UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

e95af67a-cff8-4a73-b870-3d5f966622d0

# Rovnomerné využívanie prechodov v konečných automatoch

2011

Peter Kostolányi

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# Rovnomerné využívanie prechodov v konečných automatoch

Bakalárska práca

**Študijný program:** Informatika

**Študijný odbor:** 9.2.1. Informatika

**Školiace pracovisko:** Katedra informatiky

**Školiteľ:** prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.

**Bratislava, 2011**

**Peter Kostolányi**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Peter Kostolányi
**Študijný program:** informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
**Študijný odbor:** 9.2.1. informatika
**Typ záverečnej práce:** bakalárska
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Rovnomerné využívanie prechodov v konečných automatoch

**Cieľ:** V nadväznosti na diplomovú prácu Ivana Kováča "Equiloaded automata" o rovnomernom využívaní stavov v konečných automatoch definovať a preštudovať analogické triedy automatov a jazykov s rovnomerným využívaním prechodov - prísne prechodovo vyvážené a prechodovo vyvážené automaty a jazyky. Formálne definovať mieru prechodovej vyváženosti automatu a ukázať spôsob jej výpočtu. Dokázať uzáverové vlastnosti definovaných tried jazykov.

**Vedúci:** prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.

**Dátum zadania:** 27.10.2010

**Dátum schválenia:** 27.10.2010

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

študent

vedúci

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# Poďakovanie

Ďakujem môjmu školiteľovi, pánovi profesorovi Branislavovi Rovanovi, za výber zaujímavej témy, za uvedenie do problematiky, ako aj za cenné rady a postrehy pri písaní práce.

Veľmi oceňujem jeho ochotu venovať mi časť svojho drahocenného času kedykoľvek to bolo potrebné.

# Abstrakt

| | |
|---|---|
| Autor: | Peter Kostolányi |
| Názov práce: | Rovnomerné využívanie prechodov v konečných automatoch |
| Univerzita: | Univerzita Komenského v Bratislave |
| Fakulta: | Fakulta matematiky, fyziky a informatiky |
| Katedra: | Katedra informatiky |
| Vedúci práce: | prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD. |
| Rozsah: | 65 strán |

Výskum rovnomerne zaťažených výpočtových modelov je inšpirovaný predovšetkým oblasťou vývoja počítačového hardvéru, kde rovnomerné využívanie častí daného hardvérového systému môže mať viacero pozitívnych dôsledkov pre jeho činnosť. Teoretické štúdium vyvážených výpočtových modelov môže prispieť k pochopeniu otázky, ktoré výpočtové problémy možno riešiť s rovnomerným využívaním prostriedkov. Prvé výsledky v tejto oblasti predstavujú práce Ivana Kováča [9] a [10] o rovnomernom využívaní *stavov* v konečných automatoch.

Práca definuje a opisuje rôzne triedy deterministických konečných automatov s rovnomerným využívaním *prechodov* a triedy jazykov takýmito automatmi akceptované. Definované triedy automatov sa líšia v sile požiadavky kladenej na rovnomernosť využívania prechodov. Najsilnejšia je definícia *prísne prechodovo vyváženého* automatu, pri ktorej sa počas výpočtu na každom slove využívajú všetky prechody približne rovnako veľa ráz. Ďalšou definovanou triedou sú *prechodovo vyvážené* automaty. Prechody takýchto automatov sa využívajú približne rovnako veľa ráz na všetkých slovách určitej dĺžky dohromady. Najslabšia je definícia *slabo prechodovo vyváženého* automatu, ktorá rozširuje okruh prechodovo vyvážených automatov na dobre opísateľnú triedu.

Práca definuje a skúma uvedené triedy automatov a triedy nimi akceptovaných jazykov s ambíciou ich čo najlepšie opísať. Pre každú z definovaných tried vyvážených jazykov sú dokázané ich uzáverové vlastnosti a v závere práce sa predkladajú tvrdenia o vzájomných vzťahoch týchto tried, ako aj o ich vzťahoch k triedam stavovo vyvážených jazykov definovaným v prácach [9] a [10].

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: deterministický konečný automat, prechodová vyváženosť, prechodovo vyvážený automat, prísne prechodovo vyvážený automat, slabo prechodovo vyvážený automat, rovnomerné využívanie prostriedkov.

# Abstract



| | |
|---|---|
| Author: | Peter Kostolányi |
| Title: | Balanced use of transitions in finite automata<br>(Rovnomerné využívanie prechodov v konečných automatoch) |
| University: | Comenius University in Bratislava |
| Faculty: | Faculty of Mathematics, Physics and Informatics |
| Department: | Department of Computer Science |
| Supervisor: | prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD. |
| Number of Pages: | 65 |




Research concerned with equiloaded models of computation is motivated particulary by the field of computer hardware development, where balanced use of certain hardware system parts may have several positive consequences for it's performance. Theoretical investigation of the balanced models of computation might contribute to understanding which computational problems could be solved with the balanced use of resources. First results in this area are represented by works of Ivan Kováč [9] and [10] on balanced use of *states* in finite automata.

In the thesis, several classes of deterministic finite automata with balanced use of *transitions* are defined and analyzed, so are the classes of languages accepted by such automata. Classes of automata defined in the thesis differ in the strength of requirements and restrictions imposed on their equiloadedness. The most restrictive is the definition of *strictly transitionally equiloaded* automata, where each transition is used approximately the same number of times during the computation on every accepted word. Next defined class consists of *transitionally equiloaded* automata. In these automata, transitions are used approximately evenly on finite languages composed of accepted words of specified length. The least restrictive is the definition of *weakly transitionally equiloaded* automata which broadens a range of transitionally equiloaded automata to a well-describable class.

Thesis defines and analyzes the above-mentioned classes of automata and corresponding classes of languages with the ambition to characterize them as best as possible. For each of the defined classes, the proof of standard closure properties is included. Theorems on mutual relations between the defined classes and theorems on their relations to the classes of automata equiloaded on states defined in [9] and [10], are presented in the final chapter.



KEYWORDS: deterministic finite automaton, transitional equiloadedness, transitionally equiloaded automaton, strictly transitionally equiloaded automaton, weakly transitionally equiloaded automaton, balanced use of resources.

# Obsah


**Poďakovanie** **ix**

**Abstrakt** **xi**

**Abstract** **xiii**

**Obsah** **xv**

**Úvod** **1**

**1 Základné pojmy a definície** **3**
- 1.1 Deterministické konečné automaty . . . 3
- 1.2 Myhillova-Nerodova veta a minimálny automat . . . 4
- 1.3 Grafová reprezentácia DKA . . . 5
- 1.4 Prechodová matica automatu . . . 6
- 1.5 Stavovo vyvážené automaty . . . 7

**2 Prísne vyvážené automaty** **9**
- 2.1 Definícia prísnej prechodovej vyváženosti . . . 9
- 2.2 Charakterizácia triedy $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ . . . 11
- 2.3 Uzáverové vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ . . . 13

**3 Vyvážené automaty** **17**
- 3.1 Definície prechodovej vyváženosti . . . 17
- 3.2 Výpočet miery vyváženosti pomocou rekurentných vzťahov . . . 21
- 3.3 Charakterizácia triedy $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ . . . 30
- 3.4 Uzáverové vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ . . . 33
- 3.5 Perronova-Frobeniova veta . . . 36
- 3.6 Analytické vlastnosti $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ . . . 38
- 3.7 O limitách postupností kvocientov vyváženosti . . . 45
- 3.8 Asymptotická formulácia definícií prechodovej vyváženosti . . . 46
- 3.9 Alternatívna definícia triedy $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ . . . 50
- 3.10 Základné vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ . . . 51
- 3.11 Uzáverové vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ . . . 52

**4 Triedy vyvážených jazykov** **55**
- 4.1 Hierarchia tried vyvážených jazykov . . . 55
- 4.2 Súvis so stavovou vyváženosťou . . . 58

**Záver** **63**

**Literatúra** **65**

# Úvod

Predkladaná práca definuje a skúma triedy deterministických konečných automatov, ktorých využívanie prechodov počas výpočtov na akceptovaných slovách možno považovať za rovnomerné. Teoretický výskum vyvážených automatov je inšpirovaný oblasťou vývoja a optimalizácie počítačového hardvéru. Rovnomerné využívanie rôznych častí hardvérového systému totiž môže za určitých okolností mať viacero pozitívnych dôsledkov pre jeho činnosť.

Je teda zmysluplné pýtať sa, ktoré výpočtové problémy možno riešiť s rovnomerným využívaním prostriedkov, a ktoré takto riešiť nemožno. Odpoveď na takúto otázku môže poskytnúť štúdium výpočtových modelov, ktoré rovnomerné využívanie prostriedkov formalizujú. Prvé výsledky v oblasti štúdia rovnomerne zaťažených výpočtových modelov boli uverejnené v prácach [9] a [10], ktoré sa zaoberajú rovnomerným využívaním *stavov* v deterministických konečných automatoch.

Predkladaná práca v štúdiu vyvážených výpočtových modelov pokračuje, pričom sa venuje rovnomernému využívaniu *prechodov* v deterministických konečných automatoch. Deterministický konečný automat bol vybraný ako vhodný výpočtový model najmä z dôvodu jeho relatívnej jednoduchosti a z dôvodu potenciálnej možnosti rozšíriť získané poznatky na zložitejšie výpočtové modely.

Cieľom práce je definovať a preštudovať rôzne triedy automatov a jazykov s rovnomerným využívaním prechodov a preskúmať ich vlastnosti. V práci budú definované tri hlavné triedy takýchto automatov a jazykov – *prísne prechodovo vyvážené* automaty a jazyky, *prechodovo vyvážené* automaty a jazyky a *slabo prechodovo vyvážené* automaty a jazyky.

*Prvá kapitola* obsahuje definíciu deterministického konečného automatu používanú v tejto práci, ako aj príbuzné definície v teórii automatov. Na základe Myhillovej-Nerodovej vety je definovaný koncept minimálneho automatu, ďalej sú v prvej kapitole uvedené definície grafovej reprezentácie konečného automatu a jeho prechodovej matice. V závere prvej kapitoly sú podané definície stavovo vyvážených automatov, podľa [9].

*Druhá kapitola* sa zaoberá *prísne prechodovo vyváženými automatmi*, definovanými ako automaty využívajúce svoje prechody na každom slove akceptovaného jazyka približne rovnomerne. Nasleduje kompletná charakterizácia tejto triedy automatov, ako aj triedy jazykov takýmito automatmi akceptovaných. V kapitole sú pre túto triedu jazykov dokázané aj štandardné uzáverové vlastnosti.

*Tretia kapitola* definuje *prechodovo vyvážené automaty* a *slabo prechodovo vyvážené automaty*, ktoré sú nadtriedou prechodovo vyvážených. Definícia takýchto automatov využíva koncept *miery vyváženosti*, pre ktorú je uvedený spôsob jej matematického výpočtu. Nasledujú charakterizácia triedy slabo prechodovo vyvážených automatov a uzáverové vlastnosti slabo prechodovo vyvážených jazykov. Na základe analytických vlastností veličín použitých v definícii miery vyváženosti sú dokázané rôzne vlastnosti triedy prechodovo vyvážených automatov. Pre triedu prechodovo vyvážených jazykov sú tiež dokázané uzáverové vlastnosti.

*Štvrtá kapitola* obsahuje dôkazy viet o vzťahoch medzi jednotlivými triedami prechodovo vyvážených jazykov, ako aj medzi prechodovo a stavovo vyváženými jazykmi.

# Kapitola 1

# Základné pojmy a definície

Táto kapitola obsahuje vybrané definície a známe tvrdenia z oblastí teórie automatov a teórie grafov, ktoré sa budú používať v neskorších kapitolách práce.

## 1.1 Deterministické konečné automaty

V tejto časti bude definovaný deterministický konečný automat, ktorý je ústredným pojmom práce. Uvedená bude verzia výpočtového modelu s možnosťou nedočítania vstupného slova, ktorá je ekvivalentná s častejšie uvádzanou definíciou s povinnosťou jeho dočítania. Definícia používaná v tejto práci je však v kontexte skúmania rovnomerného využívania prechodov vhodnejšia.

**Definícia 1.1.1** *Deterministický konečný automat* $A$ je usporiadaná pätica $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K$ je neprázdna konečná množina stavov, $\Sigma$ je neprázdna konečná abeceda, $\delta : K \times \Sigma \to K$ je čiastočná prechodová funkcia, $q_0 \in K$ je počiatočný stav a $F \subseteq K$ je množina akceptačných stavov.

**Označenie 1.1.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Symbolom $D_A$ označíme množinu

$$D_A := \{(q, c, q') \in K \times \Sigma \times K \mid \delta(q, c) = q'\}.$$

Prvky množiny $D_A$ budeme nazývať *prechody* automatu $A$. V prípade, že nebude hroziť omyl, budeme namiesto $D_A$ písať len $D$.

Uvedená definícia umožňuje automatu nedočítať vstupné slovo, keďže prechod môže byť pre danú dvojicu $(q, c) \in K \times \Sigma$ aj nedefinovaný. Na sile modelu to ale oproti definícii s dočítaním vstupného slova, uvedenej napríklad v [14], nemení nič. Zrejme každý automat s dočítaním vstupného slova uvedenej definícii vyhovuje. Naopak, možnosť nedočítať vstupné slovo sa dá simulovať pridaním nového stavu.

Definícia s možnosťou nedočítania vstupného slova je však pre účely skúmania rovnomerného zaťaženia vhodnejšia. Verzia s dočítaním vstupného slova totiž núti pre slová, ktoré nemožno doplniť na žiadne slovo z akceptovaného jazyka, vytvoriť „odpadový stav" (prípadne množinu stavov), do ktorého možno počas výpočtu „prísť," ale nemožno z neho „odísť." To znamená, že prechody vedúce do takéhoto stavu (prípadne množiny stavov) možno počas výpočtu na ľubovoľnom slove použiť maximálne raz. Je zrejmé, že nech bude definícia prechodovej vyváženosti zvolená akýmkoľvek rozumným spôsobom, nemožno takýto automat, v prípade, že akceptuje nekonečný jazyk, považovať za prechodovo vyvážený. Povinnosť dočítania vstupného slova by teda výrazne skresľovala intuitívne chápanie rovnomerného využívania prechodov.

**Definícia 1.1.2** *Konfigurácia* deterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je usporiadaná dvojica $(q, w) \in K \times \Sigma^*$, kde $q$ je aktuálny stav a $w$ je nedočítaná časť vstupného slova.

**Definícia 1.1.3** *Krok výpočtu* deterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je relácia $\vdash_A$ na konfiguráciach automatu $A$ definovaná nasledovne:

$$(p, cw) \vdash_A (q, w) \iff \delta(p, c) = q, \qquad p, q \in K, c \in \Sigma, w \in \Sigma^*.$$

V prípade, že nebude hroziť omyl, budeme namiesto $\vdash_A$ písať len $\vdash$.

**Označenie 1.1.2** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Symbolom $\vdash_A^*$ označíme reflexívno-tranzitívny uzáver relácie $\vdash_A$. Platí teda

$$(p, c_1c_2 \dots c_kw) \vdash_A^* (q, w) \iff \exists q_1, \dots, q_{k+1} \in K, q_1 = p, q_{k+1} = q : \bigwedge_{i=1}^{k} \delta(q_i, c_i) = q_{i+1},$$

kde $k \geq 0$, $p, q \in K, c_1, \dots, c_k \in \Sigma$ a $w \in \Sigma^*$.

Relácia kroku výpočtu $\vdash_A$ znamená, že z prvej konfigurácie je možné prejsť do druhej konfigurácie s použitím práve jedného prechodu. Relácia $\vdash_A^*$ znamená, že z prvej konfigurácie je možné prejsť do druhej konfigurácie na nejaký bližšie neurčený počet prechodov, ktorý môže byť aj nulový.

**Definícia 1.1.4** *Jazyk* akceptovaný deterministickým konečným automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je množina

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : (q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)\}.$$

**Definícia 1.1.5** Jazyk $L$, pre ktorý existuje deterministický konečný automat $A$ taký, že $L(A) = L$, nazývame *regulárny*. Triedu všetkých regulárnych jazykov označíme $\mathscr{R}$.

## 1.2 Myhillova-Nerodova veta a minimálny automat

V tejto časti bude sformulovaná Myhillova-Nerodova veta [12], na základe ktorej bude definovaný pojem minimálneho automatu, teda automatu s najmenším počtom stavov, ktorý akceptuje daný jazyk.

Minimálne automaty budú v tejto práci zohrávať dôležitú úlohu predovšetkým pri dokazovaní, že jazyk nepatrí do triedy slabo prechodovo vyvážených jazykov (definovanej v časti 3.1). Bude totiž dokázané, že pre každý slabo prechodovo vyvážený jazyk má minimálny automat, ktorý ho akceptuje, určitú vlastnosť. V prípade, že minimálny automat túto vlastnosť nemá, nemôže byť jazyk, ktorý akceptuje, slabo prechodovo vyvážený.

**Definícia 1.2.1** Binárna relácia $R$ na množine $\Sigma^*$ sa nazýva *sprava invariantná* práve vtedy, keď pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ platí

$$uRv \Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : uxRvx.$$

**Definícia 1.2.2** Nech $R$ je relácia ekvivalencie. *Index* relácie $R$ je počet jej tried ekvivalencie. Ak je index relácie $R$ konečný, hovoríme, že $R$ je relácia ekvivalencie *konečného indexu*.

**Veta 1.2.1 (Myhill, Nerode [12])** Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

$(i)$ $L$ je regulárny jazyk.

$(ii)$ $L$ je zjednotenie niekoľkých tried ekvivalencie niektorej sprava invariantnej relácie ekvivalencie konečného indexu.

$(iii)$ Relácia $R_L$ na $\Sigma^*$ definovaná ako

$$uR_Lv \iff \forall x \in \Sigma^* : (ux \in L \iff vx \in L)$$

je relácia ekvivalencie konečného indexu.

Relácia $R_L$ z bodu $(iii)$ sa nazýva Myhillova-Nerodova relácia pre jazyk $L$.

**Definícia 1.2.3** Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je regulárny jazyk. Automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sa nazýva *minimálny automat* akceptujúci jazyk $L$, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

$(i)$ $L(A) = L$.

$(ii)$ Pre všetky slová $u, v \in \Sigma^*$, všetky stavy $p, q \in K$ a všetky triedy ekvivalencie $T_1, T_2$ Myhillovej-Nerodovej relácie $R_L$ platí:

$$[((q_0, u) \vdash^* (p, \varepsilon)) \wedge ((q_0, v) \vdash^* (q, \varepsilon)) \wedge (u \in T_1) \wedge (v \in T_2) \wedge (p \neq q)] \Rightarrow (T_1 \neq T_2).$$

$(iii)$ Nech $T$ je trieda ekvivalencie Myhillovej-Nerodovej relácie $R_L$, v ktorej nemožno žiadne slovo doplniť na slovo z jazyka $L$. Nech $w \in \Sigma^*$ je slovo, nech $T_w$ je trieda ekvivalencie relácie $R_L$ taká, že $w \in T_w$. Potom platí:

$$(\exists q \in K : (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)) \Rightarrow T_w \neq T.$$

**Poznámka 1.2.1** Podmienka $(iii)$ predchádzajúcej definície je daná skutočnosťou, že sa v tejto práci používa definícia konečného automatu s možnosťou nedočítania vstupného slova. Pre automaty s povinnosťou dočítania vstupného slova sa minimálny automat definuje iba s podmienkami $(i)$ a $(ii)$.

Každý dosiahnuteľný stav ľubovoľného automatu zodpovedá práve jednej triede ekvivalencie relácie $R_L$. Minimálny automat je taký automat, v ktorom každej triede ekvivalencie, ktorej slová možno doplniť na slová z $L$, zodpovedá práve jeden stav a triede (ak taká existuje), ktorej slová takto doplniť nemožno, nezodpovedá žiaden stav.

Minimálny automat je teda automat, ktorého stavy možno stotožniť s triedami ekvivalencie Myhillovej-Nerodovej relácie $R_L$ (okrem triedy, ktorej slová nemožno doplniť na slová z $L$). Počiatočný stav je stav, ktorý zodpovedá triede, do ktorej patrí $\varepsilon$, množina akceptačných stavov pozostáva z tých stavov, ktoré zodpovedajú triedam so slovami patriacimi do $L$.

**Veta 1.2.2** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je minimálny automat akceptujúci regulárny jazyk $L$. Nech $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ je ľubovoľný DKA akceptujúci $L$. Potom $|K| \leq |K'|$.

**Dôkaz.** Vyplýva z dôkazu Myhillovej-Nerodovej vety uvedeného v [14]. □

## 1.3 Grafová reprezentácia DKA

V nasledujúcich definíciach zavedieme pojem orientovaného grafu a orientovaného grafu s ohodnotením hrán. Definícií orientovaného grafu je viacero, pre účely tejto práce použijeme definíciu pomocou incidenčnej funkcie, pričom takáto definícia zodpovedá konceptu multigrafu – medzi dvoma vrcholmi môže viesť viacero hrán. V ďalšom texte teda bude pojem orientovaný graf chápaný ako pojem orientovaný multigraf.

**Definícia 1.3.1** *Orientovaný graf* je trojica $G = (V, E, d)$, kde $V$ je konečná množina vrcholov, $E$ je konečná množina hrán a $d : E \to V^2$ je incidenčná funkcia.

**Definícia 1.3.2** *Orientovaný graf s ohodnotením hrán* je štvorica $G = (V, E, d, h)$, kde $(V, E, d)$ je orientovaný graf a $h : E \to U$ je ohodnotenie hrán prvkami množiny $U$.

**Poznámka 1.3.1** Na niektorých miestach v ďalšom texte sa bude orientovaný graf s ohodnotením hrán $G = (V, E, d, h)$ stotožňovať s orientovaným grafom $(V, E, d)$.

**Definícia 1.3.3** *Grafová reprezentácia konečného automatu* $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je orientovaný graf $G = (V, E, d, h)$ s ohodnotením hrán taký, že platí $V = K$, $E = D_A$, ohodnotenie je zobrazenie $h : E \to \Sigma$ také, že $h((q, c, q')) = c$ a pre incidenčnú funkciu $d$ a $(q, c, q') \in E$ platí $d((q, c, q')) = (q, q')$.

Ku každému deterministickému konečnému automatu zjavne existuje jeho grafová reprezentácia. Existujú však orientované grafy s ohodnotením hrán, pre ktoré neexistuje žiaden deterministický konečný automat, ktorého sú grafovou reprezentáciou. Príkladom takéhoto grafu môže byť ľubovoľný orientovaný graf s ohodnotením hrán, v ktorom existuje vrchol taký, že z neho vedú aspoň dve hrany s rovnakým ohodnotením.

Pre každý orientovaný graf bez ohodnotenia hrán však existuje ohodnotenie hrán také, že výsledný ohodnotený graf bude grafovou reprezentáciou nejakého deterministického konečného automatu. Táto skutočnosť je dôsledkom definície deterministického konečného automatu s možnosťou nedočítania vstupného slova. V prípade povinnosti dočítania vstupného slova by boli grafovými reprezentáciami automatu len regulárne grafy stupňa $|\Sigma|$ (pričom stupňom vrchola orientovaného grafu rozumieme počet hrán (vrátane slučiek) *začínajúcich* v danom vrchole).

V prípade, že nezáleží na ohodnotení hrán, budeme ako grafovú reprezentáciu automatu $A$ chápať aj graf $G = (V, E, d)$, ktorý spĺňa podmienky predchádzajúcej definície. Táto dvojznačnosť je však čisto formálna.

## 1.4 Prechodová matica automatu

V niektorých situáciach je výhodné k problémom okolo deterministických konečných automatov pristupovať algebraickým spôsobom. Na tento účel slúži pojem *prechodovej matice* automatu.

**Definícia 1.4.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Nech množina stavov automatu $A$ je $K = \{q_0, \ldots, q_{m-1}\}$, kde $m = |K|$. *Prechodovou maticou* automatu $A$ nazveme maticu

$$\Delta_A := \begin{pmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \ldots & d_{0,m-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & \ldots & d_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m-1,0} & d_{m-1,1} & \ldots & d_{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

typu $m \times m$, pre ktorú platí

$$d_{i,j} = |\{c \in \Sigma \mid \delta(q_i, c) = q_j\}|.$$

V prípade, že nebude hroziť nedorozumenie, budeme prechodovú maticu automatu $A$ značiť namiesto $\Delta_A$ len $\Delta$.

Prechodová matica automatu $A$ je teda maticou susednosti jeho grafovej reprezentácie (chápanej v zmysle orientovaného multigrafu bez ohodnotenia hrán).

Na rozdiel od grafovej reprezentácie konečného automatu však nie je možné považovať prechodovú maticu za reprezentáciu automatu v pravom slova zmysle. Rôzne konečné automaty totiž môžu mať aj rovnakú maticu susednosti. Grafové reprezentácie takýchto automatov sa však líšia len v ohodnotení hrán. Prechodová matica konečného automatu teda nesie rovnakú informáciu ako jeho grafová reprezentácia bez ohodnotenia hrán.

Prechodová matica je dôležitým prostriedkom pri enumerácii akceptačných výpočtov, či využití určitého prechodu počas týchto výpočtov. Tejto problematike sa bude práca venovať v časti 3.2.

## 1.5 Stavovo vyvážené automaty

Táto časť obsahuje niekoľko základných pojmov a označení v súvislosti s rovnomerným využívaním *stavov* v konečných automatoch. Uvedené koncepty boli zavedené v prácach [9] a [10]. Niektoré názvy a označenia používané v tejto práci sa budú oproti pôvodne používaným názvom a označeniam líšiť. Nutnosť takejto zmeny súvisí s potrebou odlíšiť definície stavovej a prechodovej vyváženosti.

**Označenie 1.5.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat, nech $w \in L(A)$, nech $q \in K$. Symbolom $\#_A[q, w]$ označíme počet použití stavu $q$ počas výpočtu automatu $A$ na slove $w$. V prípade, že nebude hroziť nedorozumenie, budeme namiesto $\#_A[q, w]$ písať len $\#[q, w]$.

**Definícia 1.5.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Automat $A$ nazveme *prísne stavovo vyvážený*, ak existuje kladná reálna konštanta $k \in \mathbb{R}^+$ taká, že

$$\forall w \in L(A) \forall p, q \in K : |\#[p, w] - \#[q, w]| \leq k.$$

**Definícia 1.5.2** Jazyk $L$ nazveme *prísne stavovo vyvážený*, ak existuje prísne stavovo vyvážený automat $A$, ktorý ho akceptuje. Triedu všetkých prísne stavovo vyvážených jazykov označíme $\mathscr{L}_{K-SEQA}$.

**Označenie 1.5.2** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat, nech $L \subseteq L(A)$ je konečný jazyk, nech $q \in K$. Symbolom $\#_A[q, L]$ (alebo len $\#[q, L]$) označíme hodnotu

$$\#_A[q, L] = \sum_{w \in L} \#_A[q, w].$$

**Definícia 1.5.3** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Automat $A$ nazveme *stavovo vyvážený*, ak existuje kladná reálna konštanta $k \in \mathbb{R}^+$ taká, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall p, q \in K : |\#[p, L(A) \cap \Sigma^n] - \#[q, L(A) \cap \Sigma^n]| \leq k|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

**Definícia 1.5.4** Jazyk $L$ nazveme *stavovo vyvážený*, ak existuje stavovo vyvážený automat $A$, ktorý ho akceptuje. Triedu všetkých stavovo vyvážených jazykov označíme $\mathscr{L}_{K-EQA}$.

# Kapitola 2

# Prísne vyvážené automaty

V tejto časti sa bude práca zaoberať automatmi, ktoré na každom slove z akceptovaného jazyka použijú každý prechod, až na konštantný rozdiel, rovnako veľa ráz.

## 2.1 Definícia prísnej prechodovej vyváženosti

**Označenie 2.1.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Nech $(p, c, p') \in D$ je jeho prechod. Nech $w \in L(A)$ je slovo akceptované automatom $A$. Potom symbolom $\#_A[p, c, p', w]$ (prípadne len $\#[p, c, p', w]$) označujeme počet použití prechodu $(p, c, p')$ počas výpočtu automatu $A$ na slove $w$. Teda, ak má tento výpočet tvar[1]

$$(p_0, w) \vdash (p_1, w[2 \dots n]) \vdash (p_2, w[3 \dots n]) \vdash^* (p_n, \varepsilon), \qquad p_0 = q_0, p_n \in F,$$

tak platí (s použitím Iversonovej notácie[2])

$$\#_A[p, c, p', w] = \sum_{k=1}^{n} [p_{i-1} = p] \cdot [p_i = p'] \cdot [w[i] = c].$$

Zjavne platí vzťah

$$\sum_{(p,c,p') \in D} \#_A[p, c, p', w] = |w|,$$

keďže na každé písmeno (akceptovaného) slova $w$ sa použije práve jeden prechod. Priemerný počet využití prechodu sa teda počíta ako $\frac{|w|}{|D|}$.

**Definícia 2.1.1** Automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme *prísne prechodovo vyvážený* na slovách z jazyka $L = L(A)$ (alebo skrátene len *prísne prechodovo vyvážený*), ak existuje kladné reálne číslo $k$ také, že platí

$$\forall w \in L(A) \forall (p, c, p'), (q, d, q') \in D : \big| \#[p, c, p', w] - \#[q, d, q', w] \big| \leq k.$$

**Definícia 2.1.2** Regulárny jazyk $L$ nazveme *prísne prechodovo vyvážený* ak existuje prísne prechodovo vyvážený automat $A$ taký, že $L(A) = L$. Triedu všetkých prísne prechodovo vyvážených jazykov budeme označovať $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$.

[1]Pre slovo $w \in \Sigma^*$ a $i, j \in \{1, \dots, |w|\}$ symbolom $w[i \dots j]$ označíme podslovo slova $w$ pozostávajúce z jeho $i$-teho až $j$-teho znaku. Pre $i > j$ položíme $w[i \dots j] = \varepsilon$. Zápis $w[i \dots i]$ budeme skracovať ako $w[i]$.

[2]Ak $P$ je booleovský výraz, tak symbolom $[P]$ označíme jeho pravdivostnú hodnotu chápanú ako celé číslo. Teda $[P] = 1$, ak $P$ je pravdivý a $[P] = 0$, ak $P$ je nepravdivý.

**Lema 2.1.1** Automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je prísne prechodovo vyvážený práve vtedy, keď existuje kladné reálne číslo $l$ také, že pre všetky slová $w \in L(A)$ platí:

$$\left| \max_{(q,c,q')\in D}(\#[q,c,q',w]) - \frac{|w|}{|D|} \right| \leq l.$$

**Dôkaz.**

$\Rightarrow$: Nech je automat $A$ prísne prechodovo vyvážený. Označme

$$M := \max_{(q,c,q')\in D}(\#[q,c,q',w]), \qquad m := \min_{(q,c,q')\in D}(\#[q,c,q',w])$$

počet použití najčastejšie, v resp. najzriedkavejšie používaného prechodu. Keďže $\frac{|w|}{|D|}$ je priemerný počet použití prechodu, nutne $\frac{|w|}{|D|} \geq m$. Preto platí

$$\left| \max_{(q,c,q')\in D}(\#[q,c,q',w]) - \frac{|w|}{|D|} \right| \leq |M - m| \leq k,$$

keďže automat je prísne prechodovo vyvážený. Čiže stačí položiť $l := k$ a tvrdenie platí.

$\Leftarrow$: Nech platí

$$\left| \max_{(q,c,q')\in D}(\#[q,c,q',w]) - \frac{|w|}{|D|} \right| \leq l,$$

teda

$$\left| M - \frac{|w|}{|D|} \right| \leq l.$$

Keďže $M \geq \frac{|w|}{|D|}$, úpravou predchádzajúcej nerovnosti dostávame

$$M \leq l + \frac{|w|}{|D|}. \tag{2.1}$$

Na druhej strane, platí

$$\frac{m + (|D|-1)M}{|D|} \geq \frac{m + \sum_{(p,c,p')\in D-\{e_{min}\}} \#[p,c,p',w]}{|D|} = \frac{|w|}{|D|},$$

kde $e_{min} = (q_{min}, c_{min}, q'_{min})$ je jeden z prechodov, pre ktoré platí $\#[q_{min}, c_{min}, q'_{min}, w] = m$. Úpravou predošlej nerovnosti dostávame

$$m \geq |w| - (|D|-1)M$$

a po použití (2.1) získame

$$m \geq |w| - (|D|-1)\left(l + \frac{|w|}{|D|}\right),$$

čiže

$$m \geq \frac{|w|}{|D|} - |D|l. \tag{2.2}$$

Teda pre všetky prechody $(p, c, p'), (q, d, q') \in D$ platí

$$|\#[p,c,p',w] - \#[q,d,q',w]| \leq |M - m| \leq \left| l + \frac{|w|}{|D|} - \left(\frac{|w|}{|D|} - |D|l\right) \right| = l(|D|+1),$$

čiže automat je prísne prechodovo vyvážený.

$\square$

## 2.2 Charakterizácia triedy $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$

Intuitívne nahliadnuť charakterizáciu triedy prísne prechodovo vyvážených automatov nie je ťažké. Keďže môžme v definícii prísnej prechodovej vyváženosti zvoliť $k$ akékoľvek, je zrejmé, že automaty akceptujúce konečný jazyk budú prísne prechodovo vyvážené všetky. Rovnako je zrejmé, že pokiaľ existuje v automate cyklus a zároveň prechod $(q, c, q')$, ktorý je mimo daného cyklu (môže však byť súčasťou iného cyklu), môžeme (až na niektoré patologické prípady automatov, ktoré sú však pre intuitívny náhľad nepodstatné) prejsť daným cyklom toľkokrát, že rozdiel medzi počtom využití prechodov na cykle a počtom využití prechodu $(q, c, q')$ presiahne $k$ z definície prísnej prechodovej vyváženosti, nech je $k$ zvolené akokoľvek. To znamená, že prísne prechodovo vyvážené budú len automaty akceptujúce konečný jazyk a automaty s tvarom orientovaného cyklu cez všetky stavy. Nasledujúce tvrdenia sú formalizáciou týchto úvah.

**Lema 2.2.1** Každý konečný jazyk je prísne prechodovo vyvážený.

**Dôkaz.** Nech $L$ je konečný jazyk, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat taký, že $L(A) = L$. Potom $A$ neobsahuje dosiahnuteľný cyklus, z ktorého sa dá dostať do akceptačného stavu (v opačnom prípade by pre každé $n \in \mathbb{N}$ existovalo slovo z $L(A)$ také, že sa na ňom daný cyklus vykoná práve $n$-krát, čo by znamenalo, že $L = L(A)$ nie je konečný). To znamená, že pri výpočte na každom slove $w \in L$ sa každý prechod použije nanajvýš raz. Z toho ale vyplýva, že pre $k = 1$ platí

$$\forall w \in L(A) \forall (p, c, p'), (q, d, q') \in D : \left|\#[p, c, p', w] - \#[q, d, q', w]\right| \leq k,$$

čiže automat $A$, a teda aj jazyk $L$, je prísne prechodovo vyvážený. □

**Veta 2.2.1** Deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ so súvislou grafovou reprezentáciou[3] je prísne prechodovo vyvážený práve vtedy, keď neobsahuje dosiahnuteľný cyklus, z ktorého sa dá dostať do akceptačného stavu alebo má tvar jedného orientovaného cyklu cez všetky stavy.

**Dôkaz.**

$\Rightarrow$: Nech automat $A$ obsahuje dosiahnuteľný cyklus, z ktorého sa dá dostať do akceptačného stavu, t.j. nech existuje výpočet

$$(q_0, uvw) \vdash^* (q_c, vw) \vdash^* (q_c, w) \vdash^* (q_F, \varepsilon), \qquad q_c \in K, q_F \in F, u, w \in \Sigma^*, v \in \Sigma^+.$$

Nech existuje v automate $A$ mimo tohto cyklu (nie však nutne mimo akéhokoľvek cyklu) prechod (dosiahnuteľný alebo nedosiahnuteľný) $(q_{out}, c_{out}, q'_{out}) \in D$. Ukážeme, že $A$ nie je prísne prechodovo vyvážený.

Nech

$$\#[q_{out}, c_{out}, q'_{out}, u] = m, \qquad \#[q_{out}, c_{out}, q'_{out}, uvw] - \#[q_{out}, c_{out}, q'_{out}, uv] = n.$$

Ďalej sporom. Nech $A$ je prísne prechodovo vyvážený, teda nech existuje $k$ také, že pre všetky $(p, c, p'), (q, d, q') \in D$ a všetky $w \in \Sigma^*$ platí $|\#[p, c, p', w] - \#[q, d, q', w]| \leq k$. Nech $(q_{cyc}, c_{cyc}, q'_{cyc})$ je ľubovoľný prechod v cykle z $q_c$ do $q_c$. Vezmime slovo $w' = uv^{(m+n+k+1)}w$. Zjavne $w' \in L(A)$. Ale $\#[q_{out}, c_{out}, q'_{out}, w'] = m + n$ a $\#[q_{cyc}, c_{cyc}, q'_{cyc}, w'] = m + n + k + 1$. Preto

$$|\#[q_{cyc}, c_{cyc}, q'_{cyc}, w'] - \#[q_{out}, c_{out}, q'_{out}, w']| = k + 1 > k,$$

čo je spor s predpokladom prísnej prechodovej vyváženosti automatu $A$ s konštantou $k$.

[3] K ľubovoľnému automatu existuje ekvivalentný so súvislou grafovou reprezentáciou. Tento predpoklad je uvedený kvôli nedosiahnuteľným stavom, z ktorých ani do ktorých nevedie žiaden prechod, ktoré by uvedenú charakterizáciu mohli prekaziť.

$\Leftarrow$: Ak automat $A$ neobsahuje dosiahnuteľný cyklus, z ktorého sa dá dostať do akceptačného stavu, je jazyk $L(A)$ konečný a automat $A$ prísne prechodovo vyvážený.

Nech má automat $A$ tvar jedného orientovaného cyklu cez všetky stavy. V takom prípade hodnota $\#[p,c,p',w]$ závisí len na počte úplných prechodov týmto cyklom a stave, v ktorom výpočet skončil. Preto pre ľubovoľné $(p,c,p'),(q,d,q') \in D$ a ľubovoľné $w \in \Sigma^*$ platí

$$|\#[p,c,p',w] - \#[q,d,q',w]| \leq 1$$

a automat $A$ je teda prísne prechodovo vyvážený.

□

**Veta 2.2.2** Trieda jazykov $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ pozostáva práve zo všetkých konečných jazykov a všetkých jazykov tvaru

$$\{u_1u_2\ldots u_nv\}^*\{u_1,u_1u_2,\ldots,u_1u_2\ldots u_n\},$$

pre pevne zvolené $u_1,u_2,\ldots,u_n \in \Sigma^*$, $n \in \mathbb{N}$ a $v \in \Sigma^+$.

**Dôkaz.** Nech $L \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$. Potom existuje prísne prechodovo vyvážený deterministický konečný automat $A$, ktorý ho akceptuje. Podľa predchádzajúcej vety platí jedna z nasledujúcich možností:

1. Automat $A$ neobsahuje dosiahnuteľný cyklus, z ktorého sa dá dostať do akceptačného stavu. V takom prípade akceptuje konečný jazyk, čo vyhovuje tvrdeniu dokazovanej vety.

2. Automat $A$ pozostáva práve z jedného orientovaného cyklu cez všetky stavy. Nech platí $K = \{q_0,\ldots,q_{m-1}\}$, pričom existujú $a_1,\ldots,a_m \in \Sigma$ také, že

$$(q_0,a_1\ldots a_m) \vdash (q_1,a_2\ldots a_m) \vdash \ldots \vdash (q_{m-1},a_m) \vdash (q_0,\varepsilon).$$

Nech $i_1,\ldots,i_n \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ sú všetky[4] indexy také, že $q_{i_j} \in F$ pre $1 \leq j \leq n$ a

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_n.$$

Ďalej položme $i_0 = 0$. Pre $1 \leq j \leq n$ označme $u_j = a_{i_{j-1}+1}\ldots a_{i_j}$ a $v = a_{i_n+1}\ldots a_m$. (Zjavne $v \neq \varepsilon$, a teda $v \in \Sigma^+$.) Potom zrejme

$$L(A) = \{u_1u_2\ldots u_nv\}^*\{u_1,u_1u_2,\ldots,u_1u_2\ldots u_n\},$$

čo bolo treba dokázať.

Obrátene, každý konečný jazyk je prísne prechodovo vyvážený a ku každému nekonečnému jazyku uvedeného tvaru vieme analogickou konštrukciou ako v predchádzajúcej časti dôkazu zostrojiť prísne prechodovo vyvážený automat v tvare jedného orientovaného cyklu cez všetky stavy. Tým je tvrdenie dokázané. □

**Dôsledok 2.2.1** Nech $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ je prísne prechodovo vyvážený automat akceptujúci nekonečný jazyk. Nech $u,v \in L(A)$, $|u| \leq |v|$. Potom $u$ je prefixom $v$.

**Dôkaz.** Dokazovaná vlastnosť zrejme vyplýva zo skutočnosti, že

$$L(A) = \{u_1u_2\ldots u_nv\}^*\{u_1,u_1u_2,\ldots,u_1u_2\ldots u_n\}.$$

V takýchto jazykoch existuje najviac jedno slovo danej dĺžky a pre dané slovo sú všetky kratšie slová jeho prefixom. □

[4] Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že aspoň jeden takýto index existuje. Prípad, keď žiaden takýto index neexistuje je totiž ošetrený v predchádzajúcom bode.

## 2.3 Uzáverové vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$

**Veta 2.3.1** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na zreťazenie.

**Dôkaz.** Vezmime jazyky $L_1 = \{a\}^*$, $L_2 = \{b\}^*$. Oba tieto jazyky sú prísne prechodovo vyvážené, keďže vyhovujú charakterizácii $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ z vety 2.2.2. Ich zreťazenie

$$L_1 \cdot L_2 = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

však očividne tejto charakterizácii nevyhovuje. □

**Veta 2.3.2** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na zjednotenie.

**Dôkaz.** Uvažujme jazyky $L_1, L_2$ rovnaké ako v dôkaze predchádzajúcej vety. Ich zjednotenie

$$L_1 \cup L_2 = \{c^n \mid n \in \mathbb{N}, c \in \{a, b\}\}$$

tiež zjavne uvedenej charakterizácii nevyhovuje. □

**Veta 2.3.3** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na iteráciu.

**Dôkaz.** Vezmime jazyk $L = \{a, b\}$. Zrejme, keďže je konečný, $L \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$. Ale taktiež zrejme, $L^* = \{a, b\}^* \notin \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$, keďže nevyhovuje charakterizácii z vety 2.2.2. □

**Veta 2.3.4** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na kladnú iteráciu.

**Dôkaz.** Možno použiť ten istý kontrapríklad a to isté zdôvodnenie ako v dôkaze predchádzajúcej vety. □

**Veta 2.3.5** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na reverz.

**Dôkaz.** Vezmime jazyk $L = \{ab\}^*\{\varepsilon, a\}$. Z charakterizácie $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ okamžite vyplýva, že $L \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$. Ale jazyk $L^R$ je nekonečný a súčasne obsahuje okrem iného slová *ba* a *aba*, čo znamená, že nie je splnená nutná podmienka prísnej prechodovej vyváženosti z dôsledku 2.2.1. Teda $L^R \notin \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$. □

**Veta 2.3.6** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ je uzavretá na prienik.

**Dôkaz.** Nech $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ sú prísne prechodovo vyvážené jazyky. Ak je aspoň jeden z jazykov $L_1, L_2$ konečný, je konečný aj ich prienik, a teda $L_1 \cap L_2 \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$.

V prípade nekonečných jazykov $L_1, L_2$, ktoré majú aj nekonečný prienik, bude myšlienkou dôkazu nasledovné: k dvom orientovaným cyklom cez všetky stavy dĺžok $n_1$ a $n_2$ zostrojíme orientovaný cyklus dĺžky $\mathrm{nsn}(n_1, n_2)$[5] taký, že akceptuje práve slová z prieniku jazykov $L_1$ a $L_2$. V prípade, že takýto cyklus nie je možné zostrojiť, je prienik $L_1 \cap L_2$ konečný.

Nech sú teda obidva jazyky $L_1, L_2$ nekonečné. Potom prísne prechodovo vyvážené automaty

$$A_1 = (\{p_0, \ldots, p_{n_1-1}\}, \Sigma, \delta_1, p_0, F_1), \qquad A_2 = (\{r_0, \ldots, r_{n_2-1}\}, \Sigma, \delta_2, r_0, F_2)$$

také, že $L(A_1) = L_1, L(A_2) = L_2$ majú tvar orientovaných cyklov cez všetky stavy, pričom

$$(p_0, u) \vdash_{A_1}^{n_1} (p_0, \varepsilon), \qquad (r_0, v) \vdash_{A_2}^{n_2} (r_0, \varepsilon).$$

(Predpokladáme, že stavy sú očíslované v poradí, v akom sa nachádzajú v cykle.)

[5]Symbolom $nsn(a, b)$ označujeme najmenší spoločný násobok prirodzených čísel $a, b$.

Ak neexistujú čísla $k, l$ také, že $u^k = v^l$ (a teda aj $k \cdot n_1 = l \cdot n_2$), je jazyk $L_1 \cap L_2$ konečná množina,[6] a preto $L_1 \cap L_2 \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$.

Nech teda také $k$ a $l$ existujú, vezmime najmenšie z nich (t.j. $kn_1 = ln_2 = \text{nsn}(n_1, n_2)$). Označme $w := u^k = v^l$. Zostrojíme prísne prechodovo vyvážený deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L_1 \cap L_2$, kde

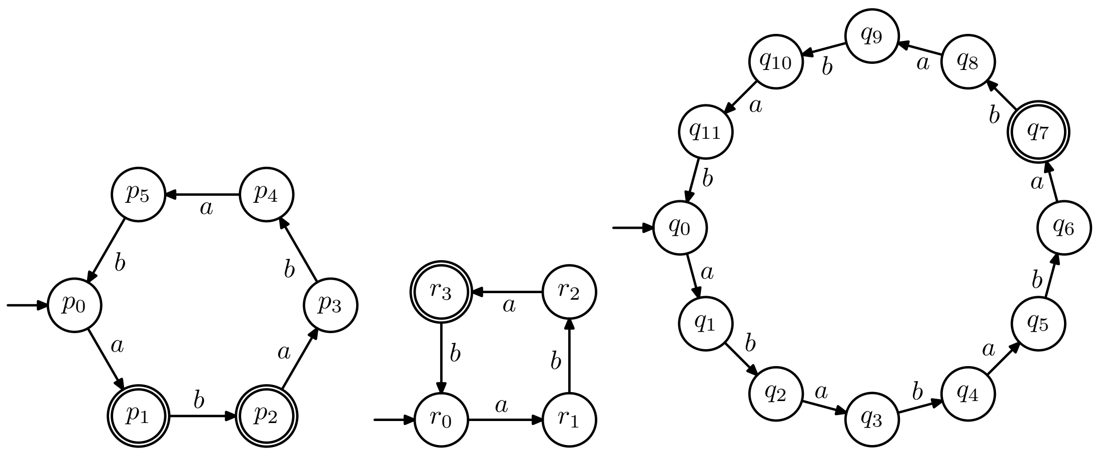
$$K = \{q_0, q_1, \dots q_{kn_1 - 1}\},$$

prechodová funkcia je pre všetky $i \in \{0, \dots, kn_1 - 1\}$ definovaná ako

$$\delta(q_i, w[i+1]) = q_{(i+1) \bmod kn_1}$$

a množina akceptačných stavov je

$$F = \{q_i \mid p_{i \bmod n_1} \in F_1 \ \wedge \ r_{i \bmod n_2} \in F_2\}.$$



(a) Automat $A_1$. (b) Automat $A_2$. (c) Automat $A$.

**Obrázok 2.1:** Automaty $A_1$ a $A_2$ sú príkladom prísne prechodovo vyvážených automatov, ktorých akceptované jazyky majú nekonečný prienik. Automat $A$ je prísne prechodovo vyvážený automat akceptujúci tento prienik a zostrojený konštrukciou z dôkazu uzavretosti na prienik.

Ešte treba dokázať, že naozaj platí $L(A) = L_1 \cap L_2$:

$\subseteq$: Nech $w \in L(A)$. Potom musí existovať $r \in \mathbb{N}$ a $i \in \{0, \dots, kn_1 - 1\}, q_i \in F$ tak, že platí:

$$(q_0, w) \vdash_A^{rkn_1} (q_0, w[rkn_1 + 1 \dots rkn_1 + i]) \vdash_A^{i} (q_i, \varepsilon),$$

kde $r$ je počet „otočení" cyklu tvoriaceho automat $A$. Nech $i = k'n_1 + i'$, pričom $i'$ je najmenšie prirodzené číslo s touto vlastnosťou. Potom, keďže platí $u^k = v^l$ a keďže

$$rkn_1 \bmod n_1 = 0 \qquad \text{a} \qquad k'n_1 \bmod n_1 = 0,$$

platí

$$(p_0, w) \vdash_{A_1}^{(rk+k')n_1} (p_0, w[(rk+k')n_1 + 1 \dots (rk+k')n_1 + i']) \vdash_{A_1}^{i'} (p_{i'}, \varepsilon). \tag{2.3}$$

[6]Táto skutočnosť vyplýva z toho, že pre ľubovoľné dve čísla $n_1, n_2$ existuje ich najmenší spoločný násobok $\text{nsn}(n_1, n_2)$. Keďže majú automaty $A_1$ a $A_2$ tvar orientovaných cyklov cez všetky stavy, platí, že pre každý z týchto automatov existuje práve jedno slovo dĺžky $\text{nsn}(n_1, n_2)$, na ktorom sa výpočet nezasekne (bez ohľadu na to, či je z akceptovaného jazyka alebo nie). Takéto slovo je ale pre oba automaty prefixom všetkých akceptovaných slov dĺžky aspoň $\text{nsn}(n_1, n_2)$, čo znamená, že v prípade, že majú jazyky $L_1$ a $L_2$ nekonečný prienik, musí byť toto slovo pre oba automaty rovnaké.

Keďže $q_i \in F$, musí platiť $p_{i \bmod n_1} \in F_1$. Ale $i \bmod n_1 = i'$, teda $p_{i'} \in F_1$ a z (2.3) vyplýva, že $w \in L(A_1) = L_1$. Analogickým spôsobom možno dokázať $w \in L(A_2) = L_2$. Preto $w \in L_1 \cap L_2$.

$\supseteq$: Nech $w \in L_1 \cap L_2$. Potom platí

$$(p_0, w) \vdash_{A_1}^{k_1 n_1} (p_0, w[k_1 n_1 + 1 \dots k_1 n_1 + i_1]) \vdash_{A_1}^{i_1} (p_{i_1}, \varepsilon),$$

kde $k_1 \in \mathbb{N}$, $i_1 \in \{0, \dots, n_1 - 1\}$ a $p_{i_1} \in F_1$, ako aj

$$(r_0, w) \vdash_{A_2}^{k_2 n_2} (r_0, w[k_2 n_2 + 1 \dots k_2 n_2 + i_2]) \vdash_{A_2}^{i_2} (r_{i_2}, \varepsilon),$$

kde $k_2 \in \mathbb{N}$, $i_2 \in \{0, \dots, n_2 - 1\}$ a $r_{i_2} \in F_2$. Keďže sú obidva výpočty na tom istom slove, nutne musí platiť $k_1 n_1 + i_1 = k_2 n_2 + i_2 = |w|$, a teda aj

$$(k_1 n_1 + i_1) \bmod k n_1 = (k_2 n_2 + i_2) \bmod k n_1 = j.$$

Z toho vyplýva, že

$$(q_0, w) \vdash^* (q_j, \varepsilon). \tag{2.4}$$

Taktiež platí

$$j = (k_1 n_1 + i_1) \bmod k n_1 = k_1' n_1 + i_1 \tag{2.5}$$

a

$$j = (k_2 n_2 + i_2) \bmod k n_1 = (k_2 n_2 + i_2) \bmod l n_2 = k_2' n_2 + i_2. \tag{2.6}$$

Z (2.5) a (2.6) vyplýva $j \bmod n_1 = i_1$ a $j \bmod n_2 = i_2$.

Keďže ale platí $p_{i_1} \in F_1$ a $r_{i_2} \in F_2$, z definície množiny akceptačných stavov automatu $A$ vyplýva, že nutne musí platiť $q_j \in F$. Z (2.4) potom vyplýva, že $w \in L(A)$, čo bolo treba dokázať.

□

**Veta 2.3.7** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na komplement.

**Dôkaz.** Uvažujme jazyk $L = \{\varepsilon, a\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a\}$. Keďže ide o konečný jazyk, nutne $L \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$. Jazyk $L^C = \{a\}^+\{a\}$ však nevyhovuje charakterizácii z vety 2.2.2, a teda nemôže byť prísne prechodovo vyvážený. □

**Veta 2.3.8** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na homomorfizmus.

**Dôkaz.** Vezmime $L = \{ab\}^*\{a\}$. Zrejme $L \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$. Vezmime homomorfizmus $h$ definovaný ako

$$\begin{aligned} h(a) &= a, \\ h(b) &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Jazyk $h(L) = \{a\}^*\{a\} = \{a\}^+$ nevyhovuje charakterizácii z vety 2.2.2, a teda nie je prísne prechodovo vyvážený. □

**Veta 2.3.9** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ nie je uzavretá na inverzný homomorfizmus.

**Dôkaz.** Vezmime jazyk $L = \{a\}^* \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ a homomorfizmus $h$ definovaný nasledovne:

$$\begin{aligned} h(a) &= a, \\ h(b) &= a. \end{aligned}$$

Platí $h^{-1}(L) = \{a, b\}^*$, čo evidentne nie je prísne prechodovo vyvážený jazyk. □

# Kapitola 3

# Vyvážené automaty

V predchádzajúcej kapitole sa práca zaoberala automatmi, ktoré na každom akceptovanom slove použijú (až na konštantný rozdiel) každý prechod rovnako veľa ráz, ako aj jazykmi, pre ktoré takéto automaty existujú. V tejto kapitole sa podmienka kladená na rovnomerné využívanie prechodov o niečo zmierni – nebude sa požadovať rovnomerná záťaž prechodov na každom akceptovanom slove, ale na všetkých akceptovaných slovách určitej dĺžky dohromady.

V nasledujúcej časti sa definujú dva typy rovnomerne zaťažených automatov a k nim prislúchajúcich jazykov – prechodovo vyvážené automaty (a k nim prislúchajúce jazyky tvoriace triedu $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$) a slabo prechodovo vyvážené automaty (a k nim prislúchajúce jazyky tvoriace triedu $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$). Na slabo prechodovo vyvážené automaty sa nebudú klásť až také silné požiadavky, ako na prechodovo vyvážené automaty.

V časti 3.9 bude dokázané tvrdenie, ktoré dá do súvisu definíciu $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ s definíciou stavovej vyváženosti uvedenej v [9].

## 3.1 Definície prechodovej vyváženosti

**Označenie 3.1.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat, nech $L \subseteq L(A)$ je konečný jazyk. Symbolom $\#_A[q, c, q', L]$ (prípadne len $\#[q, c, q', L]$), kde $(q, c, q') \in D_A$ označíme hodnotu

$$\#_A[q, c, q', L] = \sum_{w \in L} \#_A[q, c, q', w].$$

**Definícia 3.1.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. *Kvocientom vyváženosti* pre slová dĺžky $n$ nazveme hodnotu

$$B_A(n) = \frac{\min_{(p,c,p') \in D} \left(\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n]\right) + 1}{\max_{(q,d,q') \in D} \left(\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]\right) + 1}.$$

Číslo jedna sa v menovateli pripočítava z dôvodu, aby bol výraz definovaný pre každý automat $A$ a pre každé $n$, v čitateli sa číslo jedna pripočítava preto, aby mal kvocient vyváženosti $B_A(n)$ pre $n$ také, že $L(A) \cap \Sigma^n = \emptyset$, hodnotu 1.

Pre $n \to \infty$ sú tieto konštanty okrem prípadu $L(A) \cap \Sigma^n = \emptyset$ nepodstatné, keďže na hodnotách $n$ takých, že v akceptovanom jazyku je aspoň jedno slovo, sa aspoň hodnota maxima zrejme blíži k nekonečnu.

**Definícia 3.1.2** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. *Mierou vyváženosti* automatu $A$ nazveme hodnotu

$$B_A = \liminf_{n \to \infty} B_A(n).$$

Miera vyváženosti vyjadruje „správanie sa" kvocientov vyváženosti pre slová dĺžky $n$ v prípade, že $n \to \infty$. Pre $B_A(n)$ však nie je zaručená existencia limity (čo je prípad napríklad automatu z príkladu 3.1.1). To je dôvod, prečo je miera vyváženosti definovaná ako limes inferior. V prípade, že existuje limita, má limes inferior hodnotu tejto limity. V prípade, že limita neexistuje, vyjadruje limes inferior „najhorší možný prípad." V časti 3.7 však ukážeme, že na $n$ takých, že $L(A) \cap \Sigma^n \neq \emptyset$ táto limita vždy existuje a je rovná $B_A$.

**Definícia 3.1.3** Automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme *prechodovo vyvážený*, ak platí $B_A = 1$.

**Definícia 3.1.4** Regulárny jazyk $L$ nazveme *prechodovo vyvážený*, ak existuje prechodovo vyvážený automat $A$ taký, že $L(A) = L$. Triedu všetkých prechodovo vyvážených jazykov budeme označovať $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$.

**Definícia 3.1.5** Automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme *slabo prechodovo vyvážený*, ak platí $B_A > 0$.

**Definícia 3.1.6** Regulárny jazyk $L$ nazveme *slabo prechodovo vyvážený*, ak existuje slabo prechodovo vyvážený automat $A$, pre ktorý platí $L(A) = L$. Triedu všetkých slabo prechodovo vyvážených jazykov označíme $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$.

Kým definícia prechodovo vyváženého automatu je formalizáciou požiadavky, aby rozdiel medzi počtom využití všetkých dvojíc prechodov bol zanedbateľný, definícia slabo prechodovo vyváženého automatu požaduje iba neexistenciu dvojice prechodov, z ktorej počet použití jedného je zanedbateľný oproti počtu použití druhého. Priamo z definícií týchto tried vyplýva, že $\mathscr{L}_{\delta-EQA} \subseteq \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$. Slabo prechodovo vyvážené automaty sú teda rozšírením triedy prechodovo vyvážených automatov. Ich význam, odhliadnúc od skutočnosti, že ide o nový pohľad na prechodovú vyváženosť, spočíva v tom, že majú jednoduchú charakterizáciu (dokázanú v časti 3.3) umožňujúcu o nich dokázať rad tvrdení, ktoré pre všeobecnejšie triedy neplatia. Pri štúdiu prechodovo vyvážených automatov je potom možné vopred predpokladať ich slabú prechodovú vyváženosť a opierať sa tak o vlastnosti slabo prechodovo vyvážených automatov. Táto metóda sa ukáže obzvlášť účinná pri dôkazoch analytických vlastností hodnôt $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ (časť 3.6), ako aj pri dôkaze uzáverových vlastností triedy $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ (časť 3.11).

**Príklad 3.1.1** Uvažujme automat $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$, kde $K_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma_1 = \{a, b\}$, $q_{0,1} = q_0$, $F_1 = \{q_0\}$ a pre prechodovú funkciu platí:

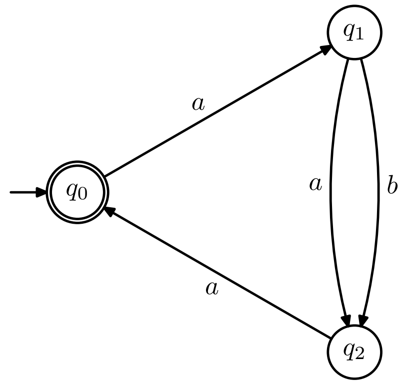
$$\begin{aligned} \delta_1(q_0, a) &= q_1 \\ \delta_1(q_1, a) &= q_2 \\ \delta_1(q_1, b) &= q_2 \\ \delta_1(q_2, a) &= q_0. \end{aligned}$$

Zjavne platí $L(A_1) = \{aaa, aba\}^*$.

Ak $n \bmod 3 \in \{1, 2\}$, tak potom neexistuje žiadne slovo dĺžky $n$ z $L(A_1)$ a kvocient vyváženosti má pre slová dĺžky $n$ hodnotu 1. Ak je $n \bmod 3 = 0$, teda platí $n = 3k$, tak má kvocient vyváženosti pre slová dĺžky $n$ hodnotu

$$B_{A_1}(n) = \frac{\min_{(p,c,p') \in D}(\sum_{w \in L(A_1) \cap \Sigma^n} \#[p, c, p', w]) + 1}{\max_{(q,d,q') \in D}(\sum_{w \in L(A_1) \cap \Sigma^n} \#[q, d, q', w]) + 1} = \frac{1 + \sum_{j=0}^{k} j\binom{k}{j}}{1 + k2^k} = \frac{k2^{k-1} + 1}{k2^k + 1}.$$

Prvý krok výpočtu $B_{A_1}(n)$ je iba rozpísaním $B_{A_1}(n)$ zo svojej definície. V druhom kroku sa vypočítala minimálna a maximálna hodnota zaťaženia prechodu, minimálna sa získala ako zaťaženie niektorého z prechodov $(q_1, a, q_2)$ alebo $(q_1, b, q_2)$, maximálna ako zaťaženie niektorého




**Obrázok 3.1:** Automat $A_1$ akceptujúci jazyk $L(A_1) = \{aaa, aba\}^*$. Miera vyváženosti tohto automatu je $B_{A_1} = \frac{1}{2}$, preto automat nie je prechodovo vyvážený, ale je slabo prechodovo vyvážený.

z prechodov $(q_0, a, q_1)$ alebo $(q_2, a, q_0)$. Tretí krok pozostáva len z výpočtu jednoduchej sumy

$$\sum_{j=0}^{k} j\binom{k}{j} = \sum_{j=1}^{k} j\binom{k}{j} = k\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k}\binom{k}{j} = k\sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1} = k2^{k-1}.$$

Zjavne neexistuje limita $B_{A_1}(n)$ pre $n \to \infty$. Avšak taktiež zjavne platí

$$\limsup_{n\to\infty} B_{A_1}(n) = 1$$

a pre mieru vyváženosti platí

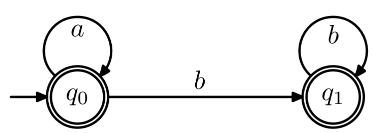
$$B_{A_1} = \liminf_{n\to\infty} B_{A_1}(n) = \lim_{k\to\infty} \frac{k2^{k-1}+1}{k2^k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k2^{k-1}+\frac{1}{2}}{k2^k+1} + \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{k2^k+1} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Automat $A_1$ teda nie je prechodovo vyvážený, ale je slabo prechodovo vyvážený.

**Príklad 3.1.2** Nech $A_2$ je automat definovaný nasledovne: $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$, kde $K_2 = \{q_0, q_1\}, \Sigma_2 = \{a, b\}, q_{0,2} = q_0, F_2 = \{q_0, q_1\}$ a prechodová funkcia je definovaná ako

$$\begin{aligned} \delta_2(q_0, a) &= q_0 \\ \delta_2(q_0, b) &= q_1 \\ \delta_2(q_1, b) &= q_1. \end{aligned}$$

Automat $A_2$ očividne akceptuje jazyk $L(A_2) = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$.




**Obrázok 3.2:** Automat $A_2$ akceptujúci jazyk $L(A_2) = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$. Miera vyváženosti tohto automatu je $B_{A_2} = 0$, teda automat nie je ani prechodovo vyvážený, ani slabo prechodovo vyvážený.

Pre pevnú dĺžku slova $n$ je každé akceptované slovo dĺžky $n$ jednoznačne určené počtom využití prechodu $(q_0, a, q_0)$. Teda platí

$$
\begin{aligned}
\#[q_0, a, q_0, L(A_2) \cap \Sigma^n] &= \sum_{k=0}^{n} k, \\
\#[q_0, b, q_1, L(A_2) \cap \Sigma^n] &= n - 1, \\
\#[q_1, b, q_1, L(A_2) \cap \Sigma^n] &= \sum_{k=0}^{n-1} (n - k - 1).
\end{aligned}
$$

Zjavne, maximálne zaťažený je prechod $(q_0, a, q_0)$ a minimálne zaťažený je prechod $(q_0, b, q_1)$, preto platí

$$B_{A_2}(n) = \frac{1 + n - 1}{1 + \sum_{k=0}^{n} k} = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2} + 1} = \frac{2n}{n(n+1) + 2},$$

čiže

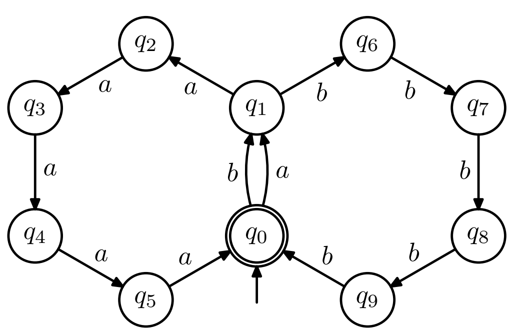
$$B_{A_2} = \liminf_{n \to \infty} \frac{2n}{n(n+1) + 2} = 0.$$

To znamená, že automat $A_2$ nie je ani prechodovo vyvážený, ani slabo prechodovo vyvážený.

**Príklad 3.1.3** Vezmime automat $A_3 = (K_3, \Sigma_3, \delta_3, q_{0,3}, F_3)$, kde $K_3 = \{q_0, \ldots, q_9\}$, $\Sigma_3 = \{a, b\}$, $q_{0,3} = q_0$, $F_3 = \{q_0\}$ a

$$
\begin{aligned}
\delta_3(q_0, a) &= q_1, \\
\delta_3(q_1, a) &= q_2, \\
\delta_3(q_2, a) &= q_3, \\
\delta_3(q_3, a) &= q_4, \\
\delta_3(q_4, a) &= q_5, \\
\delta_3(q_5, a) &= q_0, \\
\delta_3(q_0, b) &= q_1, \\
\delta_3(q_1, b) &= q_6, \\
\delta_3(q_6, b) &= q_7, \\
\delta_3(q_7, b) &= q_8, \\
\delta_3(q_8, b) &= q_9, \\
\delta_3(q_9, b) &= q_0.
\end{aligned}
$$

Automat $A_3$ zrejme akceptuje jazyk $L(A_3) = \{a^6, b^6, ab^5, ba^5\}^*$.




**Obrázok 3.3:** Automat $A_3$ akceptujúci jazyk $L(A_3) = \{a^6, b^6, ab^5, ba^5\}^*$. Miera vyváženosti tohto automatu je $B_{A_3} = 1$, teda automat je prechodovo vyvážený.

Pre $n$ také, že $n \bmod 6 \in \{1,2,3,4,5\}$ zrejme neexistuje žiadne slovo $w \in L(A_3)$ tak, že $|w| = n$, a preto $B_{A_3}(n) = 1$. Zaujímavý je teda len prípad $n \bmod 6 = 0$.

Nech teda $n = 6k$. Celý akceptačný výpočet jednoznačne určujú postupnosti cyklov o dĺžke 6, ktoré sa počas neho vykonali. Celkovo sa môžu striedať štyri cykly. Každým prechodom prechádzajú práve dva cykly. Preto pre každý prechod $(q,c,q') \in D$ platí

$$\#[q,c,q',L(A_3) \cap \Sigma^n] = \sum_{j=0}^{k} j\binom{k}{j} 2^j 2^{k-j} = 2^k \sum_{j=1}^{k} j\binom{k}{j} = 2^k k 2^{k-1} = \frac{k}{2}4^k,$$

a keďže je táto hodnota pre každý prechod rovnaká, nutne $B_{A_3} = 1$, čo znamená, že automat $A_3$ je prechodovo vyvážený.

## 3.2 Výpočet miery vyváženosti pomocou rekurentných vzťahov

V tejto časti bude opísaný univerzálny spôsob, ako pomocou matematického výpočtu získať uzavretý tvar pre

$$|L(A) \cap \Sigma^n| \qquad \text{a} \qquad \#_A[q,c,q',L(A) \cap \Sigma^n], \text{ kde } (q,c,q') \in D_A.$$

To znamená, že bude možné presne vypočítať kvocient vyváženosti pre dané $n$ a, čo je podstatnejšie, vypočítať aj celkovú mieru vyváženosti len pomocou výpočtu limity.

Spôsob výpočtu $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q,c,q',L(A) \cap \Sigma^n]$ je založený na riešení začiatočnej úlohy homogénneho systému lineárnych rekurentných vzťahov prvého rádu s konštantnými koeficientmi.

**Označenie 3.2.1** Nech $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ je konečný automat, nech $q \in K$. Potom symbolom $A_q$ označíme automat

$$A_q = (K,\Sigma,\delta,q,F),$$

t.j. automat, ktorý sa oproti pôvodnému automatu $A$ líši len tým, že jeho počiatočný stav je $q$ namiesto[1] $q_0$.

**Označenie 3.2.2** Nech $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ je konečný automat. Nech $K = \{q_0,\dots,q_{m-1}\}$. Potom, pre $i \in \{0,\dots,m-1\}$, $(q,c,q') \in D$ a $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$\begin{aligned} W_i(n) &:= |L(A_{q_i}) \cap \Sigma^n|, \\ T_i^{(q,c,q')}(n) &:= \#_{A_{q_i}}[q,c,q',L(A_{q_i}) \cap \Sigma^n]. \end{aligned}$$

**Poznámka 3.2.1** Pre $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ s $K = \{q_0,\dots,q_{m-1}\}$ zrejme platí $|L(A) \cap \Sigma^n| = W_0(n)$ a $\#_A[q,c,q',L(A) \cap \Sigma^n] = T_0^{(q,c,q')}(n)$.

**Veta 3.2.1** Nech $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ je konečný automat, nech $K = \{q_0,\dots,q_{m-1}\}$. Potom pre funkcie

$$W_0,\dots,W_{m-1}$$

[1] Samozrejme je možný aj prípad $q = q_0$.

platí nasledujúci systém rekurentných vzťahov:

$$\begin{array}{rcl}
W_0(n) & = & \displaystyle\sum_{\substack{(c,i)\in\Sigma\times\{0,\ldots,m-1\}\\(q_0,c,q_i)\in D}} W_i(n-1)\\
W_1(n) & = & \displaystyle\sum_{\substack{(c,i)\in\Sigma\times\{0,\ldots,m-1\}\\(q_1,c,q_i)\in D}} W_i(n-1)\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
W_{m-1}(n) & = & \displaystyle\sum_{\substack{(c,i)\in\Sigma\times\{0,\ldots,m-1\}\\(q_{m-1},c,q_i)\in D}} W_i(n-1)
\end{array}$$

so začiatočnými podmienkami

$$W_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{ak } q_i \in F \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

**Dôkaz.** Tvrdenie vyplýva bezprostredne z definícií použitých konceptov. □

**Veta 3.2.2** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat. Nech $K = \{q_0, \ldots, q_{m-1}\}$, nech $(q, c, q') \in D$, nech $q = q_i$, $q' = q_j$. Potom pre funkcie

$$T_0^{(q,c,q')}, \ldots, T_{m-1}^{(q,c,q')}$$

platí nasledujúci systém rekurentných vzťahov:

$$\begin{array}{rcl}
T_0^{(q,c,q')}(n) & = & \displaystyle\sum_{\substack{(d,k)\in\Sigma\times\{0,\ldots,m-1\}\\(q_0,d,q_k)\in D}} T_k^{(q,c,q')}(n-1)\\
T_1^{(q,c,q')}(n) & = & \displaystyle\sum_{\substack{(d,k)\in\Sigma\times\{0,\ldots,m-1\}\\(q_1,d,q_k)\in D}} T_k^{(q,c,q')}(n-1)\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
T_i^{(q,c,q')}(n) & = & W_j(n-1) + \displaystyle\sum_{\substack{(d,k)\in\Sigma\times\{0,\ldots,m-1\}\\(q_i,d,q_k)\in D}} T_k^{(q,c,q')}(n-1)\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
T_{m-1}^{(q,c,q')}(n) & = & \displaystyle\sum_{\substack{(d,k)\in\Sigma\times\{0,\ldots,m-1\}\\(q_{m-1},d,q_k)}} T_k^{(q,c,q')}(n-1)
\end{array}$$

so začiatočnými podmienkami

$$T_k^{(q,c,q')}(0) = 0 \ \forall k \in \{0, \ldots, m-1\}.$$

**Dôkaz.** Tvrdenie je zrejmé. □

Predošlé dve vety hovoria, že uzavreté tvary pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ je možné vypočítať na základe riešenia začiatočnej úlohy homogénneho systému lineárnych rekurentných vzťahov prvého rádu s konštantnými koeficientmi.

**Poznámka 3.2.2** Treba si uvedomiť, že zatiaľ čo systém pre $W$ je systémom $|K|$ rekurentných vzťahov o $|K|$ neznámych funkciách, systém pre $T^{(q,c,q')}$ je systémom $2|K|$ rekurentných vzťahov o $2|K|$ neznámych funkciách, keďže v skutočnosti v ňom vystupuje aj systém pre $W$.

**Poznámka 3.2.3** Zjavne, každý homogénny systém lineárnych rekurencií prvého rádu s konštantnými koeficientmi je možné pomocou matíc a vektorov napísať ako

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

pričom na $x_0$ môžu byť kladené začiatočné podmienky. Konkrétne, systém pre $W$ možno napísať ako

$$x_n = \Delta \cdot x_{n-1},$$

kde $\Delta$ je prechodová matica automatu $A$ a stĺpcový vektor $x_n$ je definovaný ako

$$x_n := (W_0(n), \ldots, W_{m-1}(n))^T.$$

Systém pre $T^{(q,c,q')}$ je možné pre ľubovoľné $(q, c, q') \in D$ napísať ako

$$y_n = \Delta'_{(q,c,q')} \cdot y_{n-1},$$

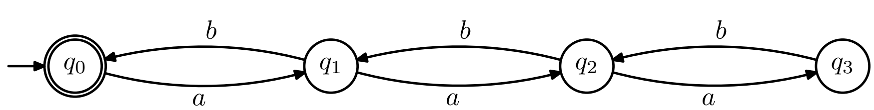
kde $\Delta'_{(q,c,q')}$ je matica $2|K| \times 2|K|$ taká, že ľavých horných $|K| \times |K|$ prvkov a pravých dolných $|K| \times |K|$ prvkov je identických s maticou $\Delta$, ľavých dolných $|K| \times |K|$ prvkov tvoria nuly a pravých horných $|K| \times |K|$ prvkov je (pre účely tohto pozorovania) nepodstatných, a kde stĺpcový vektor $y_n$ je definovaný ako

$$y_n := (T_0^{(q,c,q')}(n), \ldots, T_{m-1}^{(q,c,q')}(n), W_0(n), \ldots, W_{m-1}(n))^T.$$

Nasledujúci príklad ukazuje, ako je možné jednoduchšie z takýchto systémov riešiť ad hoc metódami a demonštruje výpočet hodnoty $|L(A) \cap \Sigma^n|$ pre daný automat. Ďalšie partie textu potom obsahujú všeobecnú metódu na riešenie takýchto systémov.

**Príklad 3.2.1** Uvažujme automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$, a kde pre prechodovú funkciu platí

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= q_1, \\
\delta(q_1, a) &= q_2, \\
\delta(q_2, a) &= q_3, \\
\delta(q_3, b) &= q_2, \\
\delta(q_2, b) &= q_1, \\
\delta(q_1, b) &= q_0.
\end{aligned}$$




**Obrázok 3.4:** Automat $A$.

Systém rekurentných vzťahov z vety 3.2.1 má pre daný automat $A$ nasledujúci tvar:

$$W_0(n) = W_1(n-1), \tag{3.1}$$
$$W_1(n) = W_0(n-1) + W_2(n-1), \tag{3.2}$$
$$W_2(n) = W_1(n-1) + W_3(n-1), \tag{3.3}$$
$$W_3(n) = W_2(n-1), \tag{3.4}$$

pričom začiatočné podmienky sú $W_0(0) = 1$, $W_1(0) = 0$, $W_2(0) = 0$, $W_3(0) = 0$. Dosadením (3.1) do (3.2) a (3.4) do (3.3) dostávame upravený systém

$$\begin{aligned} W_1(n) &= W_1(n-2) + W_2(n-1), && (3.5) \\ W_2(n) &= W_1(n-1) + W_2(n-2), && (3.6) \end{aligned}$$

so začiatočnými podmienkami (po úprave sme dostali rekurencie druhého rádu) $W_1(0) = 0$, $W_1(1) = 1$, $W_2(0) = 0$ a $W_2(1) = 0$. Po sčítaní (3.5) a (3.6) dostávame

$$W_1(n) + W_2(n) = [W_1(n-1) + W_2(n-1)] + [W_1(n-2) + W_2(n-2)],$$

čo spolu so začiatočnými podmienkami $W_1(0) + W_2(0) = 0$ a $W_1(1) + W_2(1) = 1$ znamená, že $W_1(n) + W_2(n) = F_n$, kde $F_n$ je $n$-té Fibonacciho číslo. Z toho vyplýva, že platí

$$W_2(n) = F_n - W_1(n),$$

čo znamená, že pre $W_1(n)$ platí nasledujúca rekurencia:

$$W_1(n) = W_1(n-2) + F_{n-1} - W_1(n-1),$$

z čoho

$$W_1(n) + W_1(n-1) - W_1(n-2) = F_{n-1},$$

a teda

$$W_1(n+2) + W_1(n+1) - W_1(n) = F_{n+1}. \tag{3.7}$$

Nech $B(z)$ je obyčajná vytvárajúca funkcia pre $W_1(n)$. Z (3.7) potom vyplýva, že platí

$$\frac{B(z) - z}{z^2} + \frac{B(z)}{z} - B(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Po prenásobení rovnosti hodnotou $z^2$ dostávame

$$B(z) - z + zB(z) - z^2 B(z) = \frac{z^2}{1 - z - z^2}$$

a po ďalších úpravách

$$B(z) = \frac{z(1 - z^2)}{(1 - z - z^2)(1 + z - z^2)}.$$

Po rozklade zlomku z predchádzajúcej rovnosti na parciálne zlomky dostávame

$$B(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{1 - z - z^2} + \frac{\frac{1}{2}z}{1 + z - z^2} = \frac{1}{2}(F(z) - F(-z)),$$

kde $F(z)$ je vytvárajúca funkcia pre postupnosť Fibonacciho čísel. Z toho vyplýva, že

$$W_1(n) = \frac{1}{2}(F_n + (-1)^{n+1} F_n),$$

a teda

$$|L(A) \cap \Sigma^n| = W_0(n) = W_1(n-1) = \frac{1}{2}(F_{n-1} + (-1)^n F_{n-1}).$$

Príklad teda ukázal, ako je možné vyriešiť systém rekurentných vzťahov pomocou jeho zjednodušovania rôznymi úpravami. Pre zložitejšie systémy (akým môže byť čo i len systém pre $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$) sú však takéto metódy príliš pracné. Preto vzniká potreba nájsť univerzálny spôsob riešenia takýchto rekurencií.

V nasledujúcom sa teda bude práca zaoberať všeobecnou metódou riešenia systémov lineárnych rekurencií prvého rádu s konštantnými koeficientmi. Podrobnosti možno nájsť napríklad v [1] alebo v [8]. Budú použité niektoré pojmy z lineárnej algebry, ktorých definície je možné nájsť napríklad v [15] alebo [13].

**Veta 3.2.3 (Cayley, Hamilton)** Nech $A$ je matica $n \times n$ nad poľom $\mathbb{C}$. Nech $p(x)$ je charakteristický polynóm matice $A$. Potom $p(A) = 0$.

**Dôkaz.** Možno nájsť v [15] alebo v [13]. □

**Veta 3.2.4** Nech $x_n = Ax_{n-1}$ je homogénny systém lineárnych rekurentných vzťahov prvého rádu s konštantnými koeficientmi. Potom pre $x_n$ (a teda aj každú jeho zložku) platí rekurentný vzťah

$$x_{n+k} = -(c_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n),$$

kde

$$x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

je charakteristický polynóm matice $A$.

**Dôkaz.** Z Cayleyho-Hamiltonovej vety vyplýva, že platí

$$A^k = -(c_{k-1}A^{k-1} + \ldots + c_1 A + c_0 I).$$

Vynásobením rovnosti maticou $A^n$ (napríklad sprava) dostávame

$$A^{n+k} = -(c_{k-1}A^{n+k-1} + \ldots + c_1 A^{n+1} + c_0 A^n)$$

a vynásobením sprava stĺpcovým vektorom $x_0$ dostávame

$$A^{n+k}x_0 = -(c_{k-1}A^{n+k-1}x_0 + \ldots + c_1 A^{n+1}x_0 + c_0 A^n x_0). \tag{3.8}$$

Ale zo vzťahu $x_n = Ax_{n-1}$ priamočiaro vyplýva $x_n = A^n x_0$, čo znamená, že (3.8) možno prepísať v tvare

$$x_{n+k} = -(c_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n),$$

čo bolo treba dokázať. □

Uvedené tvrdenie vlastne poskytuje návod, ako zredukovať homogénny systém lineárnych rekurencií prvého rádu na jednu lineárnu homogénnu rekurenciu vyššieho rádu. Tá sa však dá riešiť štandardným spôsobom uvedeným napríklad v [1] alebo [8]. To znamená, že je vybudovaný aparát na výpočet uzavretého tvaru pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$.

**Lema 3.2.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, nech $\Delta$ je prechodová matica automatu $A$, nech $\Delta'_{(q,c,q')}$ je matica vytvorená rovnako ako v poznámke 3.2.3. Nech $p(x)$ je charakteristický polynóm $\Delta$, nech $p'(x)$ je charakteristický polynóm $\Delta'_{(q,c,q')}$. Potom platí

$$p'(x) = (p(x))^2.$$

**Dôkaz.** Stačí si uvedomiť, že pri výpočte determinantu $p'(x) = |\Delta'_{(q,c,q')} - xI|$ sa nijakým spôsobom nemôže započítať žiaden z $|K| \times |K|$ pravých horných prvkov matice. Tie sa totiž zákonite násobia s niektorým z $|K| \times |K|$ ľavých dolných prvkov matice, a tie sú všetky nulové.

Výsledný determinant má teda tvar súčinu determinantov ľavých horných a pravých dolných $|K| \times |K|$ prvkov, ale to nie je nič iné ako $|\Delta - xI|^2 = (p(x))^2$. □

Pri procese výpočtu systémov rekurentných vzťahov je jediná informácia, ktorú treba vedieť o maticiach $\Delta'_{(q,c,q')}$, jej charakteristický polynóm. Podľa predchádzajúcej lemy je ale charakteristický polynóm takýchto matíc rovnaký pre všetky $(q, c, q') \in D$. To znamená, že možno hovoriť skrátka o matici $\Delta'$, pričom konkrétny prechod, pre ktorý bola daná matica vytvorená, zostane neznámy. V takomto prípade je možné o matici $\Delta'$ uvažovať ako o ľubovoľnej z matíc $\Delta'_{(q,c,q')}$ prípadne ako o ľubovoľnej z matíc, ktorých charakteristický polynóm je druhou mocninou charakteristického polynómu matice $\Delta$.

Metódu výpočtu uzavretého tvaru $|L(A) \cap \Sigma^n|$ teda možno zhrnúť v nasledujúcich bodoch:

1. Systém rekurentných vzťahov z vety 3.2.1, z ktorého možno vypočítať $|L(A) \cap \Sigma^n|$, zapíšeme v maticovom tvare
$$x_n = \Delta \cdot x_{n-1},$$
kde $\Delta$ je prechodová matica automatu $A$.

2. Vypočítame charakteristický polynóm matice $\Delta$ a napíšeme rekurentný vzťah $|K|$-teho stupňa, ktorý má rovnaký charakteristický polynóm.

3. Vyriešime túto rekurenciu klasickými metódami, so začiatočnými podmienkami zistenými preberaním všetkých výpočtov dĺžky najviac $|K| - 1$. Toto riešenie je aj riešením systému z vety 3.2.1.

V skutočnosti však nie je nutné spomínaný rekurentný vzťah $|K|$-teho stupňa riešiť explicitne. Má totiž rovnaký charakteristický polynóm ako matica $\Delta$, a teda je možné všeobecné riešenie systému z vety 3.2.1 získať priamo faktorizáciou charakteristického polynómu matice $\Delta$. Pri procese riešenia je teda možné vynechať jeden medzikrok.

Pre $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ je možné proces riešenia zhrnúť nasledovne:

1. Systém rekurentných vzťahov z vety 3.2.2, z ktorého je možné vypočítať $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$, zapíšeme v maticovom tvare
$$y_n = \Delta' \cdot y_{n-1},$$
kde $\Delta'$ je matica, ktorej charakteristický polynóm je druhá mocnina charakteristického polynómu prechodovej matice $\Delta$.

2. Vypočítame charakteristický polynóm $p(x)$ matice $\Delta$ a charakteristický polynóm $p'(x)$ matice $\Delta'$ získame ako $(p(x))^2$. Napíšeme rekurentný vzťah $2|K|$-teho stupňa, ktorého charakteristický polynóm je $p'(x)$.

3. Tento rekurentný vzťah vyriešime, pričom začiatočné podmienky určíme preberaním všetkých výpočtov dĺžky najviac $2|K| - 1$. Riešenie tohto rekurentného vzťahu je aj riešením systému z vety 3.2.2.

Opäť platí, že je možné vynechať medzikrok pozostávajúci z explicitného pomenovania a riešenia rekurencie $2|K|$-teho stupňa.

**Príklad 3.2.2** Univerzálnu metódu výpočtu uzavretého tvaru pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$, vyplývajúcu z predchádzajúcich tvrdení, ilustrujeme na príklade. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat z príkladu 3.2.1, v ktorom bola opísaná ad hoc metóda výpočtu uzavretého tvaru pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$. Teraz bude uvedený výpočet tohoto uzavretého tvaru univerzálnou metódou.

Ako bolo konštatované v príklade 3.2.1, systém rekurentných vzťahov pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$ má tvar

$$\begin{aligned}
W_0(n) &= W_1(n-1), \\
W_1(n) &= W_0(n-1) + W_2(n-1), \\
W_2(n) &= W_1(n-1) + W_3(n-1), \\
W_3(n) &= W_2(n-1),
\end{aligned}$$

kde $W_i(n) = |L(A_i) \cap \Sigma^n|$, čiže $|L(A) \cap \Sigma^n| = W_0(n)$. Ide teda o systém štyroch rekurentných vzťahov o štyroch neznámych funkciách $W_0, W_1, W_2$ a $W_3$, ktorý sa zredukuje na jeden rekurentný vzťah štvrtého stupňa o jednej neznámej funkcii $W_0$. Preto je potrebné uviesť štyri začiatočné podmienky, ktoré možno vypočítať postupným preberaním všetkých výpočtov na slovách dĺžok 0 až 3. Takýmto postupom dostávame:

$$W_0(0) = 1, \qquad W_0(1) = 0, \qquad W_0(2) = 1, \qquad W_0(3) = 0. \tag{3.9}$$

Nájdeme najprv všeobecné riešenie daného systému rekurencií. Označme ako $x_n$ stĺpcový vektor

$$x_n := (W_0(n), W_1(n), W_2(n), W_3(n))^T.$$

Daný systém rekurencií má potom tvar

$$x_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x_{n-1},$$

pričom matica použitá v tomto vzťahu je prechodová matica $\Delta$.

Zredukujme tento systém rekurentných vzťahov podľa vety 3.2.4 na jeden rekurentný vzťah štvrtého rádu. Charakteristický polynóm matice $\Delta$ má tvar:

$$|\Delta - xI| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^4 - 3x^2 + 1.$$

Z toho vyplýva, že platí rekurentný vzťah

$$x_{n+4} = 3x_{n+2} - x_n,$$

čiže platí aj

$$W_0(n+4) = 3W_0(n+2) - W_0(n). \tag{3.10}$$

Charakteristický polynóm tohto rekurentného vzťahu je rovnaký ako charakteristický polynóm prechodovej matice:

$$x^4 - 3x^2 + 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Preto má všeobecné riešenie rekurencie 3.10, a teda aj celého systému rekurentných vzťahov[2] tvar

$$\begin{aligned} W_0(n) &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_4 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n \left[ c_3 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_4 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

Z predchádzajúceho všeobecného riešenia a začiatočných podmienok (3.9) potom vyplýva jed-

[2] Pokiaľ za riešenie považujeme len $W_0(n)$. Riešenia pre ostatné $W_i(n)$ je však možné nájsť analogickým spôsobom.

noduchý systém lineárnych rovníc o štyroch neznámych $c_1, c_2, c_3$ a $c_4$:

$$\begin{aligned}
c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_4\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 &= 1,\\
c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_4\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 &= 0,\\
c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_4\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 1,\\
c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + c_3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + c_4\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 &= 0.
\end{aligned}$$

Riešením tohoto systému možno získať nasledujúce hodnoty:

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot(1+\sqrt{5})}, \qquad c_2 = c_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(1-\sqrt{5})}.$$

Z toho potom vyplýva, že

$$\begin{aligned}
W_0(n) &= \tfrac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \tfrac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \\
&+ (-1)^n\left[\tfrac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \tfrac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right],
\end{aligned}$$

úpravou čoho dostávame

$$|L(A)\cap\Sigma^n| = W_0(n) = \frac{1}{2}(F_{n-1} + (-1)^n F_{n-1}),$$

čo sa zhoduje s výsledkom získaným v príklade 3.2.1.

Ako príklad výpočtu uzavretého tvaru pre postupnosti typu $\#[q, c, q', L(A)\cap\Sigma^n]$ uvedieme výpočet uzavretého tvaru pre $\#[q_0, a, q_1, L(A)\cap\Sigma^n]$.

Systém rekurentných vzťahov zostavený rovnako ako vo vete 3.2.2 má v tomto prípade tvar:

$$\begin{aligned}
T_0^{(q_0,a,q_1)}(n) &= W_1(n-1) + T_1^{(q_0,a,q_1)}(n-1),\\
T_1^{(q_0,a,q_1)}(n) &= T_0^{(q_0,a,q_1)}(n-1) + T_2^{(q_0,a,q_1)}(n-1),\\
T_2^{(q_0,a,q_1)}(n) &= T_1^{(q_0,a,q_1)}(n-1) + T_3^{(q_0,a,q_1)}(n-1),\\
T_3^{(q_0,a,q_1)}(n) &= T_2^{(q_0,a,q_1)}(n-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_0(n) &= W_1(n-1),\\
W_1(n) &= W_0(n-1) + W_2(n-1),\\
W_2(n) &= W_1(n-1) + W_3(n-1),\\
W_3(n) &= W_2(n-1).
\end{aligned}$$

Matica $\Delta'_{(q_0,a,q_1)}$ má teda v tomto prípade tvar

$$\Delta'_{(q_0,a,q_1)} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

a maticový zápis daného systému rekurencií s neznámymi funkciami

$$T_0^{(q_0,a,q_1)}, \dots, T_3^{(q_0,a,q_1)}, W_0, \dots, W_3$$

je

$$y_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y_{n-1},$$

kde

$$y_n = (T_0^{(q_0,a,q_1)}(n), \dots, T_3^{(q_0,a,q_1)}(n), W_0(n), \dots, W_3(n))^T.$$

Daný systém rekurencií sa zredukuje na jednu rekurenciu ôsmeho rádu o jednej neznámej funkcii $T_0^{(q_0,a,q_1)}$, čo znamená, že treba uviesť osem začiatočných podmienok. Tie sú:

$$\begin{aligned} T_0^{(q_0,a,q_1)}(0) &= 0, \\ T_0^{(q_0,a,q_1)}(1) &= 0, \\ T_0^{(q_0,a,q_1)}(2) &= 1, \\ T_0^{(q_0,a,q_1)}(3) &= 0, \\ T_0^{(q_0,a,q_1)}(4) &= 3, \\ T_0^{(q_0,a,q_1)}(5) &= 0, \\ T_0^{(q_0,a,q_1)}(6) &= 9, \\ T_0^{(q_0,a,q_1)}(7) &= 0. \end{aligned}$$

Teraz možno pristúpiť k riešeniu daného systému rekurencií. Charakteristický polynóm matice $\Delta'_{(q_0,a,q_1)}$ je podľa lemy 3.2.1 rovný

$$|\Delta - xI|^2 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

To znamená, že všeobecné riešenie pre $T_0^{(q_0,a,q_1)}$ je:

$$\begin{aligned} T_0^{(q_0,a,q_1)}(n) &= c_1 n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3 n \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \\ &+ c_4 n \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_5 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_6 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \\ &+ c_7 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_8 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Ostáva zo začiatočných podmienok dourčiť hodnoty $c_1, \dots, c_8$. Možno tak učiniť riešením systému ôsmych lineárnych rovníc o ôsmych neznámych. Tento krok prenechávame čitateľovi.

Opakovaním rovnakého postupu pre ostatné prechody a následným porovnaním koeficientov pri asymptoticky najväčších členoch riešenia potom možno vypočítať aj mieru vyváženosti automatu $A$.

## 3.3 Charakterizácia triedy $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$

**Veta 3.3.1** Automat $A$ so súvislou grafovou reprezentáciou je slabo prechodovo vyvážený práve vtedy, keď je jeho grafová reprezentácia silne súvislá alebo keď akceptuje konečný jazyk.

**Dôkaz.** Pre automaty akceptujúce konečný jazyk tvrdenie zjavne platí, lebo existuje také $n_0$, že pre všetky $n \geq n_0$ je $B_A(n) = 1$, čiže $B_A = 1$. Ďalej preto budeme uvažovať len automaty akceptujúce nekonečný jazyk.

$\Rightarrow$: Nech grafová reprezentácia automatu $A$ nie je silne súvislá. Zo súvislosti grafovej reprezentácie vyplýva, že v nej existuje hrana spájajúca dva rôzne komponenty silnej súvislosti. Táto hrana zodpovedá niektorému prechodu $(p, c, p') \in D$, ktorý zrejme nemôže byť počas výpočtu použitý viac než raz. To znamená, že

$$\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] \leq |L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Ďalej platí, že počet všetkých použití prechodov pri výpočtoch dĺžky $n$ je

$$\sum_{(q,d,q') \in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] = n|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

z čoho vyplýva, že

$$\max_{(q,d,q') \in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n|$$

(poriadne je toto tvrdenie dokázané v leme 3.6.1). Pre automaty, ktoré akceptujú nekonečný jazyk existuje nekonečne veľa $n$ takých, že

$$|L(A) \cap \Sigma^n| > 0.$$

Potom ale platí

$$B_A = \liminf_{n\to\infty} \frac{\min_{(p,c,p') \in D} (\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n]) + 1}{\max_{(q,d,q') \in D} (\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]) + 1} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{|L(A) \cap \Sigma^n| + 1}{\Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n| + 1} = 0,$$

čiže automat nie je slabo prechodovo vyvážený.

$\Leftarrow$: Dokážeme najprv nasledujúce tvrdenie: nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat so silne súvislou grafovou reprezentáciou. Potom existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq 2|K|$ a pre všetky stavy $q \in K$ platí

$$M_q(n) \leq k \cdot m_q(n),$$

kde

$$m_q(n) = \min_{(p,c,p') \in D} \#_{A_q}[p, c, p', L(A_q) \cap \Sigma^n] \quad \text{a} \quad M_q(n) = \max_{(r,d,r') \in D} \#_{A_q}[r, d, r', L(A_q) \cap \Sigma^n]$$

a kde $A_q$ je automat $A_q = (K, \Sigma, \delta, q, F)$. To znamená, že $m_q(n)$ je počet využití minimálne zaťaženého prechodu automatu $A$ na všetkých akceptačných výpočtoch dĺžky $n$ začínajúcich v stave $q$. Hodnota $M_q(n)$ reprezentuje to isté, len pre maximálne zaťažený prechod.

Označme $(q_m(n), c_m(n), q'_m(n))$ niektorý z prechodov, pre ktoré platí

$$\#_{A_q}[q_m(n), c_m(n), q'_m(n), L(A_q) \cap \Sigma^n] = m_q(n)$$

a $(q_M(n), c_M(n), q'_M(n))$ niektorý z prechodov, pre ktoré platí

$$\#_{A_q}[q_M(n), c_M(n), q'_M(n), L(A_q) \cap \Sigma^n] = M_q(n).$$

Dokážeme, že dané tvrdenie platí pre $k = 4|K||\Sigma|^{4|K|}$. Matematickou indukciou vzhľadom na $n$.

1. Nech $n \in \{2|K|, 2|K|+1, \ldots, 4|K|-1\}$. V prípade, že $L(A_q) \cap \Sigma^n = \emptyset$, platí $m_q(n) = M_q(n) = 0$, čo znamená, že tvrdenie platí.
   Nech teda $L(A_q) \cap \Sigma^n \neq \emptyset$. Potom zo silnej súvislosti grafovej reprezentácie automatu $A_q$ a z platnosti nerovnosti $n \geq 2|K|$ vyplýva, že $m_q(n) \geq 1$ (nech je začiatočný aj koncový stav akýkoľvek, stačí $|K|-1$ krokov na to, aby sa výpočet dostal do ľubovoľného stavu, teda aj do počiatočného stavu minimálne využívaného prechodu, jeden krok treba na prejdenie tohto prechodu a potom ďalších maximálne $|K|-1$ prechodov na prejdenie do koncového stavu – na celý tento proces teda stačí $2|K|-1$ prechodov, odhad $2|K|$ bol použitý kvôli lepšej numerickej manipulácii). Naopak, určite platí
   $$M_q(n) \leq n|\Sigma|^n \leq 4|K||\Sigma|^{4|K|}.$$
   Z toho vyplýva, že $M_q(n) \leq k \cdot m_q(n)$, čo znamená, že báza indukcie platí.
2. Nech tvrdenie platí pre všetky $n \in \{2|K|, 2|K|+1, \ldots, 2j|K|-1\}$, kde $j \geq 2$ je prirodzené číslo. Ukážeme, že platí aj pre všetky $n' \in \{2j|K|, 2j|K|+1, \ldots, 2(j+1)|K|-1\}$.
   Nech teda $n' \in \{2j|K|, 2j|K|+1, \ldots, 2(j+1)|K|-1\}$. Každé slovo z $L(A_q)$ dĺžky $n'$ sa skladá z nejakého prefixu dĺžky $2|K|$ a nejakého „zvyšku" dĺžky $n'-2|K|$, ktorý má vlastnosť, že ak výpočet na ňom začne v stave, v ktorom skončil výpočet na prefixe, automat akceptuje. Rozdelíme teda každé slovo z $L(A_q)$ dĺžky $n'$ takýmto spôsobom na dve časti, pričom pri dokazovaní tvrdenia využijeme indukčný predpoklad pre druhú časť slova.
   Označme teda ako $W$ množinu slov dĺžky $2|K|$, ktoré automat $A_q$ dočíta.[3] Označme ako $F(w)$ stav, v ktorom skončí výpočet automatu $A_q$ na danom slove $w \in W$. Potom platí
   $$\begin{aligned} m_q(n') &\geq \sum_{w \in W} \Big( \#_{A_q}[q_m(n'), c_m(n'), q'_m(n'), w] + m_{F(w)}(n'-2|K|) \Big) = \\ &= \#_{A_q}[q_m(n'), c_m(n'), q'_m(n'), W] + \sum_{w \in W} m_{F(w)}(n'-2|K|), \end{aligned} \tag{3.11}$$
   $$\begin{aligned} M_q(n') &\leq \sum_{w \in W} \Big( \#_{A_q}[q_M(n'), c_M(n'), q'_M(n'), w] + M_{F(w)}(n'-2|K|) \Big) \overset{IP}{\leq} \\ &\overset{IP}{\leq} \#_{A_q}[q_M(n'), c_M(n'), q'_M(n'), W] + \sum_{w \in W} k \cdot m_{F(w)}(n'-2|K|). \end{aligned} \tag{3.12}$$
   V (3.11) a (3.12) sú v prvom kroku nerovnosti namiesto rovností preto, lebo nie je isté, že platí $(q_m(n'), c_m(n'), q'_m(n')) = (q_m(n'-2|K|), c_m(n'-2|K|), q'_m(n'-2|K|))$ a $(q_M(n'), c_M(n'), q'_M(n')) = (q_M(n'-2|K|), c_M(n'-2|K|), q'_M(n'-2|K|))$.
   Je zjavné, že platí
   $$\#_{A_q}[q_M(n'), c_M(n'), q'_M(n'), W] \leq k \cdot \#_{A_q}[q_m(n'), c_m(n'), q'_m(n'), W], \tag{3.13}$$
   na dôkaz možno použiť ten istý postup, ako v dôkaze bázy indukcie. Z (3.11), (3.12) a (3.13) potom vyplýva
   $$\begin{aligned} M_q(n') &\leq \#_{A_q}[q_M(n'), c_M(n'), q'_M(n'), W] + \sum_{w \in W} k \cdot m_{F(w)}(n'-2|K|) \leq \\ &\leq k \cdot \left( \#_{A_q}[q_m(n'), c_m(n'), q'_m(n'), W] + \sum_{w \in W} m_{F(w)}(n'-2|K|) \right) \leq k \cdot m_q(n'), \end{aligned}$$
   čo bolo treba dokázať.

[3] Za účelom zjednodušenia zápisu budeme v ďalších častiach tohto dôkazu používať rozšírenú definíciu $\#_A[p, c, p', w]$ a $\#_A[p, c, p', L]$, ktorá nebude požadovať predpoklad $w \in L(A)$ v resp. $L \subseteq L(A)$, ale len dočítanie slova $w$ v resp. všetkých slov z jazyka $L$ automatom $A$.

Z práve dokázaného tvrdenia je už jednoduché dokázať aj požadované znenie implikácie. Pre $n \geq 2|K|$ totiž musí platiť

$$\begin{aligned} B_A(n) &= \frac{\min_{(p,c,p')\in D} \left(\#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n]\right)+1}{\max_{(q,d,q')\in D} \left(\#[q,d,q',L(A)\cap\Sigma^n]\right)+1} \geq \\ &\geq \frac{\min_{(p,c,p')\in D} \left(\#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n]\right)+1}{k\cdot\min_{(p,c,p')\in D} \left(\#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n]\right)+1}, \end{aligned}$$

z čoho vyplýva

$$B_A = \liminf_{n\to\infty} B_A(n) \geq \frac{1}{k} > 0,$$

čo znamená, že automat je slabo prechodovo vyvážený.

□

Požiadavka súvislosti grafovej reprezentácie v znení predošlej vety nie je nijak obmedzujúca. Ku každému automatu je totiž možné zostrojiť ekvivalentný automat so súvislou grafovou reprezentáciou jednoducho vymazaním komponentov súvislosti neobsahujúcich počiatočný stav.

V skutočnosti však súvislosť grafovej reprezentácie nie je nutnou podmienkou pre platnosť vety – stačí, pokiaľ sa v grafovej reprezentácii nenachádzajú osamotené vrcholy, z ktorých, ani do ktorých nevedie žiaden prechod.

Vzhľadom na skutočnosť, že automaty, ktoré nemajú súvislú grafovú reprezentáciu nemajú veľký praktický význam, budeme ďalej v niektorých prípadoch pojem *slabo prechodovo vyvážený automat* stotožňovať s pojmom *slabo prechodovo vyvážený automat so súvislou grafovou reprezentáciou*. Nedopustíme sa teda veľkej chyby, ak budeme o každom slabo prechodovo vyváženom automate predpokladať silnú súvislosť jeho grafovej reprezentácie.

**Veta 3.3.2** Ak je jazyk $L$ slabo prechodovo vyvážený, je aj minimálny automat, ktorý ho akceptuje, slabo prechodovo vyvážený.

**Dôkaz.** Nech $L$ je slabo prechodovo vyvážený jazyk, nech $A$ je ľubovoľný slabo prechodovo vyvážený automat taký, že $L(A) = L$. Za účelom sporu predpokladajme, že minimálny automat $B$ taký, že $L(B) = L$ nie je slabo prechodovo vyvážený.

(V nasledujúcom sa kvôli jednoduchosti budú za triedy ekvivalencie Myhillovej-Nerodovej relácie považovať len tie, ktorých slová sa dajú doplniť na slová z akceptovaného jazyka. Žiaden slabo prechodovo vyvážený automat akceptujúci nekonečný jazyk totiž zrejme nemôže obsahovať stav zodpovedajúci triede, ktorá túto vlastnosť nemá. To isté platí aj pre ľubovoľný minimálny automat. Pre konečné jazyky je zas tvrdenie vety triviálne platné. Preto je možné dopustiť sa tejto menšej nepresnosti.)

Stavom, v ktorom sa momentálne nachádza automat $A$, je jednoznačne určená trieda ekvivalencie Myhillovej-Nerodovej relácie, v ktorej sa nachádza posiaľ prečítaná časť vstupného slova. Keďže je automat $A$ slabo prechodovo vyvážený, je jeho grafová reprezentácia silne súvislá, čo znamená, že v ľubovoľnom momente sa výpočet „nejakým spôsobom môže dostať" do ľubovoľného stavu. Formálne, pre každé dve triedy ekvivalencie $R_1, R_2$ a každé slovo $u \in \Sigma^*$ platí:

$$u \in R_1 \Rightarrow (\exists v \in \Sigma^* : uv \in R_2). \tag{3.14}$$

Naopak, z predpokladu, že $B$ nie je slabo prechodovo vyvážený vyplýva, že grafová reprezentácia tohto automatu nie je silne súvislá, čo znamená, že existuje dvojica stavov $p, q$ taká, že z $p$ sa nedá dostať do $q$. Keďže je automat $B$ minimálny, musí byť $p$ dosiahnuteľný (existuje slovo, na ktorom končí výpočet v $p$). Naviac, z minimálnosti $B$ vyplýva, že každý stav zodpovedá jednej triede ekvivalencie Myhillovej-Nerodovej relácie. Teda, existujú triedy ekvivalencie $R_1, R_2$ a slovo $u \in \Sigma^*$ tak, že platí

$$u \in R_1 \ \wedge\ (\forall v \in \Sigma^* : uv \notin R_2).$$

To je však presná negácia (3.14), a keďže sú triedy ekvivalencie Myhillovej-Nerodovej relácie určené pre každý jazyk jednoznačne, dostávame spor. □

## 3.4 Uzáverové vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$

**Veta 3.4.1** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na zreťazenie.

**Dôkaz.** Jazyky $\{a\}^*$ a $\{b\}^*$ sú evidentne slabo prechodovo vyvážené. V príklade 3.1.2 je však dokázané, že automat, ktorý je minimálnym automatom akceptujúci jazyk $\{a\}^*\{b\}^*$ nie je slabo prechodovo vyvážený, čo podľa vety 3.3.2 znamená, že ani tento jazyk nie je slabo prechodovo vyvážený. □

**Veta 3.4.2** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na zjednotenie.

**Dôkaz.** Jazyky $\{a\}^*$ a $\{b\}$ sú zjavne slabo prechodovo vyvážené. Ich zjednotenie, $\{a\}^* \cup \{b\}$ však nie je slabo prechodovo vyvážené, keďže minimálny automat akceptujúci tento jazyk nie je slabo prechodovo vyvážený. □

**Veta 3.4.3** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na prienik.

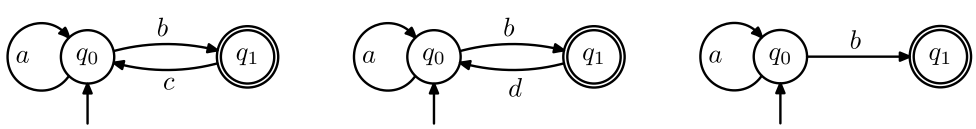
**Dôkaz.** Uvažujme jazyky $L_1 = \{a, bc\}^*\{b\}$ a $L_2 = \{a, bd\}^*\{b\}$. Oba tieto jazyky sú slabo prechodovo vyvážené. Existuje totiž slabo prechodovo vyvážený automat $A_1$ taký, že $L(A_1) = L_1$ a slabo prechodovo vyvážený automat $A_2$ taký, že $L(A_2) = L_2$. Platí $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$, kde $K_1 = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, $q_{0,1} = q_0$, $F_1 = \{q_1\}$ a

$$\begin{array}{rcl} \delta_1(q_0, a) & = & q_0, \\ \delta_1(q_0, b) & = & q_1, \\ \delta_1(q_1, c) & = & q_0 \end{array}$$

a pre $A_2$ platí $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$, kde $K_2 = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma_2 = \{a, b, d\}$, $q_{0,2} = q_0$, $F_2 = \{q_1\}$ a

$$\begin{array}{rcl} \delta_2(q_0, a) & = & q_0, \\ \delta_2(q_0, b) & = & q_1, \\ \delta_2(q_1, d) & = & q_0. \end{array}$$

Oba automaty sú zjavne slabo prechodovo vyvážené (obrázok 3.5).




(a) Automat $A_1$. (b) Automat $A_2$. (c) Automat $A$.

**Obrázok 3.5:** Slabo prechodovo vyvážené automaty $A_1$ a $A_2$ a konečný automat $A$ akceptujúci prienik $L(A_1) \cap L(A_2)$. Automat $A$ je zrejme minimálny, ale nie je slabo prechodovo vyvážený, čo znamená, že ani $L(A_1) \cap L(A_2)$ nie je slabo prechodovo vyvážený.

Pre prienik jazykov $L_1$ a $L_2$ zrejme platí $L_1 \cap L_2 = \{a\}^*\{b\}$. Minimálny automat $A$ akceptujúci $L_1 \cap L_2$ však je $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_1\}$ a

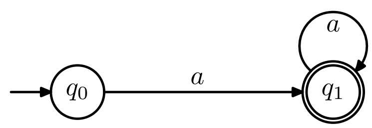
$$\begin{array}{rcl} \delta(q_0, a) & = & q_0, \\ \delta(q_0, b) & = & q_1. \end{array}$$

Tento automat však zrejme nie je slabo prechodovo vyvážený, čo znamená, že ani jazyk $L_1 \cap L_2$ nie je slabo prechodovo vyvážený. □

**Veta 3.4.4** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na komplement.

**Dôkaz.** Uvažujme konečný jazyk $L = \{\varepsilon\}$ a abecedu $\Sigma = \{a\}$ – univerzum je teda $2^{\{a\}^*}$. Jazyk $L$ je očividne slabo prechodovo vyvážený, ukážeme, že $L^C = \{a\}^+$ nie je slabo prechodovo vyvážený. Minimálny automat $A$ akceptujúci $L^C$ je $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a\}$, $F = \{q_1\}$ a pre prechodovú funkciu platí

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= q_1,\\ \delta(q_1, a) &= q_1.\end{aligned}$$



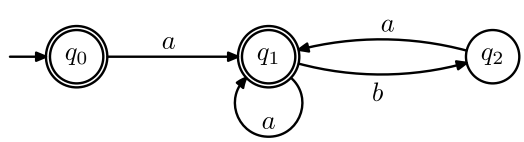

**Obrázok 3.6:** Minimálny automat $A$ akceptujúci jazyk $L^C$ nemá silne súvislú grafovú reprezentáciu, čo znamená, že $L^C$ nie je slabo prechodovo vyvážený.

Tvrdenie $L(A) = \{a\}^+$ je zrejmé.

Automat $A$ je zjavne minimálnym automatom akceptujúcim $L$, a keďže nemá silne súvislú grafovú reprezentáciu, nemôže byť $L^C$ slabo prechodovo vyvážený. □

**Veta 3.4.5** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na iteráciu.

**Dôkaz.** Uvažujme jazyk $L = \{ab\}^* \cdot \{a\}$. K jazyku je ľahké zostrojiť slabo prechodovo vyvážený automat $A$ taký, že $L(A) = L$.




**Obrázok 3.7:** Minimálny automat $B$ akceptujúci jazyk $L^*$ nemá silne súvislú grafovú reprezentáciu, čo znamená, že $L^*$ nie je slabo prechodovo vyvážený.

Minimálny automat akceptujúci $L^*$ je $B = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_0, q_1\}$ a

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= q_1,\\ \delta(q_1, a) &= q_1,\\ \delta(q_1, b) &= q_2,\\ \delta(q_2, a) &= q_1.\end{aligned}$$

Tento automat zjavne nie je slabo prechodovo vyvážený, a keďže je to minimálny automat, nie je ani jazyk $L^*$ slabo prechodovo vyvážený. □

**Veta 3.4.6** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na kladnú iteráciu.

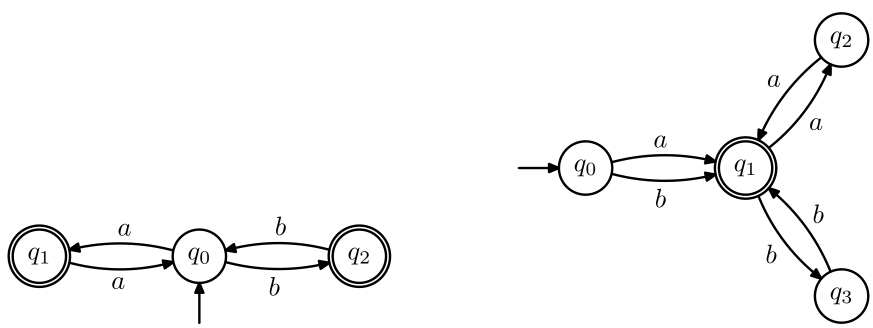
**Dôkaz.** Vezmime jazyk $L = \{a\}$. Tento je konečný, a preto je slabo prechodovo vyvážený. Minimálny automat $A$ akceptujúci $L^+ = \{a\}^+$ ale nie je, ako bolo dokázané vo vete 3.4.4, slabo prechodovo vyvážený, a teda nie je slabo prechodovo vyvážený ani jazyk $L$. □

**Veta 3.4.7** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na reverz.

**Dôkaz.** Uvažujme jazyk $L = \{aa, bb\}^*\{a, b\}$. Minimálny automat akceptujúci $L$ je $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, pre ktorý platí $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ a

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= q_1, \\ \delta(q_1, a) &= q_0, \\ \delta(q_0, b) &= q_2, \\ \delta(q_2, b) &= q_0. \end{aligned}$$

Automat $A$ zjavne má silne súvislú grafovú reprezentáciu, čo znamená, že $L \in \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$.




(a) Automat $A$.

(b) Automat $A'$.

**Obrázok 3.8:** Minimálny automat $A$ akceptujúci jazyk $L$ je slabo prechodovo vyvážený, ale minimálny automat $A'$ akceptujúci jazyk $L^R$ nie je.

Reverz jazyka $L$ je $L^R = \{a, b\}\{aa, bb\}^*$. Minimálny automat akceptujúci jazyk $L^R$ je $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$, pre ktorý platí $K' = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma' = \{a, b\}$ $q_0' = q_0$, $F' = \{q_1\}$ a

$$\begin{aligned} \delta'(q_0, a) &= q_1, \\ \delta'(q_0, b) &= q_1, \\ \delta'(q_1, a) &= q_2, \\ \delta'(q_1, b) &= q_3, \\ \delta'(q_2, a) &= q_1, \\ \delta'(q_3, b) &= q_1. \end{aligned}$$

Tento automat však zrejme nemá silne súvislú grafovú reprezentáciu, čo znamená, že $L^R \notin \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$. Z toho vyplýva, že $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na reverz. □

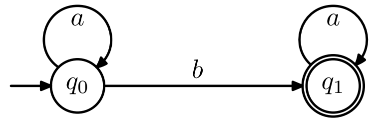
**Veta 3.4.8** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na homomorfizmus.

**Dôkaz.** Vezmime jazyk $L = \{ab\}^* \cdot \{a\}$. Nie je ťažké zostrojiť slabo prechodovo vyvážený automat akceptujúci daný jazyk. Uvažujme homomorfizmus $h$ definovaný ako

$$\begin{aligned} h(a) &= a, \\ h(b) &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Potom platí $h(L) = \{a\}^* \cdot \{a\} = \{a\}^+$. Ale o tomto jazyku bolo už v dôkaze vety 3.4.4 dokázané, že nie je slabo prechodovo vyvážený. □

**Veta 3.4.9** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ nie je uzavretá na inverzný homomorfizmus.




**Obrázok 3.9:** Minimálny automat $A$ akceptujúci jazyk $h^{-1}(L)$ nemá silne súvislú grafovú reprezentáciu, čo znamená, že $h^{-1}(L)$ nie je slabo prechodovo vyvážený.

**Dôkaz.** Uvažujme jazyk $L = \{b\}$ a homomorfizmus $h$ taký, že

$$\begin{aligned} h(a) &= \varepsilon, \\ h(b) &= b. \end{aligned}$$

Zjavne platí

$$h^{-1}(L) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_b(w) = 1\}.$$

Minimálny automat akceptujúci tento jazyk je $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_1\}$, a kde pre prechodovú funkciu platí

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= q_0, \\ \delta(q_0, b) &= q_1, \\ \delta(q_1, a) &= q_1. \end{aligned}$$

Tvrdenie, že $A$ je minimálny automat akceptujúci $h^{-1}(L)$, je triviálne.

Automat $A$ ale zrejme nemá silne súvislú grafovú reprezentáciu, čo znamená, že jazyk $h^{-1}(L)$ nie je slabo prechodovo vyvážený. □

## 3.5 Perronova-Frobeniova veta

V tejto časti práca obsahuje základné poznatky ohľadom Perronovej-Frobeniovej vety a súvisiacich konceptov v spektrálnej teórii grafov. Perronova-Frobeniova veta umožní pre slabo prechodovo vyvážené automaty lepšie charakterizovať všeobecné riešenia rekurentných vzťahov z časti 3.2. Získané poznatky sa využijú pri dôkaze analytických vlastností hodnôt $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$, potrebných napríklad pre dôkaz správnosti alternatívnej definície prechodovej vyváženosti alebo pri štúdiu konvergencie čiastočných postupností kvocientov vyváženosti.

**Definícia 3.5.1** *Ireducibilná matica* je nezáporná matica $A$ typu $n \times n$ taká, že pre každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existuje $k > 0$ také, že $A^k(i, j) > 0$.

**Definícia 3.5.2** *Primitívna matica* je nezáporná matica $A$ typu $n \times n$ taká, že existuje $k$ také, že pre každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $A^k(i, j) > 0$.

**Veta 3.5.1** Graf $G$ je silne súvislý práve vtedy, keď je jeho matica susednosti ireducibilná.

**Dôkaz.** Možno nájsť v [3] alebo [4]. □

**Poznámka 3.5.1** Nahliadnuť predchádzajúce tvrdenie nie je ťažké. Ireducibilita matice susednosti grafu totiž znamená, že pre každú dvojicu vrcholov existuje číslo $k > 0$ také, že medzi nimi existuje orientovaný sled dĺžky $k$. Inými slovami – každé dva vrcholy sú spojené orientovaným sledom určitej dĺžky, čo je vlastnosť silne súvislých grafov.

Predchádzajúce sa dá ľahko preložiť aj do reči automatov: ireducibilita prechodovej matice automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ znamená, že pre každú dvojicu stavov $p, q \in K$ existuje konštanta $k$ a slovo $w$ s $|w| = k$ také, že platí $(p, w) \vdash^k (q, \varepsilon)$.

V nasledujúcom budú zavedené pojmy *periódy* grafu a matice, ako aj odvodený pojem periódy automatu. Pod periódou automatu si je možné predstaviť najväčší počet tried $P$, na ktoré sa dá rozdeliť množina jeho stavov tak, že výpočty na slovách rovnakej dĺžky končia v stavoch z rovnakej triedy a v prípade, že výpočet na určitom slove skončil v stave z istej triedy, skončí aj výpočet na ľubovoľnom slove o $P$ dlhšom v stave z tej istej triedy. Vyplynie, že takýto rozklad je rozkladom množiny stavov na triedy ekvivalencie.

Koncept periódy automatu sa bude definovať pomocou konceptu periódy grafu. Ten však sleduje tú istú myšlienku, aká bola naznačená v predchádzajúcom odstavci. Perióda matice zas bude definovaná na základe periódy grafu, ktorého je maticou susednosti.

Zaoberať sa periódami automatov a príbuzných štruktúr je nesmierne dôležité najmä v kontexte Perronovej-Frobeniovej vety, ktorá bude uvedená v závere tejto časti. Perióda automatu totiž vďaka tejto vete nesie dôležitú informáciu o analytických vlastnostiach hodnôt $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$, ktorými sa bude práca zaoberať v časti 3.6.

**Definícia 3.5.3** Nech $G$ je silne súvislý graf. *Periódou* grafu $G$ nazveme najväčší spoločný deliteľ dĺžok cyklov v grafe $G$.

**Označenie 3.5.1** Nech $A$ je nezáporná matica. Symbolom $G(A)$ označíme graf, ktorého matica susednosti je $A$.

**Definícia 3.5.4** Nech $A$ je ireducibilná matica. *Periódou* matice $A$ nazveme periódu grafu $G(A)$.

**Definícia 3.5.5** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. *Periódou* automatu $A$ nazveme periódu jeho grafovej reprezentácie.

**Veta 3.5.2** Orientovaný graf $G = (V, E, d)$ má periódu $P$ práve vtedy, keď existujú množiny $V_0, V_1, \ldots, V_{P-1}$ tak, že platí
$$V = V_0 \uplus V_1 \uplus \ldots \uplus V_{P-1},$$
pričom platí

$(i)$ Ak $v_i \in V_k$ a $\exists e \in E : d(e) = (v_i, v_j)$, potom $v_j \in V_{(k+1) \bmod P}$.

$(ii)$ Číslo $P$ je najväčšie s takýmito vlastnosťami.

**Dôkaz.** Priamy dôsledok analogického tvrdenia pre markovovské reťazce uvedeného v [7]. □

**Definícia 3.5.6** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Nech grafová reprezentácia $G$ automatu $A$ má periódu $P$, nech $V_0, V_1, \ldots, V_{P-1}$ sú množiny, na ktoré sa dá množina vrcholov grafu $G$ rozložiť spôsobom z vety 3.5.2, pričom vrchol zodpovedajúci stavu $q_0$ patrí do množiny $V_0$.[4] *Zobrazením charakterizujúcim periodický rozklad* automatu $A$ nazveme zobrazenie $\mathscr{P} : \mathbb{Z}_P \to 2^K$ také, že $\mathscr{P}(i)$ je množina stavov zodpovedajúcich vrcholom z $V_i$.

**Lema 3.5.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Relácia $R \subseteq K^2$ definovaná ako
$$qRp \iff \exists k : q \in \mathscr{P}(k) \ \wedge \ p \in \mathscr{P}(k)$$
je reláciou ekvivalencie na $K$.

**Dôkaz.** Triviálne. □

**Poznámka 3.5.2** Rozklad množiny $K$ na triedy ekvivalencie $\mathscr{P}(k)$ relácie ekvivalencie $R$ z predchádzajúcej lemy budeme nazývať aj *periodický rozklad* automatu $A$.

[4] Takýto rozklad je zrejme určený jednoznačne.

**Definícia 3.5.7** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat s periódou $P$. Nech $G = (V, E, d)$ je jeho grafová reprezentácia (bez ohodnotenia). *Grafom indukovaným triedou $\mathscr{P}(k)$ periodického rozkladu automatu $A$* nazveme orientovaný graf $\Pi_k(A) = (V', E', d')$ taký, že $V'$ je množina vrcholov grafu $G$ zodpovedajúcich stavom z $\mathscr{P}(k)$,

$$\begin{aligned} E' \quad = \quad & \{e_0 \dots e_{P-1} \mid \forall i \in \mathbb{Z}_P : e_i \in E; \forall i \in \mathbb{Z}_{P-1} : d(e_i) = (v_1, v_2) \Rightarrow \exists v_3 \in V : d(e_{i+1}) = (v_2, v_3); \\ & \mathrm{pr}_1(d(e_0)) \in V'; \mathrm{pr}_2(d(e_{P-1})) \in V'\} \end{aligned}$$

a pre incidenčnú funkciu $d'$ platí

$$d'(e_0 \dots e_{P-1}) = (\mathrm{pr}_1(d(e_0)), \mathrm{pr}_2(d(e_{P-1}))).$$

Graf indukovaný triedou $\mathscr{P}(k)$ je teda graf, ktorého množina vrcholov zodpovedá množine stavov $\mathscr{P}(k)$ automatu $A$, pričom medzi dvoma vrcholmi vedie $m$ hrán práve vtedy, keď medzi zodpovedajúcimi stavmi v pôvodnom automate $A$ viedlo práve $m$ výpočtov dĺžky $P$, kde $P$ je perióda automatu $A$.

Je dôležité si uvedomiť, že takto definovaný graf nie je grafovou reprezentáciou žiadneho zmysluplného automatu. To vyplýva aj z toho, že sa pre neho nedefinuje ohodnotenie hrán.

**Veta 3.5.3 (Perron, Frobenius)** Nech $A$ je ireducibilná matica s periódou $P$, nech $\rho(A)$ je spektrálny polomer[5] matice $A$. Potom existuje práve $P$ koreňov charakteristického polynómu matice $A$ s absolútnou hodnotou $\lambda = \rho(A)$, pričom platí:

1. Všetky tieto korene sú jednoduché.
2. Tieto korene sú $\lambda, \xi\lambda, \dots, \xi^{P-1}\lambda$, kde $\xi$ je komplexné číslo s najmenším možným nenulovým argumentom,[6] pre ktoré platí $\xi^P = 1$.

**Dôkaz.** Možno nájsť v [3] alebo [4]. □

**Poznámka 3.5.3** Perronova-Frobeniova veta má aj ďalšie časti, ktoré sú však pre účely tejto práce irelevantné.

## 3.6 Analytické vlastnosti $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q,c,q',L(A)\cap\Sigma^n]$

V tejto časti bude dokázaná séria tvrdení o analytických vlastnostiach hodnôt $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#[q,c,q',L(A)\cap\Sigma^n]$, ktoré sa neskôr využijú pri dôkaze rôznych tvrdení o triede $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$.

**Lema 3.6.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat. Potom pre počet využití $M_n$ najčastejšie používaného prechodu na slovách dĺžky $n$ platí

$$M_n = \Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

**Dôkaz.** Keďže pre všetky slová $w$ dĺžky $n$ platí

$$\sum_{(q,c,q')\in D} \#[q,c,q',w] = n,$$

platí pre počet $M_w$ využití najčastejšie používaného prechodu na danom slove $w$ vzťah

$$M_w \geq \frac{n}{|D|}.$$

[5] Teda najväčšia z absolútnych hodnôt vlastných čísel matice $A$.

[6] Pre komplexné číslo $z = a + bi$ sa argument $\arg(z)$ definuje ako číslo $\varphi \in [0, 2\pi)$ také, že platí $a + bi = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$.

Určite existuje aspoň jeden prechod, ktorý je maximálne využívaný aspoň na $\left\lceil \frac{|L(A)\cap\Sigma^n|}{|D|} \right\rceil$ slovách. Preto platí

$$M_n \geq \frac{n}{|D|} \cdot \frac{|L(A) \cap \Sigma^n|}{|D|} = \frac{1}{|D|^2} \cdot n|L(A) \cap \Sigma^n| = \Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

čiže $M_n = \Omega(n)|L(A) \cap \Sigma^n|$.

Avšak na slovách dĺžky $n$ sa použije presne $n|L(A) \cap \Sigma^n|$ prechodov, čiže platí

$$M_n = O(n)|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

a teda aj

$$M_n = \Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

čo bolo treba dokázať. □

**Lema 3.6.2** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je slabo prechodovo vyvážený konečný automat. Potom pre každý prechod $(q, c, q') \in D$ platí

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

**Dôkaz.** Sporom. Nech tvrdenie neplatí. Potom (vzhľadom na to, že maximálne zaťaženie prechodu je $n|L(A) \cap \Sigma^n|$) existuje prechod $(q, c, q') \in D$ a rastúca postupnosť indexov $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ tak, že

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^{n_k}] = o(n_k)|L(A) \cap \Sigma^{n_k}|.$$

Ak existuje aspoň 1 takýto prechod, nutne platí, že najzriedkavejšie využívaný prechod na slovách dĺžok z postupnosti $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ má takúto vlastnosť, čo znamená

$$B_A = \liminf_{n\to\infty} \frac{\min_{(p,c,p')\in D} (\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n]) + 1}{\max_{(q,d,q')\in D} (\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]) + 1} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{o(n_k)|L(A) \cap \Sigma^{n_k}|}{\Theta(n_k)|L(A) \cap \Sigma^{n_k}|} = 0,$$

čo je spor s predpokladom, že $A$ je slabo prechodovo vyvážený. □

**Lema 3.6.3** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je slabo prechodovo vyvážený konečný automat. Potom pre každý prechod $(q, c, q') \in D$ existuje reálna postupnosť $a_n$ periodická s periódou $P$, kde $P$ je perióda automatu $A$ tak, že platí

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (a_n n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

**Dôkaz.** Keďže je automat $A$ slabo prechodovo vyvážený, je jeho prechodová matica ireducibilná a z Perronovej-Frobeniovej vety (3.5.3) vyplýva, že všeobecné riešenie systému rekurencií pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$ uvedeného v časti 3.2 má tvar[7]

$$|L(A) \cap \Sigma^n| = \lambda^n (c_0 + c_1\xi^n + \ldots + c_{P-1}\xi^{(P-1)n}) \pm o(\lambda^n).$$

Z lemy 3.2.1, ktorá hovorí, že charakteristický polynóm matice systému rekurencií pre veličinu $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ je druhou mocninou charakteristického polynómu matice systému rekurencií pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$, vyplýva, že všeobecné riešenie systému rekurencií pre $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ má tvar

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = n\lambda^n (d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n}) \pm o(n\lambda^n). \tag{3.15}$$

[7] Funkcie $\xi^n, \ldots, \xi^{(P-1)n}$ sú lineárne nezávislé, keďže Casoratiho matica pre tieto funkcie je Vandermondovou maticou, ktorá má pre systémy po dvoch rôznych kvocientov nenulový determinant.

Ale v člene $o(n\lambda^n)$ sú iba členy typu $c\chi^n$, kde $|\chi| \leq \lambda$ a členy typu $p(n)\chi^n$, kde $p(n)$ je polynóm o premennej $n$ a $|\chi| < \lambda$. To znamená, že (3.15) možno prepísať ako

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = n\lambda^n(d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n}) \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Výrazy

$$c_0 + c_1\xi^n + \ldots + c_{P-1}\xi^{(P-1)n}$$

a

$$d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n}$$

sú zjavne periodické s periódou $P$. Naviac, z lemy 3.6.2 vyplýva, že ak je

$$c_0 + c_1\xi^n + \ldots + c_{P-1}\xi^{(P-1)n} \neq 0,$$

potom aj

$$d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n} \neq 0.$$

To znamená, že existuje reálna postupnosť $a_n$ s periódou $P$ taká, že platí

$$(d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n}) = a_n(c_0 + c_1\xi^n + \ldots + c_{P-1}\xi^{(P-1)n}),$$

čiže

$$n\lambda^n(d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n}) = a_n n\lambda^n(c_0 + c_1\xi^n + \ldots + c_{P-1}\xi^{(P-1)n}),$$

čo znamená

$$n\lambda^n(d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n}) = a_n n(|L(A) \cap \Sigma^n| \pm o(\lambda^n)).$$

Ale, keďže $n \cdot o(\lambda^n) = O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|$, platí

$$n\lambda^n(d_0 + d_1\xi^n + \ldots + d_{P-1}\xi^{(P-1)n}) = (a_n n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

čo ale znamená

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (a_n n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n| \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n| = (a_n n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

čo bolo treba dokázať. □

**Označenie 3.6.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Potom symbolom $A_{q,X}$ označíme automat $A_{q,X} = (K, \Sigma, \delta, q, X)$. Symbolom $A_q$ označíme automat $A_{q,F}$ a symbolom $A_X$ označíme automat $A_{q_0,X}$.

**Lema 3.6.4** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je slabo prechodovo vyvážený deterministický konečný automat s periódou $P$, nech $k \in \{0, \ldots, P-1\}$. Potom pre všetky $(q, c, q') \in D$ existuje konštanta $a$ taká, že pre všetky $X \subseteq \mathscr{P}(k)$ platí

$$\#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A_X) \cap \Sigma^n|.$$

**Dôkaz.**

1. Najprv dokážeme, že tvrdenie platí pre všetky jednoprvkové množiny $X$. Podľa lemy 3.6.3 existuje pre každé $X$ postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ s periódou $P$ taká, že

$$\#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^n] = (a_n n \pm O(1))|L(A_X) \cap \Sigma^n|.$$

Ale hodnota $|L(A_X) \cap \Sigma^n|$ môže nadobúdať nenulové hodnoty len pre $n$ také, že $n \bmod P = k$, čo znamená, že existuje konštanta $a_X$ taká, že

$$\#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^n] = (a_X n \pm O(1))|L(A_X) \cap \Sigma^n|. \tag{3.16}$$

Zostáva teda dokázať, že pre všetky jednoprvkové množiny $X, Y \subseteq \mathscr{P}(k)$ platí $a_X = a_Y$.

Nech $s \in \mathbb{N}$ je číslo také, že medzi každými dvoma stavmi z $\mathscr{P}(k)$ existuje cesta dĺžky $sP$.[8] Nech

$$NW[q_1, q_2] := |\{w \in \Sigma^* \mid (q_1, w) \vdash^{sP} (q_2, \varepsilon)\}|$$

je počet výpočtov dĺžky $sP$ medzi stavmi $q_1$ a $q_2$ v automate $A$. Nech

$$NU[q_1, q_2] := \sum_{\substack{w \in \Sigma^* \\ (q_1, w) \vdash^{sP} (q_2, \varepsilon)}} \#_{A_{q_1, \{q_2\}}}[q, c, q', w]$$

je počet využití prechodu $(q, c, q')$ v takýchto výpočtoch.

Ďalej sporom. Nech tvrdenie neplatí, teda nech existujú jednoprvkové množiny $X = \{q_X\}, Y = \{q_Y\}$, $X, Y \subseteq \mathscr{P}(k)$ tak, že $a_X \neq a_Y$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a_X$ je spomedzi všetkých hodnôt $a_Z$ pre jednoprvkové množiny $Z \subseteq \mathscr{P}(k)$ minimálna.

Teda predpokladáme, že platí

$$\#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^n] = (a_X n \pm O(1))|L(A_X) \cap \Sigma^n|$$

a

$$\#_{A_Y}[q, c, q', L(A_Y) \cap \Sigma^n] = (a_Y n \pm O(1))|L(A_Y) \cap \Sigma^n|,$$

pričom $a_X < a_Y$, ako aj $a_X \leq a_Z$ pre všetky jednoprvkové množiny $Z$.

Z toho vyplýva, že platí aj

$$\begin{aligned} \#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}] &= (a_X(n + sP) \pm O(1))|L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}| = \\ &= (a_X n \pm O(1))|L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Avšak pre $\#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}]$ tiež zjavne platí vzťah

$$\begin{aligned} \#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}] &= \textstyle\sum_{p \in \mathscr{P}(k)} \Big(\#_{A_{\{p\}}}[q, c, q', L(A_{\{p\}}) \cap \Sigma^n] \cdot NW[p, q_X] + \\ &\quad + |L(A_{\{p\}}) \cap \Sigma^n| \cdot NU[p, q_X]\Big), \end{aligned}$$

z ktorého použitím (3.16) a obsiahnutím $|L(A_{\{p\}}) \cap \Sigma^n| \cdot NU[p, q_X]$ v asymptotickom odhade dostávame

$$\#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}] = \sum_{p \in \mathscr{P}(k)} (a_{\{p\}} n \pm O(1)) \cdot NW[p, q_X] \cdot |L(A_{\{p\}}) \cap \Sigma^n|. \tag{3.18}$$

Teraz, pre hodnotu $S_n := |L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}|$ platí

$$S_n = |L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}| = \sum_{p \in \mathscr{P}(k)} NW[p, q_X] \cdot |L(A_{\{p\}}) \cap \Sigma^n|,$$

z čoho s využitím (3.17) dostávame

$$\#_{A_X}[q, c, q', L(A_X) \cap \Sigma^{n+sP}] = \sum_{p \in \mathscr{P}(k)} (a_X n \pm O(1)) \cdot NW[p, q_X] \cdot |L(A_{\{p\}}) \cap \Sigma^n|. \tag{3.19}$$

Porovnaním pravých strán rovníc (3.18) a (3.19) so zreteľom na minimálnosť $a_X$ a na nerovnosť $a_X < a_Y$ dostávame vzťah

$$(a_X n \pm O(1)) S_n = (a_X n \pm O(1)) S_n + \sum_{p \in \mathscr{P}(k)} (a'_{\{p\}} n \pm O(1)) \cdot NW[p, q_X] \cdot |L(A_{\{p\}}) \cap \Sigma^n|,$$

[8] Takéto číslo $s$ musí nutne existovať z nasledujúceho dôvodu: zjavne platí, že orientovaný sled dĺžky $s'$ v grafe $\Pi_k(A)$ zodpovedá výpočtu dĺžky $s'P$ v automate $A$. Naviac, graf $\Pi_k(A)$ má periódu 1. Ale ireducibilná matica s periódou 1 je primitívna [2], čo znamená, že také $s$ existuje.

pričom $a'_{\{p\}} = a_{\{p\}} - a_X$ aspoň pre jedno $p$ nadobúda nenulovú hodnotu. Na to, aby sme dostali spor, stačí ukázať, že platí

$$\sum_{p\in\mathscr{P}(k)} (a'_{\{p\}}n \pm O(1)) \cdot NW[p,q_X] \cdot |L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^n| = \Omega(n)S_n. \tag{3.20}$$

Z nerovnosti $a_X < a_Y$ priamo vyplýva, že $a'_Y \neq 0$. Platí

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(k)}(a'_{\{p\}}n \pm O(1)) \cdot NW[p,q_X] \cdot |L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^n| \quad &\geq \quad (a'_Y n \pm O(1))\cdot \\ &\cdot \quad NW[q_Y,q_X]\cdot \\ &\cdot \quad |L(A_Y)\cap\Sigma^n|,\end{aligned} \tag{3.21}$$

preto namiesto (3.20) stačí dokázať, že $|L(A_Y)\cap\Sigma^n| = \Omega(S_n)$, teda, že $S_n$ je menej ako konštantný násobok $|L(A_Y)\cap\Sigma^n|$.

Z charakteru uzavretého tvaru pre $|L(A_X)\cap\Sigma^n|$ vyplýva, že

$$S_n = |L(A_X)\cap\Sigma^{n+sP}| \leq \Xi|L(A_X)\cap\Sigma^n|,$$

kde $\Xi$ je konštanta.

Tvrdenie $|L(A_Y)\cap\Sigma^n| = \Omega(S_n)$, a tým aj (3.20) bude teda dokázané, ak dokážeme $|L(A_X)\cap\Sigma^n| \leq \Xi'|L(A_Y)\cap\Sigma^n|$. Označme $\pi_q^{(n)}$ pravdepodobnosť dosiahnutia stavu $q$ po $n$ prechodoch. Zjavne platí, že

$$|L(A_X)\cap\Sigma^n| = \pi_{q_X}^{(n)}|L(A_{\mathscr{P}(k)})\cap\Sigma^n| \tag{3.22}$$

a

$$|L(A_Y)\cap\Sigma^n| = \pi_{q_Y}^{(n)}|L(A_{\mathscr{P}(k)})\cap\Sigma^n|. \tag{3.23}$$

Graf $\Pi_k(A)$ má periódu 1. Naviac, jeho prechodová matica ostane ireducibilná, z čoho vyplýva, že markovovský reťazec $M(\Pi_k(A))$ zodpovedajúci grafu $\Pi_k(A)$ (s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v rámci každého výstupného okolia) je konečný, ireducibilný a ergodický. To znamená, že pre reťazec $M(\Pi_k(A))$ sú splnené predpoklady základnej vety o markovovských reťazcoch [11], a teda hodnoty $\pi_q^{(nP+k)}$ pre každé $q \in \mathscr{P}(k)$ konvergujú k nenulovej hodnote a pre $j$ také, že $j \bmod P \neq k$, sú hodnoty $\pi_q^{(j)}$ konštantne nulové.

Z (3.22) a (3.23) potom vyplýva $|L(A_X)\cap\Sigma^n| \leq \Xi'|L(A_Y)\cap\Sigma^n|$, z čoho podľa (3.21) plynie aj platnosť (3.20), odkiaľ dostávame spor.

Prvá časť tvrdenia je teda dokázaná.

2. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre iné ako jednoprvkové množiny. Pre $X = \emptyset$ platí tvrdenie triviálne. Stačí teda dokázať, že ak

$$\#_{A_X}[q,c,q',L(A_X)\cap\Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A_X)\cap\Sigma^n|$$

a

$$\#_{A_Y}[q,c,q',L(A_Y)\cap\Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A_Y)\cap\Sigma^n|,$$

kde $X$ a $Y$ sú disjunktné podmnožiny $\mathscr{P}(k)$, tak aj

$$\#_{A_{X\cup Y}}[q,c,q',L(A_{X\cup Y})\cap\Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A_{X\cup Y})\cap\Sigma^n|.$$

Ale

$$\begin{aligned}\#_{A_{X\cup Y}}[q,c,q',L(A_{X\cup Y})\cap\Sigma^n] &= \#_{A_X}[q,c,q',L(A_X)\cap\Sigma^n] + \#_{A_Y}[q,c,q',L(A_Y)\cap\Sigma^n] = \\ &= (an \pm O(1))(|L(A_X)\cap\Sigma^n| + |L(A_Y)\cap\Sigma^n|) = \\ &= (an \pm O(1))|L(A_{X\cup Y})\cap\Sigma^n|,\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať.

□

V nasledujúcej leme ešte zosilníme tvrdenie dokázané v leme 3.6.3, keď ukážeme, že periodická postupnosť $a_n$ z lemy 3.6.3 je v skutočnosti konštanta.

**Lema 3.6.5** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je slabo prechodovo vyvážený deterministický konečný automat. Potom pre každý prechod $(q, c, q') \in D$ existuje reálna konštanta $a$ taká, že platí

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

**Dôkaz.** Nech $P$ je perióda automatu $A$. Ak $P = 1$, tvrdenie plynie priamo z lemy 3.6.3, ak $F = \emptyset$, tvrdenie platí triviálne, podobne aj pre konečné jazyky.

Nech teda $P > 1$, $F$ je neprázdna množina a $L(A)$ je nekonečný jazyk. Podľa lemy 3.6.3 existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ s periódou $P$ taká, že

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (a_n n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Nech $k \in \mathbb{Z}_P$ je najmenšie číslo také, že $F \cap \mathscr{P}(k) \neq \emptyset$ (z predpokladu, že $F$ je neprázdna množina vyplýva, že také číslo $k$ určite existuje). Ukážeme, že dokazované tvrdenie platí pre $a = a_k$.

Pre všetky $j \in \mathbb{Z}_P$ teda dokážeme, že $a_j = a$. Pre $j \leq k$ tvrdenie platí triviálne, keďže pre $j = k$ tvrdenie platí z predpokladu a pre $j < k$ platí $F \cap \mathscr{P}(j) = \emptyset$, z čoho vyplýva, že pre $n$ také, že $n \bmod P = j$ platí $|L(A) \cap \Sigma^n| = 0$, a teda možno hodnotu $a_j = a_n$ určiť ľubovoľne.

Podobný argument možno použiť pre všetky $j$ také, že $F \cap \mathscr{P}(j) = \emptyset$, preto stačí tvrdenie dokázať pre $j$, pre ktoré táto vlastnosť neplatí.

Nech teda tvrdenie platí pre všetky $j \in \mathbb{Z}_P$ také, že $j \leq l$, pričom $F \cap \mathscr{P}(l) \neq \emptyset$. V prípade, že $l$ je najväčšie číslo zo $\mathbb{Z}_P$ s touto vlastnosťou, tvrdenie je dokázané. Uvažujme preto opačný prípad, teda, že existuje $m \in \mathbb{Z}_P, m > l$ (v zmysle usporiadania na prirodzených číslach) také, že $F \cap \mathscr{P}(m) \neq \emptyset$. Ukážeme, že tvrdenie platí pre $j = m$, a teda aj pre všetky $j \leq m$.

Pre $n$ také, že $n \bmod P = s$ (nech je $s$ akékoľvek) zjavne platí

$$\begin{aligned} \#_A[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] &= \#_{A_{F \cap \mathscr{P}(s)}}[q, c, q', L(A_{F \cap \mathscr{P}(s)}) \cap \Sigma^n] = \\ &= (a'n \pm O(1))|L(A_{F \cap \mathscr{P}(s)}) \cap \Sigma^n|. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Podľa lemy 3.6.4 je koeficient $a'$ rovnaký pre všetky podmnožiny $\mathscr{P}(s)$. To znamená, že ak platí (3.24), platí aj

$$\#_{A_{\mathscr{P}(s)}}[q, c, q', L(A_{\mathscr{P}(s)}) \cap \Sigma^n] = (a'n \pm O(1))|L(A_{\mathscr{P}(s)}) \cap \Sigma^n| \tag{3.25}$$

a naopak.

To znamená, že na to, aby sme z predpokladu, že tvrdenie platí pre $j \leq l$ dokázali, že tvrdenie platí pre $j = m$, stačí ukázať, že platí nasledujúce: ak

$$\#_{A_{\mathscr{P}(l)}}[q, c, q', L(A_{\mathscr{P}(l)}) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A_{\mathscr{P}(l)}) \cap \Sigma^n|,$$

potom

$$\#_{A_{\mathscr{P}(m)}}[q, c, q', L(A_{\mathscr{P}(m)}) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A_{\mathscr{P}(m)}) \cap \Sigma^n|.$$

Označme pre $q_B \in \mathscr{P}(l)$ symbolom $NW[q_B, \mathscr{P}(m)]$ hodnotu

$$NW[q_B, \mathscr{P}(m)] := |\{w \in \Sigma^{m-l} \mid \exists p \in \mathscr{P}(m) : (q_B, w) \vdash^{m-l} (p, \varepsilon)\}|,$$

teda počet výpočtov dĺžky $m - l$ zo stavu $q_B$ do ľubovoľného zo stavov v $\mathscr{P}(m)$ a symbolom $NU[q_B, \mathscr{P}(m)]$ hodnotu

$$NU[q_B, \mathscr{P}(m)] := \sum_{\substack{w \in \Sigma^{m-l} \\ (q_B, w) \vdash^{m-l} (p, \varepsilon) \\ p \in \mathscr{P}(m)}} \#_{A_{q_B, \mathscr{P}(m)}}[q, c, q', w],$$

teda počet využití prechodu $(q,c,q')$ v týchto výpočtoch. Potom platí

$$\begin{aligned}\#_{A_{\mathscr{P}(m)}}[q,c,q',L(A_{\mathscr{P}(m)})\cap\Sigma^n] &= \textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot\#_{A_{\{p\}}}[q,c,q',L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^{n-m+l}]+\\ &\quad +NU[p,\mathscr{P}(m)]\cdot|L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^{n-m+l}|\Big)=\\ &= \textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot\#_{A_{\{p\}}}[q,c,q',L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^{n-m+l}]\Big)+\\ &\quad +\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NU[p,\mathscr{P}(m)]\cdot|L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^{n-m+l}|\Big).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ďalej platí

$$|L(A_{\mathscr{P}(m)})\cap\Sigma^n| = \sum_{p\in\mathscr{P}(l)} NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot|L(A_p)\cap\Sigma^{n-m+l}|,$$

a preto

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot\#_{A_{\{p\}}}[q,c,q',L(A_p)\cap\Sigma^{n-m+l}]\Big)=\\ =\;&\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot(an\pm O(1))\cdot|L(A_p)\cap\Sigma^{n-m+l}|\Big)=\\ =\;&\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot(an\pm O(1))\cdot|L(A_p)\cap\Sigma^{n-m+l}|\Big)=\\ =\;&(an\pm O(1))\cdot\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot|L(A_p)\cap\Sigma^{n-m+l}|\Big)=\\ =\;&(an\pm O(1))\cdot|L(A_{\mathscr{P}(m)})\cap\Sigma^n|.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Zrejme platí, že ak $NW[q_B,\mathscr{P}(m)]=0$, potom aj $NU[q_B,\mathscr{P}(m)]=0$ (ak neexistuje žiadna cesta, nemôže sa na nej využiť žiaden prechod). Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}\Big(NU[p,\mathscr{P}(m)]\cdot|L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^{n-m+l}|\Big)=\\ =\;&O\Big(\textstyle\sum_{p\in\mathscr{P}(l)}NW[p,\mathscr{P}(m)]\cdot|L(A_{\{p\}})\cap\Sigma^{n-m+l}|\Big)=O(|L(A_{\mathscr{P}(m)})\cap\Sigma^n|)=\\ =\;&O(1)|L(A_{\mathscr{P}(m)})\cap\Sigma^n|.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Konečne, dosadením (3.27) a (3.28) do (3.26) dostávame

$$\#_{A_{\mathscr{P}(m)}}[q,c,q',L(A_{\mathscr{P}(m)})\cap\Sigma^n]=(an\pm O(1))|L(A_{\mathscr{P}(m)})\cap\Sigma^n|,$$

čo bolo treba dokázať. □

**Dôsledok 3.6.1** Nech $A=(K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ je slabo prechodovo vyvážený konečný automat. Potom pre počet využití $m_n$ najzriedkavejšie využívaného prechodu a $M_n$ najčastejšie využívaného prechodu na akceptovaných slovách dĺžky $n$ platí

$$m_n=(an\pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n| \qquad \text{a} \qquad M_n=(bn\pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n|,$$

kde $a$ a $b$ sú reálne konštanty.

**Dôkaz.** Podľa lemy 3.6.5 pre každý prechod $(q,d,q')$ platí

$$\#[q,d,q',L(A)\cap\Sigma^n]=(cn\pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n|.$$

Zjavne od určitého $n_0$ platí, že najzriedkavejšie (najčastejšie) používaný prechod na slovách dĺžky $n$ je jeden z tých, pre ktoré je konštanta $c$ najnižšia (najvyššia). Z toho vyplýva, že aj $m_n$ a $M_n$ je možné vyjadriť v tvare, kde koeficient pri $n$ je $c$ (akékoľvek nezrovnalosti pre malé $n$ sa zahrnú do $O(1)$). □

## 3.7 O limitách postupností kvocientov vyváženosti

Táto časť obsahuje dve tvrdenia súvisiace s existenciou limít čiastočných postupností kvocientov vyváženosti. Bude dokázané, že každá postupnosť kvocientov vyváženosti na dĺžkach slov $n$ takých, že $L(A) \cap \Sigma^n \neq \emptyset$ má limitu, ktorá sa rovná miere vyváženosti.

V dôsledku toho bude zrejmé, že miera vyváženosti je definovaná pomocou limes inferior len z technických dôvodov, pričom sa nedopustíme principiálnej chyby, ak o nej budeme uvažovať ako o limite.

**Veta 3.7.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Nech $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ľubovoľná rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že pre všetky $n$ platí $L(A) \cap \Sigma^{k_n} \neq \emptyset$. Potom existuje limita

$$L := \lim_{n\to\infty} B_A(k_n),$$

pričom platí $L = B_A$.

**Dôkaz.** V dôkaze budeme používať označenie

$$M_n := \max_{(p,c,p')\in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n]$$

a

$$m_n := \min_{(q,d,q')\in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n].$$

1. Uvažujme najprv prípad, keď $A$ *nie je* slabo prechodovo vyvážený. V tom prípade jeho grafová reprezentácia nie je silne súvislá, z čoho vyplýva, že existuje prechod, ktorý sa na každom slove použije nanajvýš raz, z čoho vyplýva

   $$m_n = O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

   Na druhej strane, podľa lemy 3.6.1 platí

   $$M_n = \Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

   Preto z nenulovosti $|L(A) \cap \Sigma^n|$ na $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyplýva

   $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{m_{k_n} + 1}{M_{k_n} + 1} = 0 = B_A,$$

   čo bolo treba dokázať.

2. Nech teraz automat $A$ *je* slabo prechodovo vyvážený. V takom prípade podľa dôsledku 3.6.1 platí

   $$\begin{aligned} m_n &= (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|, \\ M_n &= (bn \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|. \end{aligned}$$

   Z nenulovosti $|L(A) \cap \Sigma^n|$ na $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ potom vyplýva

   $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{m_{k_n} + 1}{M_{k_n} + 1} = \frac{a}{b}.$$

   To znamená, že limita existuje a ostáva dokázať, že aj $B_A = \frac{a}{b}$. Z charakteru predchádzajúceho výpočtu však vyplýva, že limita $L$ je rovnaká pre ľubovoľnú postupnosť $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ spĺňajúcu podmienky zo znenia vety. Vezmime teda takú postupnosť $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$, ktorá obsahuje *všetky* hodnoty $r$, pre ktoré je $L(A) \cap \Sigma^r \neq \emptyset$. V takom prípade však pre ľubovoľnú hodnotu $s$, ktorá nie je v tejto postupnosti, platí $B_A(s) = 1$, z čoho vyplýva, že aj

   $$B_A = \liminf_{n\to\infty} \frac{m_n + 1}{M_n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{m_{k_n} + 1}{M_{k_n} + 1} = \frac{a}{b}.$$

Znenie vety je teda dokázané pre oba prípustné prípady, čo znamená, že dokazované tvrdenie platí. □

**Veta 3.7.2** Deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je prechodovo vyvážený práve vtedy, keď existuje limita postupnosti $B_A(n)$ pre $n \to \infty$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} B_A(n) = 1.$$

**Dôkaz.**

⇒: Nech $A$ je prechodovo vyvážený. Potom platí

$$\liminf_{n\to\infty} B_A(n) = 1.$$

Ale taktiež platí $B_A(n) \leq 1$ pre všetky $n$, z čoho použitím „vety o dvoch policajtoch[9]" dostávame

$$\lim_{n\to\infty} B_A(n) = 1.$$

⇐: Nech

$$\lim_{n\to\infty} B_A(n) = 1.$$

V prípade existencie limity je hodnota limes inferior rovná hodnote limity, čo znamená, že aj

$$\liminf_{n\to\infty} B_A(n) = 1,$$

a teda automat $A$ je prechodovo vyvážený.

□

## 3.8 Asymptotická formulácia definícií prechodovej vyváženosti

V tejto časti budú dokázané tvrdenia, ktoré umožnia prepísať definíciu slabo prechodovo vyváženého automatu a prechodovo vyváženého automatu do reči asymptotických odhadov.

**Veta 3.8.1** Deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je slabo prechodovo vyvážený práve vtedy, keď platí

$$\min_{(p,c,p')\in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta\left(\max_{(q,d,q')\in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]\right).$$

**Dôkaz.**

⇒: V prípade, že je $L(A)$ konečný jazyk, tvrdenie zrejme platí. Nech je teda $L(A)$ nekonečný jazyk. Zo slabej prechodovej vyváženosti automatu $A$ vyplýva

$$m_n := \min_{(p,c,p')\in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|$$

a

$$M_n := \max_{(q,d,q')\in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (bn \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Z nekonečnosti jazyka $L(A)$ a slabej prechodovej vyváženosti automatu $A$ potom plynie $a, b > 0$.

Keďže $m_n \leq M_n$ pre všetky $n$, nutne platí $m_n = O(M_n)$. Ale pre $C > \frac{b}{a}$ platí pre $n > n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ aj $C \cdot m_n \geq M_n$, z čoho $m_n = \Omega(M_n)$, a teda aj $m_n = \Theta(M_n)$, čo bolo treba dokázať.

[9] Ak $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sú dve postupnosti s limitou $L$ a pre postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ od určitého $n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$, tak $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ má tiež limitu $L$. V tomto prípade $a_n = \inf_{m>n} B_A(n)$, $b_n = 1$, $c_n = B_A(n)$ a $L = 1$.

$\Leftarrow$: Nepriamo. Nech $A$ nie je slabo prechodovo vyvážený. Potom nemá súvislú grafovú reprezentáciu, z čoho vyplýva, že existuje prechod $(p, c, p') \in D$ taký, že sa počas výpočtu na ľubovoľnom slove použije maximálne raz, a teda platí

$$\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] = O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Keďže je každý automat akceptujúci konečný jazyk slabo prechodovo vyvážený, musí byť $L(A)$ nekonečný. Z toho vyplýva, že existuje prechod $(q, d, q') \in D$ taký, že

$$\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] = f(n)|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

kde $f(n)$ je zhora neohraničená funkcia (vzťah $\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta(n)|L(A) \cap \Sigma^n|$ nemusí nutne platiť, keďže $A$ nie je slabo prechodovo vyvážený).

Predpokladajme teraz, že platí

$$m_n = \Theta(M_n). \tag{3.29}$$

Keďže pre ľubovoľný prechod $(r, e, r') \in D$ platí

$$m_n \leq \#[r, e, r', L(A) \cap \Sigma^n] \leq M_n,$$

vyplýva z (3.29), že musí existovať konštanta $C > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n > n_0$ platí

$$C \cdot \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] \geq \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n],$$

čo znamená

$$C \cdot O(1)|L(A) \cap \Sigma^n| = O(1)|L(A) \cap \Sigma^n| \geq f(n)|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

čo ale nie je možné, pretože $f(n)$ nie je zhora ohraničená. To znamená, že (3.29) nemôže platiť.

□

**Poznámka 3.8.1** Z definície $\Theta$-notácie vyplýva, že podmienku z predchádzajúcej vety možno prepísať ako

$$\max_{(q,d,q') \in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta\left( \min_{(p,c,p') \in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] \right).$$

**Dôsledok 3.8.1** Deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je slabo prechodovo vyvážený práve vtedy, keď pre ľubovoľnú dvojicu prechodov $(p, c, p'), (q, d, q') \in D$ platí

$$\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta(\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]).$$

**Dôkaz.** Dokážeme, že podmienka na pravej strane dokazovanej ekvivalencie platí práve vtedy, keď platí podmienka na pravej strane ekvivalencie z vety 3.8.1.

$\Rightarrow$: Nech platí

$$\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta(\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]) \tag{3.30}$$

pre ľubovoľné $(p, c, p'), (q, d, q') \in D$. Dokážeme, že pre

$$m_n := \min_{(p,c,p') \in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n]$$

a

$$M_n := \max_{(q,d,q') \in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]$$

platí aj
$$m_n = \Theta(M_n).$$
Zrejme platí $m_n = O(M_n)$, ostáva dokázať $m_n = \Omega(M_n)$. Z (3.30) vyplýva, že pre každú dvojicu prechodov $(p_1, c_1, p_1'), (p_2, c_2, p_2') \in D$ existuje konštanta $C_{[(p_1,c_1,p_1'),(p_2,c_2,p_2')]}$ taká, že pre $n > n_{0,[(p_1,c_1,p_1'),(p_2,c_2,p_2')]}$, kde $n_{0,[(p_1,c_1,p_1'),(p_2,c_2,p_2')]} \in \mathbb{N}$ platí
$$C_{[(p_1,c_1,p_1'),(p_2,c_2,p_2')]} \cdot \#[p_1, c_1, p_1', L(A) \cap \Sigma^n] \geq \#[p_2, c_2, p_2', L(A) \cap \Sigma^n].$$
Vezmime teraz
$$C := \max \left\{ c_{[(p_1,c_1,p_1'),(p_2,c_2,p_2')]} \;\middle|\; [(p_1, c_1, p_1'), (p_2, c_2, p_2')] \in D^2 \right\}$$
a
$$n_0 := \max \left\{ n_{0,[(p_1,c_1,p_1'),(p_2,c_2,p_2')]} \;\middle|\; [(p_1, c_1, p_1'), (p_2, c_2, p_2')] \in D^2 \right\}.$$
Pre všetky $n > n_0$ a všetky prechody $(q_1, d_1, q_1'), (q_2, d_2, q_2') \in D$ zjavne platí
$$C \cdot \#[q_1, d_1, q_1', L(A) \cap \Sigma^n] \geq \#[q_2, d_2, q_2', L(A) \cap \Sigma^n].$$
Ale keďže pre každé $n$ existuje prechod $(p_m, c_m, p_m') \in D$ taký, že
$$m_n = \#[p_m, c_m, p_m', L(A) \cap \Sigma^n]$$
a prechod $(p_M, c_M, p_M') \in D$ taký, že
$$M_n = \#[p_M, c_M, p_M', L(A) \cap \Sigma^n],$$
platí aj
$$C \cdot m_n \geq M_n,$$
čo znamená
$$m_n = \Omega(M_n),$$
čo bolo treba dokázať.

$\Leftarrow$: Nech platí
$$m_n = \Theta(M_n).$$
To znamená, že existuje konštanta $C$ taká, že od určitého $n_0$ platí
$$C \cdot m_n \geq M_n.$$
Nech $(p, c, p'), (q, d, q') \in D$ sú ľubovoľné dva prechody. Keďže platí
$$m_n \leq \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] \leq M_n,$$
ako aj
$$m_n \leq \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] \leq M_n,$$
platí aj
$$C \cdot \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] \geq M_n \geq \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]$$
a aj
$$C \cdot \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] \geq M_n \geq \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n].$$
To ale znamená, že platí
$$\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] = \Theta(\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]),$$
čo bolo treba dokázať.

□

**Veta 3.8.2** Deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je prechodovo vyvážený práve vtedy, keď platí

$$\left(\min_{(p,c,p')\in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] + 1\right) \sim \left(\max_{(q,d,q')\in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] + 1\right).$$

**Dôkaz.** Vyplýva bezprostredne z vety 3.7.2. □

**Dôsledok 3.8.2** Deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je prechodovo vyvážený práve vtedy, keď pre ľubovoľnú dvojicu prechodov $(p, c, p'), (q, d, q') \in D$ platí

$$\left(\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] + 1\right) \sim \left(\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] + 1\right).$$

**Dôkaz.** Ukážeme, že podmienka na pravej strane dokazovanej ekvivalencie je splnená práve vtedy, keď je splnená podmienka na pravej strane ekvivalencie z vety 3.8.2.

$\Rightarrow$: Nech je splnená podmienka na pravej strane dokazovanej ekvivalencie. Potom existuje konštanta $a \in \mathbb{R}$ taká, že pre každý prechod $(q, c, q') \in D$ platí

$$\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Z toho vyplýva, že platí aj

$$\min_{(p,c,p')\in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|$$

a

$$\max_{(q,d,q')\in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Pre automaty akceptujúce konečný jazyk platí dokazované tvrdenie triviálne, preto stačí uvažovať automaty akceptujúce nekonečný jazyk. Pre tie platí $a > 0$, z čoho vyplýva, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\min_{(p,c,p')\in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] + 1}{\max_{(q,d,q')\in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] + 1} = 1,$$

a teda

$$\left(\min_{(p,c,p')\in D} \#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] + 1\right) \sim \left(\max_{(q,d,q')\in D} \#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] + 1\right),$$

čo bolo treba dokázať.

$\Leftarrow$: Nech je splnená pravá strana ekvivalencie z vety 3.8.2. Pre ľubovoľný prechod $(p, c, p') \in D$ platí

$$\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] \geq \min_{(r,e,r')\in D} \#[r, e, r', L(A) \cap \Sigma^n]$$

a pre ľubovoľný prechod $(q, d, q') \in D$ platí

$$\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] \leq \max_{(s,f,s')\in D} \#[s, f, s', L(A) \cap \Sigma^n].$$

Z toho vyplýva, že pre ľubovoľnú dvojicu prechodov $(p, c, p'), (q, d, q') \in D$ platí

$$\frac{\min_{(r,e,r')\in D} \#[r, e, r', L(A) \cap \Sigma^n] + 1}{\max_{(s,f,s')\in D} \#[s, f, s', L(A) \cap \Sigma^n] + 1} \leq \frac{\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n] + 1}{\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n] + 1} \leq 1. \tag{3.31}$$

Podmienka z pravej strany ekvivalencie z vety 3.8.2 po rozpísaní definície $\sim$ hovorí, že je splnené

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\min_{(r,e,r')\in D} \#[r,e,r',L(A)\cap\Sigma^n]+1}{\max_{(s,f,s')\in D} \#[s,f,s',L(A)\cap\Sigma^n]+1} = 1,$$

a podľa (3.31) potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n]+1}{\#[q,d,q',L(A)\cap\Sigma^n]+1} = 1,$$

čo znamená

$$\left(\#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n]+1\right) \sim \left(\#[q,d,q',L(A)\cap\Sigma^n]+1\right),$$

čo bolo treba dokázať.

□

## 3.9 Alternatívna definícia triedy $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$

V tejto časti bude dokázaná veta 3.9.1, ktorá hovorí, že trieda prechodovo vyvážených automatov je analógiou triedy stavovo vyvážených automatov, definovanej v [9]. Znenie vety 3.9.1 je teda možné považovať za inú, alternatívnu definíciu $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$, ktorá je však ekvivalentná pôvodnej definícii.

**Veta 3.9.1** Deterministický konečný automat $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ je prechodovo vyvážený práve vtedy, keď existuje kladná reálna konštanta $k$ taká, že pre všetky prechody $(p,c,p'),(q,d,q') \in D$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n] - \#[q,d,q',L(A)\cap\Sigma^n]| \leq k|L(A)\cap\Sigma^n|.$$

**Dôkaz.** Označme

$$M_n := \max_{(p,c,p')\in D} \#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n]$$

a

$$m_n := \min_{(q,d,q')\in D} \#[q,d,q',L(A)\cap\Sigma^n].$$

Dokazované tvrdenie je zrejme ekvivalentné tvrdeniu: automat $A$ je slabo prechodovo vyvážený práve vtedy, keď existuje kladné reálne $k$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$M_n - m_n \leq k|L(A)\cap\Sigma^n|.$$

V ďalšom teda budeme dokazovať toto ekvivalentné tvrdenie.

$\Rightarrow$: Keďže je automat $A$ prechodovo vyvážený, musí platiť

$$B_A = \liminf_{n\to\infty} \frac{m_n+1}{M_n+1} = 1. \tag{3.32}$$

Každý prechodovo vyvážený automat je aj slabo prechodovo vyvážený, a teda, podľa dôsledku 3.6.1, musia existovať reálne konštanty $a$ a $b$ tak, že platí

$$\begin{aligned} M_n &= (an \pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n|, \\ m_n &= (bn \pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n|. \end{aligned}$$

Z platnosti (3.32) potom plynie $a = b$. Preto platí

$$M_n - m_n = (an \pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n| - (an \pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n| \leq k|L(A)\cap\Sigma^n|$$

pre nejakú konštantu $k$.

$\Leftarrow$: Nech platí

$$M_n - m_n \leq k|L(A) \cap \Sigma^n|. \tag{3.33}$$

Automat, pre ktorý platí takýto vzťah je zjavne slabo prechodovo vyvážený, a teda platí

$$\begin{aligned} M_n &= (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|, \\ m_n &= (bn \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|. \end{aligned}$$

Z (3.33) plynie $a = b$ a z toho

$$B_A = \liminf_{n\to\infty} \frac{m_n + 1}{M_n + 1} = 1,$$

čo znamená, že $A$ je prechodovo vyvážený.

$\square$

## 3.10 Základné vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$

**Lema 3.10.1** Každý konečný jazyk je prechodovo vyvážený.

**Dôkaz.** Nech $L$ je konečný jazyk, nech $A$ je ľubovoľný konečný automat, ktorý ho akceptuje. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky slová $w \in L$ platí $|w| < n_0$. Z toho vyplýva, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $B_A(n) = 1$, z čoho $B_A = 1$. Automat $A$ je teda prechodovo vyvážený, čo znamená, že prechodovo vyvážený je aj jazyk $L$. $\square$

**Označenie 3.10.1** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. Pre $q \in K$ označíme symbolom $W^+(q)$ množinu prechodov začínajúcich v $q$ a symbolom $W^-(q)$ označíme množinu prechodov končiacich v $q$. Formálne,

$$W^+(q) := \{(p, c, p') \in D \mid p = q\}$$

a

$$W^-(q) := \{(p, c, p') \in D \mid p' = q\}.$$

**Lema 3.10.2 (Nutná podmienka vyváženosti)** Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je prechodovo vyvážený automat. Potom pre všetky stavy $q \in K$ platí

$$|W^-(q)| = |W^+(q)|.$$

**Dôkaz.** Ľahko možno overiť, že platí

$$\begin{aligned} \#[q, L(A) \cap \Sigma^n] &= \sum_{(p,c,p')\in W^-(q)} \left(\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n]\right) \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n| = \\ &= \sum_{(p,c,p')\in W^-(q)} \Big((a_{(p,c,p')}n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|\Big) \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n| = \\ &= \left(\left(\sum_{(p,c,p')\in W^-(q)} a_{(p,c,p')}\right) \cdot n \pm O(1)\right) \cdot |L(A) \cap \Sigma^n|, \end{aligned}$$

ako aj

$$\begin{aligned} \#[q, L(A) \cap \Sigma^n] &= \sum_{(q,c,q')\in W^+(q)} \left(\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]\right) \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n| = \\ &= \sum_{(q,c,q')\in W^+(q)} \Big((a_{(q,c,q')}n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|\Big) \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n| = \\ &= \left(\left(\sum_{(q,c,q')\in W^+(q)} a_{(q,c,q')}\right) \cdot n \pm O(1)\right) \cdot |L(A) \cap \Sigma^n|. \end{aligned}$$

Z prechodovej vyváženosti automatu $A$ vyplýva, že hodnoty $a_{(r,c,r')}$ sú pre všetky $(r,c,r') \in D$ rovné tej istej konštante $a$. Z predchádzajúcich vzťahov potom vyplýva, že musí platiť

$$\left(\left(\sum_{(p,c,p')\in W^-(q)} a\right)\cdot n \pm O(1)\right)\cdot |L(A)\cap\Sigma^n| = \left(\left(\sum_{(q,c,q')\in W^+(q)} a\right)\cdot n \pm O(1)\right)\cdot |L(A)\cap\Sigma^n|,$$

z čoho

$$a\cdot|W^-(q)| = a\cdot|W^+(q)|,$$

a teda

$$|W^-(q)| = |W^+(q)|,$$

čo bolo treba dokázať. □

**Veta 3.10.1 (Postačujúca podmienka vyváženosti)** Nech $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ je slabo prechodovo vyvážený deterministický konečný automat s periódou $P$, pre ktorý sú splnené nasledujúce podmienky:

$(i)$ $\forall q \in K : |W^+(q)| = |W^-(q)|$,

$(ii)$ $\forall i \in \mathbb{Z}_P \forall q_1,q_2 \in \mathscr{P}(i) : |W^+(q_1)| = |W^+(q_2)|$,

$(iii)$ $\forall p_1,q_1,p_2,q_2 \in \mathscr{P}(0) : |\{w\in\Sigma^P \mid (p_1,w)\vdash^P (q_1,\varepsilon)\}| = |\{w\in\Sigma^P \mid (p_2,w)\vdash^P (q_2,\varepsilon)\}|$.

Potom je automat $A$ prechodovo vyvážený.

**Dôkaz.** Z podmienky $(iii)$ je zrejmé, že existuje konštanta $a$ taká, že pre všetky $q \in \mathscr{P}(0)$ platí

$$\#[q, L(A)\cap\Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n|.$$

Každému použitiu stavu $q \in \mathscr{P}(0)$ totiž (okrem použití stavu $q_0$ na začiatkoch výpočtov, ktorých je ale zanedbateľne málo) vďaka $(iii)$ zodpovedá nejaké použitie stavu $q' \in \mathscr{P}(0)$ a naopak. Z podmienky $(ii)$ potom vyplýva, že existuje konštanta $b = \frac{a}{|W^+(q_0)|}$ taká, že pre každý prechod $(q,c,q') \in D$ taký, že $q \in \mathscr{P}(0)$ platí

$$\#[q,c,q', L(A)\cap\Sigma^n] = (bn \pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n|.$$

S využitím podmienok $(i)$ a $(ii)$ potom možno induktívne dokázať, že uvedený vzťah platí aj pre $(q,c,q') \in D$ také, že $q \in \mathscr{P}(i)$ pre všetky $i \in \mathbb{Z}_P$. To znamená, že vzťah platí pre všetky prechody $(q,c,q') \in D$.

Pre mieru vyváženosti automatu $A$ potom platí

$$B_A = \liminf_{n\to\infty} \frac{\min_{(p,c,p')\in D}(\#[p,c,p',L(A)\cap\Sigma^n]) + 1}{\max_{(q,d,q')\in D}(\#[q,d,q',L(A)\cap\Sigma^n]) + 1} = \liminf_{n\to\infty} \frac{(bn\pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n| + 1}{(bn\pm O(1))|L(A)\cap\Sigma^n| + 1} = 1,$$

čo bolo treba dokázať.

□

## 3.11 Uzáverové vlastnosti triedy $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$

**Veta 3.11.1** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na zreťazenie.

**Dôkaz.** Jazyky $\{a\}^*$ a $\{b\}^*$ sú prechodovo vyvážené. Vo vete 3.4.1 však bolo dokázané, že ich zreťazenie $\{a\}^*\{b\}^*$ nie je ani slabo prechodovo vyvážené, a teda nie je ani prechodovo vyvážené. □

**Veta 3.11.2** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na zjednotenie.

**Dôkaz.** Opäť možno použiť jazyky $\{a\}^*$ a $\{b\}^*$, o ktorých bolo vo vete 3.4.2 dokázané, že ich zjednotenie $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ nie je ani slabo prechodovo vyvážené, čo znamená, že nie je ani prechodovo vyvážené. $\square$

**Veta 3.11.3** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na prienik.

**Dôkaz.** Stačí mierne upraviť jazyky z vety 3.4.3 tak, aby boli prechodovo vyvážené, ale argument, vďaka ktorému ich prienik nebol ani slabo prechodovo vyvážený, ostal nezmenený. To sa dá spraviť tak, že namiesto jazykov $L_1 = \{a, bc\}^*\{b\}$ a $L_2 = \{a, bd\}^*\{b\}$ vezmeme jazyky $L_1' = \{aa, bc\}^*\{b\}$ a $L_2' = \{aa, bd\}^*\{b\}$. Ľahko sa dá overiť, že tieto jazyky sú prechodovo vyvážené. Ich prienik $L_1' \cap L_2'$ však nie je ani slabo prechodovo vyvážený z rovnakých dôvodov, pre ktoré nie je slabo prechodovo vyvážený jazyk $L_1 \cap L_2$. $\square$

**Veta 3.11.4** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na komplement.

**Dôkaz.** Konečný jazyk $L = \{\varepsilon\}$ je prechodovo vyvážený. Vo vete 3.4.4 však bolo dokázané, že komplement tohto jazyka nad abecedou $\Sigma = \{a\}$, jazyk $L^C = \{a\}^+$, nie je ani slabo prechodovo vyvážený, čo znamená, že nie je ani prechodovo vyvážený. $\square$

**Veta 3.11.5** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na iteráciu.

**Dôkaz.** Jazyk $L = \{ab\}^* \cdot \{a\}$ je zrejme prechodovo vyvážený. Vo vete 3.4.5 však bolo dokázané, že $L^*$ nie je ani slabo prechodovo vyvážený, čiže nie je ani prechodovo vyvážený. $\square$

**Veta 3.11.6** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na kladnú iteráciu.

**Dôkaz.** Konečný jazyk $L = \{a\}$ je prechodovo vyvážený. Jeho kladná iterácia $\{a\}^+$, však nie je ani slabo prechodovo vyvážená (veta 3.4.6), a teda nie je ani prechodovo vyvážená. $\square$

**Veta 3.11.7** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na reverz.

**Dôkaz.** Jazyk $L = \{aa, bb\}^*\{a, b\}$ je prechodovo vyvážený. Vo vete 3.4.7 však bolo dokázané, že $L^R$ nie je ani slabo prechodovo vyvážený, a teda nie je ani prechodovo vyvážený. $\square$

**Veta 3.11.8** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na homomorfizmus.

**Dôkaz.** Jazyk $L = \{ab\}^* \cdot \{a\}$ je prechodovo vyvážený. Vo vete 3.4.8 však bolo dokázané, že pre homomorfizmus $h$ definovaný ako

$$\begin{aligned} h(a) &= a, \\ h(b) &= \varepsilon \end{aligned}$$

nie je jazyk $h(L)$ slabo prechodovo vyvážený, čo znamená, že nie je ani prechodovo vyvážený. $\square$

**Veta 3.11.9** Trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na inverzný homomorfizmus.

**Dôkaz.** Vo vete 3.4.9 bolo dokázané, že pre jazyk $L = \{b\}$ a homomorfizmus $h$ taký, že

$$\begin{aligned} h(a) &= \varepsilon, \\ h(b) &= b \end{aligned}$$

nie je jazyk $h^{-1}(L)$ slabo prechodovo vyvážený. Jazyk $L$ je však zjavne prechodovo vyvážený, čo znamená, že trieda $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ nie je uzavretá na inverzný homomorfizmus. $\square$

# Kapitola 4

# Triedy vyvážených jazykov

Cieľom tejto kapitoly je preštudovať vzťahy medzi triedami vyvážených jazykov definovanými v predchádzajúcich kapitolách a v prácach [9] a [10]. V časti 4.1 bude dokázané tvrdenie o hierarchii, ktorú tvoria triedy prechodovo vyvážených jazykov $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$, $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ a $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$. V časti 4.2 zas bude dokázaný rad tvrdení o vzťahu tried prechodovo vyvážených jazykov k triedam stavovo vyvážených jazykov $\mathscr{L}_{K-SEQA}$ a $\mathscr{L}_{K-EQA}$.

## 4.1 Hierarchia tried vyvážených jazykov

V tejto časti bude dokázaná veta, ktorá umožní usporiadať triedy prechodovo vyvážených jazykov $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$, $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ a $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ do hierarchie vzhľadom na inklúziu.

**Veta 4.1.1** Platí $\mathscr{L}_{\delta-SEQA} \subsetneq \mathscr{L}_{\delta-EQA} \subsetneq \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$.

**Dôkaz.**

1. $\mathscr{L}_{\delta-SEQA} \subsetneq \mathscr{L}_{\delta-EQA}$:

   a) Dokážeme $\mathscr{L}_{\delta-SEQA} \subseteq \mathscr{L}_{\delta-EQA}$. Nech $L \in \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ je prísne prechodovo vyvážený jazyk. Potom existuje prísne prechodovo vyvážený automat $A$ so súvislou grafovou reprezentáciou taký, že $L(A) = L$. Podľa vety 2.2.1 automat $A$ buď neobsahuje dosiahnuteľný cyklus, z ktorého sa dá dostať do akceptačného stavu, a teda je $L$ konečný jazyk alebo má tvar jednoduchého orientovaného cyklu cez všetky stavy.

      V prípade, že je $L$ konečný, je podľa lemy 3.10.1 prechodovo vyvážený, čiže $L \in \mathscr{L}_{\delta-EQA}$.

      Nech je teda $L$ nekonečný jazyk, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je automat v tvare orientovaného cyklu cez všetky stavy, ktorý ho akceptuje. Pre takýto automat je zrejmé, že pre $n = k|K| + j$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}_{|K|}$, platí

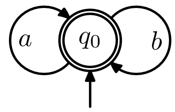
      $$B_A(n) = \frac{k+1}{k + \operatorname{sign}(j) + 1},$$

      z čoho je zrejmé, že platí

      $$B_A = \liminf_{n\to\infty} B_A(n) = 1.$$

      Automat $A$ je teda prechodovo vyvážený a pre jazyk $L$ platí $L \in \mathscr{L}_{\delta-EQA}$.

   b) Dokážeme $\mathscr{L}_{\delta-SEQA} \not\supseteq \mathscr{L}_{\delta-EQA}$. Vezmime jazyk $L = \{a, b\}^*$. Tento jazyk evidentne nespĺňa charakterizáciu prísne prechodovo vyvážených jazykov z vety 2.2.2, preto $L \notin \mathscr{L}_{\delta-SEQA}$. Ukážeme, že $L \in \mathscr{L}_{\delta-EQA}$.




**Obrázok 4.1:** Automat $A$ akceptujúci jazyk $L = \{a, b\}^*$. Automat je prechodovo vyvážený, ale nie je prísne prechodovo vyvážený.

Vezmime automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$ a

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= q_0, \\ \delta(q_0, b) &= q_0. \end{aligned}$$

Zrejme $L(A) = \{a, b\}^* = L$. Nie je ťažké nahliadnuť, že pre $c \in \{a, b\}$ platí

$$\#_A[q_0, c, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

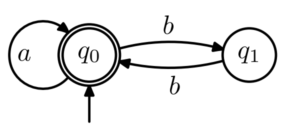
Pre mieru vyváženosti preto platí

$$B_A = \liminf_{n\to\infty} B_A(n) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n2^{n-1}+1}{n2^{n-1}+1} = 1,$$

z čoho vyplýva $L \in \mathscr{L}_{\delta-EQA}$, čo bolo treba dokázať.

2. $\mathscr{L}_{\delta-EQA} \subsetneq \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$:
   a) Tvrdenie $\mathscr{L}_{\delta-EQA} \subseteq \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ je triviálne.
   b) Dokážeme $\mathscr{L}_{\delta-EQA} \not\supseteq \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$. Uvažujme jazyk $L = \{a, bb\}^*$. Ukážeme, že $L$ je slabo prechodovo vyvážený, ale nie je prechodovo vyvážený. Dokážeme najprv $L \in \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$. Uvažujme automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$, a kde $\delta$-funkcia je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= q_0, \\ \delta(q_0, b) &= q_1, \\ \delta(q_1, b) &= q_0. \end{aligned}$$




**Obrázok 4.2:** Automat $A$ akceptujúci jazyk $L = \{a, bb\}^*$.

Tvrdenie $L(A) = L$ je zrejmé. Rovnako zrejmá je aj skutočnosť, že automat $A$ je slabo prechodovo vyvážený, čo znamená, že platí $L \in \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$.
Na to, aby sme dokázali $L \notin \mathscr{L}_{\delta-EQA}$ treba ukázať, že *žiaden* automat akceptujúci $L$ nie je prechodovo vyvážený. Nech $A' = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$ je ľubovoľný deterministický konečný automat so súvislou grafovou reprezentáciou[1] taký, že $L(A') = L$. Rozklad

[1]Zrejme platí, že ak je automat s nesúvislou grafovou reprezentáciou prechodovo vyvážený, je prechodovo vyvážený aj automat, ktorý vznikne z daného automatu odobratím nedosiahnuteľných komponentov súvislosti. Preto je možné uvedený predpoklad použiť.

jazyka $\Sigma^*$ na ekvivalenčné triedy podľa Myhillovej-Nerodovej relácie $R_L$ teraz obsahuje tri triedy ekvivalencie: $T_1 = L$, $T_2 = L\{b\}$ a $T_3 = L - (T_1 \cup T_2)$. Z toho, že $A'$ akceptuje jazyk $L$ vyplýva, že pre ľubovoľný stav $q \in K'$ platí, že všetky slová $w \in \Sigma^*$, pre ktoré platí $(q'_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ patria do rovnakej triedy ekvivalencie $T(q)$. Z toho, že jazyk $L$ je nekonečný vyplýva, že ak je automat $A'$ prechodovo vyvážený, tak neexistuje stav $p \in K'$ taký, že $T(p) = T_3$. Preto stačí uvažovať len takéto automaty a dokázať, že žiaden z nich prechodovo vyvážený nie je.

Platí teda $K' = K'_1 \cup K'_2$, pričom pre všetky $q \in K'_1$ platí $T(q) = T_1$ a pre všetky $p \in K'_2$ platí $T(p) = T_2$. Naviac, jazyky prislúchajúce stavom automatu $A'$ sú disjunktné (z deterministickosti), z čoho vyplýva, že z každého stavu $q \in K'_1$ musí viesť práve jeden prechod na $a$ do niektorého stavu v $K'_1$ a práve jeden prechod na $b$ do niektorého stavu v $K'_2$. Na druhej strane, z každého stavu $q \in K'_2$ musí viesť práve jeden prechod na $b$ do niektorého stavu v $K'_1$ a žiaden prechod na $a$ (z toho, že neexistuje stav $r$ taký, že $T(r) = T_3$). Prechodovo vyvážený automat $A'$ musí byť aj slabo prechodovo vyvážený, a teda musí mať silne súvislú grafovú reprezentáciu. Z toho vyplýva, že do každého stavu $p \in K'_2$ musí viesť aspoň jeden prechod na $b$. Keďže má byť automat $A'$ prechodovo vyvážený, musí do každého stavu vchádzať rovnako veľa prechodov, ako z neho vychádza, čo znamená, že do každého stavu $p \in K'_2$ vedie *práve jeden* prechod na $b$. Z uvedených skutočností potom vyplýva $|K'_1| = |K'_2|$.

Je zrejmé, že pravdepodobnosť, že výpočet automatu $A'$ sa nachádza v niektorom zo stavov v $K'_1$ je rovnaká, ako pravdepodobnosť, že výpočet automatu $A$ sa nachádza v stave $q_0$. Z toho vyplýva, že ak majú byť prechody vychádzajúce zo stavov tej-ktorej triedy využívané rovnomerne, musí platiť nasledujúce:

$(i)$ Ak $\#_A[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] = (c_1 n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|$, tak

$$\#_{A'}[q, a, q', L(A) \cap \Sigma^n] = \left(\frac{c_1}{|K'_1|} n \pm O(1)\right) |L(A') \cap \Sigma^n| \ \forall (q, a, q') \in D_{A'}, q \in K'_1.$$

$(ii)$ Ak $\#_A[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n] = (c_2 n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|$, tak

$$\#_{A'}[q, b, q', L(A) \cap \Sigma^n] = \left(\frac{c_2}{|K'_1|} n \pm O(1)\right) |L(A') \cap \Sigma^n| \ \forall (q, b, q') \in D_{A'}, q \in K'_1.$$

$(iii)$ Ak $\#_A[q_1, b, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] = (c_3 n \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|$, tak

$$\#_{A'}[p, b, p', L(A) \cap \Sigma^n] = \left(\frac{c_3}{|K'_2|} n \pm O(1)\right) |L(A') \cap \Sigma^n| \ \forall (p, b, p') \in D_{A'}, p \in K'_2.$$

Z uvedeného potom priamo vyplýva $B_{A'} = B_A$. Zostáva teda dokázať, že $B_A < 1$. To možno urobiť nasledovným použitím metódy z časti 3.2.

Je zrejmé, že $\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n] = \#[q_1, b, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]$, preto stačí vypočítať hodnoty $\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]$ a $\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n]$. Všeobecné riešenie je pre tieto dve veličiny rovnaké a možno ho vypočítať pomocou charakteristického polynómu matice $\Delta'$, ktorú môžme zvoliť ako ľubovoľnú z matíc $\Delta'_{(q_0,a,q_0)}, \Delta'_{(q_0,b,q_1)}$ (časť 3.2):

$$|\Delta' - xI| = |\Delta - xI|^2 = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}^2 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Z toho vyplýva, že všeobecné riešenie pre uvažované veličiny má tvar

$$c_1 n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_4 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Na to, aby sme získali uzavretý tvar pre $\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]$ a $\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n]$, ostáva pre obe tieto veličiny dopočítať hodnoty $c_1, c_2, c_3$ a $c_4$ podľa zodpovedajúcich začiatočných podmienok. Tie sú:

$$\begin{aligned}
\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^0] &= 0,\\
\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^1] &= 1,\\
\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^2] &= 2,\\
\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^3] &= 5,\\
\\
\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^0] &= 0,\\
\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^1] &= 0,\\
\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^2] &= 1,\\
\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^3] &= 2.
\end{aligned}$$

Riešením lineárnych systémov (s neznámymi $c_1, c_2, c_3$ a $c_4$) vyplývajúcich zo všeobecného riešenia a zo začiatočných podmienok pre jednotlivé veličiny dostávame

$$\begin{aligned}
\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] &= \frac{1+\sqrt{5}}{10} n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{5}}{10} n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \\
&+ \frac{2}{5\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{2}{5\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n] &= \frac{1}{5} n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5} n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{5\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \\
&+ \frac{1}{5\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Asymptoticky najväčší člen oboch výrazov je ten obsahujúci

$$n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Keďže má $\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]$ pri tomto člene vyšší koeficient, od určitého $n_0 \in \mathbb{N}$ platí $\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n] \leq \#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]$ a pre mieru vyváženosti automatu $A$ platí

$$B_A = \liminf_{n \to \infty} \frac{\#[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n]}{\#[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1+\sqrt{5}}{10}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

Keďže ale $\frac{2}{1+\sqrt{5}} < 1$, automat $A$ nie je prechodovo vyvážený, čo bolo treba dokázať.

□

## 4.2 Súvis so stavovou vyváženosťou

Táto časť sa bude zaoberať otázkami vzťahu tried jazykov $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$, $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ a $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ k triedam jazykov $\mathscr{L}_{K-EQA}$ a $\mathscr{L}_{K-SEQA}$.

**Veta 4.2.1** Platí $\mathscr{L}_{\delta-SEQA} \subsetneq \mathscr{L}_{K-SEQA}$.

**Dôkaz.**

$\subseteq$: V kapitole o prísne prechodovo vyvážených automatoch bolo dokázané, že automat so súvislou grafovou reprezentáciou je prísne prechodovo vyvážený práve vtedy, keď akceptuje konečný jazyk alebo keď má tvar orientovaného cyklu cez všetky stavy. V [9] zas bolo dokázané, že automat je prísne stavovo vyvážený práve vtedy, keď akceptuje konečný jazyk alebo keď má tvar orientovaného multicyklu cez všetky stavy. Z toho vyplýva, že každý prísne prechodovo vyvážený automat so súvislou grafovou reprezentáciou je aj prísne stavovo vyvážený. A keďže ku každému automatu existuje ekvivalentný so súvislou grafovou reprezentáciou, platí $\mathscr{L}_{\delta-SEQA} \subseteq \mathscr{L}_{K-SEQA}$.

$\not\supseteq$: Jazyk $L = \{a,b\}^*$ je zrejme prísne stavovo vyvážený. Stačí vziať automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s $K = \{q_0\}$, $\Sigma = \{a,b\}$, $F = \{q_0\}$ a $\delta$-funkciou definovanou nasledovne:

$$\begin{aligned}\delta(q_0,a) &= q_0\\ \delta(q_0,b) &= q_0.\end{aligned}$$

Jazyk $L$ však nie je prísne prechodovo vyvážený, keďže nevyhovuje charakterizácii z vety 2.2.2.

□

**Veta 4.2.2** Platí $\mathscr{L}_{\delta-EQA} \subsetneq \mathscr{L}_{K-EQA}$.

**Dôkaz.**

$\subseteq$:

a) Ak je $L$ konečný jazyk, je prechodovo vyvážený, ako aj stavovo vyvážený. Preto stačí uvažovať nekonečné jazyky.

b) Nech $L$ je nekonečný prechodovo vyvážený jazyk, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je prechodovo vyvážený automat (so súvislou grafovou reprezentáciou), ktorý ho akceptuje. Zostrojíme stavovo vyvážený automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L$. V princípe pôjde o automat, ktorého grafová reprezentácia bude mať tvar hranového grafu ku grafovej reprezentácii pôvodného automatu $A$. Formálne definujeme automat $A'$ nasledovne: $K' = D_A$, $\Sigma' = \Sigma$, $q_0'$ je ľubovoľný[2] prechod $(q,c,q') \in D_A$ taký, že $q' = q_0$,

$$F' = \{(q,c,q') \in D_A \mid q' \in F\}$$

a $\delta'$-funkcia je definovaná nasledovne:

$$\delta'((q,c,q'),d) = (q',d,\delta(q',d)),$$

ak je $\delta(q',d)$ definované, v opačnom prípade je daný prechod nedefinovaný.

Zjavne platí, že ku každému použitiu prechodu v automate $A$ zodpovedá použitie prislúchajúceho stavu automatu $A'$ (až na počiatočný stav, ale toto jedno použitie je zanedbateľné). Preto, ak je $A$ prechodovo vyvážený, je $A'$ stavovo vyvážený. Taktiež zjavne platí $L(A) = L(A')$. To znamená, že $A'$ je stavovo vyvážený automat akceptujúci jazyk $L$, a teda platí dokazovaná inklúzia $\mathscr{L}_{\delta-EQA} \subseteq \mathscr{L}_{K-EQA}$.

$\not\supseteq$: Stačí vziať jazyk $L = \{a^i b^j \mid i,j \geq 0\}$. V príklade 3.1.2 bolo o minimálnom automate akceptujúcom tento jazyk dokázané, že nie je slabo prechodovo vyvážený, čo podľa vety 3.3.2 znamená, že ani jazyk $L$ nie je slabo prechodovo vyvážený, a teda nie je ani prechodovo vyvážený. Na druhej strane však je stavovo vyvážený, ako je dokázané v [9].

□

[2] Z toho, že $A$ je prechodovo vyvážený automat akceptujúci nekonečný jazyk vyplýva, že existuje aspoň jeden.

**Poznámka 4.2.1** Pri úvahách podobného typu, ako v dôkaze predchádzajúcej vety, keď je potrebné vlastnosť platnú pre prechody preniesť na stavy alebo naopak, sa často využíva konštrukcia, v ktorej sa automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ priradí automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$, ktorý sa od pôvodného automatu $A$ líši len tým, že každý prechod je rozdelený novým stavom na dva prechody. Táto konštrukcia sa však v dôkaze predchádzajúcej vety nemohla použiť, keďže nie je zaručené, že stavy pôvodného automatu $A$ boli využívané rovnomerne. Vo výsledku $A'$ by tak boli rovnomerne využívané len novo pridané stavy, ale nemáme žiadnu vedomosť o využívaní pôvodných stavov. Automaty $A$ a $A'$ naviac neakceptujú rovnaký jazyk.

**Veta 4.2.3** Platí $\mathscr{L}_{K-SEQA} \subseteq \mathscr{L}_{\delta-EQA}$.

**Dôkaz.**

$\subseteq$: Nech $L$ je ľubovoľný prísne stavovo vyvážený jazyk. Dokážeme, že je prechodovo vyvážený. V prípade, že je $L$ konečný, je podľa lemy 3.10.1 aj prechodovo vyvážený. Preto stačí, ak sa budeme zaoberať len nekonečnými jazykmi.

Nech je teda $L$ ľubovoľný nekonečný prísne stavovo vyvážený jazyk. Z charakterizácie triedy $\mathscr{L}_{K-SEQA}$ vyplýva, že existuje konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ v tvare orientovaného multicyklu cez všetky stavy taký, že $L(A) = L$, ktorý je naviac minimálnym automatom akceptujúcim $L$. Spomedzi všetkých možných pomenovaní stavov vyberme také, kde $K = \{q_0, \ldots, q_{m-1}\}$ pre $m = |K|$, a kde $\delta(q_i, c) = q_{(i+1) \bmod m}$ pre všetky $i \in \mathbb{Z}_m$ a všetky $c \in \Sigma$, pre ktoré je daný prechod definovaný. To znamená, že pre automat $A$ s periódou $m$ platí $\mathscr{P}(i) = \{i\}$ pre všetky $i \in \mathbb{Z}_m$.

Zostrojíme teraz prechodovo vyvážený automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L$. Hlavnou myšlienkou konštrukcie bude rozdeliť stavy automatu $A$ na viacero stavov tak, aby boli splnené predpoklady vety 3.10.1.

Položme $s := \mathrm{nsn}\{|W^+(q)| \mid q \in K\}$, kde $W^+(q)$ je množina prechodov vedúcich zo stavu $q$. Automat $A'$ zostrojíme tak, aby zo stavov každej triedy periodického rozkladu viedlo spolu $s$ prechodov. Ak naviac zariadime, aby bolo týchto $s$ prechodov rozdelených *rovnomerne* medzi stavy nasledujúcej triedy periodického rozkladu, a aby bol počet slov $w \in \Sigma^m$ takých, že $(p', w) \vdash^m (q', \varepsilon)$ rovnaký pre všetky dvojice stavov $p', q' \in \mathscr{P}(0)$, budú predpoklady vety 3.10.1 zrejme splnené.

Formálne zostrojíme automat $A'$ nasledujúcim spôsobom. Vezmime

$$K' = \{[q, k] \mid q \in K;\ k \in \mathbb{Z}_{s/|W^+(q)|}\},$$

položme $\Sigma' = \Sigma$, $q_0' = [q_0, 0]$,

$$F' = \{[q, k] \in K' \mid q \in F\}$$

a $\delta'$-funkciu definujme ako

$$\delta'([q_i, k], c) = [q_{(i+1) \bmod m}, (k \cdot |W^+(q_i)| + \xi_{q_i}(c)) \bmod (s/|W^+(q_{(i+1) \bmod m})|)],$$

kde $(q_i, c, q_{(i+1) \bmod m}) \in D$ (inak je hodnota $\delta'([q_i, k], c)$ nedefinovaná), a kde $\xi_{q_i} : \Sigma_{q_i} \to \{0, \ldots, |\Sigma_{q_i}| - 1\}$ je ľubovoľné bijektívne očíslovanie znakov z abecedy

$$\Sigma_{q_i} = \{c \in \Sigma \mid (q_i, c, q_{(i+1) \bmod m}) \in D\}.$$

Je povšimnutiahodné, že $|\Sigma_{q_i}| = |W^+(q_i)|$.

Uvedená konštrukcia funguje tak, že každý stav $q_i$ rozdelíme na $s/|W^+(q_i)|$ stavov, pričom z každého zo stavov, na ktoré bol stav $q_i$ rozdelený vedieme presne $|W^+(q_i)|$ prechodov (na tie isté písmená, ako zo stavu $q_i$). Stavy, na ktoré bol stav $q_i$ rozdelený tvoria kompletnú triedu $\mathscr{P}(i)$, čo znamená, že z každej triedy, a teda aj do každej triedy periodického rozkladu vedie presne $s$ prechodov. Ďalej platí, že z každého stavu v triede $\mathscr{P}(i)$ (pre ľubovoľné

$i$) vedie rovnako veľa prechodov (presne $|W^+(q_i)|$). Spôsob definície $\delta'$-funkcie, v ktorom sa prechody rozdeľujú po jednom cyklicky medzi všetky stavy nasledujúcej triedy periodického rozkladu[3] zaručuje, že do každého stavu nasledujúcej triedy periodického rozkladu vedie rovnaký počet prechodov, a keďže všetkých prechodov vedúcich do nasledujúcej triedy je presne $s$, musí platiť, že do každého stavu v triede $\mathscr{P}(i)$ vedie pre každé $i$ presne $|W^+(q_i)|$ prechodov.

Ukážeme ešte, že pre ľubovoľnú dvojicu stavov $p', q' \in \mathscr{P}(0)$ je počet slov $w \in \Sigma^m$ takých, že $(p', w) \vdash^m (q', \varepsilon)$, rovnaký. Všetkých výpočtov dĺžky $m$ vedúcich z ľubovoľného $p' \in \mathscr{P}(0)$ je presne

$$C = \prod_{i=0}^{m-1} |W^+(q_i)|,$$

kde $q_i$ je stav automatu $A$. Každý z týchto $C$ výpočtov možno jednoznačne zakódovať pomocou postupnosti

$$h_0, h_1, \ldots, h_{m-1} \in \mathbb{Z}_{|W^+(q_0)|} \times \mathbb{Z}_{|W^+(q_1)|} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{|W^+(q_{m-1})|},$$

pričom $h_i$ je hodnota $\xi_{q_i}(c)$, kde $c$ je písmeno, na ktoré bol použitý prechod v danom kroku výpočtu. Je zrejmé, že ak všetky tieto postupnosti usporiadame v lexikografickom usporiadaní, bude platiť nasledujúce: prvá postupnosť reprezentuje výpočet končiaci v stave $[q_0, 0]$, druhý končí v $[q_0, 1 \bmod (s/|W^+(q_0)|)]$, tretí v $[q_0, 2 \bmod (s/|W^+(q_0)|)]$, atď. Z toho vyplýva, že počet výpočtov vedúcich z $p'$ do $q'$ je pre ľubovoľnú dvojicu stavov $p', q' \in \mathscr{P}(0)$ rovný $C/s$ (zjavne $s$ delí $C$).

Z predchádzajúcich pozorovaní vyplýva, že sú splnené predpoklady vety 3.10.1, čo znamená, že automat $A'$ je prechodovo vyvážený, čo bolo treba dokázať.

$\not\supseteq$: Uvažujme jazyk $L = \{aa, bb\}^*$. Nie je ťažké zostrojiť prechodovo vyvážený automat, ktorý ho akceptuje. Rovnako ľahké je však nahliadnuť, že ho neakceptuje žiaden automat v tvare orientovaného multicyklu cez všetky stavy. Takýto nekonečný jazyk však nemôže byť prísne stavovo vyvážený.

$\square$

**Veta 4.2.4** Triedy $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ a $\mathscr{L}_{K-EQA}$ sú neporovnateľné.

**Dôkaz.**

$\not\subseteq$: Uvažujme jazyk $L = \{a, bb\}^*$. V dôkaze vety 4.1.1 bol uvedený minimálny automat $A$ taký, že $L(A) = L$. Pre tento automat platí $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$ a $\delta$-funkcia je definovaná ako

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= q_0, \\ \delta(q_0, b) &= q_1, \\ \delta(q_1, b) &= q_0. \end{aligned}$$

Tento automat je zjavne slabo prechodovo vyvážený, preto $L \in \mathscr{L}_{\delta-WEQA}$. Zostáva dokázať, že $L \notin \mathscr{L}_{K-EQA}$.

Sporom. Nech existuje stavovo vyvážený automat $A'$ akceptujúci $L$. Potom existuje aj stavovo vyvážený automat $A''$ akceptujúci $L$, ktorý má súvislú grafovú reprezentáciu, a ktorý neobsahuje stavy zodpovedajúce triede ekvivalencie Myhillovej-Nerodovej relácie, ktorej slová sa nedajú doplniť na slová z akceptovaného jazyka.[4]

[3]Spôsobom spravodlivého delenia dukátov medzi zbojníkmi.

[4]Automat $A''$ možno získať z automatu $A'$ odobraním komponentov súvislosti neobsahujúcich $q_0$ a stavov prislúchajúcich uvedenej triede ekvivalencie. Nie je ťažké nahliadnuť, že ak $A'$ bol stavovo vyvážený, bude stavovo vyvážený aj automat $A''$.

Stavy automatu $A''$ možno rozdeliť na dve triedy $T_1$ a $T_2$ (rovnako ako v dôkaze vety 4.1.1). Zrejme platí, že

$$\sum_{q \in T_1} \#_{A''}[q, L(A'') \cap \Sigma^n] = \#_A[q_0, L(A) \cap \Sigma^n] \tag{4.1}$$

a

$$\sum_{p \in T_2} \#_{A''}[p, L(A'') \cap \Sigma^n] = \#_A[q_1, L(A) \cap \Sigma^n]. \tag{4.2}$$

Taktiež zrejme platí

$$\#_A[q_0, L(A) \cap \Sigma^n] = \#_A[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] + \#_A[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n] \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|$$

a

$$\#_A[q_1, L(A) \cap \Sigma^n] = \#_A[q_1, b, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|,$$

z čoho dosadením do (4.1) a (4.2) dostávame

$$\sum_{q \in T_1} \#_{A''}[q, L(A'') \cap \Sigma^n] = \#_A[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] + \#_A[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n] \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|$$

a

$$\sum_{p \in T_2} \#_{A''}[p, L(A'') \cap \Sigma^n] = \#_A[q_1, b, q_0, L(A) \cap \Sigma^n] \pm O(1)|L(A) \cap \Sigma^n|.$$

Z uzavretých tvarov pre $\#_A[q_0, a, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]$, $\#_A[q_0, b, q_1, L(A) \cap \Sigma^n]$ a $\#_A[q_1, b, q_0, L(A) \cap \Sigma^n]$, vypočítaných počas dôkazu vety 4.1.1 potom vyplýva

$$\sum_{q \in T_1} \#_{A''}[q, L(A'') \cap \Sigma^n] = \frac{3+\sqrt{5}}{10} n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + o\left(n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{4.3}$$

a

$$\sum_{p \in T_2} \#_{A''}[p, L(A'') \cap \Sigma^n] = \frac{1}{5} n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + o\left(n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{4.4}$$

Z predpokladu stavovej vyváženosti automatu $A''$ vyplýva, že pre každý stav $q \in K''$ platí

$$\#_{A''}[q, L(A'') \cap \Sigma^n] = D \cdot n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + o\left(n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

kde $D$ je konštanta. Dosadením do (4.3) a (4.4) však dostávame

$$D \cdot |T_1| = \frac{3+\sqrt{5}}{10}$$

a

$$D \cdot |T_2| = \frac{1}{5}.$$

Ale $|T_1|$ a $|T_2|$ majú byť prirodzené čísla, čo znamená, že predchádzajúce dve rovnosti nemôžu byť súčasne splnené. Dostávame teda spor.

$\not\supseteq$: O jazyku $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$ je dokázané, že je stavovo vyvážený, ale nie je slabo prechodovo vyvážený.

$\square$

# Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo v nadväznosti na práce [9] a [10] o rovnomernom využívaní stavov v konečných automatoch definovať a preštudovať triedy automatov a jazykov s rovnomerným využívaním prechodov, pričom ako výpočtový model bol zvolený deterministický konečný automat s možnosťou nedočítania vstupného slova.

Počas celej práce sa využívali predovšetkým veličiny $\#_A[q, c, q', w]$ (počet využití prechodu $(q, c, q')$ počas výpočtu na slove $w \in L(A)$), $\#_A[q, c, q', L]$ (počet využití prechodu $(q, c, q')$ počas výpočtov na slovách konečného jazyka $L \subseteq L(A)$) a $|L(A) \cap \Sigma^n|$ (počet akceptovaných slov dĺžky $n$).

V kapitole 2 bola definovaná trieda *prísne prechodovo vyvážených* automatov. Jej definícia formalizovala požiadavku približne rovnomerného využívania prechodov na každom slove akceptovaného jazyka a bola analógiou definície obdobnej triedy prísne stavovo vyvážených automatov definovanej v [9]. Bola nájdená úplná charakterizácia triedy prísne prechodovo vyvážených automatov: deterministický konečný automat so súvislou grafovou reprezentáciou je prísne prechodovo vyvážený práve vtedy, keď akceptuje konečný jazyk alebo keď má tvar orientovaného cyklu cez všetky stavy. Na základe tejto charakterizácie bol podaný aj úplný opis triedy jazykov $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ akceptovanej takýmito automatmi.

V kapitole 3 bol definovaný koncept *kvocientu vyváženosti*, ktorý udáva pomer medzi počtom využití najzriedkavejšie a najčastejšie využívaného prechodu v danom automate na akceptovaných slovách dĺžky $n$. Na základe kvocientu vyváženosti bola definovaná *miera vyváženosti* deterministického konečného automatu ako limes inferior kvocientov vyváženosti pre $n \to \infty$. *Prechodovo vyvážený* automat bol definovaný ako konečný automat s mierou vyváženosti 1 a *slabo prechodovo vyvážený* automat bol definovaný ako automat s mierou vyváženosti väčšou ako 0. Prechodovo vyvážený jazyk bol definovaný ako jazyk, ku ktorému existuje prechodovo vyvážený automat a obdobne boli definované aj slabo prechodovo vyvážené jazyky. Trieda prechodovo vyvážených jazykov bola označená ako $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ a trieda slabo prechodovo vyvážených jazykov ako $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$.

V práci bol ďalej uvedený spôsob matematického výpočtu uzavretého tvaru pre veličiny $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#_A[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ pomocou riešenia homogénneho systému lineárnych rekurentných vzťahov prvého rádu s konštantnými koeficientmi, pričom bol opísaný spôsob, ako takéto systémy rekurencií vo všeobecnosti riešiť. Výsledky tejto časti práce poskytli návod, ako získať mieru vyváženosti daného automatu pomocou výpočtu limity a poskytli tiež vhodný základ pre štúdium analytických vlastností hodnôt $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#_A[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$.

Ďalej sa práca zaoberala charakterizáciou triedy slabo prechodovo vyvážených automatov. Bolo dokázané, že deterministický konečný automat so súvislou grafovou reprezentáciou je slabo prechodovo vyvážený práve vtedy, keď akceptuje konečný jazyk alebo keď je jeho grafová reprezentácia silne súvislá.

Boli uvedené niektoré pojmy z oblasti spektrálnej teórie grafov a analogické pojmy boli definované pre konečné automaty. V kontexte Perronovej-Frobeniovej vety sa potom využili na lepšiu charakterizáciu všeobecného riešenia systémov rekurentných vzťahov pre $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#_A[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ pre slabo prechodovo vyvážené automaty, ktorá mala veľký význam najmä pri štúdiu analytických vlastností týchto veličín.

V ďalšom sa práca zaoberala najmä skúmaním analytických vlastností veličín $|L(A) \cap \Sigma^n|$ a $\#_A[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$, pričom výsledky boli väčšinou uvádzané pre slabo prechodovo vyvážené automaty. Bolo dokázané, že pre každý prechod $(q, c, q')$ slabo prechodovo vyváženého automatu $A$ existuje konštanta $a$ taká, že platí

$$\#_A[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n] = (an \pm O(1))|L(A) \cap \Sigma^n|. \tag{Z.1}$$

Toto tvrdenie zohralo dôležitú úlohu pri dôkaze tvrdenia o konvergencii čiastočných postupností kvocientov vyváženosti, z ktorého vyplýva, že postupnosť kvocientov vyváženosti má najviac dve čiastočné limity, pričom jedna z nich je vždy miera vyváženosti. Druhá z nich je, ak existuje, vždy rovná 1 a vyskytuje sa len vtedy, ak existuje nekonečná postupnosť dĺžok slov, pre ktoré nie je akceptované žiadne slovo danej dĺžky. Tvrdenie (Z.1) sa využilo aj pri dôkaze vety o alternatívnej definícii prechodovej vyváženosti, ktorá dala do súvisu prechodovo vyvážené automaty definované v tejto práci so stavovo vyváženými automatmi definovanými v [9].

V práci tiež boli uvedené elementárne nutné a postačujúce podmienky prechodovej vyváženosti automatu.

Pre každú z definovaných tried boli dokázané uzáverové vlastnosti, ktoré sumarizuje nasledujúca tabuľka.

| | $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$ | $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ | $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ |
|---|---|---|---|
| Zreťazenie | nie | nie | nie |
| Zjednotenie | nie | nie | nie |
| Prienik | áno | nie | nie |
| Komplement | nie | nie | nie |
| Iterácia | nie | nie | nie |
| Kladná iterácia | nie | nie | nie |
| Reverz | nie | nie | nie |
| Homomorfizmus | nie | nie | nie |
| Inverzný homomorfizmus | nie | nie | nie |

**Tabuľka Z.1:** Tabuľka uzáverových vlastností tried $\mathscr{L}_{\delta-SEQA}$, $\mathscr{L}_{\delta-WEQA}$ a $\mathscr{L}_{\delta-EQA}$ dokázaných v tejto práci.

Vo štvrtej kapitole boli dokázané tvrdenia o vzájomných vzťahoch tried prechodovo a stavovo vyvážených jazykov. Bolo dokázané, že triedy prechodovo vyvážených jazykov sa dajú usporiadať do hierarchie vzhľadom na inklúziu v nasledujúcom poradí (od najmenšej triedy po najväčšiu): prísne prechodovo vyvážené jazyky, prechodovo vyvážené jazyky, slabo prechodovo vyvážené jazyky. Následne boli dokázané aj tvrdenia o vzťahu tried prechodovo vyvážených jazykov k triedam stavovo vyvážených jazykov. Výsledky štvrtej kapitoly možno zhrnúť nasledujúcim diagramom.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{L}_{\delta-WEQA} & \\
\mathscr{L}_{\delta-SEQA} \arrow[r] & \mathscr{L}_{K-SEQA} \arrow[r] & \mathscr{L}_{\delta-EQA} \arrow[u] \arrow[r] & \mathscr{L}_{K-EQA}
\end{tikzcd}$$

**Obrázok Z.1:** Diagram znázorňujúci vzťahy medzi triedami prechodovo a stavovo vyvážených jazykov. Trieda $A$ je podtriedou triedy $B$, ak v diagrame vedie orientovaná cesta z $A$ do $B$. V prípade, že pre nejaké triedy $A$, $B$ nevedie v diagrame orientovaná cesta ani z $A$ do $B$, ani z $B$ do $A$, sú tieto dve triedy neporovnateľné.

# Literatúra


[1] BAGNARA, R. – ZACCAGNINI, A. – ZOLO, T. 2003. *The Automatic Solution of Recurrence Relations – I. Linear Recurrences of Finite Order with Constant Coefficients* [online]. Dostupné na internete: `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.10.362`.

[2] BENGIO, Y. – FRASCONI, P. 1995. *Diffusion of Credit in Markovian Models* [online]. Dostupné na internete: `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.33.9805`.

[3] BOYLE, M. *Notes on the Perron-Frobenius Theory of Nonnegative Matrices* [online]. Dostupné na internete: `www.math.umd.edu/~mmb/475/spec.pdf`.

[4] BROUWER A. E. – HAEMERS, W. H. *Spectra of Graphs* [online]. Dostupné na internete: `homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipm.pdf`.

[5] DEMEL, J. 2002. *Grafy a jejich aplikace*. 1. vyd. Praha : Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6.

[6] HOPCROFT, J. E. – MOTWANI, R. – ULLMAN, J. D. 2001. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation* 2nd ed. Reading : Addison-Wesley, 2001. ISBN 0-201-44124-1.

[7] JARVIS, J. P. – SHIER, D. R. *Graph-Theoretic Analysis of Finite Markov Chains* [online]. Dostupné na internete: `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.39.1937`.

[8] KELLEY, W. G. – PETERSON A. C. 2001. *Difference Equations - An Introduction with Applications* 2nd ed. San Diego : Academic Press, 2001. ISBN 0-12-403330-X.

[9] KOVÁČ, I. 2010. *Equiloaded Automata* : diplomová práca. Bratislava : Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2010.

[10] KOVÁČ, I. 2008. *O využívaní stavov v konečných automatoch* : bakalárska práca. Bratislava : Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2008.

[11] MITZENMACHER, M. – UPFAL, E. 2005. *Probability and Computing. Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis* 1st ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2005. ISBN 0-521-83540-2.

[12] NERODE, A. 1958. Linear Automaton Transformations. In *Proceedings of the American Mathematical Society*. ISSN 0002-9939, 1958, vol. 9, no. 4, p. 541 – 544.

[13] ROBINSON, D. J. S. 2006. *A Course in Linear Algebra with Applications* 2nd ed. Singapore : World Scientific Publishing, 2006. ISBN 981-270-023-4.

[14] ROVAN, B. – FORIŠEK, M. 2009. *Formálne jazyky a automaty* [online]. Dostupné na internete: `http://foja.dcs.fmph.uniba.sk/materialy/skripta.pdf`.

[15] TREIL, S. 2009. *Linear Algebra Done Wrong* [online]. Dostupné na internete: `http://www.math.brown.edu/~treil/papers/LADW/LADW.pdf`.