

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ALGORITMICKÉ VLASTNOSTI VNORENÍ  
GRAFOV DO PLŔCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

PETER SCHMIDT

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ALGORITMICKÉ VLASTNOSTI VNORENÍ  
GRAFOV DO PLŔCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika  
Študijný odbor: 2508 Informatika  
Školiace pracovisko: Katedra informatiky  
Školiteľ: Mgr. Michal Kotrbčik

BRATISLAVA, 2012

PETER SCHMIDT



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Peter Schmidt  
**Študijný program:** informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.2.1. informatika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Algoritmické vlastnosti vnorení grafov do plôch

**Cieľ:** Preskúmať algoritmické vlastnosti vnorení grafov do plôch.

**Literatúra:** Po dohode so školiteľom.

**Vedúci:** Mgr. Michal Kotrbčík

**Dátum zadania:** 12.10.2011

**Dátum schválenia:** 14.10.2011

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci

# Pod'akovanie

Chcel by som poďakovať vedúcemu bakalárskej práce, Mgr. Michalovi Kotrbčikovi, za pomoc pri výbere témy práce a cenné rady pri jej spracovávaní.

# Abstrakt

<b>Autor:</b>	Peter Schmidt
<b>Názov bakalárskej práce:</b>	Algoritmické vlastnosti vnorení grafov do plôch
<b>Škola:</b>	Univerzita Komenského v Bratislave
<b>Fakulta:</b>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<b>Katedra:</b>	Katedra informatiky
<b>Vedúci bakalárskej práce:</b>	Mgr. Michal Kotrbčik
<b>Rozsah práce:</b>	29 strán

Bratislava, jún 2012

Práca sa venuje algoritmickým vlastnostiam vnorení grafov do plôch. V prvej časti práce sa zameriavame na distribúciu rodov grafov. Za pomoci niekoľkých tvrdení prinášame distribúcie rodov pre kompletne grafy na najviac 7 vrcholoch, kompletne bipartitné grafy na najviac 10 vrcholoch a snarky na najviac 28 vrcholoch, spolu s odhadom času potrebného pre väčšie grafy.

Druhá časť práce je zameraná na priemerný rod grafu. Pomocou odhadov počtu vnorení, súvisiacich s priemerným rodom grafu, testujeme priemerný rod kompletných grafov pravdepodobnostným algoritmom.

**Kľúčové slová:** vnorenie grafu, rod grafu, kompletný graf, kompletný bipartitný graf, snark, distribúcia rodov grafu, probabilistické vzorkovanie, priemerný rod

# Abstract

**Author:** Peter Schmidt  
**Thesis title:** Algoritmické vlastnosti vnorení grafov do plôch  
**University:** Univerzita Komenského v Bratislave  
**Faculty:** Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
**Department:** Katedra informatiky  
**Advisor:** Mgr. Michal Kotrbčík  
**Page count:** 29 pages

Bratislava, June 2012

This paper deals with algorithmic properties of graph embeddings. Its first part is focused on genus distribution of a graph. With help of a few theorems we introduce genus distributions for complete graphs of on up to 7 vertices, complete bipartite graphs on up to 10 vertices and snarks on up to 28 vertices, supplemented by approximate time complexity of solving this problem for bigger graphs.

The second part is focused on graph average genus. We examine average genus of complete graphs with a probabilistic algorithm, based on bounds on number of embeddings close to average genus of a graph.

**Keywords:** graph embedding, graph genus, complete graph, complete bipartite graph, snark, graph genus distribution, probabilistic sampling, average genus

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>3</b>
1.1 Grafy . . . . .	3
1.2 Topológia . . . . .	4
<b>2 Vnorenie grafu do plochy</b>	<b>6</b>
2.1 Rotačná schéma grafu . . . . .	7
2.2 Face-trace algoritmus . . . . .	8
2.3 Enumerácia vnorení grafu . . . . .	9
2.4 Minimálny rod grafu . . . . .	10
2.5 Maximálny rod grafu . . . . .	12
<b>3 Distribúcia rodov vnorení grafov</b>	<b>14</b>
3.1 Distribúcia oblastí vnorení grafu . . . . .	15
3.2 Distribúcia rodov kompletných grafov . . . . .	16
3.3 Distribúcia rodov kompletných bipartitných grafov . . . . .	17
3.4 Distribúcia rodov kompletných tripartitných grafov . . . . .	20
3.5 Distribúcia rodov snarkov . . . . .	21
<b>4 Priemerný rod grafu</b>	<b>24</b>
4.1 Ohraničenie priemerného rodu . . . . .	25
4.2 Odhad počtu vnorení priemerného rodu . . . . .	26
4.3 Intervaly spoľahlivosti pre priemerný rod . . . . .	27
<b>Záver</b>	<b>29</b>

# Úvod

Hoci má skúmanie vnorení grafov do plôch začiatky už v polovici osemnásteho storočia (Euler, neskôr Poincaré), mnohé významné výsledky boli publikované až v priebehu posledných desaťročí (pozri aj [Whi01]).

Jednými z najdôležitejších parametrov skúmaných pri bunečných vnoreniach grafov do plôch sú minimálny a maximálny rod plochy, v ktorej daný graf pripúšťa bunečné vnorenie. Zatiaľ čo maximálny rod ľubovoľného grafu vieme určiť v polynomiálnom čase, nájsť najmenšie  $g$  také, že daný graf je možné vnoriť do plochy rodu  $g$ , je NP-úplný problém. Avšak mnohé z ďalších vlastností vnorení, ako napríklad priemerný rod vnorenia, ostávajú naďalej nedostatočne preskúmané, pričom poznáme iba veľmi všeobecné odhady.

Z teoretického hľadiska nám informácie o vnoreniach dávajú nový pohľad na niektoré štrukturálne vlastnosti grafu, resp. triedy grafov a umožňujú ich lepšie preskúmať a pochopiť. Skúmať vnorenia má ale aj praktický význam – umožňujú implementáciu algoritmov pre riešenie napríklad problému izomorfizmu grafov, hľadanie maximálnych tokov alebo najlacnejších ciest. Typickým príkladom sú planárne grafy – mnohé vo všeobecnosti NP-úplné problémy sú pre planárne grafy riešiteľné v lineárnom čase. Všeobecnejšie, taktiež trieda grafov s ohraničeným rodom pripúšťa polynomiálne, resp. efektívne aproximačné algoritmy pre inak zložité problémy.

V našej práci sa budeme zaoberať najmä distribúciou rodov a priemerným rodom grafov. Špeciálne nás budú zaujímať kompletne grafy, kompletne bipartitné grafy a snarky. V prvej kapitole zavedieme základné pojmy a potrebné označenia a uvedieme niektoré tvrdenia nevyhnutne potrebné pri štúdiu topologickej teórie grafov.

V druhej kapitole zadefinujeme pojem vnorenia grafu a uvedieme najdôležitejšie doterajšie teoretické poznatky z tejto oblasti. Zároveň uvedieme viaceré dátové štruk-



túry a algoritmy pre vnorenia, s ktorými budeme neskôr pracovať.

Tretia kapitola je venovaná distribúcii rodov grafov. Cieľom tejto časti je získať distribúciu rodov kompletných grafov, kompletných bipartitných grafov a snarkov. Na to bude nevyhnutné efektívne implementovať štruktúry z kapitoly 2.

V poslednej kapitole sa venujeme priemerným rodom grafov. Cieľom tejto časti bude využiť tvrdenia uvedené v článku [CKG96] a zostrojiť algoritmus, ktorý skonštruuje intervalový odhad priemerného rodu grafu s čo najväčšou presnosťou.

# Kapitola 1

## Základné pojmy

### 1.1 Grafy

V tejto časti zdefinujeme niektoré pojmy z teórie grafov a zavedieme potrebné označenia.

**Definícia 1.1.1.** Pod pojmom *graf*, označujeme  $G$ , rozumieme usporiadanú dvojicu  $(V, E)$  s nasledujúcimi vlastnosťami:

- (i)  $V \cap E = \emptyset$ ,
- (ii)  $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ .

Prvkom množiny  $V$  hovoríme *vrcholy*, prvkom množiny  $E$  *hrany* grafu  $G$ . Hranu  $e = (u, v)$  skrátene zapisujeme  $e = uv$ , vrcholy  $u, v$  nazývame koncové vrcholy hrany  $uv$ . Ak  $u = v$ , potom hranu nazývame *slučka*. Počet vrcholov grafu budeme označovať  $p$ , počet hrán  $q$ .

Hovoríme, že vrchol  $v$  je *incidentný* s hranou  $e$ , ak je jej koncovým vrcholom. Hovoríme, že vrcholy  $u$  a  $v$  sú *susedné*, ak  $uv \in E(G)$ . Pod *stupňom vrchola*  $v$ , označujeme  $d(v)$ , rozumieme počet hrán incidentných s  $v$ , pričom každú slučku zarátame dvakrát. Platí nasledujúci vzťah.

**Veta 1.1.2.** *Nech  $G = (V, E)$  je graf s  $q$  hranami, potom platí*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q.$$

*Sled* v grafe  $G$  je striedavá postupnosť vrcholov a hrán, začínajúca a končiaca vo vrchole, kde každé dva posebe idúce členy sú vrchol a s ním incidentná hrana. Sled je *uzavretý*, ak začína a končí v rovnakom vrchole.

*Cesta* z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  je sled začínajúci vrcholom  $u$  a končiaci vrcholom  $v$ , v ktorom sa každý vrchol a hrana vyskytuje najviac raz. Hovoríme, že graf  $G$  je *súvislý* ak medzi každými dvoma vrcholmi  $G$  existuje cesta (ekvivalentne sled).

**Definícia 1.1.3.** Nech  $G_1$  a  $G_2$  sú grafy,  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  a platí  $V_2 \subseteq V_1$  a  $E_2 \subseteq E_1$ . Potom hovoríme, že graf  $G_2$  je *podgraf* grafu  $G_1$ .

**Definícia 1.1.4.** Graf  $G$  je *súvislý*, ak pre každé dva jeho vrcholy  $u$  a  $v$  existuje sled z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ . Najväčšie podgrafy grafu  $G$ , vzhľadom na inklúziu, nazývame *komponenty súvislosti*.

*Kružnica* je uzavretý sled, v ktorom sa každá hrana a každý vrchol okrem prvého a posledného vyskytuje najviac raz. Graf je *acyklický* práve vtedy, ak neobsahuje kružnice.

*Kostra* grafu  $G$  je súvislý acyklický podgraf grafu  $G$ , obsahujúci všetky jeho vrcholy.

**Veta 1.1.5.** Nech  $T$  je kostra súvislého grafu  $G$  s  $p$  vrcholmi a  $q$  hranami, potom

$$|E(T)| = p - 1,$$

$$|E(G) - E(T)| = q - p + 1.$$

**Definícia 1.1.6.** Nech  $G$  je graf s  $p$  vrcholmi,  $q$  hranami a  $k$  komponentmi súvislosti, potom *Bettiho číslo*  $\beta(G)$  definujeme vzťahom

$$\beta(G) = q - p + k.$$

Lahko vidieť, že pre ľubovoľnú kostru  $T$  grafu  $G$  je počet mimokostrových hrán rovný číslu  $\beta(G)$ .

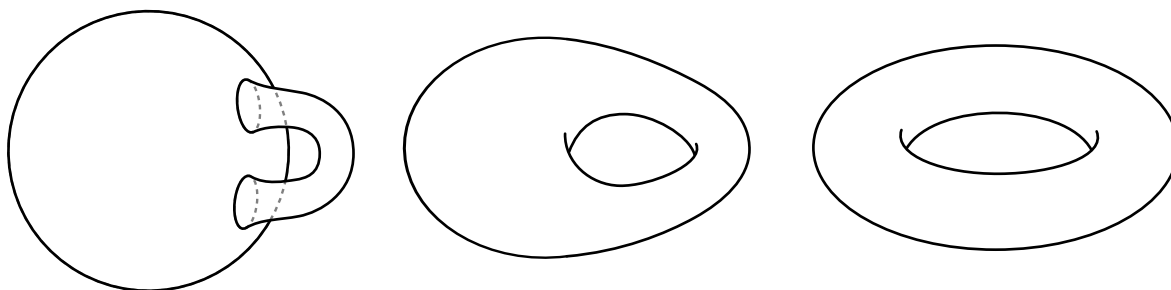
## 1.2 Topológia

V tejto časti zavedieme potrebné pojmy a označenia z topológie plôch. Pod pojmom *plocha* budeme rozumieť 2-varietu, čiže spojitý dvojrozmerný topologický priestor,

ktorého každý bod má okolie homeomorfné otvorenému disku. Príkladom takjto plochy je rovina, povrch gule alebo torusu.

Budeme hovoriť, že plocha je *orientovateľná*, ak pre bod na ľubovoľnej uzavretej krivke môžeme zvoliť orientáciu (v smere alebo proti smeru hodinových ručičiek), pričom táto sa nezmení po prejdení celej krivky späť do toho istého bodu. V opačnom prípade hovoríme, že plocha je *neorientovateľná*. Príkladom neorientovateľnej plochy je möbiiov pás. Ekvivalentne môžeme definovať orientovateľnosť tak, že plocha je orientovateľná práve vtedy, keď má dve strany.

V práci sa zaoberáme výlučne orientovateľnými plochami, preto budeme prívlastok orientovateľná spravidla vynechávať. Zároveň sa obmedzíme na uzavreté plochy, akými sú napríklad guľa, torus, dvojtorus, formálnu definíciu uvádza napríklad [Whi01].



Obr. 1.1: Guľa s pridanou rúčkou a torus.

Na obrázku 1.1 je znázornené, ako z gule môžeme vyrobiť torus, pridaním „rúčky“. Majme plochu  $S_k$ , ktorú sme dostali pridaním  $k$  takýchto rúčok, číslo  $k$  nazveme (*orientovateľný*) *rod tejto plochy*. Nasledujúca veta o klasifikácii hovorí, že každú uzavretú orientovateľnú plochu charakteristiky  $k$  vieme dostať z gule pridaním  $k$  rúčok.

**Veta 1.2.1** (Brahana [Bra21]). *Každá orientovateľná plocha je homeomorfná ploche  $S_k$  pre nejaké  $k$ .*

**Veta 1.2.2.** *Dve uzavreté 2-variety sú homeomorfné práve vtedy, keď majú rovnaký rod a sú obe orientovateľné, alebo obe neorientovateľné.*

V nasledujúcom texte budeme orientovateľný rod plochy  $S$  označovať  $\gamma(S)$ . Pod označením  $S_k$  budeme rozumieť ľubovoľnú orientovateľnú plochu homeomorfnú guli s  $k$  pridanými rúčkami.

# Kapitola 2

## Vnoreníe grafu do plochy

**Definícia 2.0.3.** *Vnoreníe grafu  $G$  do plochy  $S$  je reprezentácia grafu  $G$ , v ktorej prináleží každému vrcholu  $G$  jeden bod  $S$  (rôznym vrcholom rôzne body) a každej hrane  $G$  jednoduchá krivka v  $S$  (rozumieme obraz intervalu  $[0, 1]$ ), s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- (i) konce krivky každej hrany ležia v bodoch prislúchajúcich jej koncovým vrcholom,
- (ii) na krivke každej hrany neležia iné vrcholy ako koncové vrcholy danej hrany,
- (iii) krivky hrán sa nepretínajú v iných ako koncových bodoch.

Inými slovami, pod vnorením grafu  $G$  je možné predstaviť si nakreslenie grafu do plochy  $S$  tak, aby sa hrany navzájom nepretínali inde ako vo svojich spoločných vrcholoch. Ľahko nahliadneme, že ak niektorú hranu v grafe nie je možné viesť tak, aby nepretla inú, pridaním rúčky k ploche to možné bude. Aby sme ale rúčiek nemali zbytočne veľa, budeme ďalej uvažovať výlučne o bunečných vnoreniach.

**Definícia 2.0.4.** Nech  $\mathcal{G}$  je realizácia vnorenia grafu  $G$  do plochy  $S$ , potom komponenty  $S - \mathcal{G}$  nazývame *oblasti vnorenia*.

**Definícia 2.0.5.** Hovoríme, že oblasť vnorenia je *2-bunka* práve vtedy, ak je homeomorfná otvorenému disku. Vnoreníe nazveme *bunečné*, ak každá jeho oblasť je 2-bunka.

Nasledujúca veta hovorí, že z každého vnorenia grafu, ktoré nie je bunečné, vieme odstránením rúčok vytvoriť bunečné vnoreníe menšieho rodu.

**Veta 2.0.6** (Youngs [You63]). *Nech existuje vnorenie súvislého grafu  $G$  do plochy  $S$  rodu  $g$ , pričom niektorá jeho oblasť nie je 2-bunka. Potom graf  $G$  má vnorenie v ploche rodu  $g - 1$ .*

Dôkaz tejto vety spočíva v postupnom odstraňovaní rúčiek z gule, pre každú oblasť, ktorá nie je 2-bunka.

Pod *rodom vnorenia* budeme ďalej rozumieť rod plochy, v ktorej máme graf bunečne vnorený. Nasledujúca veta (Eulerova), nám potom pre daný graf dáva jednoznačne do súvislosti rod vnorenia a počet oblastí vnorenia.

**Veta 2.0.7** (Euler, 1752). *Označme  $p$  počet vrcholov a  $q$  počet hrán grafu  $G$ . Majme vnorenie grafu  $G$  do orientovateľnej plochy rodu  $g$ , počet oblastí označme  $r$ . Potom platí*

$$p - q + r = 2 - 2g.$$

## 2.1 Rotačná schéma grafu

Majme graf  $G$  rádu  $p$ , označme jeho vrcholy  $V(G) = \{0, 1, \dots, p\}$ . Označme  $N(i) \subseteq V(G)$  množinu susedov vrcholu  $i$ . Cyklickú permutáciu  $\rho_i : N(i) \rightarrow N(i)$  dĺžky  $|N(i)|$  nazveme *rotácia na vrchole  $i$* . Potom  $p$ -ticu rotácií na vrcholech grafu  $\Pi = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$  nazveme *rotačný systém grafu  $G$* .

**Veta 2.1.1** (Edmonds, Heffter). *Majme graf  $G$  s označenými vrcholmi. Potom existuje jedno-jednoznačné priradenie medzi rôznymi rotačnými systémami grafu  $G$  a rôznymi vnoreniami grafu  $G$  do orientovaných plôch.*

Keďže plochy, o ktorých hovoríme, sú orientovateľné, vieme si na nich určiť orientáciu, napríklad v smere hodinových ručičiek. Cyklická permutácia susedov vrcholu  $v$  je potom postupnosť jeho susedov, začínajúca ľubovoľným z nich, pričom vždy nasleduje ten, ktorého hrana vychádza z  $v$  ako bezprostredne nasledujúca v korešpondencii s nami zvolenou orientáciou.

Na základe tohto tvrdenia potom vieme určiť počet všetkých vnorení a zároveň ich (napríklad v lexikografickom poradí) enumerovať.

**Dôsledok 2.1.2.** *Všetkých navzájom rôznych vnorení grafu s označenými vrcholmi je*

$$\prod_{i=1}^p (d(i) - 1)!$$

V topologickej teórii grafov nás niekedy zaujímajú hlavne vnorenia s určitými špeci-  
fickými vlastnosťami. Na základe predchádzajúcich tvrdení vieme riešiť problémy z  
tejto oblasti priamočiaro prehľadanim priestoru všetkých vnorení. Tento prístup je ale  
veľmi neefektívny, už pre kompletný graf na ôsmich vrchoch má priestor všetkých  
vnorení veľkosť  $(6!)^8$  (viac ako  $7.222 \cdot 10^{22}$ ), čo znemožňuje praktické využitie takéhoto  
postupu.

Keďže sme ale ukázali, že všetkých bunečných vnorení grafu do plôch je konečne  
veľa, musí medzi nimi existovať vnorenie minimálneho aj vnorenie maximálneho rodu.  
Týmto sa budeme venovať v ďalších častiach.

## 2.2 Face-trace algoritmus

V tejto časti popíšeme algoritmus, ktorý pre dané vnorenie grafu vráti rod tohto vnore-  
nia. Podľa Eulerovho vzťahu nám na to stačí určiť počet oblastí daného vnorenia.  
Budeme teda hľadať hraničné sledy všetkých oblastí. V týchto sa každá hrana nachádza  
práve dvakrát, rôzne výskyty jednej hrany budeme rozlišovať jej orientáciou.

**Veta 2.2.1.** *Majme vnorenie jednoduchého súvislého grafu  $G$  reprezentované rotačným  
systémom  $\Pi$ , nech  $e_1$  je hrana grafu  $G$ ,  $v_0$  a  $v_1$  sú jej koncové vrcholy. Potom uzavretý  
sled*

$$s = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n,$$

*kde  $v_n = v_0$  a hrana  $e_i$ ,  $e_i = v_{i-1}v_i$ , nasleduje bezprostredne za hranou  $e_{i-1}$  v rotácii  
na vrchole  $v_{i-1}$ , pre každé  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , je hraničný sled oblasti, obsahujúci hranu  $e_1$  v  
orientácii od vrcholu  $v_0$  k vrcholu  $v_1$ .*

Na základe tvrdenia predchádzajúcej vety vieme pre každú hranu a jej orientáciu  
nájsť hraničný sled príslušnej oblasti tak, že budeme pokračovať vždy nasledujúcou  
hranou v rotácii na vrchole, až kým sa nevrátime k prvej hrane s rovnakou orienta-  
ciou. Počas konštrukcie sledu označíme prejdené hrany, aby sme neskôr nezačali znova

konštruovať ten istý sled z inej hrany.

Algoritmus teda pre každú hranu a jej orientáciu, ak ešte nie je označená v niektorom slede, začne konštrukciu hraničného sledu. Ľahko nahliadneme, že pri konštrukcii sledov navštívime každú hranu najviac dvakrát. Časová zložitosť tohto algoritmu je potom  $O(q)$ , kde  $q$  je počet hrán grafu.

Dátové štruktúry, ktorými budeme reprezentovať vnorenie, sú popísané v nasledujúcej sekcii.

## 2.3 Enumerácia vnorení grafu

Na enumeráciu vnorení nám stačí postupne generovať všetky rotácie na vrcholech, teda cyklické usporiadania hrán incidentných s vrcholom. Enumerovať všetky permutácie  $k$  prvkov v lexikografickom poradí vieme s časovou zložitosťou  $O(k!)$ , teda z každej permutácie vieme vyrobiť nasledujúcu v amortizovanom konštantnom čase.

Niekedy je vhodnejšie generovať nasledujúcu permutáciu s čo najmenším počtom zmien v porovnaní s aktuálnou. Generovanie permutácií v lexikografickom poradí ale v najhoršom prípade zmení pozíciu všetkých prvkov množiny, ktorej permutácie vytvárame. Steinhaus–Johnson–Trotterov algoritmus umožňuje generovať permutácie v transpozičnom poradí, teda v takom, v ktorom sa nasledujúca permutácia líši od predchádzajúcej transpozíciou dvoch susedných prvkov. Tento algoritmus je takisto možné implementovať s amortizovanou konštantnou časovou zložitosťou, implementáciu nájdeme napríklad na stránke [Rus06].

Na algoritmickú reprezentáciu vnorenia je možné použiť jednu z viacerých štruktúr. V nasledujúcom texte uvádzame niektoré z nich, spolu s odhadom zložitosti požadovaných operácií, ako určenie rodu vnorenia a získanie distribúcie rodov, ktorej sa budeme venovať v kapitole 3. Pri odhade zložitosti budeme počet vrcholov grafu označovať  $p$  a počet hrán  $q$ .

**edge-list** Najjednoduchšia štruktúra, pre každý vrchol obsahuje zoznam incidentných hrán v takom poradí, aký určuje rotácia na danom vrchole (pre jednoduchý graf stačí zoznam susedných vrcholov). Pre daný vrchol  $v$  a jeho hranu umožňuje určiť nasledujúci vrchol a hranu v hraničnom slede oblasti v čase  $O(d(v))$ .



Majme vnorenie grafu s maximálnym stupňom vrchola  $\Delta$ , uložené v takejto štruktúre. Časová zložitosť určenia rodu tohto vnorenia je potom  $O(q\Delta)$ . Časová zložitosť získania distribúcie vnorenia je  $O(q^2\Delta)$ .

**DCEL (doubly connected edge-list)** V tejto štruktúre je pre každú hranu uložená jedna hranová štruktúra, ktorá obsahuje nasledujúcu hranu v rotácii na oboch jej koncových vrcholoch. Určiť rod takto určeného vnorenia je možné v čase  $O(q)$ .

Časová zložitosť získania distribúcie vnorenia je  $O(q^2)$ .

**DLFL (doubly linked face-list)** Táto štruktúra bola popísaná v článku [Che97].

Obsahuje zoznam oblastí, zoznam hrán, zoznam vrcholov a rod vnorenia. Každá oblasť má uložený svoj hraničný sled vo forme vyvažovaného stromu (napríklad 2-3-strom). Každá hrana a každý vrchol majú uložené všetky svoje výskyty v hraničných sledoch.

Vnorenie v DCEL je možné previesť do DLFL v lineárnom čase. Určiť rod grafu v takejto štruktúre je možné v konštantnom čase. Odstránenie a vloženie hrany do grafu má časovú zložitosť  $O(\log q)$ . Použitím Steinhaus–Johnson–Trotterovho algoritmu je potom možné enumerovať vnorenia pomocou týchto dvoch operácií a získať tak distribúciu vnorenia s časovou zložitosťou  $O(q \log q)$ .

## 2.4 Minimálny rod grafu

**Definícia 2.4.1.** Najmenšie prirodzené číslo  $g$  také, že graf  $G$  má bunečné vnorenie rodu  $g$ , nazývame *minimálny rod grafu*  $G$  a značíme ho  $\gamma(G)$ .

Vnorenie grafu  $G$  do plochy  $S_k$ , kde  $k = \gamma(G)$ , budeme nazývať *minimálne vnorenie grafu*  $G$ .

**Veta 2.4.2 (Youngs).** *Minimálne vnorenie ľubovoľného grafu  $G$  je bunečné.*

*Dôkaz.* Nech minimálne vnorenie grafu  $G$  obsahuje oblasť, ktorá nie je 2-bunka. Potom podľa vety 2.0.6 existuje vnorenie grafu  $G$  menšieho rodu, čo je spor.  $\square$

Tvrdenie predchádzajúcej vety nám hovorí, že pre ľubovoľné minimálne vnorenie grafu platí Eulerov vzťah. Na jej základe vieme zdola ohraničiť minimálny orientovateľný rod grafu, v závislosti od počtu hrán a vrcholov.

Majme vnorenie jednoduchého súvislého grafu s aspoň tromi vrcholmi, každá oblasť je ohraničená sledom o dĺžke aspoň tri (v opačnom prípade by bol graf nesúvislý, alebo  $K_2$ ). Zároveň vieme, že každá hrana sa vyskytne v hraničných sledoch oblastí práve dvakrát. Z toho dostávame horný odhad na počet oblastí  $r \leq 2q/3$ . Ak navyše pridáme podmienku, že graf nesmie obsahovať trojuholníky a teda ani trojuholníkové oblasti, rovnakou úvahou dospejeme k ohraničeniu  $r \leq 2q/4$ . Dosadením do Eulerovho vzťahu dostávame nasladujúce dolné ohraničenia pre minimálny rod grafu.

**Veta 2.4.3.** *Pre ľubovoľný súvislý graf  $G$  s aspoň tromi vrcholmi platí*

$$\gamma(G) \geq 1 - \frac{p}{2} + \frac{q}{6}.$$

*Pre ľubovoľný súvislý graf  $G$  s aspoň tromi vrcholmi, ktorý neobsahuje kružnice dĺžky 3, platí*

$$\gamma(G) \geq 1 - \frac{p}{2} + \frac{q}{4}.$$

Toto ohraničenie je tesné. Dá sa ukázať, že ho dosahujú okrem iných napríklad kompletne grafy  $K_n$  a kompletne bipartitné grafy  $K_{m,n}$ .

**Veta 2.4.4** (Ringel, Youngs [RY68]). *Nech  $n \geq 3$ , potom*

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

**Veta 2.4.5** (Ringel [Rin65]). *Nech  $m, n \geq 2$ , potom*

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil.$$

Nájsť vnorenie ľubovoľného grafu minimálneho rodu je vo všeobecnosti pomerne zložitý problém tak z praktického, ako aj teoretického hľadiska, o čom svedčia nasledujúce tvrdenia.

**Veta 2.4.6** (Thomassen [Tho89]). *Majme rozhodovací problém*

$$L = \{(G, k) \mid \gamma(G) \leq k\}.$$

*Tento problém je NP-úplný.*

**Veta 2.4.7** (Chen, Kanchi, Kanevski [CKK93]). *Pre každú funkciu  $f(p) \in O(p^\varepsilon)$ , kde  $\varepsilon$  je konštanta,  $0 \leq \varepsilon < 1$ , je problém pre graf  $G$  rádu  $p$  nájsť vnorenie rodu najviac  $\gamma(G) + f(p)$  NP-úplný.*

## 2.5 Maximálny rod grafu

**Definícia 2.5.1.** Najväčšie prirodzené číslo  $g$  také, že graf  $G$  má bunečné vnorenie do plochy rodu  $g$ , nazývame *maximálny rod grafu  $G$*  a značíme ho  $\gamma_M(G)$ .

Každé vnorenie súvislého grafu  $G$  má aspoň jednu oblasť. Dosadením do Eulerovho vzťahu dostávame nasledujúce horné ohraničenie pre maximálny rod.

**Veta 2.5.2.** *Nech  $G$  je ľubovoľný súvislý graf s  $p$  vrcholmi a  $q$  hranami, potom platí*

$$\gamma_M(G) \leq \left\lfloor \frac{q - p + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \right\rfloor.$$

**Definícia 2.5.3.** Hovoríme, že graf  $G$  je *nahor vnoriteľný*, ak existuje vnorenie grafu  $G$  rodu  $\lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ .

Ako ukazuje nasledujúca veta, toto ohraničenie je tesné a dosahujú ho okrem iných napríklad kompletne grafy, kompletne  $n$ -partitné grafy alebo hyperkocky.

**Veta 2.5.4** (Nordhaus, Stewart, White [NSW71]). *Nech  $n \geq 3$ , potom*

$$\gamma_M(K_n) = \left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{4} \right\rfloor.$$

**Veta 2.5.5** (Ringeisen [Rin72]). *Nech  $m, n \geq 2$ , potom*

$$\gamma_M(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(m-1)(n-1)}{2} \right\rfloor.$$

**Veta 2.5.6** (Kronk, Ringeisen, White [KRW76]). *Všetky kompletne  $n$ -partitné grafy sú nahor vnoriteľné.*

Na rozdiel od vnorení minimálneho rodu, vnorenie maximálneho rodu vieme skonstruovať v polynomiálnom čase, rovnako aj vnorenie rodu  $\gamma_M(G) - 1$ . V súčasnosti najefektívnejší algoritmus má zložitosť  $O(p^4 \log^6 p)$ , presnejšie  $O(pq \Delta \log^6 p)$ , kde  $p$  je

počet vrcholov,  $q$  počet hrán a  $\Delta$  je najväčší stupeň vrchola daného grafu [FGM88]. Konštrukcia vnorenia maximálneho rodu sa opiera o nasledujúce tvrdenia.

**Definícia 2.5.7.** Nech  $G$  je graf,  $T$  je jeho kostra. Potom *deficiencia grafu  $G$  vzhľadom na kostru  $T$* , značíme  $\xi(G, T)$ , je rovná počtu komponentov  $G - T$  s nepárnym počtom hrán.

**Definícia 2.5.8.** *Deficiencia  $\xi(G)$  grafu  $G$*  je definovaná vzťahom  $\xi(G) = \min\{\xi(G, T)\}$  pre všetky kostry  $T$  grafu  $G$ .

**Veta 2.5.9** (Xuong [Xuo79]). *Nech  $G$  je súvislý graf, potom pre maximálny rod grafu  $G$  platí*

$$\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2}.$$

**Dôsledok 2.5.10.** *Označme  $r_{\min}(G)$  minimálny počet oblastí vnorenia grafu  $G$ , potom platí*

$$\xi(G) = r_{\min}(G) - 1.$$

*Dôkaz.* Dosadením  $\gamma_M(G)$  do Eulerovho vzťahu za rod vnorenia dostávame nerovnosť  $r \geq \beta(G) - 2\gamma_M(G) + 1$ . Do tohto vzťahu dosadíme  $\xi(G) = \beta(G) - \gamma_M(G)$ .  $\square$

**Dôsledok 2.5.11.**

- (i) *Vnorenie grafu  $G$  rodu  $\lfloor \beta(G)/2 \rfloor$  má práve jednu alebo dve oblasti, podľa parity  $\beta(G)$ .*
- (ii) *Každé vnorenie grafu  $G$ , ktoré má jednu resp. dve oblasti, je vnorenie maximálneho rodu  $\lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ .*

# Kapitola 3

## Distribúcia rodov vnorení grafov

**Definícia 3.0.12.** Pod *distribúciou rodov vnorení grafu*  $G$  rozumieme postupnosť  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$ , kde pre každé  $j$  člen  $g_j$  tejto postupnosti udáva počet všetkých vnorení grafu  $G$  rodu  $j$ .

**Definícia 3.0.13.** Nech  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$  je distribúcia rodov vnorení grafu  $G$ . Potom *rodový polynóm*  $g(x)$  grafu  $G$  definujeme vzťahom

$$g[G](x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i.$$

Počet rôznych vnorení ľubovoľného grafu je konečný, potom počet nenulových členov distribúcie rodov je tiež konečný. Z toho vyplýva, že rodový polynóm pre ľubovoľný graf je konečný.

Zrejme pre každé  $i < \gamma(G)$  je  $g_i = 0$ , rovnako pre každé  $i > \gamma_M(G)$  je  $g_i = 0$ .

**Lema 3.0.14.** *Nech  $G$  je graf,  $\Pi(G)$  je rotačný systém grafu  $G$ . Transpozícia dvoch hrán v rotácii na ľubovoľnom vrchole grafu  $G$  zmení rod vnorenia  $\Pi(G)$  najviac o 1.*

*Dôkaz.* Pridaním hrany sa rod vnorenia alebo nezmení, alebo stúpne o 1, keďže pre jednu hranu stačí pridať najviac jednu rúčku. Odstránením hrany sa rod vnorenia alebo nezmení, alebo klesne o 1. Ak by totiž klesol o viac ako 1, vrátením hrany na pôvodné miesto by musel stúpnuť o viac ako 1.

Transpozíciu dvoch hrán v rotácii potom vieme simulovať odstránením a opätovným vložением jednej z nich, čím zmeníme rod vnorenia najviac o 1. □

**Veta 3.0.15** (Dukeov princíp interpolácie [Duk66]). *Nech  $G$  je ľubovoľný súvislý graf,  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$  je distribúcia rodov grafu  $G$ . Potom pre každé  $j$  také, že  $\gamma(G) \leq j \leq \gamma_M(G)$  platí  $g_j > 0$*

*Dôkaz.* Majme vnorenia  $\Pi_1(G)$  grafu  $G$  rodu  $\gamma(G)$  a vnorenie  $\Pi_n(G)$  rodu  $\gamma_M(G)$ . Vnorenie  $\Pi_n(G)$  vieme vytvoriť z vnorenia  $\Pi_1(G)$  iba pomocou transpozícií hrán v rotácii na vrchoch. Takto dostávame postupnosť vnorení  $\Pi_1(G), \Pi_2(G), \dots, \Pi_n(G)$ , pričom  $\Pi_{i+1}(G)$  vieme dostať z  $\Pi_i(G)$  transpozíciou dvoch susedných hrán v rotácii na niektorom vrchole. Keďže táto operácia zmení rod vnorenia najviac o 1, potom pre každé  $j$ ,  $\gamma(G) \leq j \leq \gamma_M(G)$ , existuje  $i$  také, že rod vnorenia  $\Pi_i(G)$  je práve  $j$ .  $\square$

V článku [Che97] je popísaný algoritmus, ktorý pre dvojicu vnorení rodov  $g_1$  a  $g_2$ ,  $g_1 \leq g_2$  a číslo  $g$ ,  $g_1 \leq g \leq g_2$ , zostrojí vnorenie rodu  $g$ , s časovou zložitou  $O(q \log p)$ , kde  $p$  a  $q$  označujú počet vrcholov resp. počet hrán.

Keďže všetky vnorenia ľubovoľného grafu vieme enumerovať, vieme takto získať aj distribúciu rodov daného grafu. Problém ale nastáva už pri malých hustých grafoch, ktoré majú vnorenie príliš veľa.

### 3.1 Distribúcia oblastí vnorení grafu

**Definícia 3.1.1.** Majme polynóm vo viacrozmernej premennej  $\bar{x}$ , kde koeficient pri člene  $x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \dots x_{i_m}^{j_m}$  udáva počet vnorení grafu  $G$  s  $j_k$  oblastami dĺžky  $i_k$  pre každé  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

Postupnosť koeficientov tohto polynómu nazývame *distribúcia oblastí grafu*.

$$i[G](\bar{x}) = \sum_{m \geq 0} r_{i_1, i_2, \dots, i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m},$$

Ľahko vidieť, že distribúcia oblastí je v istom zmysle zjemnením distribúcie rodov grafu. Nech  $r$  je počet oblastí vnorenia grafu rodu  $i$ , potom  $g_i$  sa rovná súčtu všetkých členov distribúcie oblastí s práve  $r$  oblastami.

V nasledujúcich častiach sa pozrieme na distribúciu vnorení kompletných, kompletných bipartitných a tripartitných grafov a snarkov. Ukážeme, ako využiť vlastnosti týchto grafov na to, aby na získanie kompletnej distribúcie rodov vnorení nebolo

potrebné enumerovať všetky vnorenia daného grafu. Dôkazy uvidíme pre distribúciu rodov, ale ľahko vidieť, že rovnaké tvrdenia platia aj pre distribúciu oblastí.

## 3.2 Distribúcia rodov kompletných grafov

**Definícia 3.2.1.** Graf rádu  $n$ , ktorého každé dva vrcholy sú spojené hranou, nazývame kompletný graf, označujeme ho  $K_n$ .

Všetkých vnorení kompletného grafu  $K_n$  na  $n$  vrcholoch je  $(n-2)!^n$ . Tvrdenie nasledujúcej vety nám umožní získať distribúciu enumerovaním  $(n-2)!^{n-1}$  z nich tak, že budeme fixovať rotáciu na ľubovoľnom z  $n$  jeho vrcholov. Každý člen získanej distribúcie rodov následne vynásobíme číslom  $(n-2)!$ , čím dostame distribúciu rodov všetkých vnorení kompletného grafu  $K_n$ .

Doteraz boli známe distribúcie rodov kompletných grafov  $K_n$  pre  $n \leq 6$ . Na konci kapitoly uvádzame distribúciu rodov kompletných grafov vrátane  $K_7$ .

**Veta 3.2.2.** *Majme kompletný graf  $K_n$ , nech  $v$  je ľubovoľný jeho vrchol, nech  $\rho$  je rotácia na vrchole  $v$ . Nech  $(g'_0, g'_1, \dots, g'_i, \dots)$  je distribúcia rodov všetkých vnorení grafu  $K_n$ , v ktorých je na vrchole  $v$  rotácia  $\rho$ . Potom  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$ , kde  $g_j = g'_j(n-2)!$ , je distribúcia rodov všetkých vnorení  $K_n$ .*

*Dôkaz.* Označme vrcholy kompletného grafu  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Bez ujmy na všeobecnosti, nech  $v = v_1$  a rotácia na vrchole  $v_1$  je  $\rho = (v_2, v_3, \dots, v_n)$ .

Všetkých vnorení kompletného grafu  $K_n$  je  $(n-2)!^n$ . Vnorení s fixovanou rotáciou na jednom vrchole je  $(n-2)!^{n-1}$ . Nech  $M$  je množina všetkých vnorení s rotáciou  $\rho$  na vrchole  $v_1$ .

Pre každú rotáciu  $\rho_i = (v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{n-1}})$  spomedzi  $(n-2)!$  rôznych rotácií na vrchole  $v_1$  zostrojíme množinu  $M_i$  a izomorfizmus  $\phi_i$ . Nech  $M_i$  je množina všetkých vnorení grafu s rotáciou  $\rho_i$  na vrchole  $v_1$ . Zrejme  $|M_i| = |M| = (n-2)!^{n-1}$ .

Izomorfizmus  $\phi_i$  zostrojíme nasledovne,  $\phi_i : V \rightarrow V$ ,  $\phi_i(v_1) = v_1$ ,  $\phi_i(v_k) = v_{j_k}$  pre  $k \geq 2$ . Tento zobrazí všetky vnorenia z  $M$  na rôzne vnorenia z  $M_i$ . Keďže izomorfizmus zachováva rod vnorenia, distribúcia rodov vnorení z  $M_i$  je rovnaká, ako distribúcia rodov vnorení z množiny  $M$ .

$g$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$
0	1	2	0	0	0
1	0	14	462	1800	240
2	0	0	4974	654576	3396960
3	0	0	2340	24613800	3746107320
4	0	0	0	124250208	594836922960
5	0	0	0	41582592	20761712301960
6	0	0	0	0	158500382165280
7	0	0	0	0	178457399105280
8	0	0	0	0	0

**Tabuľka 3.1:** Distribúcie vnorení kompletných grafov.

Vnorenia z  $M$  sa po zobrazení izomorfizmami  $\phi_i$  a  $\phi_j$ , pre rôzne  $i$  a  $j$ , líšia rotáciou na vrchole  $v_1$ . Z toho vyplýva, že pre každé  $i$  a  $j$ ,  $i \neq j$ , sú množiny  $M_i$  a  $M_j$  disjunktné. Potom zjednotením množín  $M_i$  pre každé  $i = 1, 2, \dots, (n-2)!$  dostávame  $(n-2)!(n-2)!^{n-1} = (n-2)!^n$  rôznych vnorení  $K_n$ .

Zjednotením množín teda  $M_i$  pre každé  $i$  teda dostaneme množinu všetkých vnorení grafu  $K_n$ . Distribúcia rodov v každej z množín  $M_i$  je rovnaká, ako v množine  $M$ , z čoho priamo vyplýva tvrdenie vety.  $\square$

**Dôsledok 3.2.3.** *Nech  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$  je distribúcia vnorení  $K_n$ . Potom číslo  $(n-2)!$  delí  $g_j$  pre každé  $j$ .*

V tabuľke 3.1 sú zobrazené distribúcie rodov kompletných grafov až po  $K_7$ . Tieto dáta boli získané na počítači s procesorom Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i7-2670QM s 8GB pamäte, v ôsmich súčasne bežiacich vláknoch.

Beh našej implementácie pre  $K_5$  trval menej ako 7 milisekúnd. Pre  $K_6$  trval 8,5 sekundy, resp. 250 milisekúnd s využitím tvrdenia vety 3.2.2. Získanie distribúcie  $K_7$  s využitím vety 3.2.2 trvalo približne 112 hodín.

Získanie distribúcie  $K_8$  by s použitím rovnakého hardvéru trvalo viac ako  $5 \cdot 10^9$  hodín, čo je viac ako 570000 rokov.

### 3.3 Distribúcia rodov kompletných bipartitných grafov

**Definícia 3.3.1.** Graf rádu  $m+n$ , ktorého vrcholy je možné rozdeliť na dve partície veľkosti  $m$  resp.  $n$ , pričom medzi dvojicou vrcholov je hrana práve vtedy, keď sú v



rôznej partícii, nazývame kompletňý bipartitňý graf, označujeme ho  $K_{m,n}$ .

**Definícia 3.3.2.** Stirlingove čísla prvého druhu označujeme  $s(a, b)$  a definujeme podľa rekurentného vzťahu

$$\begin{aligned} s(a, b) &= 0 \quad \text{ak } b = 0 \text{ alebo } b > a, \\ s(a + 1, b) &= s(a, b - 1) - as(a, b). \end{aligned}$$

**Veta 3.3.3** (Rieper). *Distribúcia rodov kompletňého bipartitňého grafu  $K_{2,n}$  je daná vzťahom*

$$g_k(K_{2,n}) = \frac{2(n-1)!}{n(n+1)} |s(n+1, n-2k)|.$$

Všetkých vnorení kompletňého bipartitňého grafu  $K_{m,n}$  s partíciami o veľkosti  $m$  a  $n$  vrcholov je  $(n-1)!^m(m-1)!^n$ . Tvrdenie nasledujúcej vety nám umožňí získať distribúciu enumerovaním  $(n-1)^{m-1}(m-1)^{n-1}$  z nich. Podobne ako pri kompletňých grafoch budeme fixovať rotáciu na ľubovoľných dvoch vrcholoch z rôznych partícií grafu. Každý člen získanej distribúcie rodov následne vynásobíme číslom  $(m-1)!(n-1)!$ , čím dostame distribúciu rodov všetkých vnorení kompletňého bipartitňého grafu  $K_{m,n}$ .

**Veta 3.3.4.** *Majme kompletňý bipartitňý graf  $K_{m,n}$ , nech  $u$  a  $v$  sú ľubovoľné dva jeho vrcholy z rôznych partícií, nech  $\rho_u$  je rotácia na vrchole  $u$ ,  $\rho_v$  je rotácia na vrchole  $v$ . Nech  $(g'_0, g'_1, \dots, g'_i, \dots)$  je distribúcia rodov všetkých vnorení grafu  $K_{m,n}$ , v ktorých sú na vrcholoch  $u$  a  $v$  rotácie  $\rho_u$  a  $\rho_v$ . Potom  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$ , kde  $g_j = g'_j(m-1)!(n-1)!$ , je distribúcia rodov všetkých vnorení  $K_{m,n}$ .*

*Dôkaz.* Podobne ako v predchádzajúcom dôkaze, označme vrcholy kompletňého bipartitňého grafu  $V = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , vrcholy  $u_i$  a  $v_j$  sú v rôznych partíciách, pre každé  $i$  a  $j$ . Bez ujmy na všeobecnosti, nech  $u = u_1$  a  $v = v_1$  a rotácie na vrcholoch  $u_1$  a  $v_1$  sú  $\rho_u = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , resp.  $\rho_v = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ .

Všetkých vnorení kompletňého bipartitňého grafu  $K_{m,n}$  je  $(m-1)!^n(n-1)!^m$ . Vnorení s fixovanými rotáciami na dvoch vrcholoch z rôznych partícií je  $(m-1)^{n-1}(n-1)^{m-1}$ . Nech  $M$  je množina všetkých vnorení s rotáciou  $\rho_u$  na vrchole  $u_1$  a rotáciou  $\rho_v$  na vrchole  $v_1$ .

Pre každú dvojicu rotácií  $\rho_{u,i} = (v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_n})$  na vrchole  $u_1$  a  $\rho_{v,j} = (u_{l_1}, u_{l_2}, \dots, u_{l_m})$  na vrchole  $v_1$ , zostrojíme množinu  $M_{i,j}$  a izomorfizmus  $\phi_{i,j}$ .

Nech  $M_{i,j}$  je množina všetkých vnorení grafu s rotáciou  $\rho_{u,i}$  na vrchole  $u_1$  a rotáciou  $\rho_{v,j}$  na vrchole  $v_1$ . Keďže množiny susedov  $u_1$  a  $v_1$  sú disjunktné,  $|M_{i,j}| = |M| = (m-1)^{n-1}(n-1)^{m-1}$ .

Izomorfizmus  $\phi_{i,j}$  zostrojíme nasledovne,  $\phi_{i,j} : V \rightarrow V$ ,  $\phi_{i,j}(u_1) = u_1$ ,  $\phi_{i,j}(v_1) = v_1$ ,  $\phi_{i,j}(u_s) = v_{k_s}$  a  $\phi_{i,j}(v_s) = u_{l_s}$  pre  $k \geq 2$ . Tento zobrazí všetky vnorenia z  $M$  na rôzne vnorenia z  $M_{i,j}$ . Keďže izomorfizmus zachováva rod vnorenia, distribúcia rodov vnorení z  $M_{i,j}$  je rovnaká, ako distribúcia rodov vnorení z množiny  $M$ .

Vnorenia z  $M$  sa po zobrazení izomorfizmami  $\phi_{i_1,j_1}$  a  $\phi_{i_2,j_2}$ , pre rôzne dvojice  $(i_1, j_1)$  a  $(i_2, j_2)$ , líšia rotáciou na aspoň jednom z vrcholov  $u_1$  alebo  $v_1$ . Z toho vyplýva, že množiny  $M_{i_1,j_1}$  a  $M_{i_2,j_2}$  sú navzájom disjunktné. Potom zjednotením množín  $M_{i,j}$  pre každé  $i = 1, 2, \dots, (n-1)!$ ,  $j = 1, 2, \dots, (m-1)!$  dostávame  $(m-1)!(m-1)^{n-1}(n-1)!(n-1)^{m-1} = (m-1)^n(n-1)!^m$  rôznych vnorení  $K_{m,n}$ .

Zjednotením množín  $M_{i,j}$  teda dostaneme množinu všetkých vnorení grafu  $K_{m,n}$ . Distribúcia rodov v každej z množín  $M_{i,j}$  je rovnaká, ako v množine  $M$ , z čoho priamo vyplýva tvrdenie vety.  $\square$

**Dôsledok 3.3.5.** *Nech  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$  je distribúcia vnorení  $K_{m,n}$ . Potom číslo  $(m-1)!(n-1)!$  delí  $g_j$  pre každé  $j$ .*

V tabuľke 3.2 sú zobrazené distribúcie rodov kompletných bipartitných grafov. Tieto dáta boli získané na počítači s procesorom Intel® Core™ i7-2670QM s 8GB pamäte, v ôsmich súčasne bežiacich vláknoch.

Pre každý graf sme využili tvrdenie vety 3.3.4. Beh našej implementácie pre  $K_{4,6}$  a  $K_{5,5}$  trval približne 50 minút resp. 4 hodiny.

Získanie distribúcie  $K_{4,7}$ , by s použitím rovnakého hardvéru trvalo viac ako 1080 hodín, pre  $K_{5,6}$  by to bolo viac ako 60000 hodín a pre  $K_{6,6}$  by to bolo viac ako  $2 \cdot 10^{10}$  hodín, resp. viac ako 2566735 rokov.

$g$	$K_{3,3}$	$K_{3,4}$	$K_{3,5}$	$K_{3,6}$	$K_{3,7}$	$K_{3,8}$
0	0	0	0	0	0	0
1	40	156	240	240	0	0
2	24	2244	37584	281520	1209600	3386880
3	0	1056	290880	13476960	267298560	3048071040
4	0	0	113664	72410880	7399687680	311275157760
5	0	0	0	24422400	30877539840	6036425781120
6	0	0	0	0	9230008320	20802379368960
7	0	0	0	0	0	5621028618240
8	0	0	0	0	0	0

$g$	$K_{4,4}$	$K_{4,5}$	$K_{4,6}$	$K_{5,5}$
0	0	0	0	0
1	108	0	0	0
2	24984	33120	12960	0
3	565020	10697760	36835200	9360000
4	1089504	358987392	10043750880	6547190400
5	0	1676344320	464835268800	617555537280
6	0	533827584	4136636266560	11704164782976
7	0	0	5063036025600	40189878581760
8	0	0	0	10885225512960
9	0	0	0	0

**Tabuľka 3.2:** Distribúcie vnorení kompletých bipartitných grafov.

### 3.4 Distribúcia rodov kompletých tripartitných grafov

**Definícia 3.4.1.** Graf rádu  $l + m + n$ , ktorého vrcholy je možné rozdeliť na tri partície veľkosti  $l$ ,  $m$  resp.  $n$ , pričom medzi dvojicou vrcholov je hrana práve vtedy, keď sú v rôznej partícii, nazývame kompletý tripartitný graf, označujeme ho  $K_{l,m,n}$ .

Všetkých vnorení kompletého tripartitného grafu  $K_{l,m,n}$  s partíciami o veľkosti  $l$ ,  $m$  a  $n$  vrcholov je  $(l + m - 1)!^n (l + n - 1)!^m (m + n - 1)!^l$ . Na rozdiel od kompletých a kompletých bipartitných grafov nemôžeme vo všeobecnosti zafixovať celú rotáciu na vrchole.

Môžeme však na jednom vrchole fixovať usporiadanie vzhľadom na vrcholy každej z ostatných partícií. Takýchto usporiadaní je  $n!/(l!m!)$ , pre vrchol z partície s  $n$  vrcholmi.

**Veta 3.4.2.** *Majme vnorenie kompletého tripartitného grafu  $K_{l,m,n}$ , nech  $v$  je ľubovoľný jeho vrchol a  $\rho$  je rotácia na vrchole  $v$ . Nech  $P$  je množina rotácií na vrchole  $v$  takých,*

že definujú usporiadanie na vrcholoch každej partície rovnaké, ako rotácia  $\rho$ . Nech  $(g'_0, g'_1, \dots, g'_i, \dots)$  je distribúcia rodov všetkých vnorení grafu  $K_{l,m,n}$ , v ktorých je na vrchole v niektorá z rotácií z množiny  $\mathbf{P}$ . Potom  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$ , kde  $g_j = g'_j|\mathbf{P}|$ , je distribúcia rodov všetkých vnorení  $K_{l,m,n}$ .

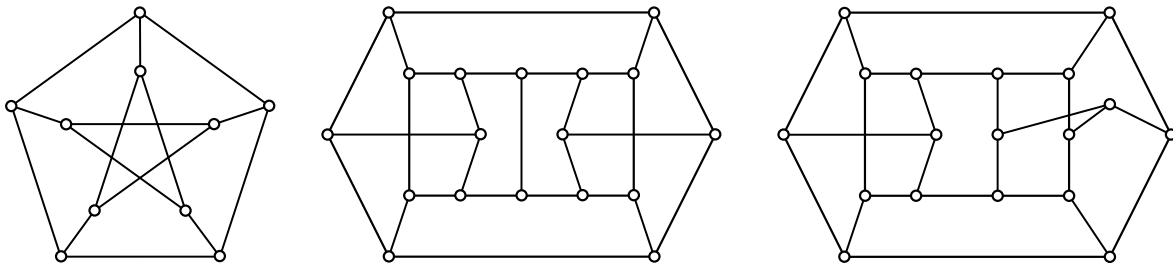
*Dôkaz.* Podobne ako dôkaz viet 3.2.2 a 3.3.4. □

*Poznámka 3.4.3.* Podobné tvrdenie platí pre všetky  $n$ -partitné kompletne grafy.

## 3.5 Distribúcia rodov snarkov

**Definícia 3.5.1.** Súvislý bezmostový kubický graf s chromatickým indexom 4 nazývame *snark*.

Pri štúdiu snarkov sa zvyknú uvažovať snarky s obvodom aspoň 5 a cyklickou súvislosťou aspoň 4, keďže existujú redukcie, ktoré umožňujú zo snarku s obvodom menším ako 5, resp. s cyklickou súvislosťou menšou ako 4, získať snark s obvodom aspoň 5 a cyklickou súvislosťou aspoň 4. Na stránke [Roy96] nájdeme zoznam všetkých snarkov na najviac 28 vrcholoch.



**Obr. 3.1:** Petersenov graf ( $PG$ ) a dva Blanušove snarky  $B_1$  a  $B_2$ .

**Veta 3.5.2** (Vodopivec [Vod08]). *Pre každé  $p$  existuje snark rádu aspoň  $p$  s minimálnym rodom 1.*

**Veta 3.5.3** (Belcastro [BK07]). *Pre každé párne  $p \geq 18$  existuje snark rádu  $p$  s minimálnym rodom 2.*

Všetky snarky na  $p$  vrcholech majú zrejme  $2^p$  vnorení. Veta 3.5.5 nám umožní získať distribúciu rodov prehľadaním polovice z nich.

$g$	oblasti	počet	$g$	$PG$	$B_1$	$B_2$
1	5,5,5,6,9	40	0	0	0	0
	5,5,20	144	1	40	0	8
	5,6,19	120	2	664	864	1176
2	5,12,13	240	3	320	34592	37216
	6,8,16	120	4	0	171392	171520
	6,9,15	40	5	0	55296	52224
3	30	320	6	0	0	0

(a) Distribúcia oblastí Petersenovho grafu.

(b) Distribúcia rodov Petersenovho grafu a Blanušových snarkov.

**Tabuľka 3.3:** Distribúcia rodov a oblastí najmenších snarkov.

**Lema 3.5.4.** *Nech  $G$  je graf, nech  $\Pi_1(G)$  je jeho vnorenie. Potom vnorenie  $\Pi_2(G)$ , ktoré dostaneme z  $\Pi_1(G)$  obrátením rotácie na každom z vrcholov grafu, má rovnaký rod, ako vnorenie  $\Pi_1(G)$ .*

**Veta 3.5.5.** *Majme graf  $G$ , nech  $v$  je ľubovoľný jeho vrchol stupňa 3, nech  $\rho$  je rotácia na vrchole  $v$ . Nech  $(g'_0, g'_1, \dots, g'_i, \dots)$  je distribúcia rodov všetkých vnorení grafu  $G$ , v ktorých je na vrchole  $v$  rotácia  $\rho$ . Potom  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$ , kde  $g_j = 2g'_j$ , je distribúcia rodov všetkých vnorení  $G$ .*

*Dôkaz.* Rotácie na vrchole  $v$  sú dve, označme si ich  $\rho_1$  a  $\rho_2$ . Bez ujmy na všeobecnosti, nech  $\rho_1 = \rho$ .

Nech  $M_1$  je množina tých vnorení grafu  $G$ , v ktorých je na vrchole  $v$  rotácia  $\rho_1$ , podobne  $M_2$  je množina tých vnorení grafu  $G$ , v ktorých je na vrchole  $v$  rotácia  $\rho_2$ . Potom  $(g'_0, g'_1, \dots, g'_i, \dots)$  je distribúcia rodov vnorení z množiny  $M_1$ .

Pre každé vnorenie z  $M_1$  dostanem obrátením rotácií na všetkých vrcholoch vnorenie z  $M_2$  a naopak. Takto vieme skonštruovať bijektívne zobrazenie z množiny  $M_1$  na množinu  $M_2$ . Keďže toto zobrazenie zachováva rod vnorenia, distribúcia rodov vnorení z  $M_2$  je rovnaká, ako distribúcia rodov vnorení z  $M_1$ , z čoho priamo vyplýva tvrdenie vety.  $\square$

V tabuľke 3.3 sú uvedené distribúcie rodov a oblastí Petersenovho grafu a distribúcia rodov dvoch Blanušových snarkov.

Získanie distribúcie rodov pre všetkých 2900 snarkov rádu 28, trvalo na našom hardveri s využitím tvrdenia 3.5.5 približne 25 hodín. Všetky výsledky sú uvedené v prílohe.

Snarkov na 30 vrcholoch je 28399, získať distribúciu rodov pre každý z nich by na našom hardvéri trvalo viac ako 260 hodín.

Snarkov na 32 vrcholoch je 293059, získať distribúciu rodov pre každý z nich by na našom hardvéri trvalo približne 2900 hodín.

# Kapitola 4

## Priemerný rod grafu

**Definícia 4.0.6.** Nech  $G$  je graf, nech  $(g_0, g_1, \dots, g_i, \dots)$  je distribúcia rodov vnorení grafu  $G$ . Potom *priemerný rod grafu  $G$* , označujeme  $\gamma_{avg}(G)$ , definujeme ako priemer rodov vnorenia cez všetky vnorenia grafu  $G$

$$\gamma_{avg}(G) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot g_i}{\sum_{i=0}^{\infty} g_i}.$$

Jeden z dôvodov, prečo študovať priemerný rod grafu, dáva nasledujúca veta.

**Veta 4.0.7** (Chen [Che94]). *Existuje lineárny algoritmus rozhodujúci problém izomorfizmu dvoch grafov, ktorých priemerný rod je ohraničený konštantou.*

Pod pojmom náhodná rotácia na vrchole  $v$  stupňa  $d$  budeme rozumieť jedno z  $(d-1)!$  usporiadaní hrán susedných s vrcholom  $v$ , vybrané náhodne, pričom pravdepodobnosť výberu ľubovoľného z nich je rovnaká, teda  $1/(d-1)!$ . Náhodné vnorenie grafu  $G$  bude jedno z  $\Gamma_G$  vnorení grafu  $G$ , vybrané náhodne, pričom pravdepodobnosť výberu každého vnorenia je rovnaká, teda  $1/\Gamma_G$ .

Majme náhodnú premennú  $X$ , ktorá nadobúda hodnotu rodu náhodného vnorenia grafu  $G$ . Ľahko nahliadneme, že stredná hodnota náhodnej premennej  $X$  je rovná priemernému rodu grafu  $G$ .

Náhodné vnorenie grafu  $G$  vieme skonštruovať tak, že na každom jeho vrchole zvolíme nezávisle náhodne rotáciu. Približnú hodnotu priemerného rodu potom vieme určiť spriemerovaním rodov takto získaných náhodných vzoriek.

$G$	$\gamma(G)$	$\gamma_M(G)$	$\gamma_{avg}(G)$	$N = 10000$	$N = 100000$	$N = 1000000$
$K_5$	1	3	2.24151	2.2469	2.24171	2.24178
$K_6$	1	5	4.08192	4.0853	4.08224	4.08129
$K_7$	1	7	6.43675	6.4270	6.43756	6.43604
$K_8$	2	10	?	9.3247	9.31684	9.31890
$K_{3,3}$	1	2	1.37500	1.3735	1.37340	1.37524
$K_{3,4}$	1	3	2.26042	2.2581	2.25802	2.26082
$K_{3,5}$	1	4	3.17090	3.1719	3.16644	3.17060
$K_{3,6}$	1	5	4.09387	4.0934	4.09177	4.09385
$K_{3,7}$	2	6	5.02704	5.0325	5.02810	5.02755
$K_{3,8}$	2	7	5.96805	5.9753	5.97106	5.96864
$K_{3,9}$	2	8	?	6.9156	6.91354	6.91445
$K_{4,4}$	1	4	3.63366	3.6329	3.63477	3.63372
$K_{4,5}$	2	6	5.05944	5.0581	5.05926	5.05870
$K_{4,6}$	2	7	6.47320	6.4657	6.47295	6.47287
$K_{4,7}$	3	9	?	7.9179	7.91387	7.91458
$K_{5,5}$	3	8	6.96729	6.9665	6.96687	6.96669
$K_{5,6}$	3	10	?	6.9670	6.97087	6.96704

**Tabuľka 4.1:** Porovnanie priemerného rodu grafov a priemerov  $N$  vzoriek.

## 4.1 Ohraničenie priemerného rodu

V tejto časti uvádzame dolné ohraničenia pre priemerný rod, v závislosti od maximálneho rodu grafu. Využijeme ich v ďalšej časti pre odhad počtu vnorení priemerného rodu daného grafu.

**Veta 4.1.1** (Chen, Kanchi, Gross [CKG96]). *Nech  $G$  je ľubovoľný graf, potom platí*

$$\gamma_{avg}(G) > \frac{\gamma_M(G)}{4}.$$

**Veta 4.1.2** (Chen [Che10]). *Nech  $G$  je 2-súvislý graf minimálneho stupňa 3, potom platí*

$$\gamma_{avg}(G) > \frac{\gamma_M(G)}{3}.$$

**Veta 4.1.3** (Huang [Hua02]). *Nech  $G$  je ľubovoľný 3-regulárny graf, potom platí*

$$\gamma_{avg}(G) > \frac{\gamma_M(G)}{2}.$$



## 4.2 Odhad počtu vnorení priemerného rodu

V článku [Che97] sú uvedené a dokázané nasledujúce ohraničenia počtu vnorení, úzko súvisiace s priemerným rodom grafu. Pomocou nich je možné ukázať, že nájst' vnorenie ľubovoľného grafu  $G$  rodu  $k$  pre ľubovoľné  $k$  také, že  $\gamma_M(G) \geq k \geq \gamma_{avg}(G)$ , je problém riešiteľný v pravdepodobnostnom polynomiálnom čase.

**Veta 4.2.1.** *Nech  $G$  je graf,  $\Gamma_G$  je počet všetkých jeho vnorení. Potom pre každé reálne číslo  $\varepsilon > 0$ , existuje aspoň  $(\varepsilon/(1 + \varepsilon))\Gamma_G$  vnorení grafu  $G$  rodu najviac  $(1 + \varepsilon)\gamma_{avg}(G)$ .*

**Veta 4.2.2.** *Nech  $G$  je graf,  $\Gamma_G$  je počet všetkých jeho vnorení, a platí  $\gamma_M(G) \leq k \cdot \gamma_{avg}(G)$ , pre nejaké reálne číslo  $k$ . Potom pre každé reálne číslo  $\varepsilon > 0$ , existuje aspoň  $(\varepsilon/k)\Gamma_G$  vnorení grafu  $G$  rodu aspoň  $(1 - \varepsilon)\gamma_{avg}(G)$ .*

**Lema 4.2.3.** *Nech  $G$  je graf s  $p$  vrcholmi a  $q$  hranami, nech  $\varepsilon = 1/q$ , potom platí*

$$(1 - \varepsilon)\gamma_{avg}(G) \geq \gamma_{avg}(G) - \frac{1}{2},$$

$$(1 + \varepsilon)\gamma_{avg}(G) \leq \gamma_{avg}(G) + \frac{1}{2}.$$

*Dôkaz.* Platí  $\gamma_{avg}(G) \leq \gamma_M(G) \leq \beta(G)/2 < q/2$ , po roznásobení zátvorky a dosadení za  $\gamma_{avg}(G)$  dostaneme dokazovanú nerovnosť.  $\square$

**Veta 4.2.4.** *Nech  $G$  je graf s  $q$  hranami. Nech  $1 > \delta > 0$  a  $N = -\lceil (q + 1) \ln(\delta) \rceil$ . Nech  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  je náhodný výber z rozdelenia daného distribúciou rodov vnorení grafu  $G$ . Potom pravdepodobnosť udalosti  $\min\{X_i\} > \text{round}(\gamma_{avg}(G))$  je menšia ako  $\delta$ .*

*Dôkaz.* Podľa vety 4.2.1 a lemy 4.2.3, pravdepodobnosť udalosti, že  $X_i \leq \text{round}(\gamma_{avg}(G))$ , je aspoň

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{1/q}{1 + 1/q} = \frac{1}{1 + q}.$$

Pravdepodobnosť udalosti, že  $X_i > \text{round}(\gamma_{avg}(G))$ , je potom najviac

$$1 - \frac{1}{1 + q}.$$

Pravdepodobnosť udalosti, že  $\min\{X_i\} > \text{round}(\gamma_{avg}(G))$ , je potom najviac

$$\left(1 - \frac{1}{1+q}\right)^N = \left[\left(1 - \frac{1}{1+q}\right)^{q+1}\right]^{-\ln(\delta)} < \left(\frac{1}{e}\right)^{-\ln(\delta)} = \delta.$$

□

**Veta 4.2.5.** *Nech  $G$  je graf s  $q$  hranami a platí  $\gamma_M(G) \leq k \cdot \gamma_{avg}(G)$  pre nejaké  $k$ . Nech  $1 > \delta > 0$  a  $N = -\lceil k \cdot q \cdot \ln(\delta) \rceil$ . Nech  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  je náhodný výber z rozdelenia daného distribúciou rodov vnorení grafu  $G$ . Potom pravdepodobnosť udalosti  $\max\{X_i\} < \text{round}(\gamma_{avg}(G))$  je menšia ako  $\delta$ .*

*Dôkaz.* Podľa vety 4.2.2 a lemy 4.2.3, pravdepodobnosť udalosti, že  $X_i \geq \text{round}(\gamma_{avg}(G))$ , je aspoň

$$\frac{\varepsilon}{k} = \frac{1/q}{k} = \frac{1}{k \cdot q}.$$

Pravdepodobnosť udalosti, že  $X_i < \text{round}(\gamma_{avg}(G))$ , je potom najviac

$$1 - \frac{1}{k \cdot q}.$$

Pravdepodobnosť udalosti, že  $\max\{X_i\} < \text{round}(\gamma_{avg}(G))$ , je potom najviac

$$\left(1 - \frac{1}{k \cdot q}\right)^N = \left[\left(1 - \frac{1}{k \cdot q}\right)^{k \cdot q}\right]^{-\ln(\delta)} < \left(\frac{1}{e}\right)^{-\ln(\delta)} = \delta.$$

□

### 4.3 Intervaly spoľahlivosti pre priemerný rod

Na základe tvrdení v predchádzajúcej časti je možné zostrojiť algoritmus, ktorý pre graf  $G$  a pravdepodobnosť  $\alpha$  skonštruuje  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  jednostranný, resp. obojstranný interval spoľahlivosti.

Algoritmus pre obojstranný interval spoľahlivosti dostane na vstupe graf  $G$  a pravdepodobnosť  $\alpha$ . Nech  $\delta = \alpha/2$ , podľa viet 4.2.4 a 4.2.5 určí počet vzoriek  $N$  pre určenie dolného a horného odhadu parametra  $\text{round}(\gamma_{avg}(G))$ . Interval je potom určený minimálnym nameraným rodom vzorky pre dolný odhad a maximálnym nameraným rodom

$G$	$\gamma(G)$	$\gamma_M(G)$	$\gamma_{avg}(G)$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.001$
$K_7$	1	7	6.43675	[5, 7]	[5, 7]	[4, 7]
$K_8$	2	10	?	[8, 10]	[8, 10]	[8, 10]
$K_9$	3	14	?	[11, 14]	[11, 14]	[10, 14]
$K_{10}$	4	18	?	[15, 18]	[15, 18]	[14, 18]
$K_{15}$	11	45	?	[41, 45]	[41, 45]	[41, 45]
$K_{20}$	23	85	?	[81, 85]	[81, 85]	[80, 85]
$K_{50}$	181	588	?	[581, 588]	[580, 588]	[579, 588]
$K_{100}$	776	2425	?	[2416, 2425]	[2416, 2425]	[2416, 2425]

**Tabuľka 4.2:** Namerané  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  intervaly spoľahlivosti pre  $\text{round}(\gamma_{avg}(G))$ .

vzorky pre horný odhad.

Z tvrdení viet 4.2.4 a 4.2.5 potom vyplýva, že hľadaný parameter  $\text{round}(\gamma_{avg}(G))$  sa nachádza v nameranom intervale s pravdepodobnosťou aspoň  $1 - \alpha$ .

V tabuľke 4.2 sú zaznačené namerané intervaly pre niektoré grafy a rôzne pravdepodobnosti  $\alpha$ .

# Záver

V práci sme sa venovali algoritmickým vlastnostiam vnorení grafov. V prvej časti sme zhrnuli základné teoretické poznatky v tejto oblasti a popísali viaceré existujúce dátové štruktúry, ktoré nám umožnili efektívne implementovať použité algoritmy.

V prvej časti práce sme sa venovali distribúciám rodov grafov. Získali distribúciu vnorení pre kompletne grafy až po graf na siedmich vrchoch  $K_7$  a všetky kompletne bipartitné grafy na najviac desiatich vrchoch a  $K_{3,8}$ . Takisto sme skonštruovali distribúcie rodov vnorení všetkých snarkov na najviac 28 vrchoch. Na to bolo nevyhnutné využiť niekoľko tvrdení, ktoré čiastočne zjednodušili problém získania distribúcie rodov grafov pre tieto triedy grafov.

V poslednej časti práce sme sa venovali priemernému rodu grafu. Zostrojili sme algoritmus, ktorý výlučne na základe kombinatorických vlastností vnorení grafu skonštruuje intervalový odhad priemerného rodu. Algoritmus sme testovali na kompletných grafu rádu najviac 100. Výsledky ukázali, že vnorenia kompletných grafov sú pomerne husto distribuované blízko maximálneho rodu. Pri konštrukcii algoritmu sme využili tvrdenia dokázané v článku [\[CKG96\]](#)

# Literatúra

- [BK07] Sarah-Marie Belcastro and Jackie Kaminski. Families of dot-product snarks on orientable surfaces of low genus. *Graph. Comb.*, 23(3):229–240, June 2007.
- [Bra21] H. R. Brahana. Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *The Annals of Mathematics*, 23(2):pp. 144–168, december 1921.
- [Che94] Jianer Chen. A linear-time algorithm for isomorphism of graphs of bounded average genus. *SIAM J. Discret. Math.*, 7(4):614–631, November 1994.
- [Che97] Jianer Chen. Algorithmic graph embeddings. *Theor. Comput. Sci.*, 181:247–266, July 1997.
- [Che10] Yichao Chen. Lower bounds for the average genus of a CF-graph. *Electr. J. Comb.*, 17(1), 2010.
- [CKG96] Jianer Chen, Saroja P. Kanchi, and Jonathan L. Gross. A tight lower bound on the maximum genus of a simplicial graph. *Discrete Mathematics*, pages 83–102, 1996.
- [CKK93] Jianer Chen, Saroja P. Kanchi, and Arkady Kanevsky. On the complexity of graph embeddings (extended abstract). In *Proceedings of the Third Workshop on Algorithms and Data Structures*, WADS '93, pages 234–245, London, UK, 1993. Springer-Verlag.
- [Duk66] R. A. Duke. The genus, regional number, and betti number of a graph. *Canad. J. Math.*, 18:817 – 822, 1966.
- [FGM88] Merrick L. Furst, Jonathan L. Gross, and Lyle A. McGeoch. Finding a maximum-genus graph imbedding. *J. ACM*, 35(3):523–534, June 1988.

- [GF85] Jonathan L. Gross and Merrick L. Furst. Hierarchy for imbedding-distribution invariants of a graph. *J. Graph Theory* 11, pages 205–220, 1985.
- [Hua02] Yuanqiu Huang. On the average genus of 3-regular graphs. *Advances in Mathematics(China)*, 31(01):56, 2002.
- [KRW76] H. V. Kronk, R. D. Ringeisen, and A. T. White. On 2-cell imbeddings of complete  $n$ -partite graphs. *Colloq. Math.*, 36:131 – 140, 1976.
- [NSW71] E. A. Nordhaus, B. M. Stewart, and A. T. White. On the maximum genus of a graph. *J. Combinatorial Theory*, B 11:258 – 167, 1971.
- [Rin65] G. Ringel. Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 28:139 – 150, 1965.
- [Rin72] R. D. Ringeisen. Determining all compact orientable 2-manifolds upon which  $K_{m,n}$  has 2-cell imbeddings. *J. Combinatorial Theory*, B 12:101 – 104, 1972.
- [Roy96] Gordon Royle. Cubic graphs. <http://mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/remote/cubics/index.html#snarks>, 1996. [Online].
- [Rus06] Frank Ruskey. Information on permutations. <http://www.theory.csc.uvic.ca/~cos/inf/perm/PermInfo.html>, May 2006. [Online].
- [RY68] G. Ringel and J. W. T. Youngs. Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 60:438 – 445, 1968.
- [SSTF12] Michael Stiebitz, Diego Scheide, Bjarne Toft, and Lene M. Favrholdt. *Graph Edge Coloring: Vizing’s Theorem and Goldberg’s Conjecture*. Wiley-Blackwell, february 2012.
- [Tho89] Carsten Thomassen. The graph genus problem is NP-complete. *Journal of Algorithms*, 10(4):568 – 576, 1989.
- [Vod08] Andrej Vodopivec. On embeddings of snarks in the torus. *Discrete Mathematics*, 308(10):1847 – 1849, 2008.
- [Whi01] Arthur T. White. *Graphs of Groups on Surfaces*. North Holland, Amsterdam, NL, 2001.

- [Xuo79] Nguyen Huy Xuong. How to determine the maximum genus of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 26(2):217 – 225, 1979.
- [You63] J. W. T. Youngs. Minimal imbeddings and the genus of a graph. *J. Math. Mech.*, 12:303 – 315, 1963.