Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Frakčné chromatické číslo grafov

2012 **Ondrej Husár**

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Frakčné chromatické číslo grafov

Bakalárska práca

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra Informatiky
Školiteľ: RNDr. Robert Lukoťka, PhD.

Bratislava, 2012 **Ondrej Husár**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Ondrej Husár
Študijný program:	informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: Frakčné chromatické číslo grafov

Cieľ: Zhrnúť doteraz dosiahnuté výsledky a použité metódy v problematike frakčného chromatického čísla distančných grafov. Pokúsiť sa určiť frakčné chromatické číslo pre nejaký distančný graf, prípadne pre nejakú triedu distančných grafov.

Vedúci: RNDr. Robert Lukoťka, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky

Dátum zadania: 09.11.2009

Dátum schválenia: 23.03.2011

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Abstrakt

V tejto práci sa zaoberám frakčných chromatickým číslom grafov. Špeciálne sa zaoberám frakčnými farbeniami dištančných grafov. Uvediem niektoré vety, pomocou ktorých možno určiť frakčné chromatické číslo pre konkrétne triedy dištančných grafov.

Kľúčové slová: **frakčné farbenia, dištančné grafy, množina uzavretá na rozdiel**

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

. . . .

Ďakujem týmto vedúcemu mojej bakalárskej práce RNDr. Robertovi Lukoťkovi PhD. za cenné rady a pomoc pri písaní bakalárskej práce.

Obsah

1 Úvod **3**

2 Základné definície a pojmy **6**

3 Dištančné grafy **13**

4 Frakčné farbenia pre určité triedy dištančných grafov **17**

4.1 Množiny skoro uzavreté na rozdiel 18

4.1.1 Množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.1 21

4.1.2 Množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.2 23

4.1.3 Množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.3 24

Záver **25**

Kapitola 1

Úvod

Jednou z najzaujímavejších častí teórie grafov je farbenie grafov, respektíve určovanie chromatického čísla grafov. Prvé zmienky o farbení grafov siahajú až do 19. storočia, kedy v roku 1852 Francis Guthrie z Juhoafrickej republiky sformuloval takzvanú vetu o štyroch farbách [11], ktorá hovorí o tom, že každý planárny graf je zafarbiteľný štyrmi farbami, a teda má chromatické číslo maximálne 4. Táto veta bola dokázaná pomocou počítačov po niekoľkých neúspešných pokusoch až v roku 1976 americkým matematikom Kennethom Appelom a nemeckým matematikom Wolfgangom Hakenom.

V tejto práci sa budem zaoberať frakčným farbením grafov. Frakčné farbenie je zaujímavá téma v oblasti teórie grafov, ktorá zatiaľ nie je úplne preskúmaná. Frakčné farbenie grafu je zafarbenie každého vrcholu grafu rovnakým počtom farieb takým spôsobom, že žiadne dva susedné vrcholy niesú zafarbené rovnakou farbou. Frakčné chromatické číslo grafov dostaneme, ak minimalizujeme podiel použitých farieb v celom grafe a počtu farieb, ktorým je zafarbený jeden vrchol. Zároveň platí to čo pri frakčnom farbení, čiže žiadne dva susedné vrcholy nemajú spoločnú farbu, ktorou sú zafarbené. Namiesto farieb sa však kvôli jednoduchosti zvyknú používať prirodzené čísla. Frakčné chromatické číslo grafov bolo prvýkrát spomenuté v článku z roku 1973 od Hiltona, Radoa a Scotta. Zaujímavé sú výsledky pre zložitosť frakčného farbenia. Vrcholové farbenie je NP-ťažké [14], no na druhej strane môžeme hranové farbenie vyriešiť v polynomiálnom v čase [13].

Pojem frakčného chromatického čísla grafov súvisí s cirkulárnymi farbeniami, ktorým sa venoval Xuding Zhu v [12]. Cirkulárne (a, b)-farbenie grafu $G(V, E)$ je také zobrazenie $c : V \to \{0, 1, ..., a-1\}$, že pre každú hranu $uv \in E$ platí: $b \leq |c(u) - c(v)| \leq a - b$. Cirkulárne chromatické číslo grafu $\chi_c(G)$ je minimálny podiel a/btaký, že graf G má (a, b)-farbenie. Pre cirkulárne chromatické číslo grafu platí, že je ohraničené zdola frakčným chromatickým číslom $\chi_f(G)$ a zhora zase chromatickým číslom $\chi(G)$.

Pomocou farbení grafov môžeme riešiť niekoľko rôznych problémov. Medzi jednu z najpoužívanejších aplikácii partí problém naplánovania procesov. Potrebujeme docieliť, aby sa všetky potrebné procesy v systéme vykonali, pričom niektoré procesy sa nemôžu vykonať súčasne. V tomto prípade nám vrcholy grafu symbolizujú procesy a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, ak sa nemôžu vykonať súčasne. Majme n procesov. Na vykonanie každého z nich potrebujeme jednu sekundu. Nájdenie k-farbenia tohto grafu zodpovedá nájdeniu optimálneho naplánovania pre vykonanie všetkých procesov. Farba i na vrchole v znamená, že sa tento proces vykoná v čase i. Ak sú dva vrcholy zafarbené rozličnou farbou, tak sa tieto procesy nemôžu vykonať súčasne. Čiže počet farieb na zafarbenie tohto grafu nám udáva najkratší čas, za ktorý sa dajú tieto procesy vykonať.

Ak použijeme frakčné farbenie, dovolíme procesu aby sa mohol vykonať na viac krát. Každý proces sa vykoná na toľko krát, koľkými farbami je zafarbený a podľa toho rozdelíme sekundu na viac menších úsekov. Nájdením frakčného chromatického čísla tohoto grafu dosiahneme optimálne naplánоvanie pre vykonanie všetkých procesov.

Cieľom práce je urobiť prehľad výsledkov a použitých metód pri skúmaní frakčného chromatického čísla dištančných grafov. Dištančný graf $G(Z, D)$ je nekonečný graf, ktorého vrcholmi sú prirodzené čísla, pričom dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, ak sa rozdiel týchto vrcholov nachádza v množine D. Ako neskôr ukážeme, skúmanie frakčného chromatického čísla pre dištančné grafy má súvis s teóriou množín a hustotou množín. V tejto práci budeme uvažovať, že graf G je jednoduchý neorientovaný graf. Na začiatku uvedieme definície pojmov používaných v tejto práci. Potom ukážeme niekoľko spôsobov, ako skúmať frakčné chromatické číslo dištančných grafov. Špeciálne sa zameriame na konkrétne výsledky pre niektoré typy dištančných grafov.

Kapitola 2

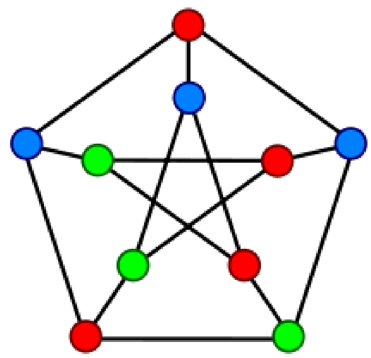
Základné definície a pojmy

Frakčné farbenie grafov je zovšeobecnením normálneho (vrcholového) farbenia grafov. Pri vrcholovom farbení grafu G je každému vrcholu $V \in G$ priradená farba tak, aby žiadne dva susedné vrcholy spojené hranou nemali pridelenú rovnakú farbu. Vo frakčnom farbení grafov obsahuje každý vrchol množinu farieb, pričom prienik množín farieb dvoch susedných vrcholov je prázdna množina. Namiesto farieb sa zvyknú používať aj prirodzené čísla. Nasledujúce definície a vlastnosti boli spísané Edwardom R. Scheinermanom a Danielom H. Ullmanom v [9].

Nezávislá množina M grafu G je taká množina vrcholov, že pre každé dva vrcholy z M platí, že niesú spojené hranou. Mohutnosť najväčšej nezávislej množiny voláme číslo nezávislosti grafu a značíme ho $\alpha(G)$. Maximálny kompletný podgraf grafu G nazývame číslo kliky grafu, používame označenie $\omega(G)$. Počet vrcholov grafu G je mohutnosť vrcholovej množiny V. Označujeme ho $n(G)$. Chromatické číslo grafu $\chi(G)$ je najmenší počet farieb, ktorý musíme použiť na zafarbenie vrcholov, pričom každá hrana spája vrcholy rôznych farieb.

Na obrázku 2.1 máme zafarbenie Petersenovho grafu troma farbami. Chromatické číslo tohto grafu je 3. Dvoma farbami nie je zafarbiteľný, pretože obsahuje kružnice nepárnej dĺžky.

Obr. 2.1: Zafarbenie Petersenovho grafu troma farbami



Nech b je prirodzené číslo a $b \geq 1$. Potom b farbenie grafu je zafarbenie všetkých vrcholov grafu b farbami tak, že susedné vrcholy sú zafarbené disjunktnými množinami farieb. Ak a je prirodzené číslo a platí, že $a \geq b$, tak a:b farbenie je definované ako b-farbenie grafu z a možných farieb a *b-násobné chromatické číslo grafu* $\chi_b(G)$ je najmenšie číslo také, že a:b farbenie existuje.

Frakčné chromatické číslo môžeme definovať nasledujúcimi dvoma spôsobmi. Prvej definícii hovoríme farbiaca definícia a druhá definuje frakčné chromatické čislo grafu pomocou lineárneho programovania. Obe definície sú ekvivelentné.

Definícia 2.1 *Frakčné chromatické čislo grafu G* je definované ako

$$\chi_f(G) = \lim_{b \to \infty} \frac{\chi_b(G)}{b} = \inf_b \frac{\chi_b(G)}{b}$$

Táto limita existuje, lebo platí, že

$$\chi_{a+b}(G) \leq \chi_a(G) + \chi_b(G)$$

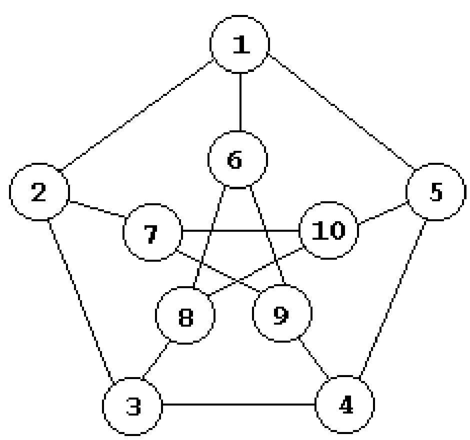
Lineárne programovanie slúži na optimalizáciu funkcií viac premenných pri splnení zadanej podmienky. Frakčné chromatické číslo grafov môžeme definovať aj týmto spôsobom.

Definícia 2.2 Nech I je nezávislá množina vrcholov a nech $x_I \geq 0$ je premenná pre každú nezávislú množinu I. Potom frakčné chromatické číslo grafu G dostaneme vyriešením lineárneho programu

$$min \sum_I x_I : \forall v \in G \sum_{I : v \in I} x_I \geq 1$$

Na nasledujúcom obrázku máme Petersenov graf, v ktorom máme označené vrcholy grafu od 1 po 10. Pokúsime sa skúmať frakčné chromatické číslo tohoto grafu.

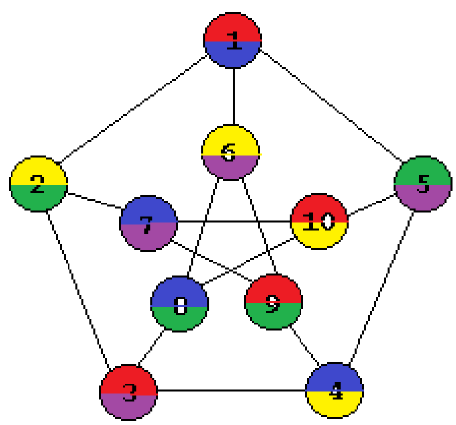
Obr. 2.2: Petersenov graf



Najskôr hľadáme v tomto grafe najväčšie možné nezávislé množiny vrcholov I_j. Začneme vrcholom 1. Z obrázku vidno, že z vonkajšieho cyklu môžu byť v jednej nezávislej množine maximálne 2 vrcholy. $I_1 = \{1, 3, 9, 10\}$,

$I_2 = \{1, 4, 7, 8\}$, $I_3 = \{2, 4, 6, 10\}$, $I_4 = \{2, 5, 8, 9\}$, $I_5 = \{3, 5, 6, 7\}$. Našli sme 5 nezávislých množín, ktorých mohutnosť je 4, táto mohutnosť je maximálna a žiadna ďalšia nezávislá množina s mohutnosťou 4 v grafe nieje. Každá nezávislá množina nám určuje farbu, ktorou sú dané vrcholy zafarbené. Každý vrchol sa nachádza práve v dvoch nezávislých množinách. Našli sme 5:2 farbenie tohoto grafu. Ak by sme chceli zafarbiť vrchol troma farbami, potrebujeme na to aspoň ďalšie 4 farby, lebo počet vrcholov je 10 a mohutnosť najväčšej nezávislej množiny okrem spomínaných piatich je 3. Dostali by sme 9:3 farbenie a keďže $5/2 < 9/3$, frakčné chromatické číslo tohoto grafu bude $5/2$.

Obr. 2.3: Frakčné farbenie Petersenovho grafu



Teraz uvediem niektoré vlastnosti frakčného chromatického čísla, ktoré sú uvedené v [7]:

$$\chi_f(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)} \qquad (2.1)$$

$$\chi_f(G) \geq \omega(G) \qquad (2.2)$$

$$\chi_f(G) \leq \chi(G) \qquad (2.3)$$

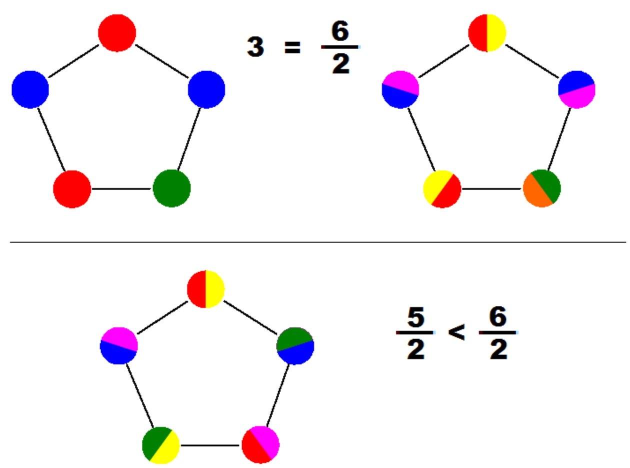
Minimálny počet disjunktných nezávislých množín v grafe je podiel počtu vrcholov grafu a mohutnosti najväčšej nezávislej množiny grafu. Frakčné chromatické číslo grafu musí byť aspoň také, aký je minimálny počet disjunktných nezávislých množín v grafe, a teda $\chi_f(G) \geq n(G)/\alpha(G)$.
Druhú vlasnosť vieme odvodiť z toho, že v klike s mohutnosťou n musí byť použitých minimálne n farieb, keďže všetky vrcholy tohto podgrafu sú navzájom pospájané hranami.
Posledná nerovnosť vyplýva z toho, že ak zafarbíme každý vrchol grafu len jednou farbou dostávame rovnosť a z definície frakčného chromatického čísla vieme, že nemôže platiť $\chi_f(G) > \chi(G)$.

Nasledujúca hypotéza hovorí o hornej hranici chromatického čísla grafov. Pre chromatické číslo grafov je táto hypotéza otvorený problém, ale ak namiesto $\chi(G)$ použijeme $\chi_f(G)$, táto hypotéza platí.

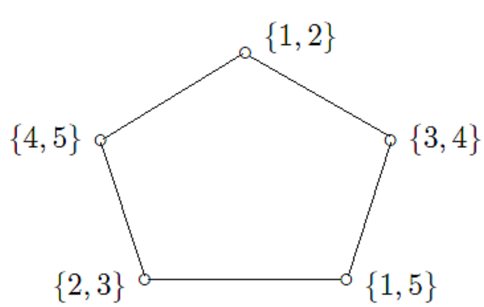
Hypotéza 2.1 Pre každý graf G platí: $\chi(G) \leq \lceil \frac{1}{2}(\alpha(G) + 1) + \frac{1}{2}\omega(G) \rceil$

Na obrázkoch 2.4 a 2.5 máme znázornené normálne a frakčné farbenie kružnice, ktorá má 5 vrcholov. Každá množina farieb má $\alpha(G)$ prvkov. Z hore uvedených vlastností vieme, že $\chi_f(G)$ je zdola ohraničené číslom $\frac{n(G)}{\alpha(G)}$. Z toho vyplýva, že frakčné chromatické číslo je $\frac{5}{2}$. Keďže je kružnica nepárnej dĺžky, chromatické číslo takéhoto grafu rovné $\frac{n(G)+1}{2} = 3$.

Obr. 2.4: Klasické farbenie a frakčné farbenie kružnice dĺžky 5

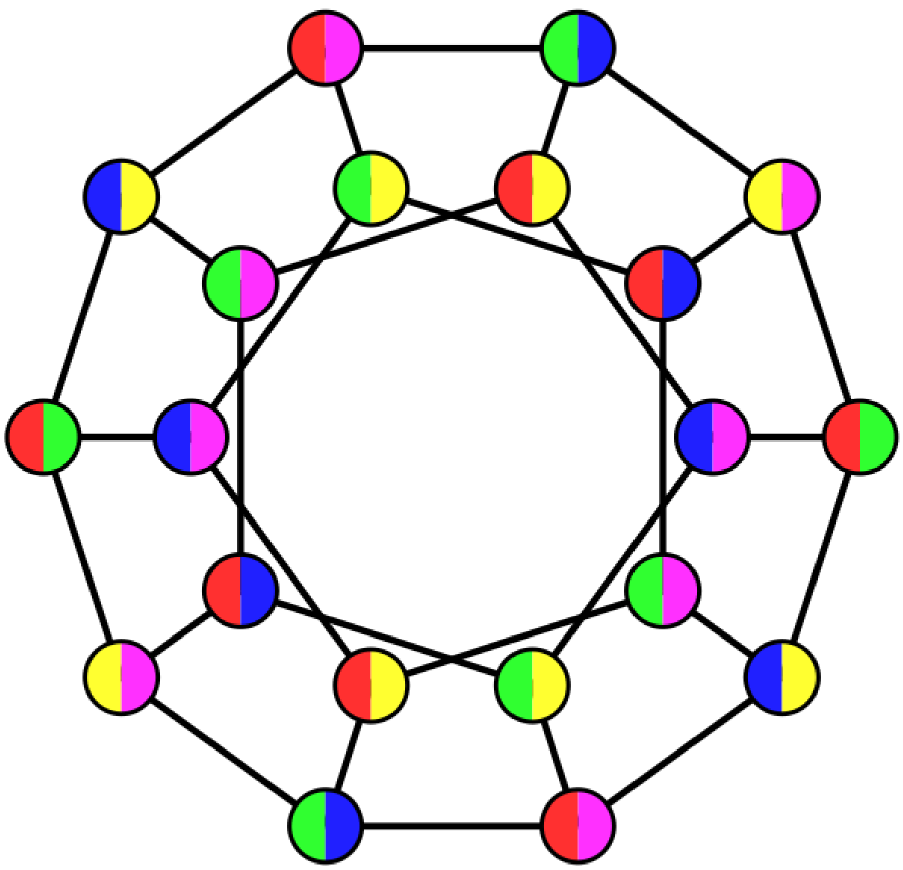


Obr. 2.5: Frakčné farbenie kružnice dĺžky 5



Na ďalšom obrázku máme 5:2 farbenie dodekaéderu. Tento graf sa skladá z kružníc dĺžky 5. Na predchádzajúcom príklade sme si ukázali, že kružnica dĺžky 5 má frakčné chromatické číslo 5/2. Z toho vyplýva, že frakčné farbenie tohto grafu nemôže byť lepšie ako 5:2 a frakčné chromatické číslo bude 5/2.

Obr. 2.6: Frakčné farbenie dodekaéderu



Kapitola 3

Dištančné grafy

Prvá zmienka o dištančných grafoch je od Eggletona, Erdősa and Skiltona v [20]. Študovanie dištančných grafov bolo motivované známym problémom ktorý znie: Aký je minimálny potrebný počet farieb na zafarbenie všetkých bodov euklidovskej roviny tak, že body,ktoré majú od seba vzdialenosť 1, sú zafarbené rôznymi farbami. Tento problém je rovnako ťažký ako problému určenia chromatického čísla grafu $G(R^2, \{1\})$

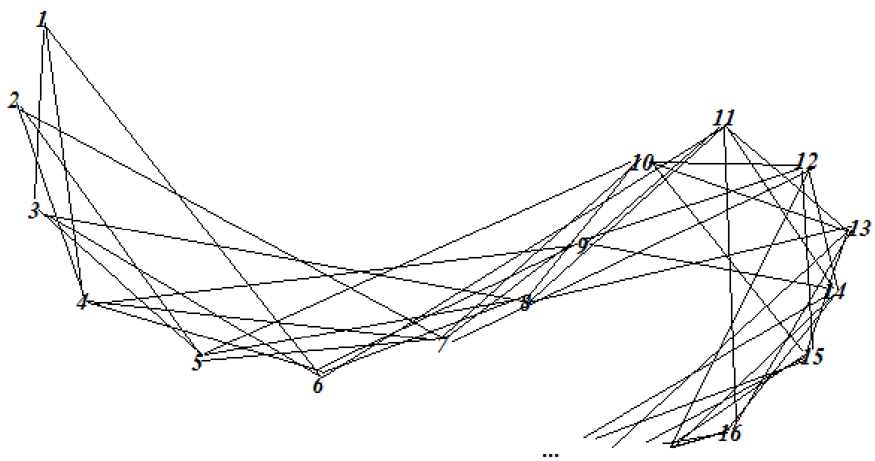
Definícia 3.1 Nech D je množina kladných prirodzených čísel. Dištančný graf generovaný množinou D je nekonečný graf, ktorý má množinu všetkých celých čísel ako množinu vrcholov a vrcholy i a j sú susedné, ak platí, že $|i - j| \in D$.

Chen, Chang a Huang v [16] dokázali, že pre ľubovoľnú množinu D platí $\chi(G(Z, D)) \leq |D| + 1$. Z nerovností (2.2) a (2.3) dostávame, že

$$|D| \leq \chi_f(G(Z, D)) \leq |D| + 1 \qquad (3.1)$$

Určiť frakčné chromatické čislo grafu pre dištančné grafy je ekvivalentný problém k problému hustoty množín v teórii čísel . Nech D je množina

Obr. 3.1: Ukážka dištančného grafu s množinou $D = \{2, 3, 5\}$



kladných celých čísel. Podľa [1] sa množina S nazýva D-množina, ak platí: $\forall a, b \in S : |a - b| \in D$. Z tohto vyplýva, že S je D-množina práve vtedy, ak S je klika v $G(Z, D)$.

Označme $S(n) = |\{0, 1, ..., n-1\} \bigcap S|$. Horná asymptotická hustota a dolná asymptotická hustota množiny S sú definované nasledovne:

$$\overline{\delta}(S) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n}, \qquad \underline{\delta}(S) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n} \qquad (3.2)$$

Hovoríme, že S má hustotu $\delta(S)$, ak $\overline{\delta} = \underline{\delta}(S) = \delta(S)$. Potom maximálna hustota D-množiny je definovaná ako $\mu(D) = \sup\{\delta(S)\ S$ je D-množina$\}$. Problém určenia $\mu(D)$ bol prvýkrát sformulovaný v [15]. Chang a Liu v [5] dokázali, že pre každú konečnú množinu D platí

$$\chi_f(G(Z, D)) = \frac{1}{\mu(D)}. \qquad (3.3)$$

Frakčné chromatické číslo dištančných grafov môžme určiť aj pomocou T-farbení, ktoré bolo prvýkrát popísané v [17] N.M. Haralambisom.

Nech T je množina prirodzených čísel a $0 \in T$. Potom T-farbenie grafu G je zobrazenie $f : V(G) \rightarrow Z$ také, že absotútna hodnota funkčných hodnôt priradených dvom susedným vrcholom nepatrí do tzv. zakázanej množiny, ktorú označujeme T-množina.

$$\forall i, j \in V : (i, j) \in E \Rightarrow |f(i) - f(j)| \notin T \qquad (3.4)$$

Rozpätie T-farbenia f je rozdiel najväčšieho a najmenšieho čísla vo $f(V)$, to znamená $\max\{|f(u) - f(v)| : u, v \in V\}$ [5]. Minimálne rozpätie medzi všetkými T-farbeniami v grafe G nazývame T-rozpätie a označujeme ho $sp_T(G)$. Nech σ_n označuje $sp_T(K_n)$. Potom pre každú množinu T asymptotický pomer T-farbenia

$$R(T) = lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\sigma_n}{n} \qquad (3.5)$$

existuje a $R(T)$ je racionálne číslo. V [6] bolo dokázané, že pre ľubovoľnú množinu T a $D = T - \{0\}$ dostaneme rovnosť

$$R(T) = \chi_f(G(Z, D)). \qquad (3.6)$$

Pre reálne číslo x označme $||x||$ vzdialenosť medzi x a najbližším prirodzeným číslom, čiže $||x|| = \min\{x - \lfloor x\rfloor, \lceil x\rceil - x\}$ [1]. Pre reálne číslo t a množinu reálnych čísiel X, nech $||tX|| = \inf\{||tx|| : x \in X\}$ a

$$\kappa(X) = sup\{||tX|| : t \in R\}. \qquad (3.7)$$

S týmto pojmom súvisí nasledujúca hypotéza, nazývaná tiež hypotéza osamelého bežca (lonely runner conjecture).

Hypotéza 3.1 [28] Nech D je konečná množina prirodzených čísel a $|D| = d$. Potom $\kappa(D) \geq 1/(d + 1)$.

Táto hypotéza sa dá interpretovať aj nasledovným spôsobom. Nech d bežcov beží konštantnou rýchlosťou na okruhu s obvodom 1, pričom každý bežec dosahuje odlišnú rýchlosť. Potom pre každého bežca existuje čas, v ktorom je vzdialený od všetkých ostatných bežcov aspoň o vzdialenosť $1/d$. Doteraz bola táto hypotéza dokázaná pre $d \leq 7$.

Cantor a Gordon v [15] dokázali, že potom pre ľubovoľnú množinu D platí

$$\kappa(D) \leq \mu(D) = \frac{1}{\chi_f(G(Z,D))} \qquad (3.8)$$

Podľa [1] pre každú množinu D takú, že $|D| \leq 2$ platí, že $\kappa(D) = \mu(D)$. To, či existuje trojprvková množina D taká, že $\kappa(D) = \mu(D)$, je zatiaľ otvorený problém.

Kapitola 4

Frakčné farbenia pre určité triedy dištančných grafov

Frakčné chromatické číslo grafov bolo skúmané pre rôzne triedy dištančných grafov [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Ak je D jednoprvková množina, potom je zrejmé že graf $G(Z, D)$ nebude obsahovať žiadnu kružnicu a teda $\chi_f(G(Z, D)) = 2$. Cantor s Gordonom [15] dokázali, že ak $D = \{a, b\}$ a najväčší spoločný deliteľ $\text{nsd}(a, b) = 1$, potom $\chi_f(G(Z, D)) = \frac{a+b}{\lfloor (a+b)/2 \rfloor}$. Keď je najväčší spoločný deliteľ prvkov množiny D väčší ako 1, potom je graf $G(Z, D)$ nesúvislý. Označme si $\text{nsd}(D) = n$. Potom graf $G(Z, D)$ má n rovnakých komponentov nesúvislosti a vrcholy každého komponentu grafu tvoria čísla s rovnakým zvyškom po delení n. Navyše každý jeden komponent je izomorfný s grafom $G(Z, D/n)$, pričom množinu D/n dostaneme z množiny D ak každý jej prvok predelíme číslom n. Pre $|D| \geq 3$ sú presné hodnoty frakčného chromatického čísla $\chi_f(G(Z, D))$ známe len pre niektoré špeciálne množiny D.

Pre ľubovoľné dve prirodzené čísla $a \leq b$ budeme používať označenie $[a, b]$ pre množinu čísiel $\{a, a+1, ..., b\}$. V [5] bolo dokázané, že ak $D = [a, b]$, potom

$$\chi_f(G(Z,D)) = \frac{a+b}{a}$$

Majme prirodzené čísla a, b, m, pre ktoré platí $1 < a \leq b < m-1$. Potom

$$D_{a,b,m} = [1, a-1] \cup [b+1, m-1]$$

Ak $a = b$, potom $D_{a,a,m} = [1, m-1] - \{a\}$. Problém určenia chomatického čísla grafu pre graf $G(Z, D_{a,a,m})$ bol prvýkrát spomenutý v [20] a bol kompletne vyriešený v [5]. Nasledujúca veta bola sformulovaná a dokázaná v [1].

Veta 4.1 Nech $G = G(Z, D_{a,b,m})$. Označme $\Delta = m - b, s = \lfloor b/a \rfloor$, $q = \lfloor m/\Delta \rfloor$. Potom

* Ak $\Delta \geq 2a$, potom $\chi_f(G) = (sa+m)/(s+1)$
* Ak $\Delta \leq a$, potom $\chi_f(G) = max\{a, m/(s+1)\}$
* Ak $a < \Delta < 2a$, potom

$$\chi_f(G) = \begin{cases} \frac{sa+m}{s+1}, & \text{ak } 2qa \leq m < a + q\Delta \text{ alebo ak } m \geq (2q+1)a \\ \frac{m}{q} & \text{ak } m < \min\{q\Delta + a, 2qa\} \\ \frac{(2q-1)m+a}{q^2} & \text{ak } q\Delta + a \leq m < (2q+1)a \end{cases}$$

V nasledujúcej kapitole uvedieme typy množín D ktoré sú zaujímavé pri počítaní frakčného chromatického čísla dištančných grafov. Neskôr si tieto množiny rozdelíme do troch skupín, pre ktoré sú známe výsledky $\chi_f(G(Z,D))$.

4.1 Množiny skoro uzavreté na rozdiel

Množinu prirodzených čísel D nazývame, že je uzavretá na rozdiel, ak pre každé $a, b \in D$ platí, že $|a - b| \in D$ (Liu, Zhu [3]). Množina D je skoro uzavretá na rozdiel, ak existuje taká množina $D' \subset D$, že $|D'| = |D| - 1$ a pre ľubovoľné dve $a, b \in D'$ platí, že $|a - b| \in D$. Je zrejmé, že ak $|D| \leq 2$ alebo $D = \{a, b, a + b\}$, potom množina D je skoro uzavretá na rozdiel. Pojem množiny skoro uzavretej na rozdiel bol po prvýkrát uvedený Kemnitzom a Marangiom [22].

Veta 4.2 Nech $G(Z, D)$ je dištančný graf. Množina D je skoro uzavretá na rozdiel práve vtedy, ak $\omega(G(Z, D)) \geq |D|$.

Dôkaz 4.2 Nech D je skoro uzavretá na rozdiel a $|D| = n$. Potom existuje taká množina $D' \subset D$, že $|D'| = |D| - 1$ a pre ľubovoľné dve $a, b \in D'$ platí, že $|a - b| \in D$. Čiže $G(Z, D)$ obsahuje podgraf, v ktorom každý z vrcholov je spojený s $n - 1$ ďalšími vrcholmi, a teda $G(Z, D)$ obsahuje K_n a $\omega(G(Z, D)) \geq |D|$. Opačne, nech $\omega(G(Z, D)) \geq |D|$. Potom $G(Z, D)$ obsahuje kompletný podgraf K_n a teda D obsahuje $n-1$ prvkovú podmnožinu D' takú, že $\forall a, b \in D' : |a - b| \in D$ a teda D je uzavretá na rozdiel.

Nasledujúca veta hovorí o tom, ako vyzerajú množiny uzavreté na rozdiel a množiny skoro uzavreté na rozdiel.

Veta 4.3 [3] Nech D je konečná množina prirodzených čísiel s mohutnosťou $|D| = d$ a najmenší spoločný deliteľ prvkov možiny je 1. Potom D je uzavretá na rozdiel práve vtedy, ak $D = \{1, 2, ..., d\}$ a D je skoro uzavretá na rozdiel práve vtedy, ak platí jedna z nasledujúcich vlastností:

A.1) $D = \{a, 2a, 3a, ..., (d - 1)a, b\}$.

A.2) $D = \{a, b, a + b\}$ pre $b \neq 2a$.

A.3) $D = \{x, y, y - x, x + y\}$ pre $y \neq 2x$.

Náčrt dôkazu Je zrejmé že rozdiel dvoch prvkov množiny patrí do rovnakej množiny len vtedy, ak obsahuje všetky prirodzené čísla od 1 po $|D|$, čiže množina D je uzavretá na rozdiel len vtedy, ak $D = \{1, 2, ..., d\}$. Je tiež ľahko dokázať, že každá z množín D v A.1, A.2 a aj A.3 je skoro uzavretá na rozdiel. Požadované množiny D', pre ktoré platí, že $\forall a, b \in D' : |a - b| \in D$ sú pre A.1 $\{a, 2a, ..., (d-1)a\}$, pre A.2 $\{a, a+b\}$ a pre A.3 $\{x, y, x+y\}$. Teraz treba dokázať, že každá množina skoro uzavretá na rozdiel má tvar ako v A.1, A.2 alebo A.3.

Nech D je množina skoro uzavretá na rozdiel a $|D| = d$. Ak $d \leq 2$, potom každá množina D je typu A.1.

Položme $d = 3$ a $D' = \{x, y\}(x \leq y)$ je požadovaná podmnožina množiny D. Potom musí platiť, že $y - x \in M$. Ak $y - x = x$, potom $D' = D = \{x, 2x\}$ a teda D je typu A.1, v opačnom prípade $D = \{x, y - x, y\}$ je typu A.2.

Nech $d = 4$ a $D' = \{x, y, z\}(x \leq y \leq z)$. Nech $M - M' = \{t\}$. Keďže $y - x \in M$ a $y - x \notin \{y, z\}$, môžeme predpokladať, že $y - x \in \{x, t\}$. Ak $y - x = t$, potom $z - x \in \{x, y\}$. Ak $z - x = x$, potom $z - y = z - x - t = x - t \notin M$, čím dostávame spor. Tým pádom $z - x = y$ a teda $z = x + y$. Keďže $t = y - x$, množina $M = \{x, y, y - x, x + y\}$ a teda M je typu A.3.

Teraz položme $y - x = x$. Potom $y = 2x$ a $\{z - y, z - x\} \subset \{x, 2x, t\}$. Výraz $z - x$ môžeme rozšíriť pomocou y tak, že $z - x = z - y + y - x$. A keďže $y - x = x$, potom $z - y + y - x = z - y + x$. Tým dostávame, že $(z - x) - (z - y) = x$, čiže buď $z - y = x$ a $z - x = y = 2x$, alebo $z - y = 2x$ a $t = 3x$. V oboch prípadoch je množina D typu A.1.

Prípady pre $d \geq 5$ podrobne dokázal D. D. Liu v [26].

Z predchádzajúcej vety máme, že množiny skoro uzavreté na rozdiel sú rozdelené do troch skupín: A.1, A.2 a A.3. V ďalších častiach práce budeme skúmať hodnoty frakčného chromatického čísla pre tieto typy množín.

4.1.1 Množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.1

Určiť frakčné chromatické číslo pre množiny typu A.1 sa ukazuje byť najľahší problém spomedzi spomenutých troch typov. Nasledujúca veta bola vyslovená aj dokázaná v [3] pre hustotu množín $\mu(D)$. Keďže podľa (3.2) platí, že $\chi_f(G(Z,D)) = \frac{1}{\mu(D)}$, vyslovíme túto vetu pre frakčné chromatické čislo dištančných grafov.

Nasledujúcu lemu dokázanú v [17] použijeme pri určovaní $\chi_f(G(Z,D))$, kde D je množina skoro uzavretá na rozdiel typu A.1.

Lema 4.4 Nech D je množina kladných prirodzených čísel a α je reálne číslo z intervalu $(0,1]$. Ak $\mu(D) \geq \alpha$, potom existuje D-množina S taká, že pre ľubovoňé $n \geq 0, S(n) \geq \alpha(n+1)$, kde $S(n) = S \cap \{0,1,...,n\}$. Ak $S(0) \geq \alpha$, potom $0 \in S$.

Podľa vzťahu (3.3) nám na výpočet frakčného chromatického grafu $G(Z,D)$ stačí určiť hodnotu $\mu(D)$, ktorú budeme v nasledujúcich dôkazoch používať.

Veta 4.5 Nech $D = \{a, 2a, 3a, ..., (d-1)a, b\}$, kde $\mathrm{nsd}(a,b) = 1$. Ak $a = 1$, potom

$$\mu(D) = \kappa(D) = \begin{cases} \frac{1}{d}, & \text{ak } b \text{ nie je násobok } d \\ \frac{k}{kd+1} & \text{ak } b = kd \text{ pre nejaké } k \end{cases}$$

Ak $a \geq 2$, potom $\mu(D) = \kappa(D) = 1/d$.

Dôkaz 4.5 Predpokladajme, že $a = 1$. Ak b nie je násobok čísla d, nech $t = 1/m$. Potom $||tD|| = 1/d$, a teda $\chi_f(G(Z,D)) \leq 1/\kappa(D) \leq d$. Pomocou (3.1) a (3.8) dostávame rovnosť, a teda prvá časť dôkazu platí.

V ďalšej časti dôkazu položme $D = \{1,2,3,...,d-1,dk\}$ pre $k \geq 1$. Nech

$t = k/(dk+1)$. Potom $||tD|| = k/(dk+1)$, a tak $\mu(D) \geq \kappa(D) \geq k/(dk+1)$, z čoho dostávame, že $\mu(D) \leq k/(dk+1)$. Treba dokázať rovnosť, čiže treba dokázať, že $\mu(D) \geq k/(dk+1)$. Na to použijeme Lemu 4.4. Položme $\alpha = k/(dk+1)$. Potom dostávame, že nám stačí dokázať, že pre ľubovoľnú D-množina S platí, že $S(dk) \leq \frac{k}{dk+1}(dk+1)$, čiže $S(dk) \leq k$. Keďže platí, že $0 \in S$ a zároveň $dk \in D$, potom je zrejmé, že $dk \notin S$. Rozdeľme si množinu $\{0, 1, 2, ..., dk-1\}$ na množiny

$$X_i = \{0, 1, ..., d-1\} + id, \quad i = 0, 1, ..., k-1$$

Zjavne $|S \cap X_i| \leq 1$ pre všetky i a tak $S(mk) \leq k$, čo sme potrebovali dokázať. Teda platí rovnosť $\mu = k/(kd+1)$.

Položme $a \geq 2$. Z (3.1) a (3.8) dostávame, že na dokázanie vzťahu $\mu(D) = \kappa(D) = 1/d$ nám stačí dokázať nerovnosť $\kappa(D) \geq 1/d$. To znamená, že musí existovať $t \in R$ také, že $||Dt|| \geq 1/d$. Položme $b = q(ad) + r$, kde q, r sú prirodzené čísla a $0 \leq r < ad$. Keďže $nsd(a, b) = 1$, tak musí platiť, že $r > 0$. Ak $a \leq r \leq (d-1)a$, potom položme $t = 1/(ad)$. Potom platí, že $||Dt|| = \inf\{||td|| : d \in D\} = 1/d$, pretože každý prvok množiny D je väčší alebo rovný a. Z toho dostávame čo sme potrebovali dokázať, a teda $\kappa(D) \geq 1/d$.

Teraz uvažujme, že $1 \leq r \leq a-1$. Nech l je najmenšie prirodzené číslo také, že $rl \geq a$. Potom platí, že $2 \leq l \leq a$, $a \leq rl \leq 2a-1$ a existuje prirodzené číslo $k \in \{0, 1, 2, ..., d-3\}$ také, že $l + k \bmod d \equiv \pm 1$. Z toho dostávame, že $a(l+k) \bmod ad \equiv \pm a$. Z definície množiny D vieme, že $||tD|| = \inf\{||tb||, ||t(ja)|| : j = 1, 2, ..., d-1\}$. Položme $t = (l+k)/(ad)$. Potom musí platiť, že $||bt|| = ||(q(ad)+r)(l+k)/(ad)|| = ||r(l+k)/(ad)|| \geq 1/d$, lebo $a \leq lr \leq (l+k)r \leq (l+d-3)r = (l-1)r + (d-2)r < a + (d-2)a = (d-1)a$. Pomocou toho, že $a(l+k) \bmod ad \equiv \pm a$ môžeme ľahko ukázať, že platí $||(ja)(l+k)/(ad)|| = ||(ja)/(ad)|| \geq 1/m$ a teda $\kappa(D) \geq 1/d$.

Posledný prípad je pre $(d-1)a + 1 \leq r \leq ad - 1$, ktorý je symetrický s predchádzajúcim prípadom. Dokázali sme, že pre množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.1 pre $a \geq 2$ je $\kappa(D) = \mu(D) = 1/d$, a teda $\chi_f(G(Z, D)) = d$.

4.1.2 Množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.2

Pri množinách tohoto typu sa dôkazy konštruujú pomocou asymptotického pomeru T-farbenia (3.5). Vzhľadom na rovnosť (3.6) môžme frakčné chromatické číslo dištančných grafov určiť aj týmto spôsobom.

Nech $D = \{a, b, a + b\}$. Ak nie je žiadne z $a, b, a + b$ násobok čísla 3, potom bolo dokázané v [18], že $\chi_f(G(Z, D)) = 3$, pretože D-množina obsahuje všetky násobky čísla 3. V [17] bola určená hodnota $\mu(D)$ pre $a = 1$, čiže pre $D = \{1, b, b + 1\}$.

Veta 4.6 [18, 26] Nech $D = \{a, b, a + b\}$, $nsd(a, b) = 1$ a jedno z čísel $a, b, a + b$ je násobkom čísla 3. Potom

$$\mu(D) = \max\{\frac{\lfloor(2b + a)/3\rfloor}{2b + a}, \frac{\lfloor(2a + b)/3\rfloor}{2a + b}\}$$

Spodná hranica pre $\mu(D)$ bola dokázaná v [18] a horná hranice bola dokázaná pomocou nasledújucej lemy.

Lema 4.7 Nech $0 < a < b$ sú prirodzené čísla, pre ktoré platí, že $nsd(a, b) = 1$. Nech $c = a + b$ a $D = \{a, b, c\}$.

* Ak $b - a = 3k$, potom $\mu(D) \leq 1/3$
* Ak $b - a = 3k + 1$, potom $\mu(D) \leq (a + k)/(3a + 3k + 1)$
* Ak $b - a = 3k + 2$, potom $\mu(D) \leq (a + 2k + 1)/(3a + 6k + 4)$

Prvá časť lemy bola dokázaná v [18] a ďalšie dve boli rozobrané v [26].

4.1.3 Množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.3

Určiť frakčné chromatické číslo grafov $\chi_f(G(Z, D))$ resp. $\mu(D)$ pre množinu skoro uzavretú na rozdiel $D = \{x, y, y - x, x + y\}$ je spomedzi týchto troch typov množín najkomplikovanejšie. Aj keď prípad, kedy je jedno z čísel x, y párne a druhé nepárne je pomerne jednoduchý, komplikácie nastávajú, ak sú čísla x a y obe nepárne. Keďže uvažujeme, že $\mathrm{nsd}(x, y) = 1$, prípad, kedy x aj y sú obe párne, nenastane. A. Kemnitz a H. Kolberg v [27] dokázali, že ak x a y majú rozdielnu paritu, potom $\chi(G(Z, D)) = 4$. Pomocou vety 4.2 dostávame, že $\omega(G(Z, D)) = 4$ a spolu s nerovnosťami (2.2) a (2.3) dostávame nasledovný dôsledok.

Dôsledok 4.8 Ak $D = \{x, y, y - x, x + y\}, x < y$ a x, y sú rozdielnej parity, potom $\chi_f(G(Z, D)) = 4$.

Veta 4.9 [26] Ak $D = \{x, y, y-x, x+y\}$, kde $x = 2k+1, y = 2m+1, k < m$ a $\mathrm{nsd}(x, y) = 1$, potom $\mu(D) \geq \frac{(k+1)m}{4(k+1)m+1}$.

Ak sú x a y nepárne, tak sú zatial známe výsledky iba pre spodnú hranicu $\mu(D)$, čo znamená, že aj pre hornú hranicu $\chi_f(G(Z, D))$. Rovnosť v predchádzajúcej vete nastáva, ak položíme $x = 1$.

Záver

V tejto práci sme ukázali rôzne techniky pri počítaní frakčného chromatického čísla dištančných grafov a potom zhrnuli niektoré doteraz známe výsledky frakčného chromatického čísla pre tento typ grafov v dostupnej literatúre. Ukázali sme, že pri problém riešenia frakčného chromatického čísla grafov je ekvivalentný s problémom hustoty množín v teórii čísel, pretože $\mu(D) = 1/\chi_f(G(Z, D))$ Ďalej sme sa zamerali na dištančné grafy $G(Z, D)$ s takou mnoužinou D, ktorá je skoro uzavretá na rozdiel. Urobili sme prehľad pre tri typy takýchto množín a naznačili sme, akými prístupmi sa pre takéto dištančné grafy počíta frakčné chromatické číslo.

V tejto práci sme ukázali, že ak D je množina skoro uzavretá na rozdiel typu A.1, teda $D = \{a, 2a, 3a, ..., (d-1)a, b\}$ a $|D| = d$, tak frakčné chromatické číslo grafu $G(Z, D)$ sa rovná buď d alebo $(kd + 1)/k$ pre $b = kd$ a $a = 1$.

Pre množiny skoro uzavreté na rozdiel typu A.2 bolo dokázané, že ak žiaden prvok množiny D nie je násobok čísla 3, potom $\chi_f(G(Z, D)) = 3$. V opačnom prípade

$$\chi_f(G(Z, D)) = \min\{\frac{2b + a}{\lfloor (2b + a)/3 \rfloor}, \frac{2a + b}{\lfloor (2a + b)/3 \rfloor}\}$$

Frakčné chromatické číslo grafu $G(Z, D)$ pre $D = \{x, y, y - x, x + y\}$ skoro uzavretú na rozdiel typu A.3 bolo určené, len ak majú x a y rozdielnu paritu. V takom prípade $\chi_f(G(Z,D)) = 4$. V opačnom prípade je doteraz známa iba horná hranica frakčného chromatického čísla. Ak označíme $x = 2k+1, y = 2m+1, k < m$, potom $\chi_f(G(Z,D)) \leq \frac{4(k+1)m+1}{(k+1)m}$.

V nasledujúcej hypotéze je vyslovené tvrdenie pre dištančné grafy, ktorých množina D nie je skoro uzavretá na rozdiel.
Nech D je množina prirodzených čísel s mohutnosťou d. Ak D nie je skoro uzavretá na rozdiel, potom $\chi_f(G(Z,D)) \leq d$.

Uvedená hypotéza je pravdivá pre pre $d \leq 3$. Zvyšné prípady sú zatiaľ otvorény problém. Ďalšia hypotéza hovorí, že každý graf, ktorý neobsahuje kružnicu dĺžky 3 a má maximálny stupeň vrcholu 3, má frakčné chromatické číslo nanajvyš 14/5. Viacero hypotéz spojených s frakčným chromatickým číslom grafov je dodnes otvorených.

Literatúra

[1] Daphne Der-Fen Liu, Xuding Zhu, *Fractional chromatic number of distance graphs generated by two-interval sets*, 2008

[2] Javier Barajas, Oriol Serra, *Distance graphs with maximum chromatic number*, 2008

[3] Daphne Der-Fen Liu, Xuding Zhu, *Fractional Chromatic Number and Circular Chromatic Number for Distance Graphs with Large Clique Size*, 2004

[4] Daphne Der-Fen Liu, *A Survey on Coloring Parameters of Distance Graphs*

[5] Gerard J. Chang, Daphne Der-Fen Liu, *Distance Graphs and T-Coloring*, 1997

[6] Gerard J. Chang, Linging Huang, Xuding Zhu, *Circular Chromatic Numbers and Fractional Chromatic Numbers of Distance Graphs*, 1998

[7] *Frakčné farbenie* http://en.wikipedia.org/wiki/Fractional_coloring

[8] *Cirkulárne farbenie* http://en.wikipedia.org/wiki/Circular_coloring

[9] Edward R. Scheinerman, Daniel H. Ullman *Fractional Graph Theory*, 2008

[10] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, 2010

[11] *Veta o štyroch farbách* http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

[12] Xuding Zhu, *Circular chromatic number: a survey*, 2001

[13] *Matching Polotype* http://www.ifor.math.ethz.ch/teaching/lectures/poly_comp_ss11/lecture

[14] Pavol Hell, Jaroslav Nešetřil, *On the complexity of H-coloring*, 1986

[15] D. G. Cantor, B. Gordon, *Sequences of integers with missing differences*, 1973

[16] J. Chen, G. J. Chang and K. Huang, *Integral distance graphs*, 1997

[17] N.M. Haralambis, *Sets of integers with missing differences*, 1977

[18] J. H. Rabinowitz, V. K. Proulx, *An asymptotic approach to the channel assignment problem*, 1985

[19] J. Griggs and Daphne Der-Fen Liu *The channel assignment problem for mutually adjacent sites*

[20] R.B. Eggleton, P. Erdős, D.K. Skilton, *Colouring the real line*, 1985

[21] P. Lam, W. Lin, *Coloring distance graphs with intervals as distance sets*, 2005

[22] A. Kemnitz and M. Marangio, *Colorings and list colorings of integer distance graphs*

[23] G. J. Chang, L. Huang, *Circular chromatic numbers of Mycielski's graphs*, 1999

[24] L. Huang, *Circular Chromatic Numbers of Distance Graphs with Distance Sets Missing Multiples*, 2000

[25] X. Zhu, *Circular chromatic number of planar graphs of large odd girth*, 2001

[26] Daphne Der-Fen Liu, *Fractional Chromatic Number of Distance Graphs and Density of Integral Sets with Missing Diferences*, 2001

[27] A. Kemnitz, H. Kolberg, *Coloring of integer distance graphs*, 1998

[28] J. M. Wills, *Zwei Sätze über inhomogene diophantische approximation von irrationalzahlen*, 1967