukážeme si dôležitosť magnitúdy a fázy, rýchle hľadanie patternu rovnakej veľkosti a orientácie. O digitálnych filtroch a ich aplikácii na filtrovanie obrázkov sme už písali v predchádzajúcej kapitole a preto tu uvedieme len veci netýkajúce sa úplne priamo filtrov.

#### 3.3.1 Fourierova transformácia - fáza a magnitúda

Zatiaľ nikde v tomto texte sme nespomínali previazanosť fázy a magnitúdy u Fourierovej transformácie. Je preto normálne sa pýtať, či majú rovnakú váhu na vzniku výsledného obrazu. Odpoveď je prekvapivá - nie. Fáza sa omnoho výraznejšie podieľa na výsledných črtách, ako magnitúda. Túto skutočnosť prezentujeme na ilustrácii 3.9. Môžeme pozorovať, že obrázok síce kompletnou zmenou magnitúdy stratí textúru, bude v ňom šum, ale základné črty si predsa len zachová. Objekt je rozpoznateľný aj po takých výrazných zmenách magnitúdy, ako sú zmena na konštantu, či výmena s iným obrázkom. Naopak, posledné dva obrázky ukazujú skutočnosť, že položením konštantnej fázy úplne zrušíme vizuálnu informáciu. Zaujímavým efektom, ktorý možno pozorovať je príspevok strechy prvého obrázku k druhému. Strecha totiž obsahuje pomerne výraznú hranu-diskontinuitu natočenú o 45 stupňov a prispieva tak výrazne k rovnako orientovanému šumu.



Obr. 3.9: Porovnanie dôležitosti fázy a magnitúdy

Dôležitosť fázy ale nekončí len pri obrázkoch. V elektronickej verzii tohoto diela sa čitateľ môže presvedčiť o tom istom závere na audio súboroch.

### 3.3.2 Hľadanie patternov

Jednou z nečakaných aplikácií konvolúcie je aj takzvaný korelačný filter. Korelácia sa používa na identifikáciu lineárnej závislosti. Začneme štandardnou definíciou korelácie zo štatistiky

**Definícia 3.3.1 (Korelácia)** *Koreláciou dvoch nenulových postupností  $x, y$  nazveme číslo*

$$r_{x,y} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{D(x)D(y)} = \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i \sum_{i=0}^{n-1} y_i}{\sqrt{\left( n \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 - \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right)^2 \right) \left( n \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2 - \left( \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right)^2 \right)}}$$

Korelácia popisuje mieru lineárnej závislosti oboch postupností. Použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (veta 2.3.1) pomerne jednoducho dostávame nerovnosť  $|r_{x,y}| \leq 1$  s rovnosťou nastávajúcou práve v prípade lineárnej závislosti. Zjednodušene povedané, čím je väčšia korelácia (v absolútnej hodnote), tým viac sa na seba dané postupnosti podobajú, zoberúc do úvahy ich relatívne škálovanie. Korelácia je preto veľmi vhodný nástroj v spracovávaní signálu na hľadanie známej vzorky v danom signáli. Musíme ale nájsť efektívnu cestu ako ju rýchlo počítať.

**Definícia 3.3.2 (Nenormalizovaná korelácia)** *Nenormalizovanou koreláciou nazveme hodnotu*

$$r'_{x,y} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i$$

Čakajú nás dve podúlohy - rýchle počítanie nenormalizovanej korelácie a následne efektívny prepočet na normalizovanú koreláciu. Aby sme spresnili úlohu - na vstupe máme známy pattern  $y_0, \dots, y_{n-1}$  dĺžky  $n$  a signál (pravdepodobne) väčšej dĺžky  $x_0, \dots, x_{m-1}$ . Chceme vypočítať postupne  $r_{x_0 \dots x_{n-1}, y}, r_{x_1 \dots x_n, y}, r_{x_2 \dots x_{n+1}, y}, \dots$ . Pretože zameraním celej tejto práce je Fourierova transformácia, dostávame drobný hint. Konkrétne, poznáme podobnú rovnicu - konvolúciu. Skutočne, konvolúcia a korelácia sú jedna a tá istá operácia, ak „otočíme“ postupnosť  $y$ . Formálne

**Lema 3.3.1** *Nech  $x'$  je postupnosť  $x$  rozšírená nulami na dĺžku  $n + m$ . Nech  $y'$  je postupnosť dĺžky  $n + m$  definovaná nasledovne  $y' = [y_0, m \text{ krát } 0, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_2, y_1]$ . Potom  $r_{x', y'} = \text{conv}(x, y)_i$  kde  $\text{conv}$  označuje (necyklickú) konvolúciu.*

D: Dôkaz je podobný dôkazu lemy 3.2.1  $\square$

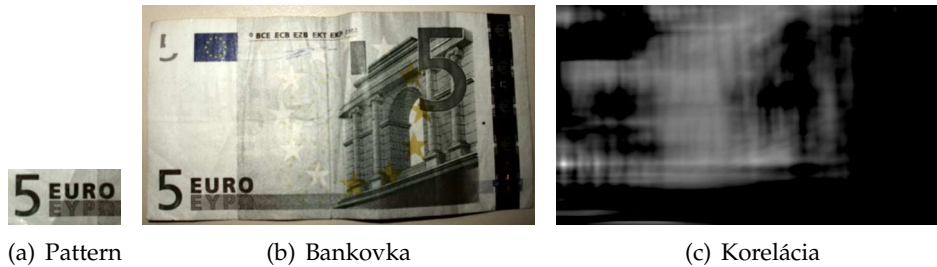
Nenormalizovanú koreláciu vieme preto rýchlo vypočítať pomocou Fourierovej transformácie. Ostáva určiť, ako ju efektívne prepočítať na normalizovanú. Prvým krokom bude „normalizácia“  $y$  vzorcom  $y' = y - E(y)$ , inak povedané, odčítanie priemeru. Táto transformácia nezmení hodnotu korelácie, ako sa môžeme presvedčiť

$$\begin{aligned} E(x(y - E(y))) &= E(xy - xE(y)) = E(xy) - E(xE(y)) = E(xy) - E(x)E(y) \\ D(y - E(y)) &= D(y) \end{aligned}$$

V čitateli ostala nenormalizovaná korelácia  $x, y'$ , v menovateli konštantná hodnota  $D(y)$  ľahko vypočítateľná na začiatku a  $D(x) = D([x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}])$ , ktorá sa mení. Našťastie, táto hodnota sa dá efektívne počítať. V jednom rozmere napríklad nasledovne - pamätáme si sumu posledných  $n$  hodnôt a ich druhých mocnín a keď sa posúvame o hodnotu vpravo, pripočítame nový člen a odpočítame hodnotu toho, ktorý „vypadol“ z postupnosti. V dvoch (a viacerých) rozmeroch

sa dajú predpočítať prefixové sumy v lineárnom čase s následnou otázkou na sumu obdĺžnika v konštantnom čase.

Po vyriešení algoritmickej strany problému sa zamyslíme na čo je korelácia vhodná. Jedno teoretické použitie je znázornené na obrázku 3.10. Ide o stroj overujúci pravosť bankovky a hľadajúci známe znaky. Na obrázku je znázornený známy pattern, ktorý chceme identifikovať v rámci obrázku, symbol eura. Vedľa neho je znázornená korelácia daných dvoch vzorov, ukazujúca maximum presne na polohe hľadaného symbolu. Stroj takto môže identifikovať viacero symbolov, porovnať ich pozície a kvalitu korelácie a identifikovať bankovku.



Obr. 3.10: Ukážka korelácie

Na prvý pohľad sa teda zdá, že korelácia je spása a dokonalý nástroj na hľadanie paternov. Daný prístup má však svoje nedostatky. V jednom rozmere je to neschopnosť detekcie signálu, ktorý je „rozťahnutý“. V dvoch rozmeroch k škálovaniu pribúda aj otočenie. Zjavne, korelácia hľadá len pattern presnej veľkosti a presného natočenia, čo môže byť výrazným problémom pri hľadaní patternu vo všeobecnej polohe. Aj napriek týmto nedostatkom je však použiteľná na veľkú škálu problémov, ako sme si ukázali na príklade.

*Ak sa čitateľ zaujíma o digitálne filtre a spracovanie obrazu, odporúčame mu prečítať si publikáciu [Smi97].*

## 3.4 Image compression

### 3.4.1 Základný náčrt kompresie údajov

Stratová (ale aj bezstratová) kompresia údajov je založená na jednoduchých princípoch. Jej hlavné črty si môžeme popísať v troch krokoch

- Transformácia
- Kvantizácia
- Kompresia

Podme sa bližšie zaoberať jednotlivými časťami. Transformácia je bezstratová manipulácia s údajmi. Transformáciou môže byť identita, rozdelenie obrazu na farebné zložky, zmena RGB na CMYK a pod. Hlavnou úlohou transformácie je akosi predpripraviť dáta na ďalšie spracovanie, dostať ich do vhodnej podoby pre ďalšie kroky, ale pritom vedieť stále vypočítať reverznú transformáciu. Krok transformácie je zároveň krokom, kedy sa teoreticky<sup>5</sup> ne stráca žiadna informácia.

Nasleduje, druhý krok, samotný krok zodpovedný za stratu informácie pri stratovej kompresii. Pri bezstratovej kompresii je samozrejme vynechaný. Výstupom z transformácie sú dáta. Tieto dáta môžeme považovať za reálne resp. celé čísla. Ich problémom je veľká pamäť potrebná na udržiavanie týchto informácií. Kvantizácia rieši tento problém jednoducho inžiniersky - nejaké informácie vynecháme. Spravidla sa to robí tak, že čísla sa vydedia kvantizačným faktorom a zaokrúhľia nadol. Opačný proces ku kvantizácii môže len hádať pôvodné čísla, preto je kvantizácia stratová. Je však

<sup>5</sup>V praxi môže dochádzať k chybám zo zaokrúhľovania

na umení príslušného spôsobu kvantizácie, aké to bude mať vizuálne následky. Ako vieme, väčšina informácie skrytá v digitálnych obrázkoch či zvukoch je takpovediac nepotrebná. Človek nemá natoľko vyvinuté zmysly, aby ju všetku videl/počul. Preto záleží len na šikovnosti, ktoré informácie budú kvantizované viac a ktoré menej. Samozrejme, snahou je najviac kvantizovať informácie pre človeka skryté a naopak, dôležité údaje nekvantizovať vôbec. Tu si kvantizácia podáva ruku s predchádzajúcou transformáciou - čím lepšie transformácia oddelí dôležité od nedôležitého, tým lepšie vieme kvantizovať.

Poslednou časťou je kompresia. Toto je čiste bezstratová kompresia, ktorá sa snaží ešte z kvantizovaných údajov vyžmýkať posledné voľné bity a tak zavŕšiť finálnu podobu.

Príkladom formátu, ktorý nemá transformáciu, nemá kompresiu ale má kvantizáciu je napríklad BMP - kvantizuje každú farebnú zložku do 8 bitov. Formátom bez transformácie s kvantizáciou a kompresiou môže byť napríklad TGA - prebieha v ňom Run-length kompresia, ktorá vie dobre komprimovať dlhé úseky rovnakej farby. V skutočnosti, najviac účinné formáty sú tie, ktoré používajú sofistikovanú transformáciu. Príkladom je JPEG2000 využívajúci waveletovú transformáciu či klasický formát JPEG. Práve pri ňom sa teraz zastavíme a bližšie si popíšeme jeho kroky.

### 3.4.2 Jpeg - farebná predpríprava

Dátový formát jpeg je sofistikovaný formát využívajúci viaceré poznatky z vizuálneho vnímania obrazu.

V počítači je bežná reprezentácia farieb v takzvanom RGB móde, kde farba pozostáva z koordinátov v 3D priestore (Červená, Zelená, Modrá). Hoci je tento spôsob veľmi intuitívny pre CRT monitory, nie je perfektný pre kompresiu. Trojica farieb červená, zelená a modrá totiž nepopisuje spôsob vnímania ľudskou bytosťou rovnomerne. Formát JPEG rieši tento problém zavedením nového farebného priestoru ( $Y, Cb, Cr$ ), ktorý sa dá vypočítať nasledovne <sup>6</sup> (predpokladáme 8-bitové RGB hodnoty)

$$\begin{aligned} Y &= 0.299R + 0.587G + 0.114B \\ Cb &= -0.1687R - 0.3313G + 0.5B + 128 \\ Cr &= 0.5R - 0.4187G - 0.0813B + 128 \end{aligned}$$

Pričom spätná transformácia je

$$\begin{aligned} R &= Y + 1.402(Cr - 128) \\ G &= Y - 0.34414(Cb - 128) - 0.71414(Cr - 128) \\ B &= Y + 1.772(Cb - 128) \end{aligned}$$

Nasleduje prvá kvantizácia nazývaná Chroma subsampling, kde sa zložky  $Cr, Cb$  redukujú na nižšie rozlíšenie. Ľudské oko je totiž omnoho menej citlivé na zmenu farby ako na zmenu jasú. Pri kompresii si preto môžeme dovoliť zmenšiť rozlíšenie s akým je uchovaná farba. Nepříjemným vedľajším dôsledkom môže byť „pretekание“ farebného odtieňa na silno kontrastných hranách.

*Viac o subsamplingu sa čitateľ môže dozvedieť v [DAK05].*

### 3.4.3 Jpeg - kosínová transformácia

Po tejto úprave sa všetky tri vrstvy spracúvajú samostatne a tým istým spôsobom. Snahou je zredukovať ďalšiu nepotrebnú informáciu. Práve tu sa ujíma vedenia Fourierova transformácie, presnejšie povedané jej kamarátka diskretná kosínová transformácia. Jej špeciálna verzia pre JPEG sa od vzorca 2.31 líši normalizáciou a špecializáciou na vstup veľkosti  $8 \times 8$ .

$$F(u, v) = \frac{1}{4}C(u)C(v) \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cos \frac{\pi(x+1/2)u}{8} \cos \frac{\pi(y+1/2)v}{8} \quad (3.6)$$

<sup>6</sup>Prevzaté z [Ham92]

Kde  $C$  je definované ako

$$C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases}$$

Inverzná transformácia je definovaná ako

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^7 \sum_{v=0}^7 C(u)C(v)F(u, v) \cos \frac{\pi(x+1/2)u}{8} \cos \frac{\pi(y+1/2)v}{8} \quad (3.7)$$

*Bolo by dobré upozorniť čitateľa na dva zásadné rozdiely medzi kosínovou transformáciou a jej inverznou transformáciou. Prvým je vyňatie  $C(u)C(v)$  pred sumu v rovnici (3.6) narozdiel od rovnice (3.7), kde to nemôžeme spraviť. Druhým rozdielom je zhoda parametrov oboch kosínusov, navzdory intuícii, že inverzná transformácia by mala mať vymenené indexy  $u, v$  s  $x, y$*

Dôvod prečo je diskretná kosínová transformácia výhodnejšia si spomenieme neskôr, nateraz si vysvetlíme princíp na ktorom si obe zakladajú. Ukazuje sa, že ľudské oko je vnímavejšie v oblasti nižších frekvencií. Presnejšie povedané, omnoho viac vnímame svetlosť a odtiene povedzme na veľkej modrej ploche ako je obloha v porovnaní s rýchlo sa meniacimi farbami morskej hladiny s vlnami, kde sa prípadné zmeny spôsobené kompresiou stratia. Diskretná kosínová transformácia oddelí jednotlivé frekvencie od seba, a tak môžeme aplikovať rôznu kvantizáciu pre rôzne frekvencie. Druhou výhodou tejto transformácie je jej schopnosť sústreďovať väčšinu energie v nízkofrekvenčnej oblasti. Už bez samotnej kvantizácie vieme potom ušetriť na finálnej kompresii, ktorá bude omnoho lepšie pracovať na údajoch, ktorých veľká časť má nízku entropiu oproti vysokej entropii celého pôvodného signálu. Obraz sa preto rozdelí na bloky veľkosti  $8 \times 8$  pixelov, každý blok sa spracúva samostatne.

Na daný blok sa najskôr aplikuje DCT podľa vzorca 3.6. Výsledok je opäť blok  $8 \times 8$ , tentoraz vo frekvenčnom spektre. Môžeme si všimnúť, že maximálna hodnota v danom bloku môže byť väčšia ako je rozsah vstupných údajov, transformáciu preto treba robiť s väčším dátovým typom. Dáta kvantizujeme a dekvantizujeme pomocou vopred určenej kvantizačnej matice  $Q(u, v)$ .

$$F_Q(u, v) = \text{Round}(F(u, v)/Q(u, v))$$

$$F'(u, v) = F_Q(u, v) * Q(u, v)$$

Ukážka prevodu pôvodného obrázku na kvantizované koeficienty a spätná transformácia je v tabuľke 3.1

### 3.4.4 Prečo DCT a nie DFT?

V krátkosti si vysvetlíme základný rozdiel medzi Fourierovou a kosínovou transformáciou pri kompresii. Na prvý pohľad je totiž Fourierova transformácia výhodnejšia - ako sme už ukázali, výstup diskretnéj Fourierovej transformácie reálnych čísel je zbytočne veľký. V skutočnosti nám stačí si pamätať  $\frac{1}{4}$  výstupu, pretože poznáme jeho symetriu v oboch rozmeroch. V spolupráci s predpokladom dvojnásobného počtu bitov na zapamätanie si komplexných čísel môžeme dôjsť k záveru, že výstup DFT je o polovicu menší ako výstup DCT. Tento záver je zjavne v niečom chybný, nakoľko by sme vedeli komprimovať ľubovoľné súbory na polovicu. Problém je v presnosti - na výstup DFT potrebujeme väčšiu presnosť aby sme vedeli spraviť spätnú transformáciu<sup>7</sup>. Toto ale nie je najhlavnejší dôvod prečo sa používa kosínová transformácia.

Dôvod prečo DCT a nie DFT si doslova ukážeme. Ide o schopnosť koncentrácie energie v menších frekvenciách. Z obrázka 3.11 môžeme vidieť jemný rozdiel medzi týmito dvoma transformáciami Fourierova transformácia má najviac koeficientov s väčšou energiou ako diskretná kosínová

<sup>7</sup>Obrázok 3.9 ukazuje veľkú závislosť výstupu od fázy. Preto je potrebné uchovávať fázu s vysokou presnosťou



(a) Pôvodné hodnoty													
139	144	149	153	155	155	155	155	155					
144	151	153	156	159	156	156	156	156					
150	155	160	163	158	156	156	156	156					
159	161	162	160	160	159	159	159	159					
159	160	161	162	162	155	155	155	155					
161	161	161	161	160	157	157	157	157					
162	162	161	163	162	157	157	157	157					
162	162	161	161	163	158	158	158	158					

(b) DCT													
235.6	-1.0	-12.1	-5.2	2.1	-1.7	-2.7	1.3						
-22.6	-17.5	-6.2	-3.2	-2.9	-0.1	0.4	-1.2						
-10.9	-9.3	-1.6	1.5	0.2	-0.9	-0.6	-0.1						
-7.1	-1.9	0.2	1.5	0.9	-0.1	-0.0	0.3						
-0.6	-0.8	1.5	1.6	-0.1	-0.7	0.6	1.3						
1.8	-0.2	1.6	-0.3	-0.8	1.5	1.0	-1.0						
-1.3	-0.4	-0.3	-1.5	-0.5	1.7	1.1	-0.8						
-2.6	1.6	-3.8	-1.8	1.9	1.2	-0.6	-0.4						

(c) Kvantizačné koeficienty								(d) Po kvantizácii							
16	11	10	16	24	40	51	61	15	0	-1	0	0	0	0	0
12	12	14	19	26	58	60	55	-2	-1	0	0	0	0	0	0
14	13	16	24	40	57	69	56	-1	-1	0	0	0	0	0	0
15	17	22	29	51	87	80	62	0	0	0	0	0	0	0	0
18	22	37	56	68	109	103	77	0	0	0	0	0	0	0	0
24	35	55	64	81	104	113	92	0	0	0	0	0	0	0	0
49	64	78	87	103	121	120	101	0	0	0	0	0	0	0	0
72	92	95	98	112	100	103	99	0	0	0	0	0	0	0	0

(e) Dekvantizácia													
240	0	-10	0	0	0	0	0	0					
-24	-12	0	0	0	0	0	0	0					
-14	-13	0	0	0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0					

(f) Finálny výstup													
144	146	149	152	154	156	156	156	156					
148	150	152	154	156	156	156	156	156					
155	156	157	158	158	158	158	156	155					
160	161	161	162	161	159	157	155						
163	163	164	163	162	160	157	156						
163	163	164	164	162	160	158	157						
160	161	162	162	162	161	159	158						
158	159	161	161	162	161	159	158						

Tabuľka 3.1: Postupná ukážka kvantizácie JPEG obrázku

transformácia. Pri finálnej bezstratovej kompresii je to rozhodujúci fakt - kosínová transformácia má menej entropie a preto sa bude dať lepšie komprimovať.

### 3.4.5 Jpeg kompresia

Nasleduje posledná fáza a tou je kompresia. Kompresia bude fungovať rôzne pre DC člen (0,0) a zvyšných 63 koeficientov. DC člen spravidla nesie v sebe väčšinu energie a navyše je známe, že sa veľmi nemení medzi susednými blokmi  $8 \times 8$ , preto sa počíta ako rozdiel od predchádzajúceho DC člena. AC koeficienty sa najskôr zoradia do cik-cak postupnosti na obrázku 3.12.

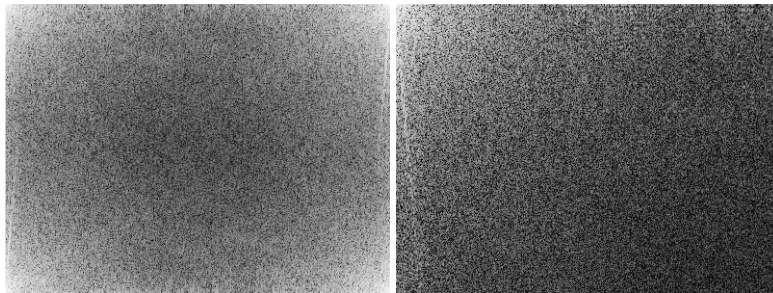
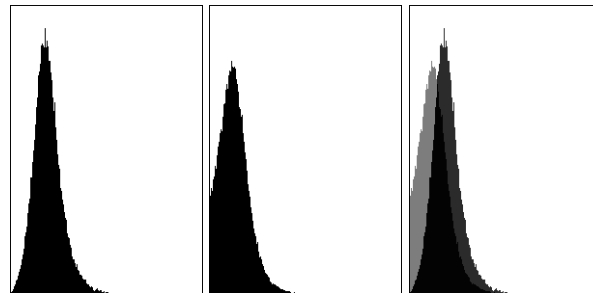
Zoradenie koeficientov do tejto postupnosti je pomerne dôležité, pretože empiricky zoraďuje najskôr najväčšie koeficienty a potom tie menšie až nulové. Finálna kompresia je tzv. „entropy coding“. JPEG špecifikuje dva možné prístupy - aritmetické kódovanie a Huffmanovo kódovanie. Aritmetické kódovanie produkuje o 5-10% lepšie výsledky, avšak je náročnejšie a pre rýchle implementácie JPEGu sa používa spravidla Huffmanov kód. Samotné Huffmanovo kódovanie nebudeme rozoberať v tejto publikácii, po poznatkoch túžiaci čitateľ veľmi ľahko nájde literatúru na túto tému.

### 3.4.6 Ďalšie aspekty JPEGu

Existuje množstvo ďalších aspektov, ktoré sme v tomto krátkom úvode nespomenuli, a stoja za zmienku. Existuje bezstratová verzia JPEGu, ktorá funguje na úplne inom princípe. Navyše

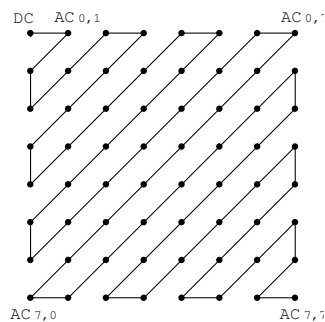


(a) Pôvodný obrázok

(b) Obrázok magnitúdy koeficientov (použitá funkcia  $\log 1 + |x|$ ). Vľavo DFT, vpravo DCT.

(c) Histogram pre magnitúdu. Vľavo DFT, v strede DCT a napravo porovnanie

Obr. 3.11: Porovnanie koncentrácie energie pre DFT a DCT



Obr. 3.12: JPEG formát - postupnosť v akej sú kódované AC koeficienty

ukladanie dát je možné rôznymi spôsobmi - sekvenčné a progresívne ukladanie majú každé svoje výhody. JPEG súbor ako taký môže tiež obsahovať náhľad obrázku, môže obsahovať viacero vrstiev. Jednou z otázok, ktoré mohli čitateľovi skrsnúť v hlave je „Prečo práve  $8 \times 8$ “? Prečo sa neoplatí spraviť väčšie bloky? Výhodou malých blokov je ich lokálnosť - veľké bloky majú väčšiu náchylnosť kvantizáciou zmeniť obrazovú informáciu až príliš. Boli vyskúšané bloky väčších veľkostí a kvalita kompresie ostala porovnateľná. Uvážením výpočtovej náročnosti kompresie a dekompresie, bloky veľkosti  $8 \times 8$  sa ukazujú ako veľmi dobrá voľba.

Viacie informácii o tomto formáte sa čitateľ môže dočítať v [Wik09e], [Wik09d] a vynikajúcom popise JPEG kompresie v [Wal91].

## 3.5 Kompresia videa/objemových obrázkov

Ako sme v predchádzajúcej kapitole ukázali, Fourierova transformácia, presnejšie jej odroda diskretná kosínová transformácia, sa dá v praxi použiť na stratovú kompresiu obrázkov s kompresným pomerom až do 1:10. Môže sa preto vyskytnúť myšlienka rozšíriť dvojrozmernú transformáciu na trojrozmernú. V praxi sa ukazujú dva typy trojrozmerných dát. Prvým typom je reálne trojrozmerný obrázok. Tieto obrázky sú väčšinou medicínskeho zamerania a vznikajú pomocou prístrojov ako CT (Computed tomography), NMRI (Nuclear Magnetic Resonance Imaging). Nasnímané obrázky sú vo vysokom rozlíšení, a tak je nutné používať kompresiu. Problémom ostáva ale bezstratovosť. Lekárske zameranie vyžaduje vysokú presnosť a nemôže si preto dovoliť viditeľné straty na kvalite obrazu.

Napriek tomu sa dá použiť DCT aj tu. Minimálne je výhodnejšie ako používaná JPEG kompresia v rámci jednotlivých obrázkov, o čom sa čitateľ môže presvedčiť v [VNPR07]. Autor prirodzene rozšíril 2D verziu na 3D verziu, ktorá transformuje bloky  $8 \times 8 \times 8$  a následne kvantizuje a komprimuje podobne ako pri JPEGu. V závere je ukázané, že 3D DCT má lepšiu kompresnú pomernosť v porovnaní so štandardným JPEG kódovaním jednotlivých snímok.

Ako sa ukazuje ďalej, výhodným spôsobom na kompresiu medicínskych dát môže byť Waveletová transformácia. Táto transformácia má ale praktickú nevýhodu - je veľmi náročná na spracovanie, hlavne na dekódovanie, pretože na dekódovanie konkrétneho obrázka potrebuje spracovať omnoho viacej informácie. Metóda, ako čiastočne odstrániť túto vadu sa dá nájsť v [Vij06].

Medzi prácu s objemovými dátami sa dá považovať aj takzvaný 3D volumetric rendering - technika renderovania projekcie 3D údajov napríklad z CT alebo NMRI na obrazovku podobne ako klasické 3D renderovanie. Vieme tak napríklad zobrazit' reálnu ľudskú lebku ako sa otáča v priestore. Podľa [YL95] existuje raytracing algoritmus fungujúci s 3D DCT skomprimovanými dátami, bez ich kompletnej dekompresie. Toto je výrazný pokrok v danej oblasti, nakoľko spracúvané dáta sú mnohokrát veľké a schopnosť priamo renderovať zo skomprimovaných údajov je lákavá.

Druhým veľkým zdrojom trojrozmerných dát sú videá. Pravdupovediac, nejde o 3D dáta v pravom slova zmysle. Sú to 2D dáta meniace sa v čase. Možno sa však na ne pozerat' ako na trojrozmerné dáta s  $z$ -ovou osou časovou a nie priestorovou. Takýto pohľad vôbec nie je prekvapivý - nakoniec, tak ako existuje priestorová súvislosť medzi jednotlivými pixelmi, existuje aj časová súvislosť.

### 3.5.1 XYZ Video kompresia

XYZ video kompresia je nápadne podobná tomu, ako prebiehala JPEG kompresia. Video sa najskôr rozdelí na  $8 \times 8 \times 8$  „video kocky“, zachytávajúce jeden blok  $8 \times 8$  pixelov po dobu ôsmich snímok. Originálne hodnoty z rozsahu 0..255 sa posunú na -128..127. Každá kocka sa potom prevedie do frekvenčnej domény pomocou 3D DCT, podľa nasledujúceho vzorca nápadne pripomínajúceho

rovnici (3.6).

$$f(u, v, w) = \frac{1}{8} C(u)C(v)C(w) \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 \sum_{z=0}^7 f(x, y, z) \cos \frac{\pi(x+1/2)u}{8} \cos \frac{\pi(y+1/2)v}{8} \cos \frac{\pi(z+1/2)w}{8}$$

Ďalej nasleduje klasická kvantizácia a entropy coding, ako sme videli pri JPEGu.

V čom sa XYZ video kompresia líši od klasickej video kompresie je práve transformácia aj vo frekvenčnej doméne. Klasické video kodeky pracujú na princípe zmien oproti predchádzajúcemu snímku, kombinovanými s predikciou pohybu, pretože pri pohybe celého snímku je predchádzajúca metóda neúčinná.

Absencia predikcie pohybu tak môže XYZ kompresii robiť problémy pri pohybe kamery. Na druhej strane DCT nepovedala posledné slovo pri kompresii videa. Podľa Raymonda Westwata a Borka Furtha ([WF]), situácia nie je taká čiernobiela. Využitím adaptívnych kvantizátorov sa im podarilo dosiahnuť vynikajúci kompresný pomer. Algoritmus má spomínané nedostatky pri zoomovaní a pohybe kamery. Tieto nedostatky sú ale vyvážené jeho zložitosťou, ktorá je omnoho menšia ako u klasických kodekov. Autori preto vyzdvihujú jeho využitie pri real-time kompresii ako je videokonferencia, kde má kompresný pomer dokonca vyšší ako klasické algoritmy, má nízku náročnosť na kompresiu a teda na hardware. Nároky na dekompresiu sú síce väčšie ako v prípade štandardnej kompresie, ale to nie je kritická záhada. Kompresia videa pomocou kosínovej transformácie má preto svoje významné miesto v informatike.

## 3.6 Audio kompresia

Audio kompresia je naproti kompresii obrázkov jednoznačne náročnejšia úloha. V tejto sekcii si vysvetlíme jej základy. Najskôr si uvedieme modifikovanú DCT transformáciu. Čitateľa oboznámime s ich rozdielom a praktickým prínosom pri kompresii. Následne zabehne kúsok do problematiky ľudského vnímania zvuku a záverov, ktoré sa môžu využiť pre zvýšenie kompresného pomeru. No a na záver si popíšeme proces kompresie a dekompresie, ktorý je trochu zložitejší ako u obrázkov.

### 3.6.1 Modifikovaná diskretná kosínová transformácia

Pri kompresii obrázkov sme si uviedli diskretnú kosínovú transformáciu a jej výhodu pred Fourierovou transformáciou. Pri zvuku ale musíme ísť ešte ďalej. Rozdielov medzi zvukom a obrazom je niekoľko. Medzi dva najdôležitejšie patria

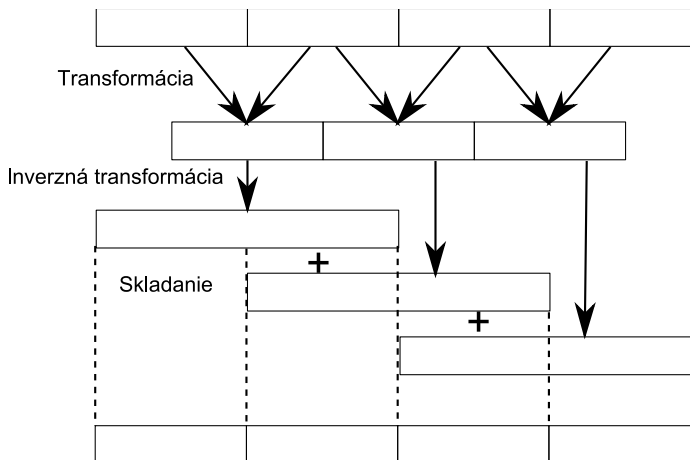
- dĺžka
- veľkosť blokov

Audio obsahuje podstatne viac samplov ako obrázok. Už jedna sekunda môže obsahovať 44000 jednotlivých samplov, omnoho viac ako je rozmer obrázka. Okrem iného, audio stopa môže trvať aj niekoľko minút. Preto je vitálne, aby kompresia a dekompresia prebiehala na blokoch a nie na celom zázname, podobne ako to bolo u obrázkov. Akurát, pri obrázkoch sme používali veľkosť bloku 8 (resp. presnejšie povedané  $8 \times 8$ ). Táto dĺžka je ale nedostačujúca, vzhľadom na vlastnosti ľudského počutia. Omnoho lepšie sa komprimujú bloky dĺžky 512, 1024 či 2048, pretože vieme lepšie aplikovať psychoakustický model spomínaný v nasledujúcej sekcii. Táto veľkosť bloku má ale jeden drobný problém. Podobne ako vidno pri silnej kompresii JPEG-u  $8 \times 8$  bloky, začne byť počut' prechod medzi blokmi ako prasknutie. Hoci v rámci bloku nedochádza k veľkému skresleniu, na hranici sa môže vyskytnúť skok, ktorý počut' ako praskanie.

Tento problém sa dá riešiť pomocou „prekladanej“<sup>8</sup> transformácie. Spoločným princípom týchto transformácií je, že pracujú na blokoch preložených cez seba. Modifikovaná diskretná

<sup>8</sup>Z anglického originálu „lapped“

transformácia je transformácia  $\mathbb{R} : 2N \rightarrow N$ , čiže z dvoch blokov vyrobí jeden. Inverzná transformácia je  $\mathbb{R} : N \rightarrow 2N$ . Samozrejme, inverzná transformácia nie je surjektívna. To však nevádi, pretože pri spracovaní sa daný blok spracuje v dvoch preloženiach a ich výsledok sa sčíta. Vzorec



Obr. 3.13: Schéma prekladanej transformácie

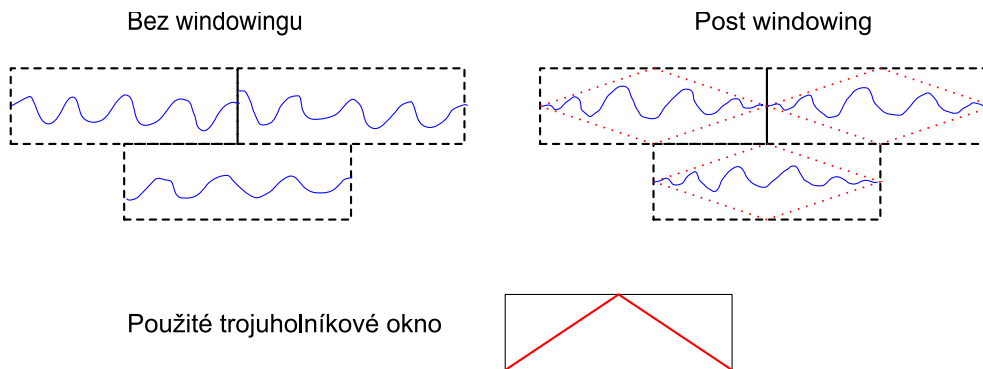
Modifikovanej diskkrétnej kosínovej transformácie je

$$X_k = \sum_{i=0}^{2N-1} x_i \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}N\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \quad k \in 0, 1, \dots, N - 1$$

A inverzná transformácia je

$$x_k = \sum_{i=0}^{N-1} X_k \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}N\right)\left(i + \frac{1}{2}\right)\right), \quad k \in 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Samotná MDCT ešte nerieši problém, ktorý sme načrtli na začiatku. Síce v rámci jedného dvojbloku je výsledok spojitý, na rozhraní blokov môžu ale stále vznikať veľké skoky. Preto je našou snahou eliminovať tieto skoky. Jednoduchým spôsobom ako zaručiť ich elimináciu je predpokladať, že signál na krajoch dvojbloku konverguje k nule. Otázkou ostáva, ako to zaručiť. Tu sa ukazuje výhodná technika takzvaného windowing-u. Umelým znížením váhy krajov dvojblokov pri sčítaní dosiahneme plynulý prechod medzi použitými dvojblokmi. Čitateľ si môže danú operáciu predstaviť ako plynulý prechod medzi scénami vo filmovom priemysle, kedy končiacu scéna sa postupne stáva priehľadnejšia až zanikne. Ilustráciu najjednoduchšieho postwindowingu možno vidieť na obrázku 3.6.1.



Obr. 3.14: Ukážka funkcie windowingu

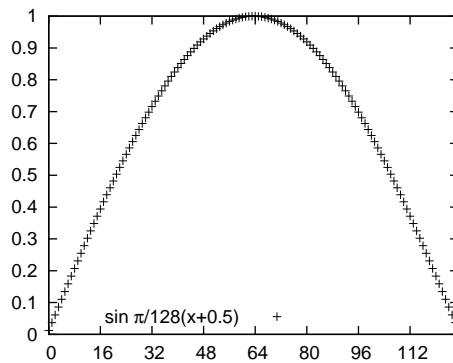
*Pri windowed transformácii sa bežne výsledok násobí konštantou 2. Toto je nepísaná dohoda, aby rovnica okna vyzerala krajšie. Špeciálne, aby okno dosahovalo maximálnu hodnotu 1.*

Samozrejme, ukážkové trojuholníkové okno nie je optimálne. V reálnych aplikáciach sa používajú sofistikovanejšie okná. Navyše, signál sa windowuje nielen po transformácii ale aj pred ňou. Toto môže pôsobiť divne, ale spomeňme si, že najväčší skok daného (dvoj)bloku pred transformáciou je práve medzi začiatkom a koncom. Tento skok za pomoci Gibbsovoho fenoménu prináša zbytočné zvonenie a tak zamedzuje dobrej kompresii.

V praxi najbežnejším pre- aj post- oknom je takzvané sínusové okno (rovnica (3.8)),

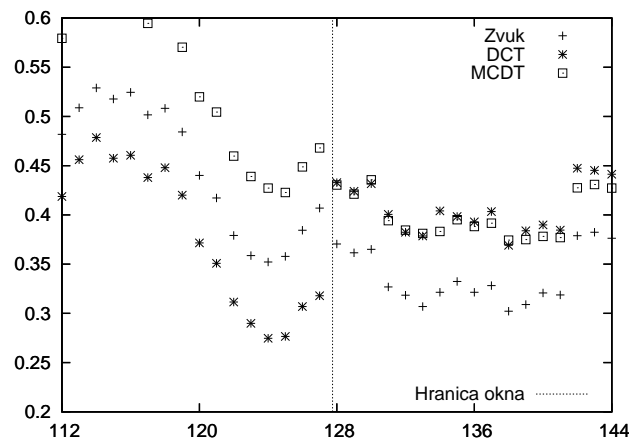
$$W_i = \sin \frac{\pi}{N} \left( i + \frac{1}{2} \right), \quad i \in 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.8)$$

ktorého priebeh pre  $N = 128$  je znázornený na obrázku 3.15. Sínusové okno sa používa napríklad v MP3 a AAC formátoch.



Obr. 3.15: Sínusové okno pre  $n = 128$

Aby sme demonštrovali význam modifikovanej transformácie, pripravili sme porovnanie reakcie DCT a MDCT na zmenu koeficientov (či už filtrovaním alebo kvantizovaním). Na obrázku 3.16 je zobrazené porovnanie diskkrétnej kosínovej transformácie a jej modifikovanej verzie používajúcej sínusové okno. Pôvodný signál sme transformovali, aplikovali náhodný šum (simulovanie kvantizácie) a transformovali inverzne. Obrázok je výrez celého signálu ukazujúci hranicu medzi dvoma po sebe idúcimi blokmi.

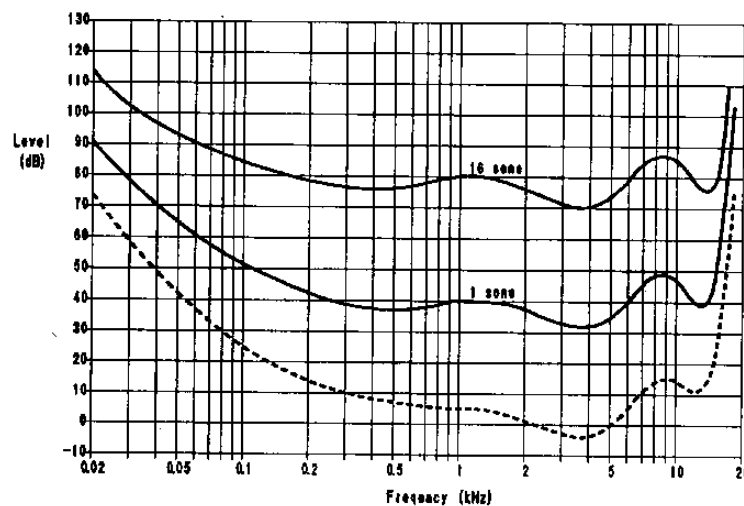


Obr. 3.16: Ukážka následkov šumu a kvantizácie pre DCT a MDCT (sínusové okno)

### 3.6.2 Psychoakustický model

Ľudia nevnímajú zvuk rovnako na všetkých frekvenciách. Toto je dané stavbou ľudského ucha a spracovaním signálov v mozgu. Psychoakustika sa zaoberá týmto vnímaním a vypracovalo sa veľké množstvo štúdií venujúcich sa tejto problematike. My do tejto tematiky načrieme iba jemne a vyberieme najdôležitejšie závery, ktoré sa priamo týkajú kompresie zvuku. Časti signálu, ktoré človek nemôže počuť, totiž vôbec nemusíme uchovávať - je to zbytočné. Pri kompresii je teda snahou čo najviac oddeliť potrebný signál od nepotrebného a potrebný kvantizovať menšími koeficientami.

Základným kameňom psychoakustického modelu sú takzvané „equi-loudness“ krivky, zobrazujúce ako silno vníma ľudské ucho zvuk. Vo všeobecnosti, dva zvuky o rôznej frekvencii a rovnakej intenzite človek nevníma rovnako hlasno. Zavádza sa preto jednotka „són“, ktorá reprezentuje počuteľnú intenzitu. 1 són je definovaný ako vnímaná hlasitosť tónu s frekvenciou 1 kHz o intenzite 40 dB. Na obrázku 3.17 je znázornená prerušovaná čiara hladina počuteľnosti. Akýkoľvek zvuk tichší ako daná hladina je pre človeka nepočuteľný a preto ho netreba uchovávať. Je jasne viditeľné, že človek vníma najlepšie zvuk o frekvencii 4 kHz a nízke či veľmi vysoké frekvencie už vôbec nevníma.



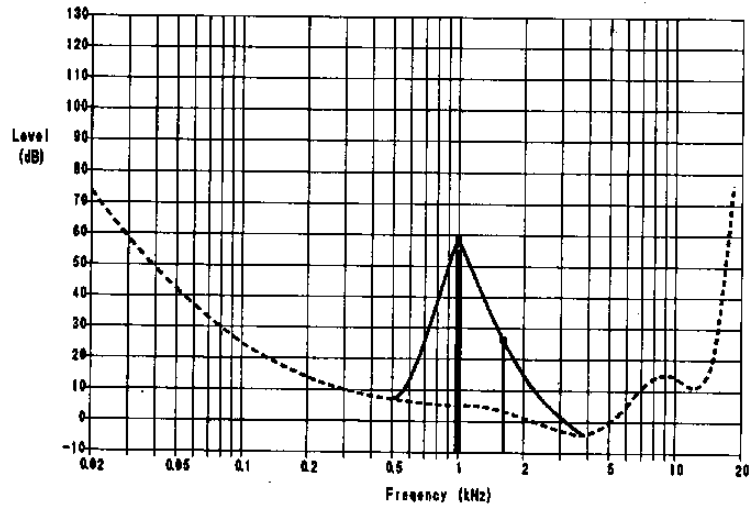
Obr. 3.17: Vnímanie zvuku ľudským ušom

Okrem základnej hladiny počuteľnosti sa počuteľnosť mení aj takzvaným maskovaním. Maskovanie nastáva, keď jeden zvuk ostane nepočuteľný kvôli druhému. V psychoakustike rozlišujeme dva rôzne typy maskovania - časové a simultánne.

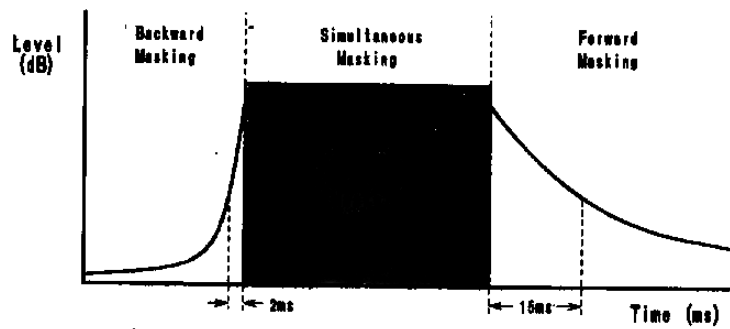
Simultánne maskovanie nastáva ako súzvuk dvoch rôznych zvukov/tónov v tom istom čase. Príkladom môže byť rozhovor vedený pri rušnej ceste. Zakaždým keď prechádza auto, rozhovor menej počuť. Maskovanie sa pritom prejavuje tým výraznejšie, čím sú dané dva tóny bližšie k sebe, jednak vo frekvencii a jednak v čase. Ukážku simultánneho maskovania môžeme vidieť na obrázku 3.18. Podľa obrázka, tón o frekvencii 1 kHz môže maskovať dokonca až oktávu nadol a dve oktávy nahor. Taktiež vidno, že maskovanie je spravidla väčšie smerom k vyšším frekvenciám.

Temporálne alebo časové maskovanie naopak maskuje tóny ktoré sa rýchlo striedajú za sebou. Za (ale aj pred) hlasným tónom chvíľu nepočuť tichší tón, hoci môže znieť presne od okamihu skončenia hlasného tónu. Spätne maskovanie (maskovanie, kedy maskér nasleduje až po maskovanom tóne) je pomerne krátke, efektívne trvá do 2-3 milisekúnd. Naopak, dopredné maskovanie podľa obrázka 3.19 môže trvať aj cez 15ms.

Miesto potrebné na uloženie údajov sa dá redukovať ešte ďalej. Typický stereofónny zvuk má podobný ľavý a pravý kanál. Toto pozorovanie sa dá ľahko využiť - ak namiesto  $L, R$  použijeme  $\frac{L+R}{2}$ ,  $\frac{L-R}{2}$ , dostaneme prvú zvukovú stopu, ktorá je akoby monofónna verzia zvuku a navyše dostaneme informáciu ako mono premeniť na stereo. Táto druhá stopa je typicky menej náročná



Obr. 3.18: Simultánne maskovanie tónom frekvencie 1kHz



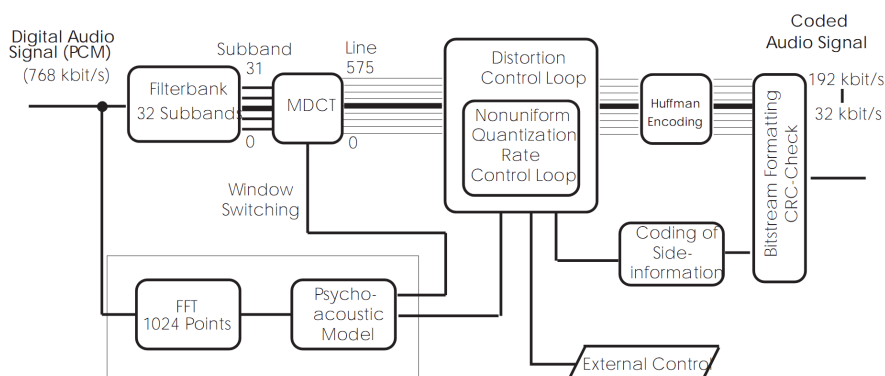
Obr. 3.19: Ukážka časového maskovania



na dátový tok. Spracovanie zvuku týmto spôsobom sa nazýva Joint Stereo. Stále sa ale dá pokračovať v tomto smere. Jednou z vlastností ľudského vnímania zvuku je neschopnosť rozlíšiť smer z ktorého prichádzajú veľmi vysoké tóny. Preto tóny o vysokých frekvenciách (a podobnej intenzite na ľavom a pravom zvukovom kanáli) môžu byť uložené monofónne, nakoľko je to pre ucho nerozpoznateľné.

### 3.6.3 Kompresia

Na obrázku 3.20 je znázornený postupný priebeh kompresie obľúbeného zvukového formátu mp3, na ktorom si demonštrujeme kompresiu zvuku. Na vstupe je zvuk v digitálnej podobe nasnímaný po snímkoch. Daný zvuk sa najskôr rozdelí na 32 frekvenčných pásiem, ktoré sa čiastočne prekrývajú. Rozdelenie do pásiem umožňuje lepšiu aplikáciu MDCT. Vstupný zvuk sa zároveň spracuje pomocou štandardnej Fourierovej transformácie, ktorá posluží psychoakustickému modelu ako podklad na určenie kvantizácie. Výstup z psychoakustického modelu sa priamo aplikuje na MDCT ako veľkosť použitého okna. Pre dynamické zvuky sa používa kratšie okno ako napríklad pre dlhé tiché pasáže. Po windowingu je výstup MDCT nasmerovaný do hlavnej časti kodeku. Tou je kvantizácia, kde sa kodek snaží nájsť optimálnu sadu kvantizačných koeficientov, aby jednak vyhovel požadovanému bitovému toku a jednak zachoval čo najnižšie skreslenie signálu. Výstup po kvantizovaní potom putuje na klasické kódovanie entropie, pomocou Huffmanovho kódovania.



Obr. 3.20: Blokový diagram priebehu kompresie vo formáte mp3

## 3.7 Rýchle násobenie polynómov

V tejto sekcii si porozprávame niečo o použití Fourierovej transformácie na rýchle násobenie polynómov. Naša púť začne hľadaním analógie Fourierovej transformácie v konečných poliach.

Táto kapitola sa bude zaoberať problémom rýchleho násobenia polynómov. Rýchle násobenie polynómov samozrejme súvisí aj s rýchlym násobením veľkých čísel a taktiež delením. Preto myšlienky tejto kapitoly majú nesmierny praktický význam pri veľkých výpočtoch.

Najjednoduchší prístup k násobeniu polynómov dáva časovú zložitosť  $O(n^2)$ . O trochu lepšie je na tom Karatsubov algoritmus, ktorý vie násobiť v čase  $O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.59})$ . Ani táto časová zložitosť ale nie je postačujúca. Preto sa treba pozrieť na násobenie polynómov z iného pohľadu. Jeden takýto prístup je „však je to konvolúcia“ a prehlásiť, že ju vieme vypočítať za pomoci Fourierovej transformácie. My sa však vydáme inou cestou, aby sme ukázali reálny súvis Fourierovej transformácie v poli  $F$  s okruhom polynómov nad týmto poľom.

Formálna definícia problému: Nech  $p(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ ,  $q(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^j$ . Potom  $r(x) = p(x)q(x) = \sum_{k=0}^{m+n+1} r_k x^k$  kde  $r_k = \sum_{i=0}^{\min(k,n)} p_i q_{k-i}$ .

Pátranie po algoritme začneme nasledujúcim veľmi užitočným tvrdením

**Lema 3.7.1** *Nech  $p(x)$  je polynóm stupňa  $n$  a nech má aspoň  $n + 1$  nulových bodov. Potom  $p(x) = 0$ .*

**Lema 3.7.2 (O interpolácii)** *Majme daných  $n + 1$  bodov  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , takých že pre  $i \neq j, x_i \neq x_j$ . Potom existuje polynóm  $p$  stupňa najviac  $n$  taký, že  $\forall i \in 0, 1, \dots, n : p(x_i) = y_i$ .*

D: Definujme

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$l_j$  je polynóm stupňa  $n$  a platí

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Potom

$$p(x) = L(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x) \quad (3.9)$$

□

**Lema 3.7.3** *Nech  $p(x)$  je polynóm stupňa  $n$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  je  $n+1$  rôznych čísel, v ktorých chceme polynóm vypočítať. Potom v okruhu polynómov stupňa najviac  $n$  existuje bijekcia medzi  $p(x)$  a  $(p(x_0), p(x_1), \dots, p(x_n))$ .*

D: Nech  $p, q$  sú dva rôzne polynómy také, že  $\forall i \in 0, 1, \dots, n : p(x_i) = q(x_i)$ . Potom  $r = p - q$  má  $n + 1$  nulových bodov, je stupňa najviac  $n$  a teda podľa lemy 3.7.1 dostávame  $p = q$ . Zobrazenie je teda injektívne. Lema 3.7.2 ale zároveň hovorí, že dané zobrazenie je surjektívne. □

*Predchádzajúca lema nám vlastne hovorí, že existuje jediný interpolačný polynóm stupňa nanajvýš  $n$ . Jeho zápis vo forme rovnice (3.9) sa nazýva Lagrangeova forma interpolačného polynómu.*

Hlavná myšlienka predchádzajúcich dvoch liem spočíva v transformovaní problému násobenia polynómov z domény koeficientov do domény funkčných hodnôt. Ak máme pre dva polynómy vypočítané hodnoty v rôznych bodoch, násobenie polynómov je úplne jednoduché - násobíme po dvojiciach dané hodnoty a dostaneme hodnoty súčinu  $p(x)q(x)$ . Preto, na celý problém násobenia polynómov sa môžeme pozerať aj nasledovne:

Nech  $p, q$  sú polynómy stupňov  $n, m$ . Nech  $x_0, x_1, \dots, x_{n+m}$  je  $n + m + 1$  rôznych čísel. Potom násobenie polynómov môžeme spraviť nasledovne

- Vypočítajme hodnoty  $p(x_i), q(x_i)$  pre  $i \in 0, 1, \dots, n + m$ . Túto nazveme vyhodnocovanie polynómov.
- Vypočítame hodnoty  $r(x_i) = p(x_i)q(x_i)$ . Výpočet vieme spraviť v lineárnom čase a fázu nazveme násobenie/konvolúcia.
- Z hodnôt  $r(x_i)$  vypočítame postupne hodnoty  $r_j, j \in 0, 1, \dots, n + m$ . Fázu nazývame interpolácia.

Na prvý pohľad sme si nepomohli, pretože prvú a poslednú fázu nevieme robiť veľmi rýchlo. Ako sa však ukáže neskôr, vhodná voľba hodnôt  $x_i$  ale môže výrazne urýchliť výpočet.

### 3.7.1 Rýchle vyhodnocovanie polynómov

Majme polynóm  $p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_{n-1}x^{n-1}$  stupňa  $n - 1$ . Jeho vyhodnotenie v bode  $x_i$  vieme Hornerovou metódou vypočítať v čase  $O(n)$ . Vo všeobecnosti teda vyhodnotenie v  $n$  bodoch nepôjde rýchlejšie ako  $O(n^2)$ .

Ak je však  $n$  párne, môžeme  $p$  zapísať ako

$$p(x) = a(x^2) + xb(x^2) \quad (3.10)$$

kde

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{n-2}x^{n/2-1} \\ b(x) &= a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \dots + a_{n-1}x^{n/2-1} \end{aligned}$$

Všimnime si, že oba polynómy  $b, c$  majú najviac polovičný stupeň. To čo je na rovnici (3.10) zaujímavé a čo využijeme je fakt  $(x)^2 = (-x)^2$ .

**Lema 3.7.4** *Nech  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  množina  $n$  bodov spĺňajúca symetrickú podmienku  $\forall i \in 0, \dots, \frac{n}{2} - 1 : x_{i+n/2} = -x_i$ . Pokiaľ  $T(n)$  je časová zložitosť vyhodnocovania polynómu stupňa  $n - 1$  na týchto  $n$  bodoch, potom  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + c\frac{n}{2}$ .*

D: Platí  $x_0^2 = x_{n/2}^2, x_1^2 = x_{n/2+1}^2, \dots$  a preto máme len  $n/2$  rôznych štvorcov. Použitím rovnice (3.10) vieme skombinovať celý výsledok ako  $n/2$  násobení na získanie štvorcov, 2 vyhodnocovania na sade  $n/2$  bodov a následne  $n/2$  sčítaní resp. odčítaní, na skombinovanie výsledkov.  $\square$

**Definícia 3.7.1 (Supersymetrická množina)** *Nech  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  množina  $n$  bodov. Ak táto množina spĺňa symetrickú podmienku a navyše aj množiny  $\{x_0^2, x_1^2, \dots, x_{n/2-1}^2\}, \{x_0^4, x_1^4, \dots, x_{n/4-1}^4\}, \dots, \{x_0^{n/2}, x_1^{n/2}\}$ , danú množinu nazveme supersymetrickú.*

**Lema 3.7.5** *Nech  $p$  je polynóm stupňa  $n$  a  $X$  je supersymetrická množina. Potom vyhodnotenie polynómu  $p$  na množine  $X$  má časovú zložitosť  $O(n \log n)$ .*

D: Nakoľko je množina supersymetrická, lemu 3.7.4 môžeme aplikovať rekurzívne. Teda  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + c\frac{n}{2}, T(\frac{n}{2}) = 2T(\frac{n}{4}) + c\frac{n}{4}, \dots$  Podľa Master theorem je potom  $T(n) \in O(n \log n)$ .  $\square$

Jediné, čo ostáva je nájsť nejakú supersymetrickú množinu. Táto množina v prvom rade musí mať veľkosť  $n = 2^k$  pre nejaké  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definícia 3.7.2** *Nech  $\omega$  je element poľa  $F$ .  $\omega$  nazveme  $n$ -tou odmocninou jednotky pokiaľ  $\omega^n = 1$  a  $\forall 0 < i < n : \omega^i \neq 1$ .*

**Lema 3.7.6** *Nech  $\omega$  je  $2^k$ -ta odmocnina jednotky. Potom množina  $\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{2^k-1}\}$  je supersymetrická množina.*

D:  $(\omega^{n/2+i})^2 = \omega^{n+2i} = \omega^n \omega^{2i} = \omega^{2i}$ . Množina je preto „symetrická“. Zároveň  $\omega^2$  je  $2^{k-1}$ -ta odmocnina jednotky a preto môžeme dokázať supersymetrickosť rekurzívnym aplikovaním.  $\square$

*Môžeme si všimnúť, že pre pole komplexných čísel  $\mathbb{C}$  je  $n$ -tá odmocnina z jednotky napríklad  $\omega = e^{-2\pi/n}$ . V tomto prípade vyhodnocovanie  $p(x)$  v bodoch  $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$  prejde presne na diskretnú Fourierovu transformáciu.*

### 3.7.2 Rýchla interpolácia polynómov

Po úspešnom zvládnutí vyhodnocovania a násobenia musíme ešte rýchlo interpolovať. Použijeme podobný trik - budeme sa snažiť rozdeliť problém na dva podproblémy, využijúc pritom symetriu našej množiny  $X$ .

Majme polynóm  $p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_{n-1}x^{n-1}$  stupňa  $n - 1$  kde  $n$  je párne. Navyše, majme symetrickú množinu  $X$  v ktorej bodoch chceme interpolovať polynóm  $p$ . Nech  $y_i$  je hodnota ktorú chceme dosiahnuť v bode  $x_i$ . Potom

$$y_i = \sum_{j=0}^{n-1} p_j x_i^j$$

$$y_{n/2+i} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j x_{n/2+i}^j = \sum_{j=0}^{n-1} p_j (-x_i)^j$$

Skombinovaním rovníc dostávame

$$y_i + y_{n/2+i} = 2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \text{ je párne}}}^{n-1} p_j x_i^j = 2 \sum_{j=0}^{n/2-1} p_{2j} x_i^{2j}$$

$$y_i - y_{n/2+i} = 2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \text{ je nepárne}}}^{n-1} p_j x_i^j = 2 \sum_{j=0}^{n/2-1} p_{2j+1} x_i^{2j+1} = 2x_i \sum_{j=0}^{n/2-1} p_{2j+1} x_i^{2j}$$

Posledná sada rovníc nám hovorí, že výpočet interpolačného polynómu  $P$  vieme rozdeliť na dva výpočty interpolačných polynómov polovičného stupňa, ktoré následne vieme jednoducho skombinovať.

**Lema 3.7.7** *Interpolácia polynómu  $p$  na supersymetrickej množine  $X$  sa dá vypočítať v čase  $O(n \log n)$ .*

D: Nech  $T(n)$  je čas potrebný na výpočet interpolácie. Potom  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$  - najskôr si vypočítame  $\forall i \in 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$  hodnoty

$$g_i = 2^{-1}(y_i + y_{n/2+i}) \quad (3.11)$$

$$h_i = 2^{-1}(y_i - y_{n/2+i})x_i^{-1} \quad (3.12)$$

Následne vypočítame interpolačné polynómy  $G, H$  na množine  $X' = \{x_i^2 : i \in 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ , čo sú dve interpolácie polovičnej veľkosti a výsledné koeficienty iba vložíme na párne resp. nepárne pozície  $P$ . Daná rekurencia má podľa Master Theorem časovú zložitosť  $O(n \log n)$ .  $\square$

Ukázali sme teda, že vieme robiť aj rýchlu interpoláciu. Preto vieme násobiť polynómy v čase  $O((n+m) \log(n+m))$ .

### 3.7.3 Súvislosť s DFT

Na záver si ešte vysvetlíme jednotlivé súvislosti s diskretnou Fourierovou transformáciou. Ako sme už písali vyššie, súvis s vyhodnocovaním polynómov je silno spätý s rovnicou DFT. Konkrétne, ak si vezmeme množinu  $\{\omega^i : i \in 0, 1, \dots, n-1\}$  kde  $\omega = e^{-i2\pi \frac{1}{n}}$ , a označíme  $P_k = p(\omega^k) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i (\omega^k)^i$  tak vypočítanie všetkých hodnôt  $P$  prejde priamo na diskretnú Fourierovu transformáciu. Môžeme teda hovoriť, že diskretná Fourierova transformácia je vyhodnocovaním polynómov v špeciálnych bodoch na jednotkovej kružnici. Opačne, vyhodnocovanie polynómov nám dáva nadhľad - síce sme Fourierovu transformáciu odvodili nad poľom reálnych čísel a k odvodeniu sme sa dostali cez reálne po častiach spojité funkcie, vidíme, že táto myšlienka sa dá generalizovať. Presnejšie

povedané, nech  $F$  je pole charakteristiky  $\neq 2$  a nech  $\omega$  je  $n$ -tá odmocnina jednotky v danom poli. Potom môžeme zaviesť DFT dĺžky  $n$  nad prvkami tohoto poľa ako

$$X_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \omega^{ik}$$

Inverzná transformácia je definovaná ako

$$x_k = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \omega^{-ik} = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{i(j-k)} = n^{-1} n x_k$$

kde poslednú rovnosť odvodzame na základe identity

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ik} = \begin{cases} n & k = 0 \pmod n \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$n^{-1}$  v predchádzajúcej rovnici úzko súvisí s  $2^{-1}$  v rovniciach (3.11) a (3.12). Ak si spomenieme, túto  $2^{-1}$  zahrnieme pri výpočte presne  $k$ -krát, zakaždým keď sa zavoláme na polku problému. Teda, dostávame  $(2^{-1})^k = (2^k)^{-1} = n^{-1}$ . Zároveň aj vysvetľuje, prečo požadujeme pole charakteristiky rôznej od 2.

### 3.8 Hashing

Vynaliezavosti sa medze nekladú a tak si Fourierova transformácia našla svoju cestu aj do bezpečnosti a vytvárania hashovacích funkcií. Idea je tu už pomerne dávno, ako ukazujú články od C.P. Schnorra. Navrhol postupne 2 hashovacie funkcie založené na Fourierovej transformácii. Žiaľ, ako sa ukázalo, jeho prístup nebol dostatočný. Prvá funkcia a nejskôr i jej nová varianta ktorú možno nájsť v [Sch] podľahli kryptoanalýze a ukázalo sa, že nie je až taký veľký problém nájsť kolízie [Vau92]. V roku 2006 sa však objavil článok od pánov Vadim Lyubashevsky, Daniele Micciancio, Chris Peikert, Alon Rosen ukazujúci nový prístup k hashovaniu pomocou Fourierovej transformácie. Tento postup si teraz popíšeme

- Vstup programu budeme reprezentovať ako maticu  $x_{i,j}$  rozmerov  $m \times n$ , kde  $n = 2^k$  je tazkvaný „bezpečnostný parameter“ a  $m$  je malá konštanta (napr.  $m = 8$ ) a navyše budeme uvažovať podmienku  $0 \leq x_{i,j} \leq 4$  alebo 8,  $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$ . Posledná podmienka je veľmi kritická pre dôkazy o bezpečnosti a bezkolíznosti hashovacej funkcie
- Nájdeme prvočíslo tvaru  $p = 2tn + 1$ . Odteraz budeme všetky výpočty robiť modulo  $p$ .
- Zvolíme si konštantu  $\omega$ , ktorej rád v  $\mathbb{Z}_p$  je  $2n$  a spravíme Fourierovu transformáciu po riadkoch nasledovne

$$(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,n}) = FFT(\omega^0 x_{i,1}, \omega^1 x_{i,2}, \dots, \omega^{n-1} x_{i,n}) \quad (3.13)$$

Táto operácia je ľahko invertovateľná a používame ju na spôsobenie difúzie

- Posledným krokom je zvolenie náhodnej matice  $a$  a vypočítanie lineárnej kombinácie každého stĺpca, teda  $z_j = a_{1,j} y_{1,j} + \dots + a_{m,j} y_{m,j}$ .
- Výsledok je vektor  $(z_1, \dots, z_n)$ .

Pozieraním na posledný krok algoritmu, nájsť riešenie pre  $y_{i,g}$  nie na náročné ak poznáme  $z$ . Skôr naopak, riešenie je veľa a dajú sa ľahko nájsť. To, čo robí tento algoritmus pomerne bezpečným (a to, čo chýbalo Schnorrovým dvom funkciám) je obmedzenie na vstupe. Hodnoty  $y_{i,j}$  totiž musia vzniknúť z malých hodnôt  $x_{i,j}$ . Toto obmedzenie je prudko nelineárne a ako sa ukazuje, je dostatočné na to, aby sa dali dokázat' isté kryptografické vlastnosti funkcie. Viac o tomto prístupe k hashovaniu a taktiež dôkaz o bezpečnosti funkcie môže láskavý čitateľ nájsť v [VLR06] a [VLR].



# Kapitola 4

## Záver

V prvej časti práce je popísaná Fourierova transformácia. Po krátkom historickom úvode nasleduje pomerne dlhé uvedenie do problematiky Fourierových radov. Rozoberáme ich princípy, matematické vlastnosti, konvergenciu a existenciu inverznej transformácie. Ďalej sa venujeme Gibbovmu fenoménu, ktorý ukazuje vlastnosti konvergenzie nielen pre rady ale aj pre samotnú spojitú a diskretnú transformáciu. Po tomto matematickom úvode nasleduje rýchly pohľad na spojitú a diskretnú Fourierovu transformáciu, viacrozmerné verzie a nakoniec príbuzné transformácie. Druhá časť publikácie je venovaná čisto použitiam Fourierovej a diskretnej kosínovej transformácie v informatike. Zaoberáme sa tam otázkou digitalizácie, spracovaním a kompresiou digitálneho signálu - či už zvuku alebo obrazu či videa. Zároveň ukazujeme rôzne výhody a nevýhody použitých transformácií a čitateľovi vysvetľujeme prečo sa použila práve daná variácia Fourierovej transformácie. Kapitulu zakončujeme aplikáciami v teórii algoritmov a bezpečnosti ako nástroj na rýchle násobenie polynómov a generovanie bezpečných hashovacích funkcií.

Hlavným prínosom práce je systematické pozbieranie a overenie jednotlivých aplikácií Fourierovej transformácie a jej modifikácií v informatike s dôrazom na ich vzájomné prepojenie. Autor sám venoval nezanedbateľné úsilie na vyskúšanie týchto aplikácií a problémov, s ktorými musia čeliť. Práca ale rozsahovo zďaleka nepokrýva všetky aspekty Fourierovej transformácie aké pôvodne chcela spomenúť. Z priestorových dôvodov bol autor nútený vynechať množstvo ďalších zaujímavých použití. Do budúcnosti by sa chcelo na práci pokračovať, spomenúť matematické a fyzikálne využitia, ktoré sú mnohokrát až prekvapivé. Taktiež je autorovým cieľom v budúcnosti rozobrať jednotlivé algoritmy na výpočet rýchlej Fourierovej transformácie, popísať ich výhody, nevýhody a ozrejmiť situácie, v ktorých sa používajú.





# Zoznam obrázkov

2.1	Fázový posun, rôzne frekvencie a skladanie harmonických funkcií . . . . .	4
2.2	Čiastočné súčty Fourierovho radu obdĺžnikovej funkcie . . . . .	6
2.3	Čiastočné súčty Fourierovho radu funkcie $f(x) = x$ na intervale $(-\pi, \pi)$ . . . . .	7
2.4	Čiastočné súčty Fourierovho radu funkcie $f(x) =  x $ na intervale $(-\pi, \pi)$ . . . . .	8
2.5	Dirichletov kernel . . . . .	13
2.6	Ukážka Gibbsovho fenoménu na obdĺžnikovom signále . . . . .	22
2.7	Gibbsov fenomén pre $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ . . . . .	23
2.8	Integrál funkcie sinc $x$ . . . . .	25
2.9	Náčrt Gibbsovho fenoménu vo všeobecnosti . . . . .	25
2.10	Ilustrácia čiastkovej FT pre rôzne koeficienty $a$ . . . . .	35
3.1	Ideálny lowpass filter pre $f = 10, 20, 40$ . . . . .	39
3.2	Ideálny highpass filter pre $f = 10, 20, 40$ . . . . .	40
3.3	Gaussov lowpass filter pre $f = 10, 20, 40$ . . . . .	41
3.4	Gaussov highpass filter pre $f = 10, 20, 40$ . . . . .	42
3.5	Butterworthov lowpass filter pre rád $n = 1, 2, 4$ . . . . .	43
3.6	Butterworthov lowpass filter pre rád $n = 1, 2, 4$ . . . . .	44
3.7	Butterworthov highpass filter pre rád $n = 1, 2, 4$ . . . . .	45
3.8	Butterworthov highpass filter pre rád $n = 1, 2, 4$ . . . . .	46
3.9	Porovnanie dôležitosti fázy a magnitúdy . . . . .	50
3.10	Ukážka korelácie . . . . .	52
3.11	Porovnanie koncentrácie energie pre DFT a DCT . . . . .	56
3.12	JPEG formát - postupnosť v akej sú kódované AC koeficienty . . . . .	56
3.13	Schéma prekladanej transformácie . . . . .	59
3.14	Ukážka funkcie windowingu . . . . .	59
3.15	Sínusové okno pre $n = 128$ . . . . .	60
3.16	Ukážka následkov šumu a kvantizácie pre DCT a MDCT (sínusové okno) . . . . .	60
3.17	Vnímanie zvuku ľudským uchom . . . . .	61
3.18	Simultánne maskovanie tónom frekvencie 1kHz . . . . .	62
3.19	Ukážka časového maskovania . . . . .	62
3.20	Blokový diagram priebehu kompresie vo formáte mp3 . . . . .	63



# Zoznam tabuliek

2.1	Tabelované hodnoty miním a maxím funkcie $G(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi x} \text{sinc } t \, dt$ . . . . .	24
2.2	Vlastnosti Fourierovej transformácie . . . . .	29
2.3	Vybraté funkcie a ich Fourierova transformácia . . . . .	30
2.4	Vlastnosti diskkrétnej Fourierovej transformácie . . . . .	31
2.5	Porovnanie Laplacovej a Fourierovej transformácie . . . . .	33
3.1	Postupná ukážka kvantizácie JPEG obrázku . . . . .	55



# Literatúra

- [Braa] Ronald N. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, third edition.
- [Brab] Karlheinz Brandenburg. Mp3 and aac explained. Fraunhofer Institute for Integrated Circuits FhG-IIS A, Erlangen, Germany, International Conference on High Quality Audio Coding.
- [BS90] David H. Bailey and Paul N. Swarztrauber. The fractional fourier transform and applications. Technical report, NASA, March 1990.
- [DAK05] P.E. Douglas A. Kerr. Chrominance subsampling in digital images. November 2005.
- [Ham92] Eric Hamilton. Jpeg file interchange format, September 1992.
- [HH79] Edwin Hewitt and Robert E. Hewitt. The gibbs-wilbraham phenomenon: An episode in fourier analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, Volume 21, Number 2 / June, 1979:129–160, 1979.
- [Jon06] Douglas L. Jones. Dft definition and properties. <http://cnx.org/content/m12019/1.5/>, August 2006.
- [KOG92] G. Labahn K. O. Geddes, S. R. Czapor. *Algorithms for computer algebra*, chapter 4 - Arithmetic of Polynomials, Rational Functions, and Power Series. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [Moe] Robert T. Moenck. Practical fast polynomial multiplication. *Proceedings of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*.
- [Pol71] J. M. Pollard. The fast fourier transform in a finite field. *Mathematics of computation*, 25(114):365–374, April 1971.
- [Pri97] Hilary A. Priestley. *Introduction to integration*. Oxford University Press US, illustrated edition, 1997.
- [Qui] Gene Quinn. Bessel's equality and inequality. [http://www.math.uri.edu/~quinn/web/mth629\\_Bessels.pdf](http://www.math.uri.edu/~quinn/web/mth629_Bessels.pdf). [Online; accessed 04/03/2009].
- [RA96] Deborah Tepper Haimo Richard Askey. Similarities between fourier and power series. *The American Mathematical Monthly*, 103(4):297–304, April 1996.
- [RS05] Ricardo Radaelli-Sanchez. Properties of the continuous-time fourier series. <http://cnx.org/content/m10093/2.8/>, June 2005. Online accessed 2009-06-07.
- [Sch] C.P. Schnorr. Fft-hash ii, efficient cryptographic hashing.
- [Smi97] Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Publishing, 1997. <http://www.dspguide.com/>.

- [SS05] Rajiv Saxena and Kulbir Singh. Fractional fourier transform: A novel tool for signal processing. *J. Indian Inst. Sci.*, Jan.-Feb. 2005.
- [Vau92] S. Vaundenay. Fft-hash-ii is not yet collision-free. *LIENS*, 17, 1992.
- [Vij06] K Vijayaraghavan, T. Rajan. Image coding of 3d volume using wavelet transform for fast retrieval of 2d images. *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings*, 153:507–511, August 2006.
- [VLR] Chris Peikert Vadim Lyubashevsky, Daniele Micciancio and Alon Rosen. Swift: A modest proposal for fft hashing. <http://www.eecs.harvard.edu/~alon/PAPERS/lattices/>.
- [VLR06] Chris Peikert Vadim Lyubashevsky, Daniele Micciancio and Alon Rosen. Provably secure fft hashing. July 2006. <http://www.eecs.harvard.edu/~alon/PAPERS/lattices/>.
- [VNPR07] Dr T Venkateswarlu V Naga Prudhvi Raj. A novel approach to medical image compression using sequential 3d dct. In *International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications*, 2007.
- [Wal91] Gregory K. Wallace. The jpeg still picture compression standard. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, December 1991. Multimedia Engineering Digital Equipment Corporation Maynard, Massachusetts.
- [Wei] Eric W. Weisstein. Z-transform. <http://mathworld.wolfram.com/Z-Transform.html>.
- [WF] Raymond Westwater and Borko Furht. Three-dimensional dct video compression technique based on adaptive quantizers.
- [WF96] Raymond Westwater and Borivoje Furht. *Real-Time Video Compression: Techniques and Algorithms*. Springer, 1996.
- [Wik08] Wikipedia. Hartley transform — wikipedia, the free encyclopedia, 2008. [Online; accessed 9-November-2008].
- [Wik09a] Wikipedia. Chroma subsampling — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 25-May-2009].
- [Wik09b] Wikipedia. Discrete cosine transform — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 3-June-2009].
- [Wik09c] Wikipedia. Fourier transform — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 5-June-2009].
- [Wik09d] Wikipedia. Jpeg — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 10-April-2009].
- [Wik09e] Wikipedia. Jpeg file interchange format — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 10-April-2009].
- [Wik09f] Wikipedia. Laplace transform — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 28-May-2009].
- [Wik09g] Wikipedia. Wiener deconvolution — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 21-March-2009].
- [Wik09h] Wikipedia. Z-transform — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 20-May-2009].
- [YL95] Boon-Lock Yeo and Bede Liu. Volume rendering of dct-based compressed 3d scalar data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(1), March 1995.