



KATEDRA INFORMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

METÓDY MERANIA FRAKTÁLNEJ DIMENZIE PRÍRODNÝCH JAVOV

(Bakalárska práca)

MICHAL KOVÁČ

Vedúci: Mgr. Ľuboš Steskal

Bratislava, 2009

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu
vypracoval samostatne s použitím citovaných zdro-
jov.

.....

Pod'akovanie

Osobitná vďaka patrí vedúcemu bakalárskej práce Mgr. Ľubošovi Steskalovi za cenné rady, námety, podnetné pripomienky a všestrannú pomoc, ktorú si hlboko vážim. Len vďaka mnohým prínosným konzultáciám a intenzívnej spolupráci som bol schopný napísať toto dielo. Nesmiem zabudnúť ani na RNDr. Borislava Šustera, CSc. a spolužiakov za to, že si na bakalárskom seminári našli čas, aby si vypočuli moju prezentáciu bakalárskej práce. Ďalšie poďakovania venujem rodičom a známym, ktorí to so mnou dokázali vydržať posledné týždne pred odovzdaním.

Abstrakt

Autor: Michal Kováč

Názov bakalárskej práce: Metódy merania fraktálnej dimenzie prírodných javov

Škola: Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra: Katedra informatiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Luboš Steskal

Bratislava, jún 2009

Práca začína vysvetlením pojmov fraktál a dimenzia. Fraktálna dimenzia zahŕňa v sebe viacero definícií. Spomením napríklad Hausdorffovu a Minkowskeho. Hausdorffova dimenzia presne vystihuje predstavu človeka o pojme dimenzia. Vo väčšine prípadov, ktoré pre prax postačujú ju vystihuje aj Minkowskeho dimenzia. V práci popisujem niekoľko metód, ako sa dá Minkowskeho dimenzia experimentálne odmerať. Jednu z metód - metódu počítania boxov som aj implementoval.

Kľúčové slová: Fraktál, Dimenzia, Fraktálna dimenzia, Meranie fraktálnej dimenzie

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 1 |
| 1 Fraktál ako pojem | 2 |
| 1.1 L-systémy | 2 |
| 1.1.1 Cantorova množina | 4 |
| 1.1.2 Kochova vločka | 5 |
| 1.1.3 Sierpinskeho trojuholník | 6 |
| 1.1.4 Minkowskeho klobása | 9 |
| 1.1.5 Dračia krivka | 9 |
| 1.2 Dynamické systémy | 10 |
| 1.2.1 Iterované funkčné systémy | 12 |
| 1.2.2 Cantorovo zobrazenie | 13 |
| 1.2.3 Logistické zobrazenie | 14 |
| 1.2.4 Lorenzov atraktor | 15 |
| 1.3 Juliova množina | 16 |
| 2 Problém definície fraktálu | 18 |
| 3 Pojem dimenzie | 21 |
| 3.1 Topologická dimenzia | 21 |
| 3.1.1 Definícia podľa počtu parametrov | 22 |
| 3.1.2 Induktívna definícia | 23 |
| 3.1.3 Rád pokrytia topologického priestoru | 24 |
| 3.2 Fraktálna dimenzia | 26 |
| 3.2.1 Miera | 26 |
| 3.2.2 Samopodobnostná dimenzia | 27 |
| 3.2.3 Minkowskeho dimenzia | 29 |
| 3.2.4 Hausdorffova dimenzia | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Metódy merania fraktálnej dimenzie | 31 |
| 4.1 | Spracovanie vstupu | 31 |
| 4.1.1 | Statický objekt | 32 |
| 4.1.2 | Dynamický objekt | 32 |
| 4.1.3 | Objekt sivej škály | 32 |
| 4.1.4 | Farebný objekt | 32 |
| 4.1.5 | Video | 33 |
| 4.1.6 | Zvuk | 33 |
| 4.2 | Kompasová metóda | 33 |
| 4.3 | Metóda počítania boxov | 34 |
| 4.3.1 | Popis implementácie | 34 |
| 5 | Využitie fraktálnej dimenzie | 38 |
| 5.1 | Počítačová grafika | 38 |
| 5.2 | Medicína | 39 |
| 5.3 | Meteorológia a astronómia | 40 |
| 5.4 | Hudba | 40 |
| 5.5 | Energetika | 40 |
| 5.6 | Elektrotechnika | 40 |
| | Záver | 41 |
| | Anketa | 45 |
| | Porovnanie dimenzií | 46 |

Zoznam obrázkov

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Generovanie Cantorovej množiny | 5 |
| 1.2 | Generovanie Kochovej krivky | 6 |
| 1.3 | Generovanie Sierpinskeho trojuholníka L-systémom | 7 |
| 1.4 | Sierpinskeho trojuholník | 8 |
| 1.5 | Fraktály, ktoré vznikli podobným spôsobom ako Sierpinskeho trojuholník | 9 |
| 1.6 | Mikowskeho klobása | 10 |
| 1.7 | Generovanie dračej krivky | 10 |
| 1.8 | Feigenbaumov bifurkačný diagram pre logistické zobrazenie . . | 14 |
| 1.9 | Lorenzov atraktor | 15 |
| 1.10 | Juliova množina pre rôzne hodnoty parametra c | 17 |
| 1.11 | Mandelbrotova množina | 17 |
| 3.1 | Tri spôsoby pokrytia čiary | 25 |
| 3.2 | IFS, ktorý vygeneruje Cantorovu množinu so samopodobnosťnou dimenziou 1 | 28 |
| 4.1 | Screenshot programu na odhad Minkowskeho dimenzie. | 36 |
| 4.2 | Graf znázorňujúci postup merania dimenzie Kochovej vložky. . | 37 |

Zoznam tabuliek

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Prehľad mier rôznych rozmerov pre základné objekty. | 27 |
| 1 | Výsledky ankety o najkrajší blesk. | 45 |
| 2 | Porovnanie dimenzií prírodných javov. | 46 |
| 3 | Porovnanie dimenzií známych fraktálov. | 47 |

Úvod

Moje prvé stretnutie s fraktálmi nastalo už na strednej škole, keď som na informatike si mal pripraviť referát o fraktáloch. Táto téma ma natoľko zaujala, že som napísal o nich niekoľko článkov do časopisu Triceléštrnásť a na sústrezeniach korešpondenčných seminárov som mal prednášky pre rôzne vekové kategórie publika. Témou mojej bakalárskej práce je Meranie fraktálnej dimenzie prírodných javov. Cieľom práce je systematicky po jednotlivých pojmoch vysvetliť tento názov.

V prvej a druhej kapitole sa pokúsím objasniť pojem fraktál. Problematika fraktálov je v tejto dobe veľmi nejasná. Existuje o nich veľa literatúry, na internete sa dajú nájsť rôzne galérie obrázkov. Avšak väčšina tejto literatúry sa vyjadruje veľmi neformálne. Človek získava predstavu o fraktáloch práve z týchto zdrojov. Preto pojem fraktál reprezentuje tieto predstavy. Objasnenie pojmu fraktál spravím prehľadom rôznych typov fraktálov, ktoré bohaty ilustrujem. Tiež skúsím zistiť, či existuje presná definícia pojmu fraktál a ak nie, preskúmam, čo sa s tým dá spraviť.

V tretej kapitole sa pokúsím objasniť pojem dimenzia. Vyvrcholí to niekoľkými definíciami, ktorých zovšeobecnením je pojem fraktálna dimenzia.

V štvrtej kapitole definujem prírodný jav a spravím stručný prehľad, ako sa dá merať jeho fraktálna dimenzia.

Piata kapitola sa venuje významu tohto merania a rôznym spôsobom, ako sa dajú využiť výsledky merania.

Kapitola 1

Fraktál ako pojem

V tejto kapitole spravím prehľad rôznych typov fraktálov. Urobím tak podľa spôsobov, ako sa dajú vygenerovať. Niektoré fraktály sa dajú vygenerovať aj rôznymi spôsobmi, takže budú spomenuté viackrát. Prvým spôsobom sú L-systémy.

1.1 L-systémy

Lindenmayerove systémy (L-systémy) sú podobné frázovým gramatikám. Rozdiel je v tom, že sa nerozlišujú terminály a neterminály, takže odvodzovanie končí vtedy, keď má slovo všetky znaky také, že sa nedá použiť už žiadne odvodzovacie pravidlo. Ďalší rozdiel je v samotnom odvodzovaní. Frázová gramatika v jednom kroku odvedenia použije jedno odvodzovacie pravidlo. L-systém v jednom kroku použije pravidlá paralelne na všetky znaky, na ktoré sa nejaké pravidlo dá aplikovať. Na presnú definíciu L-systému je potrebný nasledovný formálny aparát.

Definícia 1.1.1 *Abeceda je konečná neprázdna množina znakov.*

Poznámka 1.1.1 Prvky abecedy Σ nazývame *znaky, písmená, alebo symboly*.

Definícia 1.1.2 *Slovo nad abecedou Σ je konečná postupnosť znakov z Σ .*

Poznámka 1.1.2 Špeciálny prípad slova je *prázdne slovo*, ktoré je prázdnu postupnosťou a označujeme ho ε .

Množinu všetkých slov nad abecedou Σ označujeme Σ^* . Množinu všetkých neprázdnych slov označujeme Σ^+ .

Definícia 1.1.3 Zreťazenie slov $u = u_1u_2 \dots u_n$ a $v = v_1v_2 \dots v_m$ je slovo $u \cdot v = u_1u_2 \dots u_nv_1v_2 \dots v_m$.

Poznámka 1.1.3 Prázdne slovo ε je neutrálnym prvkom vzhľadom na zretazenie.

Pod dĺžkou slova w rozumieme počet písmen v slove w a označujeme ju $|w|$.

Definícia 1.1.4 Slovo w je **podслово** slova u , ak existujú slová w_1, w_2 také, že $u = w_1w_2$. Ak $w_1 = \varepsilon$ ($w_2 = \varepsilon$), tak w nazývame **prefixom** (**suffixom**) slova u .

Definícia 1.1.5 Jazyk nad abecedou Σ je ľubovoľná podmnožina Σ^*

Pod abecedou jazyka L rozumieme minimálnu množinu znakov Σ takú, že L je nad abecedou Σ . Označujeme ju Σ_L .

Nasleduje formálna definícia L-systému podľa [JFLAP] a [LSys]:

Definícia 1.1.6 L-systém je trojica $G = (\Sigma, R, A)$, kde:

Σ je konečná abeceda,

$R = \{(a, b, c) \rightarrow d \mid a, c \in \Sigma^*, b \in \Sigma, d \subset \Sigma^*\}$ je množina prepisovacích pravidiel,

$A \in \Sigma^+$ je axióma - konečné slovo nad abecedou Σ .

Ak $|d| > 1$, L-systém sa nazýva stochastický. Ak $a \neq \varepsilon$ alebo $b \neq \varepsilon$, L-systém sa nazýva kontextový.

Definícia 1.1.7 Krok odvodenia v L-systéme G je binárna relácia \Rightarrow_G definovaná na Σ^* takto: $x \Rightarrow_G y$ práve vtedy, keď existujú pravidlá $r_1 \dots r_n$ z R také, že $r_i = (a_i b_i c_i) \rightarrow d_i$, $x = b_1 \dots b_n$ a $y = d_1 \dots d_n$.

Definícia 1.1.8 Jazyk generovaný L-systémom G je množina $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid A \Rightarrow_G^* w\}$, kde \Rightarrow_G^* je reflexívno-tranzitívny uzáver relácie \Rightarrow_G .

Príklad 1.1.1 $G_1 = (\{a, b\}, \{a \rightarrow aba, b \rightarrow \varepsilon\}, aba)$, $G_2 = (\{a, b\}, \{a \rightarrow a, b \rightarrow baab\}, aba)$. L-systém G_1 generuje slová $aba, abaaba, abaabaaba \dots$, takže $L(L_1) = \{(aba)^{2^n} \mid n \geq 0\}$. G_2 generuje ten istý jazyk. $L(G_2) = L(G_1)$

Keď sa znakom abecedy priradí istá sémantika, dajú sa L-systémami generovať fraktály. Jedna z možných interpretácií je korytnačia grafika. Korytnačia grafika je spôsob kreslenia vektorových obrázkov. Spočíva v pohybe korytnačky po rovine, ktorá buď zanecháva alebo nezanecháva za sebou stopu v podobe úsečky. Korytnačka má tri atribúty:

1. Pozícia korytnačky, je určená dvojicou súradníc.
2. Orientácia korytnačky, je určená uhlom.
3. Pero, ktoré môže byť zdvihnuté, alebo položené, pričom pri pohybe korytnačka zanecháva stopu práve vtedy, keď je pero položené.

Korytnačke sa zadávajú príkazy na kreslenie.

- dopredu číslo - posunie sa dopredu o vzdialenosť číslo, zmení sa len pozícia.
- vlavo číslo - otočí sa doľava o číslo stupňov, zmení sa len orientácia.
- perodole, perohore - položí alebo zdvihne pero.

Príklad 1.1.2 Postupnosť príkazov dopredu 1; vlavo 90;dopredu 1; vlavo 90;dopredu 1;vlavo 90;dopredu 1; nakreslí štvorec so stranou 1.

1.1.1 Cantorova množina

Cantorova množina vznikne z úsečky postupným odstraňovaním strednej tretiny.

Definícia 1.1.9 Definujme postupnosť $\{K_i\}_{i=0}^{\infty}$ nasledovne:

$$K_0 = \langle 0, 1 \rangle$$

$$K_{n+1} = \left(\frac{K_n}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{K_n}{3} \right)$$

Cantorova množina je definovaná ako

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

, čo je to isté ako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$$

Môžeme si všimnúť, že na číselnej osi Cantorova množina predstavuje všetky reálne čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, ktoré v trojkovej sústave neobsahujú cifru 1.



Obr. 1.1: Generovanie Cantorovej množiny

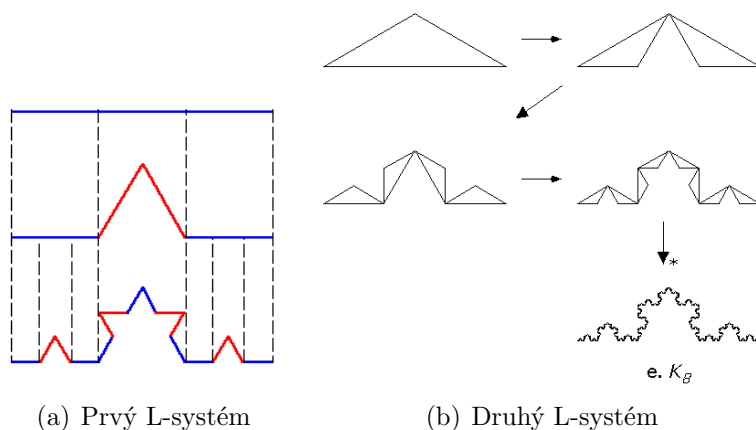
Cantorova množina sa dá vygenerovať napríklad týmto L-systémom: $G = (\{a, b\}, \{a \rightarrow aba, b \rightarrow bbb\}, a)$, kde a je interpretované príkazmi **perodole**; **dopredu** x ; , kde x je číslo, ktoré sa s predlžujúcim slovom zmenšuje, aby bol výsledný obrázok ohraničený. V slove w je teda $x = \frac{1}{|w|}$. b predstavuje voľné miesto v podobe úsečky s rovnakou dĺžkou, takže je interpretované príkazmi **perohore**; **dopredu** x ; . Takže napríklad v druhom kroku máme odvodené slovo $ababbbaba$. Na obrázku 1.1 sa dá interpretácia po druhom kroku všimnúť v treťom riadku. Limita tejto postupnosti je Cantorova množina. Reprezentácia Cantorovej množiny odvodeným slovom neexistuje, lebo by nebolo konečné. Jednotlivé úsečky už majú dĺžku nula, lebo súčet dĺžok vybraných častí je 1, ale je ich zato nespočítateľne veľa. Preto sa fraktály zvyknú definovať ako limita interpretácie nejakého postupu, v tomto prípade odvodzovania slova L-systémom.

1.1.2 Kochova vložka

Švédsky matematik Niels Fabian Helge van Koch (25.1.1870 – 11.3.1924) v roku 1904 popísal krivku v [HKoch] a dokázal o nej, že je spojitá, ale nie je diferencovateľná v žiadnom bode. Krivka je po ňom nazvaná ako Kochova krivka. Kochova vložka vznikne z troch Kochovych kriviek pospájaných do trojuholníka.

Postup na znázornenie Kochovej krivky začína podobne ako u Cantorovej množiny. Začíname s úsečkou, odstránime strednú tretinu, ale navyše doplníme dve také úsečky dĺžky rovnakej ako dĺžka odstránenej časti, aby s tou odstránenou tvorili rovnostranný trojuholník (viď obrázok 1.2(a), ktorý zobrazuje prvé dva kroky tohto postupu).

L-systém, ktorý generuje kochovu krivku:



Obr. 1.2: Generovanie Kochovej krivky

$G = (\{f, +, -\}, \{f \rightarrow f + f - -f + f, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, f)$, kde f je interpretované príkazmi **perodole**; **dopredu x**; $+$ a $-$ znamenajú otočenie o 60° (príkazy **vlavo 60** a **vpravo 60**). x tu ale nebude znamenať tretinu dĺžky slova, v ktorom sa nachádza, ale na začiatku (v axióme) bude rovné 1 a po každom kroku sa zmenší na tretinu. Odteraz, ak nebude napísané inak, f bude znamenať vždy **dopredu x**; so špecifikovanou dĺžkou a otočenie budú chápané rovnako so špecifikovaným uhlom.

Nie je to jediný L-systém, ktorý vygeneruje kochovu krivku. To je na fraktáloch pekné, že rôzne postupy vedú k rovnakému fraktálu.

$G = (\{t_1, t_2, +, -\}, \{t_1 \rightarrow +t_2 - -t_1+, t_2 \rightarrow -t_1 + +t_2-, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, t_1)$, kde t_1 interpretujeme ako postupnosť príkazov **dopredu x**; **vlavo 150**; **dopredu $\frac{1}{\sqrt{3}}x$** ; **vlavo 60**; **dopredu $\frac{1}{\sqrt{3}}x$** ; **vlavo 150**; **dopredu x**; t_2 ako **dopredu x**; **vpravo 150**; **dopredu $\frac{1}{\sqrt{3}}x$** ; **vpravo 60**; **dopredu $\frac{1}{\sqrt{3}}x$** ; **vpravo 150**; **dopredu x**; x sa nezmenší po každom kroku na tretinu, ale na $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $+$ a $-$ znamenajú otočenie o 30° (príkazy **vlavo 30** a **vpravo 30**). Tento postup je zobrazený na obrázku 1.2(b).

1.1.3 Sierpinskeho trojuholník

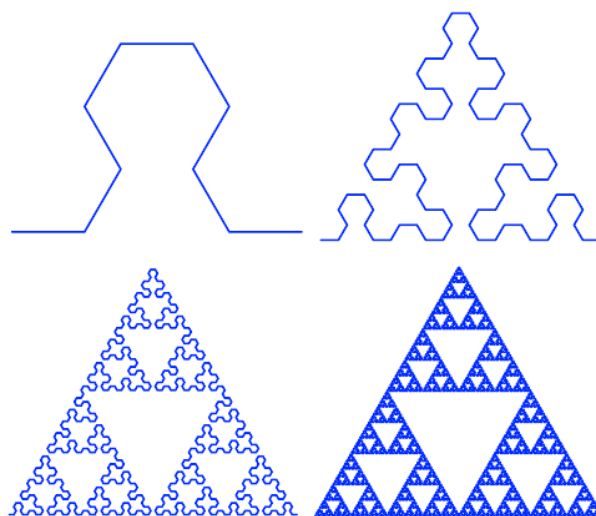
Poľský matematik Wac law Sierpinski v roku 1915 popísal útvar, ktorý nemá žiadnu súvislú plochu a má mnoho zaujímavých vlastností. Štandardná konštrukcia pozostáva v iterovanom rozdelení trojuholníka na štyri časti podľa stredných priečok a odobraní strednej časti.

Iný spôsob zostrojenia Sierpinskeho trojuholníka je *chaotickou hrou*.

1. Zostrojíme vrcholy rovnostranného trojuholníka
2. Zvolíme bod X v niektorom z vrcholov
3. Vyberieme náhodný vrchol, označíme ho A
4. Presunieme X do stredu úsečky AX
5. Pokračujeme krokom 3

Sierpinskeho trojuholník obsahuje tri kópie seba samého v polovičnej veľkosti. Presun X do polovičnej vzdialenosti k vrcholu je zobrazenie bodu trojuholníka do jednej z tých kópií.

Sierpinskeho trojuholník môže byť takisto zostrojený aj L-systémom: $G = (\{A, B, +, -\}, \{A \rightarrow B - A - B, B \rightarrow A + B + A, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, A)$ so zmenšením $\frac{1}{2}$ a uhlom 60° . Na obrázku 1.3 je zobrazený každý druhý krok kvôli názornosti.

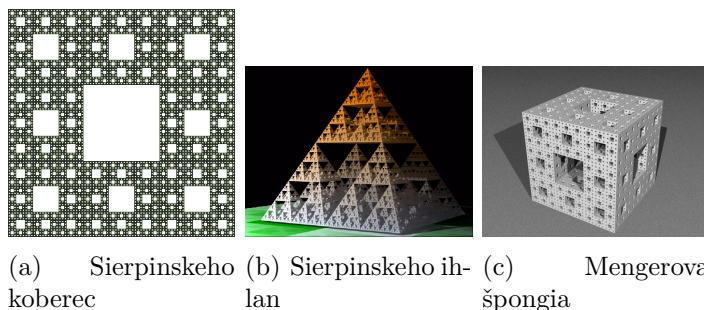


Obr. 1.3: Generovanie Sierpinskeho trojuholníka L-systémom

Nemal by byť prekvapením ani tento L-systém: $G = (\{A, B, +, -\}, \{A \rightarrow A - B + A + B - A, B \rightarrow BB, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, A)$ so zmenšením $\frac{1}{2}$ a uhlom 120° .

Sierpinskeho ihlan

Trojrozmerná obdoba Sierpinskeho trojuholníka, z ôsmych menších ihlanov sa vyberú 4 susediace s vrcholmi, s ktorými pokračuje delenie.



(a) Sierpinskeho koberec (b) Sierpinskeho ihlan (c) Mengerova špongia

Obr. 1.5: Fraktály, ktoré vznikli podobným spôsobom ako Sierpinskeho trojuholník

Mengerova špongia

Trojrozmerná obdoba Sierpinskeho koberca, z 27 menších kociek sa vyberie 20, ktoré sa dotýkajú hrán pôvodnej kocky a s nimi pokračuje delenie. Mengerova špongia sa dá definovať aj ako množina trojíc čísel v $\langle 0, 1 \rangle$ takých, že v trojkovej sústave pre každú pozíciu má najviac jedno číslo v tej trojici na tej pozícii cifru 1.

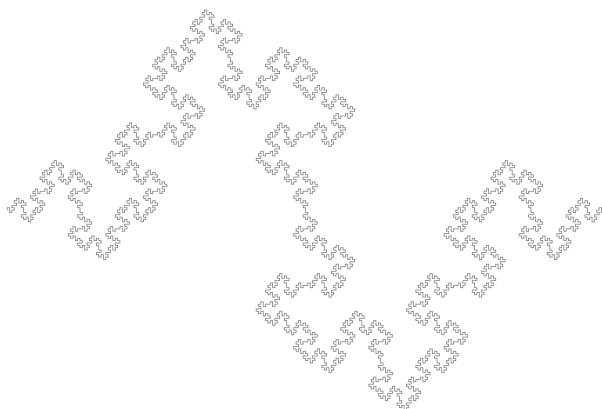
1.1.4 Minkowskeho klobása

V originále Minkowski sausage. Vznikne L-Systemom $G = (\{f, +, -\}, \{f \rightarrow f + f - f - f f + f + f - f, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, t_1)$ so zmenšením $\frac{1}{3}$ a uhlom 90° .

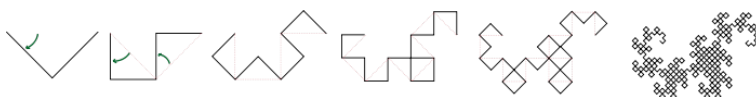
1.1.5 Dračia krivka

Dračia krivka vznikne L-systémom $G = (\{x, y, +, -\}, \{x \rightarrow -x + +y-, y \rightarrow +y - -x+, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, x)$ so zmenšením $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a uhlom 45° .

Táto krivka sa nikde nekrižuje, a vyplňa priestor. Ak mala pôvodná úsečka dĺžku 1, výsledná krivka má obsah $\frac{1}{2}$. Keďže má obsah, má zmysel hovoriť o obvode. Ten je vraj nekonečný.



Obr. 1.6: Mikowskeho klobása



Obr. 1.7: Generovanie dračej krivky

Dračia krivka sa dá spraviť aj nasledovným spôsobom: Pásik papiera preložíme na polovicu, potom znovu na polovicu, vždy okolo tej istej osi a rovnakým smerom. Po rozprestretí (180° zhyby sa zmenia na 90°) vznikne dračia krivka. Toto bola inšpirácia k zjednodušeniu L-systému generujúceho dračiu krivku.

$G = (\{a, b, +, -\}, \{a \rightarrow a+b, b \rightarrow a-b, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, a)$ so zmenšením $\frac{1}{2}$ a interpretáciou a a b ako dopredu x ; a uhlom 90° .

Znaky $+$ a $-$ v slovách, ktoré generuje tento L-systém predstavujú postupnosti zhybov na pásiku papiera.

1.2 Dynamické systémy

Definícia 1.2.1 *Metrický priestor je dvojica (X, d) , kde X je množina, d je funkcia vzdialenosti $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ a $\forall x, y, z \in X$ platia nasledovné vlastnosti:*

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \geq 0$
3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$$4. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

d sa tiež nazýva metrika.

(Podľa zdroja [BarnFE]) Dynamické systémy sú definované na metricom priestore, môžu nabráť podobu iterovaného zobrazenia alebo množiny diferenciálnych rovníc.

Definícia 1.2.2 *Nech (X, d) je metrický priestor, $f : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ je funkcia. Potom (X, f) je dynamický systém.*

Takto definovaný dynamický systém sa tiež nazýva spojitý dynamický systém. Diskrétne dynamický systém vznikne, ak funkciu f definujeme takto: $f : X \times \mathbb{N}_0 \rightarrow X$. Ďalšie definície budú pre spojité dynamické systémy, ale zámennou \mathbb{R} za \mathbb{N} sa pojmy definujú aj pre diskkrétne dynamické systémy.

Množinu všetkých pozícií bodu $x \in X$ v budúcnosti $\{f(x, t) | t \in \mathbb{R}_0^+\}$ nazývame trajektóriou bodu v dynamickom systéme. Funkcia f sa tiež nazýva časová funkcia.

Dynamické systémy sú deterministické vďaka časovej funkcii, ktorá vráti pozíciu ľubovoľného bodu v budúcnosti. Nedeterministické dynamické systémy majú časovú funkciu $f : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^X$. Táto funkcia vráti celú množinu bodov, ktorá predstavuje možné pozície bodu v danom čase. Nedeterministické dynamické systémy sa tiež nazývajú aj stochastické. Tu sa ale budem venovať len deterministickým.

Dôležitý pojem v dynamických systémoch je atraktor.

Definícia 1.2.3 Atraktor dynamického systému (X, T) v metricom priestore (M, d) je množina $A \subseteq X$ taká, že:

$$a \in A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X, \exists t_0 : \forall t > t_0 : d(x(t), a) < \varepsilon$$

.

Definícia 1.2.4 *Nech (X, f) je dynamický systém. $x \in X$ je pevný bod f , akk $\forall t \in \mathbb{R}^+ : f(x, t) = x$*

Definícia 1.2.5 *Nech (X, f) je dynamický systém. $x \in X$ je stabilný pevný bod f , akk $\exists \varepsilon > 0, C < 1 : \forall y \in X \{x\} : d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(x, f(y)) \leq Cd(x, y)$*

Pevný bod, ktorý nie je stabilný, sa nazýva nestabilný.

Definícia 1.2.6 *Nech (X, f) je dynamický systém. $x \in X$ je odpudivý pevný bod f , akk $\exists \varepsilon > 0, C > 1 : \forall y \in X \{x\} : d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(x, f(y)) \geq Cd(x, y)$*

Definícia 1.2.7 *Nech (X, f) je dynamický systém. Bod $x \in X$ sa nazýva periodický, akk $\exists t \in \mathbb{R}^+ : f(x, t) = x$. $\min\{t | f(x, t) = x\}$ je minimálna perióda bodu x .*

1.2.1 Iterované funkčné systémy

Definícia 1.2.8 *Nech (X, d) je metrický priestor. Iterovaný funkčný systém (IFS) je konečná množina podobných zobrazení $\{f : X \rightarrow X\}$ s koeficientom podobnosti $s < 1$.*

Definícia 1.2.9 *Množina A je pevný bod IFS W práve vtedy, keď platí:*

$$A = \bigcup_{f \in W} f(A)$$

Podľa [BarnFE] pre každý IFS existuje práve jeden pevný bod, ktorý sa dá dosiahnuť ako limita postupnosti $\{f^i(X)\}_{i=0}^{\infty}$.

Lahko vidieť, že pevný bod IFS je atraktor nedeterministického diskrétno-dynamického systému v metrickom priestore (X, d) a s časovou funkciou $f(x, t) = W^t(x)$.

Príklad 1.2.1 Majme IFS definovaný na metrickom priestore $\mathbb{R} \cap \langle 0, 1 \rangle$ so štandardnou euklidovskou vzdialenosťou, ktorý obsahuje dve zobrazenia:

$$f_1(x) = \frac{x}{3}$$

$$f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$$

Lahko sa dá vidieť, že pevný bod tohto IFS je práve Cantorova množina.

Zaujímavejšie fraktály sa dajú získať, keď za metrický priestor zvolíme priestor vyššej dimenzie.

Príklad 1.2.2 Majme IFS definovaný na metrickom priestore $\langle 0, 1 \rangle^2$ s ôsmimi zobrazeniami:

$$f_1(x, y) = g(x, y)$$

$$f_2(x, y) = g(x, y) + \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$f_3(x, y) = g(x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$f_4(x, y) = g(x, y) + \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

$$f_5(x, y) = g(x, y) + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$f_6(x, y) = g(x, y) + \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$f_7(x, y) = g(x, y) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$f_8(x, y) = g(x, y) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

, kde $g(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$. Pevný bod tohto IFS je Sierpinskeho koberec.

Sierpinskeho koberec si môže hocikto doma zobrazit na televízore. Stačí mať osem televízorov, dať ich do mriežky 3×3 bez stredného televízora. Potom treba výstup kamery zapojiť na každý televízor a začať snímať všetkých osem televízorov. Výsledný obraz začne časom pripomínať Sierpinskeho koberec. Týmto spôsobom sa dajú simulovať rôzne IFS. Keď sa do toho zapoja aj šošovky a televízory s rôznou dobou odozvy alebo inou farebnou škálou, výsledkom môžu byť aj dynamické systémy, ktoré nie sú IFS.

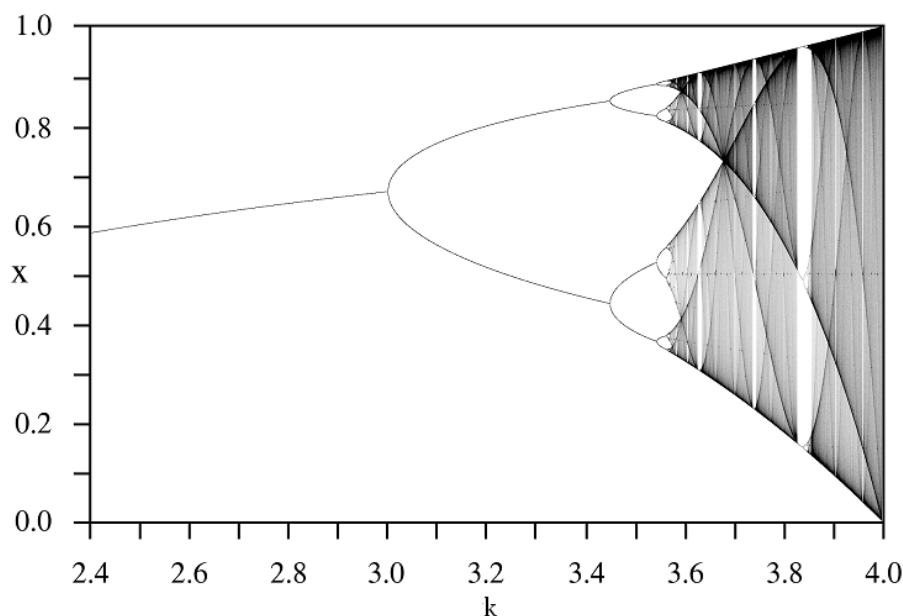
1.2.2 Cantorovo zobrazenie

Cantorovo zobrazenie je jedným príkladom chaotického správania sa bodov, ktoré napriek tomu aj po iterácii ostávajú v Cantorovej množine.

Definícia 1.2.10 *Nech x patrí Cantorovej množine. Nech jeho zápis v trojkovej sústave je $0.\omega_0\omega_1\omega_2\dots$, kde platí $\forall i \leq 0 : \omega_i \in \{0, 2\}$. Potom $T(x) = 0.\omega_1\omega_2\omega_3\dots$ nazývame Cantorovo zobrazenie.*

Cantorovo zobrazenie by sa dalo inak napísať aj ako $T(x) = 3x - \lfloor 3x \rfloor$. Toto zobrazenie je transformáciou Cantorovej množiny.

Body, ktoré majú ukončený rozvoj v trojkovej sústave, sa po čase dostanú do bodu 0. 0 je v tomto systéme nestabilný pevný bod. Racionálne čísla majú periodický charakter. Ostatné body sa správajú chaoticky, ale celá množina ako dynamický systém má atraktor samú seba.



Obr. 1.8: Feigenbaumov bifurkačný diagram pre logistické zobrazenie

1.2.3 Logistické zobrazenie

V skutočnosti logistické zobrazenie predstavuje celú množinu zobrazení. Pôvodne bolo určené na simuláciu rastu populácie v obmedzenom priestore.

Definícia 1.2.11 *Nech $0 < k \leq 4$. Potom pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ definujeme logistické zobrazenie ako $T_k(x) = kx(x - 1)$.*

Na znázornenie logistického zobrazenia sa používa takzvaný *web diagram*. V súradnicovej sústave sa znázorní daná funkcia a funkcia $y = x$, ktorá slúži na prenos výsledku na vstup ďalšej iterácie funkcie. Iterácia funkcie sa znázorňuje úsečkami. V prvom kroku sa určí počiatočný bod $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Prvá úsečka spája body $(x, 0)$ a $(T_k(x), x)$. Druhá úsečka preniesie výslednú hodnotu na os x , spojí body $(T_k(x), x)$ a $(T_k(x), T_k(x))$. Týmto postupom sa dá prehľadne znázorniť správanie bodu v dynamickom systéme.

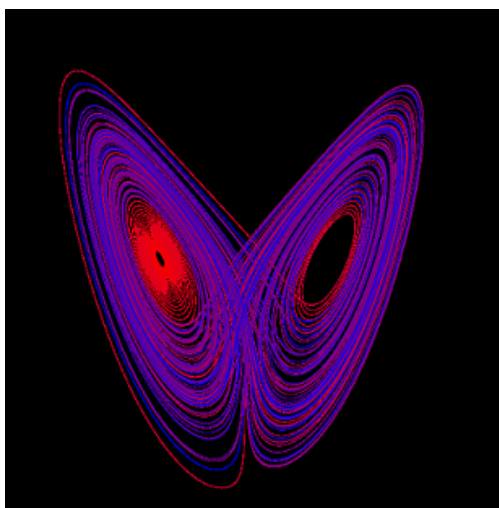
Pre $k \leq 1$ je 0 stabilný bod, všetky body k nemu konvergujú, takže $\{0\}$ je atraktor celého systému. Pre ostatné k je 0 nestabilný odpudivý pevný bod. Pre $1 < k \leq 4$ má zobrazenie pevný bod $\frac{k-1}{k}$, ktorý je pre $k \leq 3$ stabilný a tvorí aj atraktor celého systému. Pre $k > 3$ sa systém správa

zaujímavo. Pre $k < 3.45$ už $\{\frac{k-1}{k}\}$ nie je atraktor, ale systém okolo toho bodu osciluje s periódou 2. Atraktor tvoria dva body, ako vidno na obrázku 1.8. Pre $3.45 < k < 3.54$ tiež osciluje, ale s periódou 4. Pre väčšie k s periódou 8,16,... Pričom hranice medzi hodnotami k , keď sa mení perióda oscilácie sa znižuje postupnosťou, ktorej kvocient podľa [DSFP] konverguje $k \doteq 4.669$. Tento kvocient sa nazýva *Feigenbaumova konštanta* a vyskútuje sa často aj v kontexte iných dynamických systémov. Z toho vyplýva, že pre $k > 3.569945672$ by už systém osciloval medzi nekonečne veľa hodnotami, čo znamená, že už je chaotický. Dá sa to vidieť na obrázku 1.8, ktorý pre dané k znázorňuje množinu bodov, ktoré tvoria atraktor systému. Je tu vidno isté znaky samopodobnosti.

1.2.4 Lorenzov atraktor

Pre niektoré spojité dynamické systémy je jednoduchší zápis diferenciálnymi rovnicami. Príkladom je Lorenzov systém, ktorý je zložený z troch diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}x' &= -\sigma x + \sigma y \\y' &= Rx - y - xz \\z' &= -Bz + xy\end{aligned}$$



Obr. 1.9: Lorenzov atraktor

V roku 1963 Edward Lorenz ich použil pri simulácii vzdušných prúdov v atmosfére. Ale až v roku 2001 Warwick Tucker v [ODE] dokázal, že pre isté hodnoty parametrov už systém nemá chaotický charakter, ale má atraktor. Napríklad pre hodnoty $\sigma = 10, B = \frac{8}{3}, R = 28$ sa atraktor volá Lorenzov atraktor, lebo má isté výnimočné vlastnosti. Vidieť ho na obrázku 1.9. Podľa [ChAF] je hypotéza, že pre každú nekonečnú postupnosť prirodzených čísel $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ existuje práve jeden bod, ktorého trajektória opíše a_0 cyklov v ľavom disku atraktoru, a_1 cyklov v pravom, atď.

1.3 Juliova množina

Opačný prístup vedie k novej triede fraktálov. Namiesto samotného atraktora nás bude zaujímať množina bodov, ktorá má atraktor.

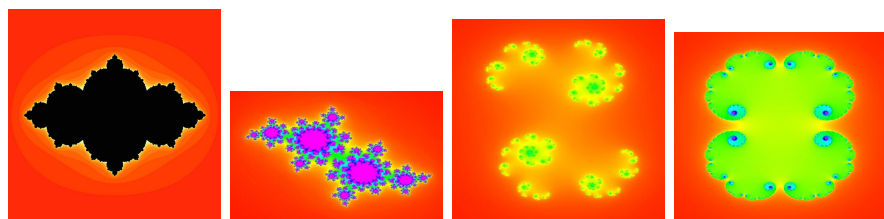
Definícia 1.3.1 *Majme diskretný dynamický systém (\mathbb{C}, f) . Nech $A \subseteq \mathbb{C}$ je množina, ktorá má v systéme atraktor. Ak f je polynóm nad \mathbb{C} , tak hranica množiny A sa nazýva **Juliova množina**. Množina A sa nazýva vnútro Juliovej množiny.*

Na obrázku 1.10 je vidno vnútra juliových množín pre funkcie typu $f(x, 1) = x^2 + c$. Farba bodov závisí od rýchlosti konverencie k atraktoru.

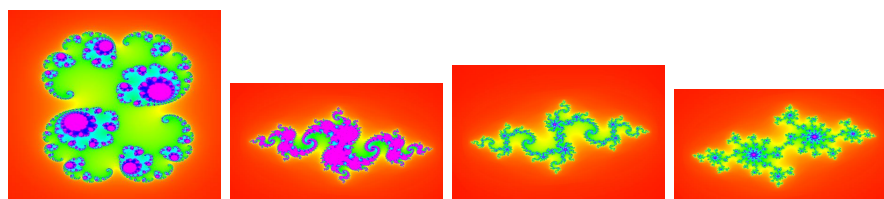
Podľa [ChAF] je Juliova množina invariantná na f .

Definícia 1.3.2 Mandelbrotova množina *je množina komplexných čísel $\{c \in \mathbb{C}\}$ takých, že pre funkciu $f(x, 1) = x^2 + c$ je atraktor dynamického systému (\mathbb{C}, f) spojitý.*

Na obrázku 1.11 je množina bodov zafarbená podľa vzdialenosti od Mandelbrotovej množiny. Mandelbrotova množina má mnohé zaujímavé vlastnosti. Je kompaktná, spojitá, má obsah približne 1.50659177, ale má nekonečne dlhý obvod. Skladá sa z takzvaných diskov, ktoré majú rôzne výrastky. Najväčší disk obsahuje body, pre ktoré má dynamický systém z definície atraktor jeden bod. Disk hneď naľavo od neho obsahuje body, pre ktoré má systém atraktor cyklus dĺžky 2. V ďalšom disku má dĺžku 4 atď. Zaujímavosťou je, že prienik diskov s osou x sa znižuje geometrickou postupnosťou s kvocientom 4.669, čo je práve Feigenbaumova konštanta.

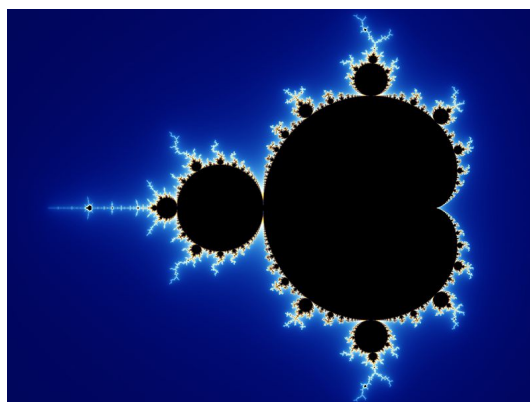


(a) Juliova množina s parametrom $c = (\phi - 2, 0)$ (b) Juliova množina s parametrom $c = (0.4, 0.6)$ (c) Juliova množina s parametrom $c = (0.45, 0.1428)$ (d) Juliova množina s parametrom $c = (0.285, 0)$



(e) Juliova množina s parametrom $c = (0.285, 0.01)$ (f) Juliova množina s parametrom $c = (-0.8, 0.156)$ (g) Juliova množina s parametrom $c = (-0.835, -0.2321)$ (h) Juliova množina s parametrom $c = (-0.70176, -0.3842)$

Obr. 1.10: Juliova množina pre rôzne hodnoty parametra c .



Obr. 1.11: Mandelbrotova množina

Kapitola 2

Problém definície fraktálu

Kritickou časťou v mnohých zdrojoch bola práve definícia fraktálu. Väčšina literatúry sa tým nezaobrá, len uvádza fraktály bez definície. V tejto kapitole zosumarizujem definície, ktoré som našiel a pokúsim sa podať aj vlastnú definíciu. Môžu sa tu vyskytovať pojmy fraktálna a topologická dimenzia, ktoré budú vysvetlené až v ďalších kapitolách.

Niektoré zdroje([answers.com], [thefreedictionary.com]) uvádzajú samopodobnosť ako kľúčovú vlastnosť útvaru, aby sme ho mohli nazvať fraktálom. Sú snahy presne definovať túto vlastnosť, aby táto definícia vyhovovala našim predstavám o fraktáloch. Príklad definície podľa [MIT]:

Definícia 2.0.3 *Podmnožina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je samopodobná, ak existuje $B \subseteq A$ taká, že existuje netriviálna afinná transformácia $A = W(B) + w$, kde W je regulárna štvorcová matica $n \times n$ a w je n -rozmerný vektor.*

Ale potom napr. priamka alebo rovina by boli podľa tejto definície tiež fraktál, lebo oplývajú touto vlastnosťou. A naopak, niektoré fraktály nevykazujú tento znak samopodobnosti, napríklad také, ktoré v každom iteračnom kroku použijú inú transformáciu. Tie by podľa tejto definície neboli fraktál. [MRem] rozdeľuje samopodobnosť na dva druhy:

Definícia 2.0.4 Striktná samopodobnosť – *hovoríme že množina A je striktné samopodobná, ak je zjednotením konečného počtu neprekrývajúcich sa transformovaných kópií samej seba.*

Definícia 2.0.5 Štatistická samopodobnosť – *hovoríme že množina A je štatisticky samopodobná, ak je zjednotením konečného počtu neprekrývajúcich sa transformovaných kópií samej seba, pričom každá z týchto kópií má*

rovnaké štatistické charakteristiky ako množina A (to býva väčšinou priemer a smerodajná odchýlka).

Striktná samopodobnosť situáciu nezachraňuje, lebo má silnejšiu podmienku ako samopodobnosť podľa [MIT]. Ale štatistická samopodobnosť sa dá uplatniť aj na mnohé objekty v prírode, takže by bola fajn až na to, že tá definícia nie je presná - chcelo by to spresniť, čo znamenajú štatistické charakteristiky pre ľubovoľnú množinu. Takže táto definícia nevyhovuje.

Iné zdroje uvádzajú fraktál ako geometrický útvar, ktorého fraktálna dimenzia nie je celé číslo. Samotný pojem fraktál vznikol z latinského *fractus*, čo znamená zlomkový. Nepresnosť v tejto definícii - Niektoré fraktály majú fraktálnu dimenziu celé číslo. Napríklad hranica Mandelbrotovej množiny má fraktálnu dimenziu 2. Podľa tejto definície by to nebol fraktál.

Ešte serióznejšie zdroje ([Stoyan]) tvrdia, že fraktál je množina bodov, ktorých fraktálna dimenzia je ostro väčšia ako topologická dimenzia. Navyše toto musí platiť pre všetky definície dimenzie. Táto definícia sa neskôr ukáže ako skoro presná. Podľa prednášky na [MIT] musí platiť zároveň toto, a ešte aj podmienka samopodobnosti.

A podľa ostatných zdrojov definícia fraktálu neexistuje ([CG1]), je predmetom "horúcej debaty" ([Psyche]) alebo s definíciou fraktálu je to ako s definíciou života - neexistuje presná definícia, ale vieme vymenovať kľúčové vlastnosti ([FGeom]).

Podľa [DisF] v časopise *La Recherche* v interview Mandelbrot povedal, že pojem fraktál nemá presnú definíciu, má len evokovať "zlomkový". Ale potom dodal, že je to nesprávne dokonca dvojnásobne. Fraktál môže mať aj dimenziu, ktorá je iracionálne číslo (Sierpinskeho trojuholník) a môže to byť aj celé číslo (okraj Mandelbrotovej množiny).

Pojem fraktál sa používa už 34 rokov. Existuje veľké množstvo literatúry, galérií, programov, ktoré vykresľujú fraktály. Človek získava predstavu o fraktáloch práve z dostupnej literatúry, ktorá reprezentuje všeobecne dostupné informácie. Ak by definícia fraktálu existovala, musela by spĺňať túto predstavu. Všetky definície, čo boli dosiaľ podané, mali nedostatok v tom, že tú predstavu nepopisovali presne.

O Peanovej krivke sa hovorí, že je to fraktál. Ale množina bodov predstavujúca Peanovu krivku je rovná množine bodov predstavujúcej štvorec. To znamená, že Peanova krivka je fraktál práve vtedy keď je fraktál aj štvorec. Znamená to ale, že presná definícia fraktálu neexistuje? Nie je to celkom pravda - definícia len nemôže byť založená na množine bodov.

Možnosť, ako definíciu napraviť, je definovať fraktál s istými obmedzeniami, aby sa nestalo, že nejaká množina bodov by podľa definície bola fraktál, ale podľa našich predstáv nie je. Po tejto definícii by sa dali dodefinovať ostatné, sporné prípady ako napríklad Peanova krivka, ktorá má topologickú aj fraktálnu dimenziu 2. Peanova krivka je fraktál len kvôli postupu, akým sa generuje. Takže tieto špeciálne prípady sa dajú dodefinovať asi len ako množina bodov spolu s postupom, akým je generovaná. Môj návrh na definíciu je nasledovný:

Definícia 2.0.6 *Nech $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ je postupnosť množín bodov v \mathbb{R}^n , ktorá má limitu F . Potom F je fraktál vygenerovaný postupnosťou $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ práve vtedy, keď $\forall i, j : \dim F > \dim A_i = \dim A_j$, kde $\dim A$ je fraktálna dimenzia množiny A .*

Ani táto definícia nie je ideálna, podáva ale návod, ktorým smerom by sa mali v budúcnosti uberať pokusy o definíciu fraktálu.

Pre lepšie pochopenie dôvodov, prečo spomenuté definície nevyhovujú, ako aj pre objasnenie môjho návrhu na definíciu, v ďalších kapitolách formálne zavediem pojmy topologická a fraktálna dimenzia.

Kapitola 3

Pojem dimenzie

Slovo dimenzia pochádza z latinského *dimensio*, čo znamená merať. V slovenčine je to cudzie slovo pre pojem *rozmer*. Podľa [MES] je rozmer základná vlastnosť priestoru, závislosť veličiny od jednotky. Ale pre bežných ľudí má slovo rozmer význam podobný ako veličina, miera. Takže je potrebné si tieto pojmy presnejšie objasniť. Cieľom tejto kapitoly je stanoviť presný význam pojmu dimenzia.

3.1 Topologická dimenzia

Topologická dimenzia vyjadruje to, čo si bežní ľudia predstavia pod pojmom rozmer. Keď je niečo dvojrozmerné, má to dva rozmery, ako napríklad štvorec, tak dve súradnice určujú polohu bodu v ňom. Podobne úsečka má jeden rozmer, teda je jednorozmerná a kocka má tri rozmery, takže je trojrozmerná. V tejto sekcii presne zdefinujeme tento pojem topologická dimenzia. Na to sú potrebné základne vedomosti z topológie, ktoré som čerpal hlavne z [ETop].

Prvá zmienka o topológii je z roku 1736. Leonhard Euler ju nazval geometria pozície. Chcel tým naznačiť, že v topológii nie sú dôležité vzdialenosti. Samotný pojem topológia zaviedol až v roku 1847 Johann Benedict Listing. Moderná topológia ako veda je založená na teórii množín.

Definícia 3.1.1 *Nech X je množina. Nech Ω je množina podmnožín X taká, že:*

1. *Zjednotenie ľubovoľne veľa prvkov z Ω patrí Ω ;*
2. *Prienik konečne veľa prvkov z Ω patrí Ω ;*

3. $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$.

Potom Ω je **topológia** na X a dvojica (X, Ω) sa nazýva **topologický priestor**. Prvky X sa nazývajú **body** a prvky Ω sa nazývajú **otvorené množiny**. Množina $F \subseteq X$ sa nazýva **uzavretá**, akk $X \setminus F$ je otvorená.

Príklad 3.1.1 Nech X je \mathbb{R} . Príklady topológie na priamke môžu byť: $2^{\mathbb{R}}$ (množina všetkých množín bodov na priamke), $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$, množina všetkých zjednotení množín otvorených intervalov.

Posledný príklad sa nazýva *kanonická topológia* na \mathbb{R} .

Poznámka 3.1.1 V ďalšom texte sa pod zobrazením topologických priestorov myslí zobrazenie množín ich bodov.

Definícia 3.1.2 Nech X, Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ je **spojité**, akk pre každú otvorenú podmnožinu $B \subset Y$ je množina $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ otvorená.

Definícia 3.1.3 Bijektívne zobrazenie topologického priestoru sa nazýva *izomorfizmus*, akk je spojité a aj jeho inverzné zobrazenie je spojité.

Definícia 3.1.4 Topologický priestor X je *izomorfný* s topologickým priestorom Y , akk existuje izomorfizmus $X \rightarrow Y$.

Nasledujúce sekcie majú priblížiť čitateľovi históriu definície topologickej dimenzie a zasvätiť ho do problémov, ktoré s ňou súviseli.

3.1.1 Definícia podľa počtu parametrov

Prvý pokus o definíciu topologickej dimenzie pre množinu bodov spočíval v minimálnom počte parametrov potrebných na určenie polohy bodu v danej množine. Dva rôzne body nemôžu byť popísané rovnakou postupnosťou parametrov. Pre každý bod musí existovať práve jedna postupnosť parametrov.

Prvá vlastnosť sa nazýva jednoznačnosť a spolu s druhou vlastnosťou tvorí bijekciu. Skúsil som tieto vlastnosti preformulovať do formálnej definície.

Definícia 3.1.5 Topologická dimenzia množiny A je

$$\min\{n : \exists f : R^n \rightarrow A, f \text{ je bijekcia}\}$$

Túto definíciu ešte stále používa väčšina literatúry. Je však nesprávna, ako ukázal Cantor už v roku 1878, keď našiel bijekciu medzi priamkou a rovinou. Podľa tejto definície má teda samotný bod dimenziu 0 a všetky ostatné neprázdne množiny bodov v spočítateľnorozmernom priestore¹ majú dimenziu 1.

Na určenie polohy bodu v množine dvoch bodov je potrebný 1 parameter, lebo 0 parametrov nestačí. Takže aj dva body by mali topologickú dimenziu 1, čo tiež nesedí s našou predstavou o dimenzii.

Ako sa neskôr ukázalo, chyba v tej definícii bola v tom, že topologická dimenzia by nemala byť definovaná na ľubovoľnej množine bodov, ale na topologickom priestore. K definícii by stačilo pridať, že zobrazenie má byť spojité a teda má zachovávať topológiu.

Definícia 3.1.6 *Topologická dimenzia topologického priestoru A je*

$$\min\{n : \exists f : \mathbb{R}^n \rightarrow A, f \text{ je spojitá bijekcia}\}$$

Tejto novej definícii Cantorovo zobrazenie už neprekáža. Ale to neznamenalo, že definícia je zachránená.

V roku 1890 na scénu prišli Peano a Hilbert so svojimi krivkami vyplňajúcimi priestor. To znamená, že našli zobrazenie, ktoré bolo aj spojité. Nanešťastie to ale nebola bijekcia, keďže krivka prechádza viackrát jedným bodom. Definícia sa teda ubránila ďalšiemu útoku.

Dlho (21 rokov) to bol otvorený problém, či existuje spojitá bijekcia z úsečky na štvorec. Keby niekto také zobrazenie našiel, mali by matematici veľké problémy. Konečný elegantný dôkaz, že také zobrazenie neexistuje, podal podľa [ChAF] až v roku 1911 dánsky matematik Brouwer.

3.1.2 Induktívna definícia

Nasledovné definície induktívnej dimenzie sú podľa zdroja [AMSpaces].

Definícia 3.1.7 *Nech X je topologický priestor. X má vnútornú induktívnu dimenziu -1 práve vtedy, keď je X prázdny priestor. X má vnútornú induktívnu dimenziu $\leq n$, ak existuje otvorená množina v X obsahujúca x , ktorej vnútorná induktívna dimenzia je $n - 1$.*

¹Pod pojmom spočítateľnorozmerný priestor sa myslí buď \mathbb{R}^k , alebo nekonečnorozmerný priestor ako napríklad $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, čo je množina všetkých nekonečných postupností reálnych čísel.

Vnútoraná induktívna dimenzia môže byť chápaná aj spôsobom, že čiara má dimenziu 1, lebo sa dá oddeliť bodom, ktorý má dimenziu 0. Plocha má dimenziu 2, lebo sa dá rozdeliť jednorozmernou čiarou. Túto ideu podľa [ChAF] vymyslel Poincaré.

Definícia 3.1.8 *Nech X je topologický priestor. X má vonkajšiu induktívnu dimenziu -1 práve vtedy, keď je X prázdny priestor. X má vonkajšiu induktívnu dimenziu $\leq n$, ak pre každú uzavretú podmnožinu $Y \subseteq X$ existuje otvorená nadmnožina $Z \supseteq Y, Z \subseteq X$, ktorej vnútoraná induktívna dimenzia je $n - 1$.*

3.1.3 Rád pokrytia topologického priestoru

Definícia 3.1.9 *Pokrytie topologického priestoru X je množina topologických priestorov, ktorých zjednotenie je nadmnožinou X .*

Príklad 3.1.2 Príklad pokrytia topologického priestoru X :

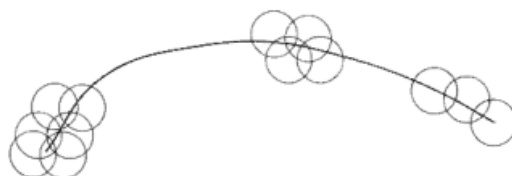
- $\{X\}$
- $\{Y \subseteq X\}$
- topológia pre X

Definícia 3.1.10 *Pokrytie D je zjemnenie pokrytia C , akk $\forall d \in D : \exists c \in C : d \subset c$. Zjemnenie teda tvorí usporiadanie na množine pokrytí.*

Definícia 3.1.11 *Rád bodu x v pokrytí C topologického priestoru X je kardinalita množiny $\{c \in C | x \in c\}$.*

Definícia 3.1.12 *Rád pokrytia C topologického priestoru X je supremum rádov x v pokrytí C pre všetky $x \in X$.*

Definícia 3.1.13 *Nech X je neprázdny topologický priestor. X má pokrývajúcu dimenziu n práve vtedy, keď každé otvorené pokrytie má zjemnenie rádu $n + 1$.*



Obr. 3.1: Tri spôsoby pokrytia čiary

Ideu pokrývacej dimenzie vymyslel podľa [ChAF] Lebesgue. Na obrázku 3.1 sú tri rôzne spôsoby pokrytia čiary. Síce žiadne z nich nie je v skutočnosti pokrytie, len znázorňuje, akým spôsobom sa vytvorí pokrytie. Prvé pokrytie má rád 4, lebo maximálne 4 prvky pokrytia majú spoločný prienik. Druhé pokrytie má rád 3 a tretie pokrytie má rád 2. Prvé sa dá zjemniť na druhé a to sa dá zjemniť na tretie. Je zjavné, že pokrytie čiary s rádom 1 nie je možné spraviť, lebo prvky pokrytia sú otvorené množiny, preto má čiara pokrývaciú dimenziu 1.

Podľa [AMSpaces] pre separabilné metrizovateľné priestory sú tieto definície ekvivalentné. Formálne vysvetlenie týchto pojmov je už nad rámec bakalárskej práce. Pre bežné topologické priestory stačí určiť topologickú dimenziu podľa ľubovoľnej z týchto definícií, aby vyhovovala intuitívnemu chápaniu tohto pojmu.

3.2 Fraktálna dimenzia

S topologickou dimenziou bolo zopár problémov. Niektoré podmnožiny \mathbb{R}^n so štandardnou topológiou majú induktívnu aj pokrývaciú dimenziu k , ale napriek tomu sa nenašla bijekcia s R^k . To viedlo matematikov k novej definícii dimenzie, ktorá nebude obmedzená celými číslami. Motiváciou boli aj niektoré objekty z prírody. Napríklad pobrežie. Akou mierou sa dá rozumne merať pobrežie²? Keď sa snažíme odmerať dĺžku, tak tá sa bude neobmedzene zväčšovať so zvyšujúcou sa presnosťou merania. Akou inou mierou sa dá teda merať? Na to je potrebné poznať presný význam pojmu miera.

3.2.1 Miera

Podľa [GAE] sa dá definovať fraktálna dimenzia na pol strany bez spomenutia pojmu miera, ale takým učením sa stráca motivácia za tou definíciou. Pojem miera úzko súvisí s pojmom dimenzia. Objekty s dimenziou 2 majú dve miery, najčastejšie dĺžku a šírku. Ale skombinovaním týchto dvoch mier sa im dá merať obsah. Treba si objasniť aj tento pojem teda. Je potrebné, aby bola miera definovaná pre každý rozmer, aby jednorozmerná miera bola dĺžka, dvojrozmerná miera plocha, trojrozmerná miera objem, Takúto definíciu miery som nenašiel, dokonca ani len presnú definíciu dĺžky nie. Definície ako vzdialenosť dvoch bodov, alebo integrovanie krivky sú veľmi špecifické, nevzťahujú sa na všetky množiny bodov, ktorým sa dá merať dĺžka.

Preto sa mnohí rozhodli dedefinovať pojem n -rozmerná miera podmnožiny metrického priestoru s dimenziou m pomocou dimenzie tak, aby:

1. bola konečné číslo, ktoré vyjadruje danú mieru, ak $n = m$
2. 0, ak $n > m$
3. ∞ , ak $n < m$

V tabuľke 3.1 je v bunke 1, ak sa daná miera dá merať na danom objekte a je to konečné číslo. U priamky vidíme, že má nekonečnú dĺžku napriek tomu, že má dimenziu 1. Preto sa s meraním obmedzíme na ohraničené množiny.

Vráťme sa k pobrežiu. O dĺžke už vieme, že je nekonečná. A o obsahu, že je nulový. Takže dimenzia by mala byť väčšia ako 1 a menšia ako 2. Na to už topologická dimenzia teda nestačí. Pobrežie je príkladom množiny bodov,

²Pobrežie je chápané ako krivka - hranica medzi pevninou a súšou.

| útvár | dĺžka | obsah | objem |
|----------------------------|----------|----------|----------|
| spočítateľná množina bodov | 0 | 0 | 0 |
| úsečka | 1 | 0 | 0 |
| priamka | ∞ | 0 | 0 |
| štvorec | ∞ | 1 | 0 |
| rovina | ∞ | ∞ | 0 |
| kocka | ∞ | ∞ | 1 |
| priestor | ∞ | ∞ | ∞ |

Tabuľka 3.1: Prehľad mier rôznych rozmerov pre základné objekty.

pre ktorú indukčtivná aj pokrývacia dimenzia je 1, ale neexistuje bijekcia s \mathbb{R} . Preto bolo treba vymyslieť definíciu dimenzie, ktorá by rátala aj s takými množinami, ktorých dimenzia nie je celé číslo - *fraktálna dimenzia*

Takých definícií sa vymyslelo viacero a žiadna z nich nie je jednoduchá. Niektoré z nich môžu byť ekvivalentné v špecifických prípadoch. A väčšina definuje dimenziu ako limitu postupnosti, tak sa to nedá overiť ani experimentálne, lebo metódy na meranie dimenzie ju len odhadnú z istej podpostupnosti.

3.2.2 Samopodobnostná dimenzia

Táto definícia je vhodná pre presné určenie dimenzie jednoduchých fraktálov. Treba avšak poznať spôsob, akým bol vygenerovaný. Či už L-systémom, alebo IFS, musí byť samopodobný a treba poznať konkrétne parametre. Nasledovná definícia je podľa [Yang]:

Definícia 3.2.1 *Nech X je samopodobná množina, ktorá obsahuje N kópií samej seba s koeficientom podobnosti k . Potom samopodobnostná dimenzia d je určená nasledovne:*

$$d = \frac{\log N}{\log k}$$

Dá sa to napísať aj ako

$$d = \log_k N$$

alebo

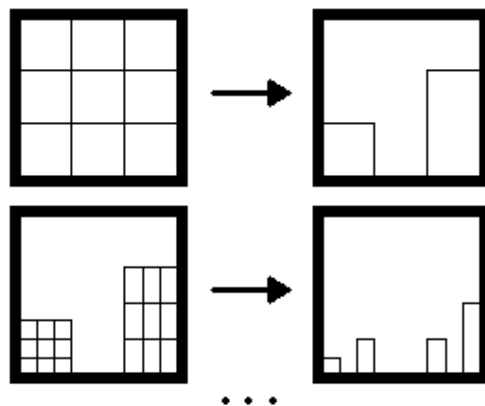
$$k^d = N$$

Príklad 3.2.1 Štvorec rozdelíme na 9 menších štvorcov s koeficientom podobnosti 3. IFS, ktorý využíva týchto 9 podobných zobrazení vygeneruje celý štvorec. Preto je samopodobnostná dimenzia štvorca $\log_3 9 = 2$ ($3^2 = 9$).

Príklad 3.2.2 Sierpinskeho trojuholník je vygenerovaný IFS s tromi zobrazeniami s koeficientom podobnosti 2. Preto je samopodobnostná dimenzia Sierpinskeho trojuholníka $\log_2 3 \doteq 1.585$.

Zoznam známych fraktálov spolu s ich dimenziami je v tabuľke ??.

Samopodobnostná dimenzia sa dá síce veľmi rýchlo a presne vypočítať, ale má mnoho nevýhod. Okrem toho, že sa nedá uplatniť na množiny, ktoré nie sú striktne samopodobné ako napríklad Mandelbrotova množina³, ale aj obyčajné IFS keď zobrazenia majú rôzny koeficient podobnosti, ale hlavný nedostatok je podľa [Yang] to, že nie je topologicky flexibilná. To znamená, že napríklad Cantorova množina má síce dimenziu $\log_3 2 \doteq 0.63$, ale existuje IFS, ktorý vygeneruje tiež Cantorovu množinu, ktorá bude mať inú samopodobnostnú dimenziu. Tento IFS je znázornený na obrázku 3.2. Z tohto dôvodu treba narábať so samopodobnostnou dimenziou opatrne.



Obr. 3.2: IFS, ktorý vygeneruje Cantorovu množinu so samopodobnostnou dimenziou 1

³O Mandelbrotovej množine sa síce hovorí, že je samopodobná, ale kópie neurčujú vzhľad Mandelbrotovej dimenzie, keďže obsahuje aj iné oblasti, ktoré majú rôzne vplyvy na výslednú dimenziu. Počet kópií s dostatočne malým koeficientom podobnosti je príliš malý na to, aby dokázala samopodobnostná dimenzia vyjadriť presnú dimenziu tejto hyperheterogénnej množiny.

3.2.3 Minkowskeho dimenzia

Podľa definície Minkowskeho definície fraktálnej dimenzie sa dá určiť fraktálna dimenzia ľubovoľnej množiny. Tento odhad sa nazýva *Minkowskeho dimenzia*. Definícia podľa [Yang]:

Definícia 3.2.2 *Hyperkocka dimenzie n je taká množina bodov v priestore R^n , pre ktorú existuje podobné zobrazenie do $\langle 0, 1 \rangle^n$.*

Definícia 3.2.3 *Majme podmnožinu d -rozmerného euklidovského priestoru $S \subseteq E^d$. Nech $N(\varepsilon)$ je minimálny počet hyperkociek dimenzie d potrebných na pokrytie S . Potom*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \text{ je Minkowskeho dimenzia } S$$

Minkowskeho dimenzia je ešte pomerne jednoducho definovaná, ale ešte stále sú tu nejaké obmedzenia. [Yang] uvádza niekoľko tvrdení.

Veta 3.2.1 *Ak S je samopodobná množina, potom má rovnakú samopodobnostnú a Minkowskeho dimenziu.*

Táto veta je pomerne silné tvrdenie, ktoré hovorí, že metódy, ktoré vedia zistiť Minkowskeho dimenziu pre ľubovoľnú množinu, sú dosť presné, keď tá množina je klasický fraktál.

Veta 3.2.2 *Minkowskeho dimenzia množiny S a uzáveru množiny S je rovnaká.*

Príklad 3.2.3 Množina racionálnych čísel v intervale $\langle 0, 1 \rangle$ má Minkowskeho dimenziu 1, čiže rovnakú, ako jej uzáver, čo sú všetky reálne čísla v tom intervale.

Príklad 3.2.4 $S = \{\frac{1}{i}\}_{i=0}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Minkowskeho dimenzia množiny S je $\frac{1}{2}$.

Príklad 3.2.4 ukázal, že Minkowskeho dimenzia nie je úplne presná definícia fraktálnej dimenzie, keďže očakávame, že dimenzia spočítateľnej množiny bodov je nula. Problém tu ale nastal len v limitnom prípade. Na základe tejto definície dimenzie funguje metóda počítania boxov, ktorej limitný prípad vôbec neprekáža. Ale napriek tomu uvediem ešte jednu klasickú definíciu fraktálnej dimenzie, ktorá je už síce presná, ale veľmi zložitá a nevhodná na implementáciu experimentálnej metódy merania dimenzie.

3.2.4 Hausdorffova dimenzia

Podľa [Slider]:

Definícia 3.2.4 *Nech (X, d) je metrický priestor. Potom $\forall E \subset X$ definujeme Hausdorffovu s -rozmernú vonkajšiu mieru ako*

$$H^s(E) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s \mid A_i \text{ je otvorená množina, } \text{diam}(A_i) < \varepsilon, E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right\}$$

.

Definícia 3.2.5 *Hausdorffova dimenzia množiny E je definovaná nasledovne:*

$$\dim_H(E) = \inf\{s > 0; H^s(E) = 0\} = \sup\{s > 0; H^s(E) = \infty\}$$

Podľa [AMSpaces] pre každý separabilný metrický priestor platí $\dim X \leq \dim_H X$. Hausdorffova dimenzia je presná, lebo už v definícii sa dá vidieť, že presne vyjadruje to, čo očakávame od vzťahu medzi dimenziou a mierou. Hľadá sa také číslo s , pre ktoré sa dá merať s -rozmerná miera. Hausdorffova miera je rozšírením pre miery neceločíselnej dimenzie a presne zodpovedá aj hodnotám v tabuľke 3.1.

Kapitola 4

Metódy merania fraktálnej dimenzie

Cielom tejto kapitoly nie je popísať všetky možnosti, ako sa dá merať fraktálna dimenzia, nevediem tu napríklad samopodobnostnú metódu, lebo sa dá vypočítať presne jedným vzorcom, keď poznáme spôsob generovania fraktálu. Nedá sa uplatniť pre ľubovoľnú množinu. Oblasť skúmania budú teda experimentálne metódy, ktoré sa dajú uplatniť na ľubovoľný *prírodný jav*, ako uvádza názov tohto diela.

Dimenziu máme definovanú len pre množinu bodov, takže keď chceme merať fraktálnu dimenziu niečoho iného, potrebujeme to najprv zobrazit' do množiny bodov. Predtým si treba daný prírodný jav presnejšie špecifikovať, aby ho bolo možné do množiny bodov zobrazit'. Celý postup je nasledovný:

1. Kategorizácia: Človek určí kategóriu, typ objektu reprezentujúci daný prírodný jav.
2. Spracovanie vstupu: Program má na vstupe daný prírodný jav a kategóriu, výstupom je množina bodov v R^n .
3. Meranie fraktálnej dimenzie: Program pomocou niektorej metódy pre danú množinu vypočíta dimenziu.

V nasledujúcej sekcii je popísané spracovanie vstupu pre niektoré kategórie.

4.1 Spracovanie vstupu

Prírodné javy sa dajú rozčlenit' do viacerých skupín:

4.1.1 Statický objekt

Špecifické pre tieto objekty je, že majú pevne danú pozíciu v n -rozmernom priestore, do ktorého sa dá naniest súradnicová sústava na ľubovoľné miesto. Potom ak určíme množinu bodov prislúchajúcu objektu v nanesenej súradnicovej sústave, je pre ňu definovaná fraktálna dimenzia.

4.1.2 Dynamický objekt

Pohyb objektu v n -rozmernom priestore sa dá znázorniť na časovej osi. Časová os je lineárne nezávislá od ostatných osí, preto rozširuje priestor pôvodného statického objektu. Dimenzia dynamického objektu bude teda rovná dimenzie tohto nového statického objektu v rozšírenom $n + 1$ -rozmernom priestore.

4.1.3 Objekt sivej škály

Má síce pevnú pozíciu v n -rozmernom priestore, ale namiesto presne stanovenej hranice a určenia príslušnosti bodov objektu môže obsahovať takzvané *prechody odtieňu*. Pod pojmom objekt sivej škály sa teda myslí množina bodov v priestore, ktorá má pre každý bod daný odtieň, ktorý je reprezentovaný reálnym číslom. Objekt sivej škály sa dá zobrazit na statický objekt podobným postupom ako pri dynamickom objekte. Nanesieme novú os, ktorá nebude časová, ale farebná. Zásadným rozdielom bude, že nebude pre každý bod na farebnej osi určený statický objekt v n -rozmernom priestore, ale pre každý bod v pôvodnom n -rozmernom priestore bude určený práve jeden bod na farebnej osi. Táto podmienka je dosť obmedzujúca, napríklad sa nedá dvojrozmerný obrázok sivej škály prirovnať k povrchu oblaku/pohoria, ktorý tvorí je tiež plochu v trojrozmernom priestore, lebo objekt sivej škály v rozšírenom priestore nemôže obsahovať takzvané *previsy*.

4.1.4 Farebný objekt

Farebný objekt sa od objektu sivej škály líši len tým, že pre každý bod nie je určené jedno číslo, ktoré určuje odtieň, ale ľubovoľnú farbu. Trojnásobným aplikovaním postupu pre objekt sivej škály pre jednotlivé odtiene zelenej, červenej a modrej sa zobrazí akýkoľvek farebný objekt na statický objekt.

4.1.5 Video

Video je kombináciou dynamického a farebného objektu. Každý frame videa sa zobrazí na statický objekt a potom sa pridá časová os - zobrazí sa to tak, ako dynamický objekt. Toto video je avšak nemé. Zvuk patrí do inej kategórie.

4.1.6 Zvuk

Najjednoduchšia špecifikácia zvuku je závislosť frekvencie od času. Zaujímavým rozšírením je v jednom čase povoliť viacero rôznych interferenčných frekvencií. To by už presne zodpovedalo statickému objektu v dvojrozmernom priestore. Avšak v jednom časovom momente sa bežným mikrofónom dá odmerať len jedna frekvencia, takže bežne merateľná je prvá špecifikácia. Ak by sme mali k dispozícii zdroj zvuku, napríklad notovú osnovu, tak sa dá merať aj dimenzia podľa druhej špecifikácie. Ďalšia možnosť je zobrazit závislosť amplitúdy od času, alebo dokonca amplitúdy od frekvencie¹.

4.2 Kompasová metóda

Hneď prvá metóda merania dimenzie je výnimkou. Neuplatňuje sa pri nej štandardný postup spracovania vstupu, je potrebná spätná interakcia s daným prírodným javom. Jedno veľké obmedzenie kompasovej metódy je formát vstupu. Musí to byť krivka, ktorá sa dá aproximovať úsečkami. Definujme postupnosť, kde i -tý člen je aproximácia krivky úsečkami dĺžky l_i . Nech $\lim_{i \rightarrow \infty} l_i = 0$, čo znamená, že sa zvyšuje presnosť aproximácie úsečkami. Nech tých úsečiek je v i -tom kroku N_i , pričom $N_0 = 1$. Potom fraktálna dimenzia je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_i}{\log \frac{l_0}{l_i}}$$

. Samozrejme sa v praxi nedá presne zmerať limita postupnosti, väčšinou je k dispozícii len niekoľko členov tejto postupnosti.

Kompasová metóda sa dá aplikovať napríklad na meranie členitosti pobrežia, členitosť vodného toku, hranice štátov (ak to zrovna nie je poludník alebo rovnobežka). Ale dá sa rozšíriť na aproximáciu plôch pomocou malých rovných plôšok, ale také meranie by bolo príliš náročné na realizáciu.

¹[Perrin] nazýva takto zobrazený diagram Power Spectral Density.

4.3 Metóda počítania boxov

Druhá metóda - metóda počítania boxov (Box-counting method) je univerzálna, funguje pre akúkoľvek množinu bodov $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Prvý krok je nájdenie hyperkocky pokrývajúcej vstupnú množinu. Keďže fraktálna dimenzia je definovaná len pre ohraničené množiny, táto hyperkocka sa dá vždy nájsť. V ďalšom texte sa bude nazývať pokrývacia hyperkocka. Druhý krok je zostrojenie postupnosti. Cieľom je totiž odhadnúť jej limitu. Výsledná limita je Minkowskeho dimenzia. Na rozdiel od postupu v definícii 3.2.2 sú hyperkocky vopred určené na daných pozíciach.

Definícia 4.3.1 *k -delenie n -rozmernej hyperkocky A je taká množina k^n hyperkociek, ktoré majú stranu k -krát menšiu a prienik ľubovoľných dvoch nepatrí do vnútra žiadnej hyperkocky. Prvky tohto delenia sa nazývajú podhyperkocky.*

V druhom kroku metódy teda vytvoríme postupnosť delení pokrývacej hyperkocky. Nech i -tý člen postupnosti je K_i -delenie hyperkocky. Delenie sa musí zjemňovať, čo znamená, že

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = 0$$

. Pre i -tý prvok postupnosti vieme vypočítať počet podhyperkociek, ktoré majú so vstupnou množinou neprázdny prienik. Označíme si ho N_i . Prirodzené číslo K_i vyjadruje mieru delenia hyperkocky. Fraktálna dimenzia je rovná limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \log_{K_i} N_i$$

4.3.1 Popis implementácie

Podobný postup som využil pri implementácii metódy. Postupnosť delení hyperkocky tvorí 2-delenie, 4-delenie, atď. i -tý prvok postupnosti je 2^i -delenie hyperkocky. Pre každý prvok som vypočítal hodnotu $\log_{K_i} N_i$. Vznikla postupnosť, ktorej limita je hľadaná dimenzia.

Vzhľadom na obmedzené možnosti som metódu implementoval len pre dvojrozmernú bitmapu. Ale v prípade, že by vznikol univerzálny formát na bitmapu vyšších rozmerov, tak v programe stačí spraviť minimálne zmeny, aby fungoval aj pre ne.

Bitmapa má ale zásadnú nevýhodu. Skladá sa z pixelov, čo spôsobuje obmedzenie v dĺžke postupnosti delení. Pre väčšinu bežných bitmáp má postupnosť delení dĺžku 7-12. Posledný jeden až dva členy sú už dosť nepresné vzhľadom na fakt, že pixely sú v bitmape reprezentované štvorcami.

Pre klasické fraktály postupnosť konvergovala veľmi pomaly. Bolo potrebné z krátkej podpostupnosti odhadnúť limitu celej postupnosti. K tomuto odhadu ma inšpirovala samopodobnosťná metóda. Pri nej sa využíval koeficient podobnosti a počet zmenšení vzoru pre presné určenie dimenzie. Podobnú myšlienku som skúsil vniesť aj do tejto metódy. Pre i -tý člen postupnosti je koeficient podobnosti K_i/K_{i-1} a priemerný počet zmenšení N_i/N_{i-1} . Preto priemerný, lebo v každom boxe môže byť iný počet podboxov. Takže som vytvoril novú postupnosť hodnôt $\log K_i/K_{i-1}N_i/N_{i-1}$. Tejto postupnosti netreba hľadať limitu, lebo samopodobnosť sa vyskytuje v každom kroku približne rovnako. Každý jej člen určuje mieru samopodobnosti v danom merítku.

Dátové štruktúry

Pri implementácii som implementoval dve pomocné triedy - jednu pre bod a jednu pre hyperkocku. Bod je reprezentovaný vektorom súradníc, poskytuje mnoho pomocných funkcií. Hyperkocka je určená dvoma protilahlými rohmi.

Všetky hyperkocky, ktoré obsahujú aspoň jeden bod vstupnej množiny si pamätám v stromovej štruktúre. Vzhľadom na to, že susedné členy postupnosti sú k a $2k$ -delenia pokrývacej hyperkocky, hyperkocka v k -delení má maximálne 4 synov v $2k$ -delení.

Množina bodov je uložená v bitmape.

Časová zložitosť

Vstupom je bitmapa, ktorá obsahuje N pixelov. Treba určite zistiť pre každý pixel, či je čierny alebo biely. Takže lepšie ako $O(N)$ to nebude. V mojom programe každý pixel dávam do stromovej štruktúry, pričom pridanie trvá nanajvýš $O(\log(N))$. Následne spočítanie spomínanej postupnosti trvá oveľa menej, lebo stačí raz prejsť celou štruktúrou. Výsledná zložitosť je teda $O(N \lg N)$

Screenshot

Na obrázku 4.1 je screenshot programu, ktorý som implementoval vo Visual C++. Vpravo hore je prehľadne a stručne popísaný postup. V prvom kroku sa načíta obrázok. Potom sa nastaví parametre funkcie, ktorá rozhoduje, ktoré body patria množine a ktoré nie. Threshold je číslo medzi 0 a 255, ktoré určuje hranicu jasnosti, od ktorej je pixel považovaný za bod patriaci množine. Ak je zapnutý Inverse, v množine budú pixely svetlejšie ako threshold, inak tam budú tmavšie. Nasleduje proces binarizácie, výsledný obrázok je vidno na obrázku vľavo v strede. Kroky 2 a 3 sa môžu opakovať až kým nebude užívateľ s binarizáciou spokojný. Následne sa odmeria dimenzia. Tento proces v sebe zahŕňa vytvorenie stromovej štruktúry boxov, ktorá sa dá prehliadať vľavo dole, a vytvorenie postupnosti popísanej na strane 34. Postupnosť je znázornená vpravo dole, pričom výsledný odhad je medián štvrtého stĺpca.

| Depth | N | Dimension | Odhad |
|-------|-------|----------------|----------------|
| 1 | 4 | 2 | NaN |
| 2 | 13 | 1.850219859... | 1.700439718... |
| 3 | 40 | 1.773976031... | 1.621488376... |
| 4 | 110 | 1.695339928... | 1.459431618... |
| 5 | 281 | 1.626885264... | 1.353066606... |
| 6 | 720 | 1.581975516... | 1.357426776... |
| 7 | 1959 | 1.562271668... | 1.444048585... |
| 8 | 5558 | 1.555043764... | 1.504448436... |
| 9 | 17317 | 1.564433488... | 1.639551279... |
| 10 | 41170 | 1.532930582... | 1.24940442968 |

Obr. 4.1: Screenshot programu na odhad Minkowskeho dimenzie.

Optimalizácie

V prvom kroku je užitočné zvoliť pokrývajúcu hyperkocku čo najmenšiu, aby sa dali zachytiť detaily už v malej hĺbke.

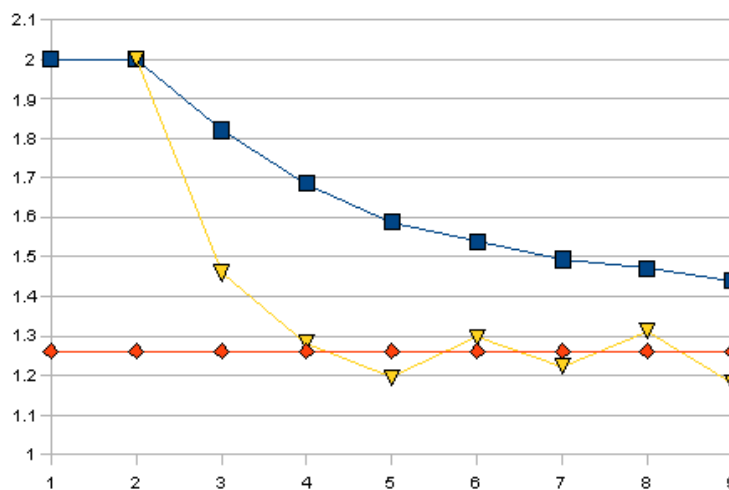
Odchýlky merania

Snažil som sa upraviť implementáciu, aby boli odchýlky minimálne. Najväčšie nepresnosti nastávajú:

- na začiatku postupnosti, lebo hyperkocky sú ešte veľmi veľké, aby mohli aproximovať samopodobný vzor
- na konci postupnosti, lebo tu má väčšiu váhu vlastnosť bodov v bit-mape, že sú reprezentované štvorcami

Ako pomerne presné číslo sa ukázal medián tejto postupnosti.

Na obrázku 4.2 je štvorcami znázornená postupnosť $\log_{K_i} N_i$, ktorá konverguje k očakávanej hodnote fraktálnej dimenzie Kochovej vložky 1.262, ktorá je znázornená kosoštvorcami. Trojuholníkmi je zobrazená postupnosť odhadov $\log K_i / K_{i-1} N_i / N_{i-1}$, ktorej medián je výstupom programu. V prípade Kochovej vložky je odchýlka 1.6%. Vo všeobecnosti pre známe fraktály dosahoval program presnosť s odchýlkou do 4%.



Obr. 4.2: Graf znázorňujúci postup merania dimenzie Kochovej vložky.

Kapitola 5

Využitie fraktálnej dimenzie

Meranie fraktálnej dimenzie nám dáva možnosť priradiť danému objektu číslo. Objekty sa dajú podľa neho potom usporiadať. Toto meranie nám teda poskytuje isté automatické hodnotenie, ktoré sa môže uplatniť v rôznych vedných odboroch.

Takisto sa skúmajú rôzne závislosti iných vlastností objektu od jeho fraktálnej dimenzie. V tomto prípade nám meranie fraktálnej dimenzie umožňuje zistiť vlastnosti objektu po odmeraní jeho fraktálnej dimenzie.

5.1 Počítačová grafika

Fraktály v počítačovej grafike sa vyskytujú pomerne často - či už v počítačových hrách alebo grafických vizualizáciach. Ide tu o fraktálnu kompresiu. Trojrozmerná grafika pozostáva z modelov. Modely sa skladajú z vrcholov, ktoré sú pospájané hranami. Hrany uzatvárajú súvislé plochy, ktoré sa nazývajú textúry. Jednoduchá grafika možno vystačí s textúrami zafarbenými jednou farbou, ale v záujme šetrenia počtu bodov, hrán a textúr je výhodnejšie používať väčšie textúry, ktoré nie sú zafarbené jednou farbou, ale je na nich zobrazený určitý obrázok. A tu nastáva ten problém, v akej kvalite má byť ten obrázok. Budeme sa naňho pozeráť len z diaľky, alebo si ho chceme približovať a vidieť aj detaily? Pri druhej možnosti máme niekoľko možností, čo potrebujeme pre zobrazenie textúry.

1. Budeme si pamätať obrázok pre textúru v najvyššej kvalite, aby sme si ho mohli priblížiť a vidieť detaily. Nevýhodou tejto metódy je vysoká pamäťová náročnosť - už pri zobrazení z diaľky musíme načítať veľa

údajov. A pri tomto zobrazení z diaľky chceme vidieť aj širšie okolie, preto je toto riešenie v praxi neúnosné.

2. Máme k dispozícii niekoľko verzií pre jeden obrázok - každá v inej kvalite. Keď sa priblížime k textúre, tak načítame príslušnú verziu, aby sme videli do detailov len to, čo chceme a pri pohľade z diaľky nemuseli zbytočne načítavať prílišné podrobnosti, ktoré si aj tak nevšimneme. Táto technika sa volá VRML, a používa sa (asi) dosť často.
3. V niektorých prípadoch je možné druhú možnosť trochu vylepšiť. Pri textúrach z prírody môžeme daný objekt aproximovať na fraktál. Príkladom môže byť papradie, stromy, hlina, pohoria, oblaky, vodná hladina... drvivá väčšina textúr z počítačových hier. Po aproximácii na matematický fraktál vieme presne popísať, ako sa textúra generuje. Takže si stačí pamätať tento predpis a podľa požadovanej presnosti ho len vygenerovať rekurzívne do určitej hĺbky.

5.2 Medicína

V medicíne sa fraktály vyskytujú tiež pomerne často. Mnohé vnútornosti potrebujú mať čo najväčší povrch, ale majú obmedzený priestor - potrebujú sa zmestiť do organizmu. Príkladmi sú pľúca, mozog. Naskytá sa otázka, či je nejaká súvislosť medzi fraktálnou dimenziou povrchu mozgu a inteligenciou človeka. Športová zdatnosť človeka by sa dala odhadnúť/merať podľa fraktálnej dimenzie ciev - čím viac je rozvetvený cievny systém, tým lepšie prekrvené sú jednotlivé bunky a lepšie sa okysličujú. Podobne cievny systém v mozgu s väčšou fraktálnou dimenziou lepšie okysličuje mozgové bunky, čo podporuje mozgovú aktivitu. Lepší zrak by sa dal dosiahnuť zvýšením fraktálnej dimenzie cievneho systému v oku. Rôzne využitia fraktálov v psychológii (sny, reč, správanie) uvádza [Psyche]. Vrásky starších ľudí majú zrejme vyššiu fraktálnu dimenziu. Vek človeka by sa teda mohol dať odhadnúť podľa fraktálnej dimenzie vrások, alebo dokonca celej tváre. Divokosť účesu sa dá hodnotiť podľa fraktálnej dimenzie vlasov.

5.3 Meteorológia a astronómia

[SIPS] uvádza, že existuje závislosť medzi vzdialenosťou elektród iskrišťa a fraktálnou dimenziou výbojov. Vo veľkom merítku to potom platí aj pre blesky. Podľa fraktálnej dimenzie blesku sa dá teda odhadnúť vzdialenosť zeme a elektródy, ktorá sa nachádza v oblaku.

Galaxie sa zhlukujú so samopodobnosťou a ich fraktálna dimenzia sa možno odráža v životnosti galaxie.

5.4 Hudba

Pravidelnosť v hudbe a pravidelnosť vo fraktáloch majú veľa spoločného. Samopodobnosť vo svojej tvorbe podľa [Emu] využíval aj J.S.Bach.

[Perrin] popisuje výsledky skúmania fraktálnej dimenzie hudby. Šum má dimenziu 2, samotný tón má dimenziu 1. Väčšina hudby má dimenziu približne 1.65. Najvyššiu dimenziu má jazz, ktorý dosahuje hodnoty aj viac ako 1.69.

5.5 Energetika

Uhlie má v energetike úlohu produkcie tepla. Výhrevnosť závisí od povrchu uhlia. Ale keďže máme obmedzené zásoby uhlia, treba ním šetriť. Chceme teda, aby malo uhlie čo najväčší povrch v porovnaní s objemom. Povrch sa dá zväčšiť napríklad rozdrobením na menšie kúsky. Podľa výskumov [ActaMS] sa viac oplatí drvenie uhlia ako mletie, lebo vtedy je vyššia fraktálna dimenzia povrchu, čo implikuje aj väčší povrch. Keby to bol presný fraktál, povrch by bol nekonečný v oboch prípadoch.

5.6 Elektrotechnika

Kapacita kondenzátora závisí od styčnej plochy. A keď chceme vyrábať čo najmenšie kondenzátory s čo najväčšou kapacitou, je podľa [Masek] vhodné zvoliť fraktálny tvar, aby bol potenciálny povrch nekonečný. Samozrejme s obmedzeným počtom iterácií, takže konečným, ale veľmi veľkým povrchom.

Záver

Fraktály sú pre ľudí často len pekné obrázky, ale ich podstata sa vyskytuje a využíva vo viacerých oblastiach. Meranie fraktálnej dimenzie nám čoskoro možno poradiť, ako vytvárať veci, ktoré budú pre ľudí príjemnejšie.

Možnosti, ako využiť fraktálnu dimenziu z piatej kapitoly sa dajú uplatniť v spomenutých vedných odboroch a jednotlivé možnosti by mali byť preskúmané.

Dimenziu som definoval pre množinu. Ale zaujímavé sú aj multifraktály, ktorým sa určuje bodová dimenzia pre každý prvok množiny. Dajú sa tak odhaliť jednotlivé oblasti s vyššou dimenziou.

Ďalší smer výskumu by mohlo byť aj skúšanie rôznych interpretácií L-systémov. V tejto práci som uvažoval len o interpretácii pomocou korytnačej grafiky.

Definícia samopodobnostnej dimenzie je obmedzujúca, nezahrňa všetky klasické fraktály. Možno by sa dala trochu vylepšiť, ak by sa dala definovať pre IFS so zobrazeniami s rôznymi koeficientami podobnosti.

Literatúra

- [Emu] Gustavo Diaz-Jerez. "Fractals and Music". Electronic musician. 31.1.2009 <http://emusician.com/mag/emusic`fractals`music>
- [ChAF] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe. "Chaos and fractals". Springer. 2004. str. 104-109
- [CFDE] Przytycki F., Urbanski M. "Conformal Fractals, Dimension and Ergodic Theory". CUP. 2000. str. 151-169
- [Slider] "Hausdorff dimension". Slider Encyclopedia. 11.5.2009 <http://enc.slider.com/Enc/Capacity`dimension>
- [MTA] Harte D. "Multifractals. Theory and Applications". CRC. 2001
- [DSFP] Becker, Doerfler. "Dynamical systems and fractals in Pascal". CUP. 1990
- [JFLAP] Susan H. Rodger, Thomas W. Finley. "JFLAP-an interactive formal languages and automata package". Jones & Bartlett Publishers. 2006
- [LSys] Grzegorz Rozenberg, Arto Salomaa. "The mathematical theory of L systems". Academic Press. 1980. ISBN 0125971400, 9780125971409
- [FGGeom] Falconer K. "Fractal geometry.. mathematical foundations and applications". 2. edition. Wiley, 2003
- [HKoch] H. von Koch. "On a continuous curve without tangents constructible from elementary geometry", Classics on fractals (G. Edgar, ed.). Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. 1993. str. 25-45.
- [BarnFE] Barnsley M. "Fractals everywhere". AP. 1988.





- [ODE] Tucker, W. "A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem". Found. Comp. 2002. str. 53–117 <http://www.math.uu.se/~warwick/main/rodes.html>
- [answers.com] Answers.com. <http://www.answers.com/topic/fractal>
- [thefreedictionary.com] The Free Online Dictionary, Thesaurus and Encyclopedia. <http://www.thefreedictionary.com/fractal>
- [Stoyan] Stoyan D., Stoyan H. Fractals, random shapes and point fields. Wiley. 1994.
- [CG1] Roman Ďurikovič PhD. "Fraktály". Počítačová grafika 1. FMFI UK. 14.2.2005 <http://www.sccg.sk/~durikovic/classes/CG2/Handouts/CG11Fraktaly.doc>
- [Psyche] Terry Marks-Tarlow. "Fractal Dynamics of the Psyche". Dynamical Psychology. 2002. <http://www.goertzel.org/dynapsyc/2002/FractalPsyche.htm>
- [DisF] J. P. Louvet. "The discovery of fractals". 2003. <http://fractals.iut.u-bordeaux1.fr/jpl/history.html>
- [MES] Kolektiv autorů Encyklopedického institutu Československé akademie věd. "Malý encyklopedický slovník A-Ž". Academia. Praha. 1972.
- [ETop] O.Y.Viro, O.A.Ivanov, V.M.Kharlamov, N.Y.Netsvetaev. "Elementary Topology. Textbook in Problems".
- [AMSpaces] Togo Nishiura. "Absolute measurable spaces". Appendix D. "Dimensions and measures". Cambridge University Press, 2008.
- [MIT] Alan Dunn. "Fractals and Dimension". Introduction to Dynamical systems. Lecture notes. MIT. 2005.
- [Yang] Jianke Yang. "Math notes". Tsinghua University. 2003. <http://www.cems.uvm.edu/~jyang/teaching/Math266notes1.pdf>
- [MRem] Mariana Remešíková. "Fraktály". Prednáška z počítačovej grafiky. STU. 4.5.2009. (Total editing time: 139h)<http://www.math.sk/remesik/lessonsPG/lesson10.ppt>

- [ActaMS] Annamária Mockovčiaková, Ludmila Turčániová, Eva Boldižárová, Viera Miklušová. "Fraktálna charakteristika povrchu uhlia". Acta Montanistica Slovaca. Ročník 3. 1998. 3. 356-358 <http://actamont.tuke.sk/pdf/1998/n3/29mockovciakova.pdf>
- [GAE] Gerald A. Edgar "Measure, Topology, and Fractal Geometry"
- [Perrin] Perrin S. Meyer. "The Fractal Dimension Of Music". Department of Applied Physics. Columbia University, New York. <http://phe.rockefeller.edu/perrin/fractaldimension.pdf>
- [SIPS] Daniel Szabó, Michal Fedor. "Fraktálna dimenzia elektrického iskrového výboja". SIPS VEDECKÝ INKUBÁTOR PRE ŽIAKOV A ŠTUDENTOV. 19.11.2007. <http://147.213.192.176:8080/MZ`Project/html/Prezentacie19nov2007/elek`vyboj/fraktaly.pdf>
- [Masek] Martin Mašek "Fraktálové kapacitory" Bakalárska práca. České vysoké učení technické v Praze. Fakulta Elektrotechnická. 2008. <http://www.ieee.cz/mtt/soutez08/Masek.pdf>

Anketa

Urobil som anketu, kde ľudia hlasovali za najkrajší obrázok blesku. Na výber boli štyri možnosti. Zúčastnilo sa 43 ľudí, zväčša vysokoškoláci. Každý označil jeden blesk, ktorý bol podľa nej najkrajší. Anketu som zverejnil na stránke facebook.com, čo bolo dôvodom vysokej účasti v ankete.

Výsledky sú v tabuľke 1. Jednoznačne je vidieť závislosť počtu hlasov od fraktálnej dimenzie. Skutočnosť, že za tretí blesk hlasovalo menej ľudí ako za druhý blesk, hoci tretí má vyššiu fraktálnu dimenziu, si vysvetľujem tým, že tretí blesk vyzerá príliš umelo. Ľuďom sa páčia viac prirodzené blesky, ktoré sú na prvých dvoch obrázkoch. Štvrtý blesk pohorel na celej čiare, aj keď je to retazový blesk. Avšak je málo rozvetvený, teda má nízku dimenziu a ľuďom sa nepáčil.

| | | | | |
|----------|---|---|--|---|
| |  |  |  |  |
| Hlasy | 16 | 14 | 11 | 2 |
| Dimenzia | 1.4891 | 1.4101 | 1.4428 | 1.3945 |

Tabuľka 1: Výsledky ankety o najkrajší blesk.

Porovnanie dimenzií

Hodnoty fraktálnej dimenzie sú priemerom hodnôt množstva zdrojov, ktoré nebudem uvádzať.

| | |
|--------------------------|-------|
| Pobrežie Veľkej Británie | 1.25 |
| Delta rieky Selenga | 1.38 |
| Pobrežie Nórska | 1.52 |
| Bežná hudba | 1.65 |
| Jazzová hudba | 1.69 |
| Delta rieky Volga | 1.72 |
| Papradie | 1.826 |
| Karfiol | 2.33 |
| Zhúžvaný papier | 2.5 |
| Brokolica | 2.66 |
| Biely chlieb | 2.69 |
| Povrch mozgu | 2.79 |
| Bežná špongia | 2.948 |
| Povrch pľúc | 2.97 |

Tabuľka 2: Porovnanie dimenzií prírodných javov.

| | |
|------------------------------------|-------|
| Feigenbaumov diagram | 0.538 |
| Cantorova množina | 0.621 |
| Reálne čísla len s párnymi ciframi | 0.699 |
| Gosperov ostrov | 1.069 |
| Kochova vložka | 1.262 |
| Cantorov prach 2D | 1.262 |
| Vicsekova vložka | 1.465 |
| Minkovskeho klobása | 1.5 |
| Hranica dračej krivky | 1.524 |
| Sierpinskeho trojuholník | 1.585 |
| Sierpinskeho koberec | 1.893 |
| Cantorov prach 3D | 1.893 |
| Hranica Lévyho C krivky | 1.934 |
| Okraj Mandelbrotovej množiny | 2.0 |
| Peanova krivka | 2.0 |
| Hilbertova krivka | 2.0 |
| Moorova krivka | 2.0 |
| Dračia krivka | 2.0 |
| Sierpinskeho ihlan | 2.0 |
| Lorenzov atraktor | 2.06 |
| Grécky kríž 3D | 2.585 |
| Mengerova špongia | 2.727 |

Tabuľka 3: Porovnanie dimenzií známych fraktálov.

Register

- abeceda, 2
- aproximácia krivky úsečkami, 33
- atraktor dynamického systému, 11
- axióma, 3

- bijekcia, 23
- bod, 22
- Brouwer, 23

- Cantor, 23
- Cantorova množina, 4, 12
- Cantorovo zobrazenie, 13

- delenie hyperkocky, 34
- dimenzia
 - Hausdorffova, 30
 - induktívna, 23
 - vnútorná, 23
 - vonkajšia, 24
 - Minkowskeho, 29
 - pokrývacia, 24
 - samopodobnostná, 27
 - topologická, 21–25
 - nestačí, 26
- dynamické systémy, 11–16
- dynamický systém, 11
 - deterministický, 11
 - diskrétny, 11
 - nedeterministický, 11
 - spojitý, 11
- Edward Lorenz, 16

- ε , 3

- Feigenbaumova konštanta, 15, 16
- fraktál
 - definícia, 18
- fraktálna dimenzia, 27–30

- Hanoiské veže, 8
- Hausdorffova dimenzia, 30
- Helge van Koch, 5
- Hilbert, 23
- hyperkocka, 29

- IFS, 12
- injekcia, 22
- iterované funkčné systémy, 12

- jazyk, 3
 - generovaný L-systémom, 3
- Johann Benedict Listing, 21
- Juliova množina, 16

- Kochova krivka, 5
- kompasová metóda, 33
- korytnačia grafika, 4
- krivka
 - vyplňajúca priestor, 23
- krok odvodenia, 3

- L-systémy, 2–10
 - kontextové, 3
 - stochastické, 3

- Leonhard Euler, 21
- logistické zobrazenie, 14
- Lorenzov atraktor, 16
- Lorenzov systém, 15

- Mandelbrot, 19
- Mandelbrotova množina, 16
- Mengerova špongia, 9
- metóda
 - kompasová, 33
- metóda počítania boxov, 34
- metrický priestor, 10
- metrika, 11
- miera, 26
 - Hausdorffova, 30
- množina, 21
 - Cantorova, 4, 12
 - Juliova, 16
 - Mandelbrotova, 16
 - ohraničená, 26
 - otvorená, 22
 - samopodobná, 27
 - uzavretá, 22

- otvorený problém, 23

- papradie, 39
- Pascalov trojuholník, 8
- Peano, 23
- pevný bod, 11
 - nestabilný, 12
 - stabilný, 11
- podhyperkocka, 34
- podслово, 3
- Poincaré, 24
- pokrytie
 - otvorené, 24
 - priestoru
 - topologického, 24

- prepisovacie pravidlá, 3
- priestor
 - spočítateľnorozmerný, 23

- rád
 - bod, 24
 - pokrytia, 24
- reflexívno-tranzitívny uzáver, 3

- samopodobnosť, 18
 - štatistická, 18
 - striktná, 18
- Sierpinskeho ihlan, 9
- Sierpinskeho koberec, 8, 13
- Sierpinskeho trojuholník, 28
- Σ , 2
- slovo, 2
 - prázdne, 2
- stavový priestor, 8

- textúra, 38
- topológia, 22
 - kanonická, 22
 - na priamke, 22
- topologická dimenzia, 21, 25
- topologický priestor, 22
- trajektória bodu, 11

- VRML, 39

- Wac law Sierpinski, 6
- Warwick Tucker, 16
- web diagram, 14

- zjemnenie, 24
- zobrazenie
 - Cantorovo, 13
 - logistické, 14
 - spojité, 22, 23
- zretazenie, 3