Katedra Informatiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Určovanie prahových funkcií podgrafov niektorých tried grafov

Lenka Trojaková

bakalárska práca

9.2.1 Informatika

Vedúci práce: doc. RNDr. Eduard Toman, CSc Bratislava, 2009

Ďakujem doc. RNDr. Eduardovi Tomanovi, CSc.
za poskytnutie študijných materiálov,
pomoc pri riešení problémov a pripomienky
pri vypracovávaní tejto bakalárskej práce.

Tiež ďakujem Mgr. Jánovi Mazákovi
za jeho trpezlivosť s opravovaním mojich chýb
spravených nielen z nepozornosti.

Abstrakt

Pomocou pravdepodobnostných metód sa v súčasnosti dosahuje väčšina výsledkov pre náhodne indukované grafy. Pravdepodobnostné metódy súvisia s enumeráciou diskrétnych štruktúr. Na skúmanie náhodných premenných vyjadrujúcich vlastnosti náhodných grafov sa často využíva Čebyševova a Markovova nerovnosť. Pre niektoré vlastnosti vieme určiť, od akej asymptoticky najmenšej pravdepodobnosti vzniku hrany má takmer každý náhodne indukovaný graf danú vlastnosť. Takáto pravdepodobnosť sa nazýva prahová funkcia pre danú vlastnosť. Táto práca sa zaoberá spôsobmi enumerácie označených objektov, konkrétne počtom stromov na n vrcholoch a určovaním prahových funkcií podgrafov niektorých tried grafov. V prvej časti uvedieme pojmy a tvrdenia potrebné pre túto prácu. V druhej časti sa budeme venovať technikám enumerácie počtu označených objektov, ktoré demonštrujeme na dôkazoch Cayleyho vety. V tretej časti určíme prahovú funkciu existencie maximálnej k-rozmernej podkocky n-rozmernej hyperkocky.

Kľúčové slová. Enumerácia označených objektov, náhodné grafy, prahové funkcie, maximálna k-rozmerná podkocka.

Obsah

Úvod

V roku 1736 sa Leonhard Euler zaoberal problémom, či sa dá v meste Kráľovec prechádzať tak, aby človek prešiel po každom zo siedmych mostov práve raz a na konci svojej prechádzky skončil tam, kde začal. Euler tento problém sformuloval ako graf a dokázal, že takáto trasa existuje iba vtedy, ak je každý vrchol grafu párneho stupňa. Toto je jeden z prvých výsledkov v teórii grafov ako vednej disiplíny. V súčasnosti sa grafy využívajú v počítačových sieťach, vo formálnych jazykoch a automatoch či pri overovaní správnosti programov.

Náhodné grafy sa začali skúmať približne pred 50 rokmi. Ako prvý použil pravdepodobnostné metódy v teórii grafov Paul Erdös v roku 1959. Vďaka výsledkom z teórie náhodných grafov vieme určiť vlastnosti rôznych štruktúr, ktoré sa dajú pomocou grafov popísať. Takýmito štruktúrami sú napríklad matice či boolovské výrazy.

Pravdepodobnostné metódy úzko súvisia s enumeráciou diskrétnych štruktúr, nakoľko pravdepodobnosť je na konečných objektoch definovaná ako podiel počtu „dobrých“ objektov ku počtu všetkých objektov. Z tohto dôvodu potrebujeme vedieť spočítať objekty s danou vlastnosťou. Tejto problematike sa venujeme v prvej časti práce.

V druhej časti práce budeme skúmať náhodné grafy. Zameriame sa hlavne na náhodne indukované podgrafy n-rozmernej kocky. Budeme sledovať, pre aké pravdepodobnosti je maximálna k-rozmerná podkocka podgrafom n-rozmernej kocky.

Pri dokazovaní tvrdení používame pravdepodobnostné a kombinatorické metódy. Zavedieme si nezáporné diskrétne náhodné premenné charakterizujúce danú vlastnosť a skúmame ich strednú hodnotu a disperziu. Použitím Čebyševovej a Markovovej nerovnosti odhadujeme hodnoty náhodnej premennej a tak získavame predstavu o uvažovanej vlastnosti. Výsledky sú závislé od počtu vrcholov, ktorý sa blíži k nekonečnu.

V prvej kapitole definujeme potrebné pojmy z teórie pravdepodobnosti a z teórie grafov a taktiež uvádzame základné tvrdenia, ktoré budeme neskôr využívať. Väčšina definícií a tvrdení z tejto kapitoly je prevzdatá z [1] a [2].

V druhej kapitole sa zaoberáme technikami enumerácie označených objektov. Tieto techniky si predvedieme v niekoľkých principiálne rôznych dokazoch Cayleyho vetu, ktorá hovorí o počte označených stromov na n vrcholoch.

V tretej kapitole budeme používať pravdepodobnostný priestor, v ktorom sa hrana v grafe vyskytuje s pravdepodonosťou p závislou od n. Zavedieme pojem prahovej funkcie a vysvetlíme všeobecnú metódu jej zisťovania. Určíme prahovú funkciu existencie maximálnej k-rozmernej podkocky v náhodne indukovanom pografe hyperkocky.

Kapitola 1

Základné definície a pojmy

Kvôli presnosti a jednotnosti uvedieme v nasledujúcej kapitole pojmy, ktoré sú použité v tejto práci. Sú to pojmy z teórie pravdepodobnosti a teórie grafov. Väčšina pojmov a výsledkov v tejto kapitole je prebratá z použitej literatúry. Taktiež uvedieme označenia, ktoré budeme používať v celej práci.

1.1 Pojmy z teórie pravdepodobnosti

Definícia 1.1. Nech Ω je množina elementárnych udalostí, pričom $\Omega \neq \emptyset$ a nech $\mathcal{S} \subseteq 2^{\Omega}$. Neprázdny systém $\mathcal{S}$ podmnožín množiny elementárnych udalostí nazývame pole náhodných udalostí (a ozn. σ-pole), ak spĺňa nasledovné podmienky:

1. $\Omega \in \mathcal{S}$
2. Ak $A \in \mathcal{S}$, potom $A^C \in \mathcal{S}$, kde $A^C = \Omega - A$
3. Ak $A_i \in \mathcal{S}$ pre $i = 1, 2, \dots,$ potom $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$

Definícia 1.2. Nech $(\Omega, \mathcal{S})$ je σ-pole. Prvky množiny Ω nazveme elementárne výsledky a podmnožiny Ω patriace do systému $\mathcal{S}$ nazveme udalosti.

Definícia 1.3. Pravdepodobnostná miera na σ-poli udalostí $(\Omega, \mathcal{S})$ je zobrazenie $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ spĺňajúce nasledovné podmienky:

1. Pre všetky $A \in \mathcal{S}$ platí $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0$
3. Ak $(A_i)_{i=1}^{n}$ je postupnosť disjunktných udalostí, tak $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Definícia 1.4. Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ je množina n elemetárnych rovnako pravdepodobných vzájomne sa vylučujúcich udalostí. Nech m z týchto udalostí, $m \leq n$, má za následok nastatie udalosti A, potom pravdepodobnosť udalosti A definujeme ako podiel

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Definícia 1.5. Nech $(\Omega, \mathcal{S})$ je σ-pole udalostí a nech P je pravdepodobnostná miera na $(\Omega, \mathcal{S})$. Potom trojicu $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ nazveme pravdepodnobnostný priestor.

Definícia 1.6. Nech (Ω, S, P) je pravdepodobnostný priestor. Budeme hovoriť, že funkcia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná premenná, ak pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{S}.$$

Definícia 1.7. Náhodnú premennú X na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ nazývame diskrétna, ak jej obor hodnôt $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ je spočítateľná množina.

Definícia 1.8. Nech X je diskrétna náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty $(x_i)_{i \in I}$ s nenulovou pravdepodobnosťou. Potom stredná hodnota náhodnej premennej X je definovaná nasledovne

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P[X = x_i].$$

(V prípade, že suma $\sum_{i \in I} x_i P[X = x_i]$ neexistuje, hovoríme, že X nemá strednú hodnotu.)

Definícia 1.9. Stredná hodnota funkcie $g(X) = (X - E(X))^k$ sa nazýva centrálnym momentom k-teho rádu a zapisujeme

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k] = \sum_i (x_i - E(X))^k p_i.$$

Ak $k = 2$, potom $\mu_2 = E(X - E(X))^k = D(X)$ nazývame aj disperziou (rozptylom).

Veta 1.10. Nech X a Y sú diskrétne náhodné premenné, ktoré majú konečnú strednú hodnotu. Nech a, b sú reálne čísla. Potom aj diskrétna náhodná premenná $aX + bY$ má konečnú strednú hodnotu a platí

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Veta 1.11. Nech X je diskrétna náhodná premenná s konečnou strednou hodnotou aj disperziou. Potom platí:

- $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,
- $D(aX + b) = a^2 D(X)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$.

Veta 1.12 (Markovova nerovnosť). Nech X je nezáporná náhodná premenná. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$

Veta 1.13 (Čebyševova nerovnosť). Nech X je diskrétna náhodná premenná s konečnou disperziou (t.j. aj s konečnou strednou hodnotou). Potom pre každé $\delta > 0$ platí

$$P([X - E(X)] \geq \delta) \leq \frac{D(X)}{\delta^2}.$$

1.2 Niektoré pojmy z teórie grafov

Definícia 1.14. Graf G je usporiadaná dvojica (V, E), kde V je nejaká neprázdna množina a E je množina dvojprvkových podmnožín množiny V. Prvky množiny V nazývame vrcholy grafu G a prvky množiny E hrany grafu G.

Definícia 1.15. Orientovaný graf G je usporiadaná dvojica (V, E), kde V je nejaká neprázdna množina a E je množina usporiadaných dvojíc množiny V, pričom pre hranu $e = (u, v)$ je u jej začiatok a v koniec.

Definícia 1.16. Súvislý acyklický graf G sa nazýva strom. Vrcholy stupňa 1 v strome sa nazývajú listy.

Veta 1.17. Nasledujúce tvrdenia sú pre graf T ekvivalentné:

1. T je strom;
2. Ľubovoľné dva vrcholy grafu T sú spojené jedinou cestou;
3. T je „minimálne súvislý“, t.j. T je súvislý a pre ľubovoľnú hranu e je $T - e$ nesúvislý;
4. T je „maximálne acyklický“, teda T je acyklický, ale $T + xy$ obsahuje cyklus pre ľubovoľné dva neincidentné vrcholy $x \neq y$.

Veta 1.18. Súvislý graf na n vrcholoch je strom práve vtedy, keď má $n-1$ hrán.

Definícia 1.19. Hyperkocka Q_n je graf (V, E), ktorý má nasledujúce vlastnosti:

1. Množina vrcholov V je množina všetkých binárnych vektorov dĺžky n.
2. Hrana v grafe je medzi každými dvoma vrcholmi, ktorých vektory sa líšia práve na jednom mieste.

Z druhej vlastnosti hyperkocky ľahko vidieť, že každý vrchol je stupňa n. Keďže hyperkocka Q_n má 2^n vrcholov, mohutnosť množiny hrán je $|E| = n \cdot 2^{n-1}$

Definícia 1.20. Hyperkocka G rádu k sa nazýva podkockou hyperkocky Q_n, ak G je indukovaným podgrafom Q_n.

Definícia 1.21. Nech H je podgraf Q_n. Hyperkocka $G \subseteq H$ je maximálnou podkockou rádu k, ak G je podkocka rádu k a neexistuje hyperkocka G' taká, že $G \subseteq G' \subseteq H$.

Lema 1.22. Počet podkociek rádu k hyperkocky Q_n je $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$.

Proof. Podkocka rádu k je určená k „voľnými“ bitmi vo vektoroch zodpovedajúcich jej vrcholom; ostatných $n-k$ bitov je „pevných“. Je $\binom{n}{k}$ spôsobov, ako vybrať k rôznych pozícií a 2^{n-k} rôznych binárnych vektorov pre „pevné“ bity. $\square$

Kapitola 2

Enumerácia označených objektov

Techniky enumerácie objektov v teórii grafov si ukážeme v niekoľkých rôznych dôkazoch známej Cayleyho vety.

2.1 Základné metódy určovania počtu stromov s n vrcholmi

Ako naznačuje aj názov kapitoly, budeme sa zaoberať spôsobmi určovania počtu stromov na n vrcholoch.

Veta 2.1 (Cayley). Počet označených stromov na n vrcholoch je $t_n = n^{n-2}$

Túto vetu dokážeme viacerými spôsobmi.

Dôkaz matematickou indukciou

Lema 2.2. Nech $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sú prirodzené čísla so súčtom $2n-2$. Označme výrazom $t(n, d_1, d_2, \ldots, d_n)$ počet označených stromov, v ktorých vrchol číslo j má stupeň d_j pre každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pre $n \geq 2$ dokážeme

$$\begin{aligned} t(n, d_1, d_2, \ldots, d_n) &= \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \ldots, d_n-1} \\ &= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!} \end{aligned}$$

matematickou indukciou vzhľadom na n.

1. Pre $n = 2$ dostávame jedinú možnosť $d_1 = d_2 = 1$ a máme

$$t(2,0,0) = 1 = \binom{2-2}{1-1, 1-1} = \binom{0}{0,0}.$$

2. Dokážeme to pre $n \geq 3$ využitím vlastnosti tvrdenia pre $n-1$. Medzi $d_1, \ldots, d_n$ je určite aspoň jedna jednotka, lebo náš graf je strom a teda má aspoň jeden list. Nech $d_j = 1$. Vrchol j je spojený práve s jedným vrcholom, ktorý označíme k a jeho odtrhnutím od vrchola k dostaneme strom s $n-1$ vrcholmi, ktorého stupne zodpovedajú pôvodnému stromu. Takýchto stromov je podľa indukčného predpokladu

$$T = \frac{(n-3)!(d_k - 1)}{\prod_{i=1 i\neq j}^{n}(d_i - 1)!} = \frac{(n-3)!(d_k - 1)}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)!}$$

Nakolko $(d_j - 1)! = 0! = 1$, môžeme podmienku $i \neq j$ vynechať. Takto zapísaný výraz dáva správny výsledok aj pre $d_k = 1$. Preto platí

$$\begin{aligned} t(n, d_1, d_2, \ldots, d_n) &= \sum_{k=1}^{n} T = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)!} \cdot \sum_{k=1}^{n}(d_k - 1) \\ &= \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)!} \cdot ((2n-2) - n) = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)!}, \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

Dôkaz Cayleyho vety.

Je vidieť, že zosumovaním $t(n, d_1, \ldots, d_n)$ cez všetky možné rozdelenia d_i dostaneme t_n. Zaveďme substitúciu $m_i = d_i - 1$. Potom je zrejmá bijekcia medzi n-ticami kladných d_i so súčtom $(2n-2)$ a n-ticami nezáporných m_i so súčtom $2n - 2 - n = n - 2$. Dostávame teda

$$t_n = \sum_{\sum d_i = 2n-2} \binom{(n-2)}{(d_1 - 1, \ldots, d_n - 1)} = \sum_{\sum m_i = n-2} \binom{(n-2)}{(m_1, m_2 \ldots, m_n)}$$

čo je však použitie multinomickej vety na súčet n jednotiek umocnených na $n-2$, čiže

$$t_n = (1 + 1 + \cdots + 1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

□

Dôkaz použitím POVYKOSov

Nech T je strom. *Povykos* (POstupne VYkonštruovaný Strom)je usporiadaná trojica (T, C, r), kde C je očíslovanie hrán číslami od 1 po $n-1$ a $r \in V(T)$ je koreň. Existuje $n! \cdot t_n$ navzájom rôznych povykosov zodpovedajúcich očíslovaným stromom na n vrcholoch (pre voľbu koreňa máme n možností a pre očíslovanie hrán $(n-1)!$ možností pre daný strom T).

Poďme určiť počet povykosov iným spôsobom. Pozrime sa na povykos ako na orientovaný graf, v ktorom je každá hrana orienovaná smerom ku koreňu. Budeme postupne zostrojovať povykosy a spočítame, koľko ich dostaneme. Postupným pridávaním hrán získame povykos, ktorého hrany budú očíslované podľa toho, v akom poradí boli pridané a budeme ich pridávať tak, aby nevznikla kružnica.

Začíname s n izolovanými vrcholmi očíslovanými od 1 po n. Pre pridanie prvej hrany máme $n(n-1)$ možností a orientácia hrany zároveň určí koreň tohto komponentu. Pridanie hrany zníži počet komponentov o 1. Z každého vrchola v strome vychádza len jedna hrana (vchádzať ich môže ľubovoľný počet).

Predpokladajme, že sme už pridali k hrán. Máme teda $n-k$ komponentov s veľkosťami $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$, pričom $\sum_{i=1}^{n-k} a_i = n$. Každý z týchto komponentov je orientovaný zakorenený strom. Ak má z komponentu vychádzať hrana, tak je jej počiatočný vrchol jednoznačne určený – je to vrchol, z ktorého nevychádza žiadna hrana. Je to, akoby sme „zavesili“ niektorý z komponentov na nejaký vrchol iného komponentu. Pre komponent s veľkosťou a_i je $n - a_i$ možností, ako ho „zavesiť“ na iný komponent. Celkovo tak dostávame

$$(n-a_1) + (n-a_2) + \cdots + (n-a_{n-k}) = (n-k) \cdot n - n = (n-k-1)n$$

možností pre výber hrany s číslom $k+1$. Počet povykosov je teda

$$n(n-1) \cdot \prod_{k=1}^{n-2} (n-k-1)n = n! \cdot n^{n-2},$$

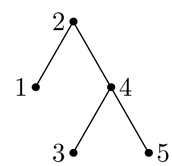
z čoho dostávame, že $t_n = n^{n-2}$. □

Dôkaz pomocou Prüferovho kodu

Heinz Prüfer našiel vzťah medzi označenými stromami rádu n a postupnosťami $n-2$ prvkov $(a_1, a_2, \ldots a_{n-2})$, kde a_k je kladné celé číslo menšie alebo rovné n, pričom v súboroch pripúšťame opakovanie.

V danom označenom strome T vezmeme vrchol v s najmenšou značkou a vyberieme značku vrcholu a_1, ktorý je susedný z vrcholom v. Týmto spôsobom nájdeme značku a_2 pre strom $T-v$, a tak ďalej. Strom $T-v$ dostaneme zo stromu T tak, že vynecháme vrchol v a hranu, ktorá s ním inciduje. Proces ukončíme, ak ostanú len dva vrcholy.

Príklad 2.1. Majme graf G. Prüferov kód k tomuto grafu je 244.



Obr. 2.1: graf G.

Každý označený strom rádu n dáva jedinú postupnosť dĺžky $n-2$, preto $t_n \leq n^{n-2}$. Ešte potrebujeme ukázať, že platí aj opačná nerovnosť, teda že $t_n \geq n^{n-2}$. Použijeme postup J. Moona, pomocou ktorého jednoznačne zostrojíme pre každý súbor $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ označený strom.

Označme b_1 najmenšie kladné celé číslo, ktoré sa nevyskytuje v súbore $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ a nech $(c_2, c_3, \ldots, c_{n-2})$ označuje súbor dĺžky $n-3$, ktorý získame zo súboru $(a_2, \ldots, a_{n-2})$ zmenšením jeho súradníc väčších ako b_1 o 1. Potom súbor $(c_2, c_3, \ldots, c_{n-2})$ sa skladá z čísel pripadajúcich množine $1, 2, \ldots, n-1$. Môžeme predpokladať, že existuje zodpovedajúci strom rádu $n-1$. Zmeníme rozdelenie značiek vrcholov stromu T tak, že pridáme 1 ku každej značke menšej alebo rovnej $b_1 - 1$. Potom skonštruujeme nový n-tý vrchol zo značkou b_1 a spojíme ho s vrcholom so značkou a_1 v strome T. Týmto spôsobom získame jediný označený strom zodpovedajúci danému súboru $n-2$ prvkov. $\square$

Dôkaz rátaním dvoma spôsobmi

Nech A je množina stromov na n vrcholoch takých, že vrchol v má stupeň k. Nech množina B je množina stromov na n vrcholoch takých, že vrchol v má stupeň $k-1$. Označme $t_{(n,k)}$ mohutnosť množiny A a $t_{(n,k-1)}$ mohutnosť množiny B.

Vezmime si strom z množiny B. Vynechaním hrany $e = xy$ neincidentnej s v sa T rozpadol na dva komponenty. Spojme vrchol v s tým z vrcholov x, y, ktorý neleží v tom komponente, v ktorom leží v. Týmto dostaneme strom z množiny A. Hranu e môžeme zvoliť $(n-1)-(k-1) = n-k$ spôsobmi a pre každú voľbu hrany e je ďalší postup už jednoznačný. Pre dve rôzne voľby e dostaneme dva rôzne prvky množiny A.

Majme teraz strom z množiny A. Nech $u_1, u_2, \dots, u_k$ sú susedia vrchola v. Odobratím vrchola v sa strom T rozpadne na k komponentov s veľkosťami $a_1, a_2, \dots, a_k$, ktoré vieme označiť tak, aby vrchol u_i ležal v komponente s a_i prvkami. Keď odoberieme hranu vu_i, dostaneme dva komponenty. Naším cieľom je dostať strom z množiny B opačným postupom, ako bol popísaný v predchádzajúcom odseku. Preto spojíme vrchol u_i hranou s niektorým vrcholom rôznym od v z iného komponentu. Je $n-1-a_i$ možnosí, ako to spraviť. Možností pre všetky voľby u_i je spolu

$$(n-1-a_1)+(n-1-a_2)+\cdots+(n-1-a_k)=(k-1)(n-1).$$

Takže ku kažému stromu z A dostaneme $(k-1)(n-1)$ navzájom rôznych stromov z B.

Máme dve *navzájom inverzné* konštrukcie. Vezmime si bipartitný graf, ktorého prvá partícia je tvorená stromami z A a druhá stromami z B. Naše konštrukcie zodpovedajú hrane v tomto bipartitnom grafe. Počet týchto hrán vieme vyjadriť dvoma spôsobmi:

- Ako počet hrán vychádzajúcich z partície tvorenej stromami z A.
- Ako počet hrán vchádzajúcich do partície tvorenej stromami z B.

Porovnaním dostaneme

$$(n-k)\cdot t_{(n,k-1)}=(k-1)(n-1)\cdot t_{(n,k)}.$$

Keďže $t_{(n,n-1)}=1$, dostávame z uvedeného vzťahu pre $t_{(n,k)}$

$$t_{(n,k)}=\binom{n-2}{k-1}\cdot(n-1)^{n-k-1}.$$

Sčítaním cez všetky stupne vrchola v dostávame hľadaný počet očíslovaných stromov na n vrcholoch.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} t_n k &= \sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}\\ &= \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\cdot(n-1)^{n-2-i}=(1+(n-1))^{n-2}\\ &= n^{n-2}.\end{aligned}$$

□

Dôkaz Polyovou metódou s použitím inverznej Lagrangeovej formuly

Uvedieme najskôr niekoľko definícií a pomocných tvrdení.

Definícia 2.3. Budeme hovoriť, že $f(x)$ je exponenciálna generujúca funkcia pre $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ak $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n/n!$.

Lema 2.4 (**o spočítavaní označených grafov**). Koeficient pri $x^k/k!$ v $a(x)b(x)$ je rovný počtu usporiadaných dvojích (G_1, G_2) dvoch disjunktných grafov, kde G_1 má vlastnosť $P(a)$, G_2 má vlastnosť $P(b)$, k je počet vrcholov v $G_1 \cup G_2$ a značky od 1 do k sú rozdelené na grafe $G_1 \cup G_2$.

Definícia 2.5. Funkcia f je analytická v bode a, ak existuje také okolie bodu a, že v každom jeho bode má funkcia f spojitú deriváciu.

Lema 2.6 (**Inverzná Lagrangeova formula**). Ak funkcia $\varphi(y)$ je analytická v niektorom okolí bodu $y = 0$ a $\varphi(y) \neq 0$, potom rovnica

$$x = y/\varphi(y) \tag{2.1}$$

má jediné riešenie určené funkciou

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \tag{2.2}$$

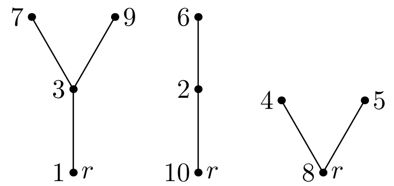
Dôkaz Cayleho vety.

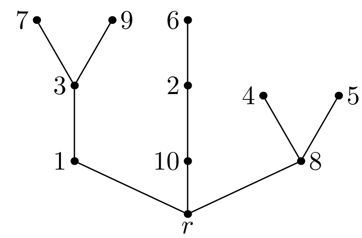
Vieme, že počet zakorenených označených stromov rádu n je rovný $n \cdot t_n$ a teda exponenciálna generujúca funkcia pre tieto stromy je určená výrazom

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n x^n/n! \tag{2.3}$$

Polya našiel funkcionálnu rovnicu pre y a následne pre nájdenie t_n aplikoval inverznú Lagrangeovu formulu. Túto funkcionálnu rovnicu pre y teraz odvodíme.

Z lemy pre násobenie exponenciálnych generujúcich funkcií pre označené grafy vyplýva, že $y^n/n!$ je exponenciálna generujúca funkcia pre n-množiny zakorenených označených stromov, ktorých koreň má stupeň n a nie je označený. Presnejšie, vzťah dostaneme tak, že najprv pridáme ku každej n-množine nový vrchol, no neoznačíme ho, potom spojíme tento vrchol s každým zo starých koreňov.





Vynásobenie výrazu $y^n/n!$ funkciou $f(x) = x$ zodpovedá označeniu nového vrchola a jeho začleneniu do počtu spočítavaných vrcholov. Výraz $x \cdot y^n/n!$ spočítava zakorenené označené stromy, ktorých koreň má stupeň n. Ak spočítame stromy so všetkými možnými stupňami koreňa, dostávame

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} xy^n/n!, \tag{2.4}$$

a teda dostávame funkcionálnu rovnicu

$$y = xe^y. \tag{2.5}$$

Aby sme dostali riešenie rovnice (2.5), vynásobíme y ako funkciu premennej x, budeme aplikovať špeciálny prípad Lagrangeovej formuly. Koeficienty c_k generujúcej fukcie (2.5) sú určené formulou

$$c_k = \frac{1}{k!}(\frac{d}{dy}^{k-1})(\varphi(y))^k \Big|_{y=0}. \tag{2.6}$$

Ak aplikujeme inverznú formulu k rovnici (2.5), kde $\varphi(y) = e^y$, dostávame

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} k^{k-1}x^k/k!. \tag{2.7}$$

Ak porovnáme tento výraz s (2.3), opäť dostávame formulu n^{n-2} pre t_n.

Poznámka 2.1. Pri riešení niektorých úloh enumerácií označených objektov je vhodné použiť zovšeobecnenie formuly (2.6), ktoré patrí Lagrangeovi. Doplnok k pomienkam kladeným na funkciu φ spočíva v tom, že predpokladáme, že je daná ešte jedna funkcia $f(y)$, analytická v niektorom okolí bodu $y = 0$. Potom zovšeobecnená Lagrangeova formula hovorí, že funkcia $f(y)$ môže byť vyjadrená mocninovým radom premennej x nasledujúcim spôsobom:

$$f(y) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\{(\frac{d}{dy})^{k-1}[f'(y)\varphi^k(y)]\}_{y=0} \tag{2.8}$$

Pre $f(y) = y$ z tejto formuly dostávame (2.2) a (2.6).

Dôkaz pomocou stavovcov

Očíslujme si vrcholy kompletného grafu K_n číslami $1, 2, \ldots, n$. Budeme rátať kostry tohto grafu. Označme v každej kostre jeden vrchol krúžkom a druhý štvorcom. Takúto kostru budeme nazývať stavovcom a cestu od krúžka k štvorcu presne v tomto smere chrbticou. Označenie krúžkom aj štvorcom môže dostať ten istý vrchol — niektoré stavovce nemajú chrbtovú kosť. Ľahko vidieť, že stavovcov je $n^2 \cdot t_n$. V ďalšom kroku nájdeme bijekciu medzi množinou stavovcov a množinou zobrazení množiny $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ do seba. Toto budeme ilustrovať na príklade.

Vezmime chrbticu a vypíšme vrcholy, ktoré na nej ležia, v poradí od krúžka po štvorec vrátane týchto vrcholov. Nad to napíšeme tie isté vrcholy, tentokrát usporiadané podľa veľkosti. Týmto je určená permutácia vrcholov chrbtice. Vieme, že každá permutácia sa dá napísať ako súčin disjunktných cyklov. Tieto cykly vieme ľahko nakresliť — z každého vrchola pôjde šípka tam, kam je vrchol zobrazený permutáciou. Obrazom vrcholov mimo chrbtice bude vrchol na ktorý sa napájajú, teda najbližší sused na ceste vedúcej k nejakému vrcholu z chrbtice.

Táto konštrukcia funguje aj spätne. Ku každému zobrazeniu vieme nájsť všetky cykly permutácie určujúcej chrbticu, zobrazenie ostatných dourčí stavovca. Je ľahké overiť, že takto popísané zobrazenie je hľadanou bijekciou.

Zobrazení množiny V do seba je n^n, z čoho dostávame $t_n = n^{n-2}$, čím je Cayleho veta dokázaná. $\square$

Dôkaz pomocou determinantov

Uveďme opäť pred samotným dôkazom Cayleyho vety niekoľko pomocných tvrdení a definícií, ktoré nám neskôr pomôžu.

Definícia 2.7. Nech G je označený graf rádu n s množinou vrcholov $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definujeme maticu $B = B(G)$ typu $n \times n$. Kladieme

$$B_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ ak vrcholy } i \text{ a } j \text{ sú susedné} \\ 0, \text{ ak } i \neq j \text{ a vrcholy } i, j \text{ nie sú susedné} \\ \deg(i), \text{ ak } i = j \end{cases}$$

Matica $B(G)$ sa nazýva Kirchhoffovou maticou grafu G. Súčet prvkov v každom riadku a v každom stĺpci tejto matice je rovný nule.

Lema 2.8. Nech B je ľubovoľná číselná $n \times n$ matica, ktorej súčet elementov v každom riadku aj v každom stĺpci je rovný nule. Potom algebraické doplnky všetkých prvkov matice B sú navzájom rovné. (Špeciálne túto vlastnosť má aj Kirchhoffova matica ľubovoľného grafu).

Proof. Je zrejmé, že hodnosť matice B je menšia ako n, lebo vektory, ktoré tvoria maticu B sú lineárne závislé. Ak je hodnosť matice B menšia ako $n-1$, potom algebraické doplnky všetkých prvkov tejto matice sú rovné 0.

Nech hodnosť matice B je rovná $n-1$ a C je priradená matica pre maticu B, t.j. prvok C_{ij} je rovný algebraickému doplnku A_{ji} prvku B_{ji} v matici B, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$

Z lineárnej algebry je známe, že $BC = (\det B) \cdot E$, kde E je jednotková matica. V našej situácii je $\det B = 0$ a teda $B\dot{C} = 0$. Z toho vyplýva, že pre stĺpce matice C s číslom j, $j = \overline{1,n}$ platia rovnosti

$$B_{i1}C_{1j} + B_{i2}C_{2j} + \cdots + B_{in}C_{nj} = 0,\ i = \overline{1,n}$$

t.j.

$$B_{i1}A_{j1} + B_{i2}A_{j2} + \cdots + B_{in}A_{jn} = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Tieto rovnosti môžeme považovať za systém lineárnych homogénnych rovníc s maticou B vzhľadom na neznáme $A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn}$.

Keďže hodnosť B je rovná n - 1, tak všetky riešenia systému sú proporcionálne na vektor (1, …, 1), ktorý vyhovuje systému a preto $A_{j1} = A_{j2} = \cdots = A_{jn},\ j = \overline{1,n}$. Ak berieme do úvahy CB = 0, analogicky dostávame $A_{1i} = A_{2i} = \cdots = A_{ni},\ j = \overline{1,n}$.

Z toho vyplýva

$$A_{ij} = A_{kl},\ i, j, k, l = \overline{1,n}.$$

□

Definícia 2.9. (Matica incidencie grafu.)

Definujme maticu incidencie grafu. Nech G je (n,m)-graf. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Definujme binárnu $(n \times m)$-maticu $I = I(G)$ nasledujúcim spôsobom:

$$I_{k,l} = \begin{cases} 1, \text{ ak vrchol } k \text{ a hrana } e_l \text{ incidujú} \\ 0, \text{ v opačnom prípade.} \end{cases}$$

Maticu I nazývame maticou incidencie grafu G. V každom jej stĺpci sú ??? dve jednotky, rovnakých stĺpcov niet. Vzťah $G \to I(G)$ je bijekcia množiny označených (n,m)-grafov s očíslovanými hranami na množinu $n \times m$-matíc vyhovujúcich opísaným podmienkam.

Pre orientované grafy má definícia incidenčnej matice nasledujúci tvar:

$$I_{k,l} = \begin{cases} 1, \text{ ak vrchol } k \text{ je počiatok orientovanej hrany } e_l \\ -1, \text{ ak vrchol } k \text{ je koncom hrany } e_l \\ 0, \text{ ak vrchol } k \text{ a hrana } e_l \text{ neincidujú.} \end{cases}$$

V prípade matice incidencie i susednosti platí nasledujúce tvrdenie:

Lema 2.10. Grafy (orientované grafy) sú izomorfné práve vtedy, ak ich matice incidencie (susednosti) dostaneme jednu z druhej vhodným preskupením riadkov a stĺpcov.

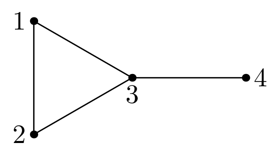
Inými slovami povedané, izomorfizmus grafov znamená premenovanie vrcholov a hrán.

Poznámka 2.2. Štvorcovú maticu $P = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ nazveme permutačnou maticou, ak prvky matice sú 0 a 1 a v každom riadku a v každom stĺpci matice P je práve jeden nenulový prvok. Ekvivalentná matica P je permutačná, ak existuje permutácia π na množine $\{1, 2, \ldots, n\}$ taká, že $a_{ij} = 1$, keď $j = \pi(i)$, $a_{ij} = 0$ v opačnom prípade. Potom $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú izomorfné práve vtedy, keď $A_{G'} = PA_GP^T$, P^T je matica transponovaná k matici P.

Bezprostredne môžeme vysloviť nasledujúce tvrdenie.

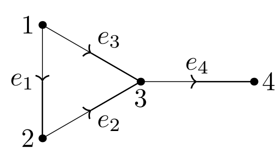
Lema 2.11. Nech B je Kirchhoffova matica grafu G a I matica incidencie nejakej jeho orientácie H. Očíslovanie vrcholov v H je to isté ako v grafe G. Potom $B = I \cdot I^T$, kde T opäť značí operáciu transponovania matice.

Príklad 2.2. Majme graf G a jeho nejakú orientáciu H ako na obrázkoch.



Obr. 2.2: graf G.

$$B(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



Obr. 2.3: orientácia H grafu G.

$$I(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I^T(H) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I \cdot I^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = B(G) \end{aligned}$$

Veta 2.12 (Kirchhoff). Počet kostier v súvislom grafe G rádu $n \geq 2$ je rovný algebraickému doplnku ľubovoľného prvku matice $B(G)$, kde $B(G)$ je Kirchhoffova matica grafu G. Poznamenávame, že v každom súvislom grafe existuje faktor, ktorý je strom a nazývame ho kostrou grafu. Vo všeobecnom prípade sa kostra definuje nejednoznačne. Prirodzene vzniká otázka: Koľko kostier je v grafe? Počet kostier v súvislom grafe sa implicitne určuje vo vyššie uvedenej vete.

Dôkaz vety sa opiera o nasledujúce pomocné tvrdenie.

Lema 2.13. Nech H je $(m+1, m)$ graf, I matica incidencie ľubovoľnej jeho orientácie. Nech M je ľubovoľný subdeterminant (minor) rádu m matice I. Potom ak H je strom, tak $|M| = \pm 1$, ak H nie je strom, tak $|M| = 0$.

Predovšetkým poznamenávame, že ak ľubovoľným spôsobom zmeníme očíslovanie vrcholov a hrán grafu H, uvažovaný subdeterminant môže len nanajvýš zmeniť znamienko.

Nech z je vrchol zodpovedajúci riadku v matici I, ktorý nevystupuje v minore M. Ak graf H nie je strom, potom je nesúvislý. Nech $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ je oblasť súvislosti neobsahujúca vrchol z. Pomocou vhodného prečíslovania hrán grafu H maticu I prevedieme na blokovo-diagonálny tvar $I =$

diag$[I_1, I_2]$, kde I_1 je matica incidencie komponentu $H(K)$. Minor M obsahuje prvých k riadkov matice I, ktorých súčet je rovný nenulovému riadku. Z toho vyplýva, že $|M| = 0$. (V každom stĺpci sú $+1, -1$ dva nenulové prvky).

Nech graf H je strom. Opäť prečíslujeme vrcholy aj hrany grafu H nasledujúcim spôsobom. Jednému z visiacich vrcholov v rôznemu od vrchola z a taktiež hrane incidentnej s vrcholom v pripíšeme číslo 1. Ďalej uvažujeme strom $T_1 = H - v$. Ak jeho rád je väčší ako 1, potom jednému z jeho koncových vrcholov u, rôzneho od vrchola z, a hrane incidentnej s u priradíme číslo 2. Uvažujme strom $T_2 = T_1 - u$. Ak budeme iterovať tento proces, dostaneme novú numeráciu vrcholov a hrán stromu H takú, že vrchol z bude mať číslo $m + 1$.

Matica I pritom nadobúda tvar

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \pm 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & \pm 1 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Symbolom * označujeme tie elementy alebo bloky matice, ktorých hodnoty nemajú vplyv na chod úvah. Minor M zostávajúci po vynechaní posledného riadku tejto matice je rovný ± 1.

Pri dôkaze Kirchhoffovej vety použijeme aj Binet–Cauchyho formulu. Nech A resp. B sú matice $n \times m$ resp. $m \times n$, $C = A \cdot B$ a $m \geq n$. Minor B' rádu n matice B je priradený k minoru A' rádu n matice A, ak množiny čísel riadkov B' a množiny čísel stĺpcov A' sú totožné.

Veta 2.14 (Binet–Cauchyho formula). Nech A resp. B sú matice $n \times m$ resp. $m \times n$ a $C = A \cdot B$. Potom

$$\det C = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Inak povedané, ak $n \leq m$, determinant matice je súčtom súčinov všetkých možných minorov rádu n v A s priradenými minormi B toho istého rádu.

Príklad 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom $C = A \cdot B$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a $\det C = 2$. Podľa napísanej formuly dostávame

$$\begin{aligned}
\det C &= \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le 3} A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\quad + A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot B \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot B \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot B \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) = 2
\end{aligned}$$

dôkaz vety 2.14. Pretože $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$, môžeme napísať

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha_1=1}^{m} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & \sum_{\alpha_n=1}^{m} a_{1\alpha_n} b_{\alpha_n n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\alpha_1=1}^{m} a_{n\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & \sum_{\alpha_n=1}^{m} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n n} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Determinant je aditívna a homogénna funkcia každého zo svojich stĺpcov. Ak použijeme tento fakt pre každý zo stĺpcov v $\det C$, vyjadríme $\det C$ v tvare súčtu m^n determinantov.

$$\begin{aligned}
\det C &= \sum_{\alpha_1=1}^{m} \cdots \sum_{\alpha_n=1}^{m} \det \begin{pmatrix} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & a_{1\alpha_n} b_{\alpha_n n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n n} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\alpha_1=1}^{m} \cdots \sum_{\alpha_n=1}^{m} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_n n}.
\end{aligned}$$

Tie členy súčtu, ktoré majú totožné dva alebo viac indexov $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, sú rovné nule, pretože v týchto prípadoch minory budú mať aspoň dva rovnaké stĺpce. Preto stačí uvažovať len tých $\frac{m!}{(m-n)!}$ členov súčtu, u ktorých sú indexy α rôzne.

Rozdelíme všetky ostatné členy na $\binom{m}{n}$ skupín po $n!$ členov takým spôsobom, že v každej skupine sa členy rozlišujú len poradím indexov $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Poznamenajme, že môžeme tiež napísať

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = (-1)^{t(p)} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

kde $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, p je permutácia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$. Z toho vyplýva, že súčet podľa $n!$ členov, v ktorých $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$-permutácia čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$ je určená výrazom

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \sum_p (-1)^{t(p)} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \dots b_{\alpha_n n}.$$

Ak preskupíme prvky b tak, aby prvé indexy boli v rastúcom poradí, prevedieme výraz na tvar

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \sum_q (-1)^{t(q)} b_{k_1 j_1} b_{k_2 j_2} \dots b_{k_n j_n},$$

kde q je permutácia $j_1, j_2, \dots, j_n$ čísel $1, 2, \dots, n$. Je zrejmé, že $t(p) = t(q)$. Z definície funkcie determinantu vyplýva, že tento výraz je rovný

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Preto sa rovnosť (2.9) transformuje na rovnostť (2.9).

$$\det(a) = \sum_p (-1)^{t(p)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

$t(p)$-počet transpozícií, sčitujeme pre všetkých $n!$ permutácií $j_1, j_2, \dots, j_n$.

□

dôkaz Kirchhoffovej vety. Nech I je matica incidencie nejakej orientácie (n, m)-grafu G. Vzhľadom na tvrdenie, že $B(G) = I \cdot I^T$, je G súvislý graf, tak $m \geq n - 1$ (G je aspoň strom). Ak B je podmatica zostávajúca po vynechaní posledného riadku a stĺpca z $B(G)$ a C podmatica zostávajúca po vynechaní posledného riadku z I, potom v dôsledku vyššie uvedenej rovnosti $B(G) = C \cdot C^T$. Algebraický doplnok $A_{n,n}$ elementu, ktorý zaujíma v matici $B(G)$ pozíciu (n, n), je rovný $\det B$. Z Binet–Cauchyho formuly vyplýva, že $A_{n,n}$ je rovný súčtu štvorcov všetkých minorov rádu $n - 1$ matice C. Na základe lemy každý taký minor M je rovný ± 1, ak faktorový podgraf grafu G, ktorého hrany zodpovedajú stĺpcom vystupujúcim v M, je strom a v opačnom prípade je rovný 0. Z toho vyplýva, že $A_{n,n}$ je rovný počtu faktorových stromov v grafe G. Algebraické doplnky všetkých elementov matice $B(G)$ sú si rovné, čím je veta dokázaná. □

Dôsledok 2.15. Pre počet komponentov n-vrcholového grafu G platí rovnosť $K(G) = n - h(B(G))$, kde $h(B(G))$ je hodnosť matice $B(G)$. Keď je graf súvislý, má aspoň jednu kostru a teda algebraický doplnok $n-1$ rádu je rôzny od nuly.

Ak je graf G súvislý, tak obsahuje aspoň jednu kostru. V súlade s predchádzajúcou vetou $h(B(G)) \geq n-1$, lebo inak by tam neexistovala kostra. Z druhej strany vždy $\det B(G) = 0$. Z toho vyplýva, že $h(B(G)) = n-1$.

Nech má teraz graf G práve k komponentov. Potom pri vhodnom očíslovaní vrcholov zodpovedá matici $B(G)$ blokovo-diagonálna matica $\mathrm{diag}[B_1, B_2, \ldots, B_k]$, diagonálne bloky B_i sú Kirchhoffove matice zodpovedajúce komponentom. Ak zoberieme do úvahy dokázané, dostávame $B(G) = n - k$.

Dôsledok 2.16. Pre $n > 1$ počet kostier v kompletnom grafe K_n je rovný n^{n-2}

Uvažujme algebraický doplnok elementu A_{11} zaujímajúceho pozíciu $(1,1)$ matice

$$B(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}$$

Tento doplnok sa rovná determinantu

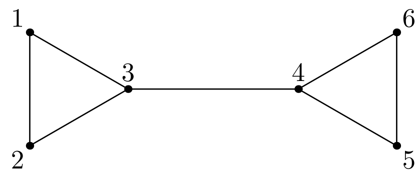
$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -1 & -1 & \vdots & n-1 \end{vmatrix}$$

rádu $n-1$. Ďalej máme

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -1 & -1 & \vdots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & n & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Prvý determinant vznikne pripočítaním súčtu $n-2$ riadkov k prvému riadku, druhý determinant vznikne pripočítaním prvého riadku ku každému.

Je zrejmé, že počet kostier v K_n je rovný počtu orientovaných stromov rádu n. Preto môžeme predchádzajúci dôsledok sformulovať v tvare Cayleyho vety z roku 1897.



Obr. 2.4: graf G.

Príklad 2.4. Majme graf G ako na obrázku (2.4). Poďme určiť počet jeho kostier.

$$B(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B(G)| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 18 - 6 - 3 = 9 \end{aligned}$$

Graf G má teda 9 kostier.

Kapitola 3

Určovanie prahových funkcií maximálnych podkociek hyperkocky

Zoberme si pravdepodobnostný priestor takýto: $\mathcal{G}_n$ bude označovať množinu všetkých podgrafov n-rozmernej hyperkocky a každá hrana sa v grafe bude vyskytovat s pravdepodobnosťou p závislou od n.

Budeme sledovať, ako sa s rastom pravdepodobnosti p mení pravdepodobnosť výskytu maximálnej k-rozmernej podkocky v grafe G. Konkrétnejšie, budeme sa snažiť určiť, pre aké p sa maximálna k-rozmerná podkocka v grafe takmer určite nevyskytuje, pre aké p tam už takmer určite je a hlavne sa budeme snažiť určiť kritickú pravdepodobnosť, kde sa táto vlastnosť mení.

Táto kritická hodnota sa nazýva prahová funkcia, označme ju $t(n)$. Ak vezmeme funkciu asymptoticky menšiu ako $t(n)$, tak takmer žiadny graf danú vlastnosť nemá a keď vezmeme nejakú hodnotu nad prahovou funkciou, potom takmer každý graf má uvažovanú vlastnosť.

Existencia prahovej funkcie pre danú vlastnosť nie je samozrejmá; niektoré vlastnosti prahovú funkciu nemajú. Takouto vlastnosťou je napríklad existencia Hamiltonovskej kružnice v náhodne indukovanom podgrafe.

Definícia 3.1. Reálnu funkciu $t(n)$, ktorá nadobúda len kladné hodnoty, nazývame prahovou funkciou vlastnosti $\mathcal{P}$, ak pre každú pravdepodobnosť $p(n)$ a každý graf $G \in \mathcal{G}_n$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{P}] = \begin{cases} 0, \text{ ak } p/t \to 0 \text{ pre } n \to \infty \\ 1, \text{ ak } p/t \to \infty \text{ pre } n \to \infty \end{cases}$$

Ak vlastnosť $\mathcal{P}$ má prahovú funkciu $t(n)$, potom aj každý kladný násobok ct funkcie t je tiež prahovou funkcicou pre $\mathcal{P}$. Z toho vidieť, že prahová funkcia spĺňajúca vyššie uvedené vlastnosti je určená jednoznačne až na multiplikatívnu konštantu. Vezmime si už spomínanú vlastnosť existencie Hamiltonovskej kružnice a uvažujme pravdepodobnosť $p = (1+\varepsilon)\ln n.n^{-1}$. Je známe, že pre $\varepsilon > 0$ obsahuje graf Hamiltonovský cyklus, no pre ε záporné to už zaručiť nevieme.

Ako sa dá určiť prahová funkcia? Všeobecná metóda na jej určenie je v [1] popísaná nasledovne:

Uvažujme *nezápornú* náhodnú premennú X definovanú na $\mathcal{G}_n$ a vlastnosť $\mathcal{P}$, kde

$$\mathcal{P} = \{G \mid X(G) > 0\}.$$

Chceme ukázať, že $\mathcal{P}$ má prahovú funkciu t. Dôkaz sa bude skladať z dvoch častí:

1. dôkaz, že takmer žiadny graf $G \in \mathcal{G}_n$ nemá vlastnosť $\mathcal{P}$, ak pravdepodobnosť p je malá v porovnaní s t.

2. dôkaz, že takmer každý graf $G \in \mathcal{G}_n$ má vlastnosť $\mathcal{P}$, ak pravdepodobnosť p je dostatočne veľká.

Dôkaz prvej časti: Ak X je celočíselná funkcia, použitím Markovovej nerovnosti s $\varepsilon = 1$ nájdeme horné ohraničenie pre $P[X \geq 1]$ vyjadrené pomocou strednej hodnoty. Ak $\lim_{n\to\infty} E(X) = 0$, potom $X(G)$ môže byť kladná a teda rovná najmenej 1 len pre malú množinu grafov $G \in \mathcal{G}_n$, čiže väčšina grafov vlastnosť P nemá. Výhoda tohto postupu je v tom, že je oveľa jednoduchšie počítať strednú hodnotu ako samotné pravdepodobnosti: nemusíme sa starať o nezávislosť či nezlúčiteľnosť udalostí. Keďže stredná hodnota je lineárna, môžeme strednú hodnotu náhodnej premennej vypočítať ako súčet stredných hodnôt indikátorových náhodných premenných.

Dôkaz druhej časti je komplikovanejší. Aby sme ukázali, že $P[X > 0]$ je dostatočne veľké, nestačí ohraničiť $E(X)$ zdola, lebo náhodná premenná X nie je ohraničená zhora. Môže sa stať, že $E(X)$ je veľká len vďaka tomu, že X je veľká len pre zopár grafov G a teda môže byť stále rovná nule pre väčšinu grafov $G \in \mathcal{G}_n$. Aby sme ukázali, že $P[X > 0] \to 1$, musíme ukázať, že takáto situácia nenastane a teda že X sa príliš nelíši od svojej strednej hodnoty. Na tento účel môžeme použiť Čebyševovu nerovnosť, pričom však musíme určiť disperziu náhodnej premennej. Toto je však vo veľa prípadoch obtiažne, lebo pre výpočet disperzie potrebujeme určiť strednú hodnotu druhej mocniny náhodnej premennej X. Toto sa často dá obísť tým, že nájdeme horný odhad disperzie.

Po určení disperzie použijeme Čebyševovu nerovnosť nasledovne:

Lema 3.2. Ak $E(X) > 0$ pre $n \to \infty$ a $D(X)/E(X)^2 \to 0$ pre $n \to \infty$, potom $X(G) > 0$ pre takmer všetky $G \in \mathcal{G}_n$.

Proof. Pre ľubovoľný graf G, pre ktorý $X(G) = 0$, platí $|X(G) - E(X)| = E(X)$. Potom z Čebyševovej nerovnosti, kde položíme $\delta = E(X)$, vyplýva, že

$$P[X = 0] \leq P[|X - E(X)| \geq E(X)] \leq \frac{D(X)}{E(X)^2}.$$

Pritom $D(X)/E(X)^2 \to 0$ pre $n \to \infty$ a preto $X(G) > 0$ pre skoro všetky grafy $G \in \mathcal{G}_n$. □

Dôsledok 3.3. Ak $E(X) > 0$ pre $n \to \infty$ a $E(X^2)/E(x)^2 \to_{n\to\infty} 1$, potom $X(G) > 0$ pre takmer všetky $G \in \mathcal{G}_n$. 1.11.

Terez sme pripravení dokázať hlavný výsledok tejto kapitoly.

Veta 3.4. Nech $\mathcal{P}$ označuje vlastnosť, že náhodný podgraf hyperkocky obsahuje maximálnu podkocku rádu k. Potom

$$t(n) = \left(\sqrt[k\cdot 2^{k-1}]{2^n} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{n} \right)^{-1}$$

je prahová funkcia pre $\mathcal{P}$.

Proof. Podkocky rádu k danej hyperkocky Q_n označíme $K_1, K_2, \ldots, K_r$. Z lemy 1.22 vieme, že $r = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$.

Nech $\mathcal{I}_j$ je náhodná premenná definovaná takto:

$$\mathcal{I}_j(G) = \begin{cases} 1, & \text{ak graf } G \text{ obsahuje danú podkocku } K_j \\ 0 & \text{v opačnom prípade.} \end{cases}$$

Ľahko vypočítame, že

$$E(\mathcal{I}_j) = P[\mathcal{I}_j = 1] = p^{k\cdot 2^{k-1}} \cdot \left(1 - p^{(k+2)2^{k-1}}\right)^{n-k}.$$

Výraz $p^{k\cdot 2^{k-1}}$ je rovný pravdepodobnosti, že v grafe bude podkocka K_j, zvyšok tvorí pravdepodobnosť, že v G nie je žiadna z podkociek rádu $k+1$ obsahujúcich K_j.

Nech $\mathcal{X}_k(G)$ je náhodná premenná, ktorá je rovná počtu maximálnych podkociek rádu k v grafe G. Potom

$$\mathcal{X}_k(G) = \sum_{1\leq j\leq r} \mathcal{I}_j.$$

Preto

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}_k(G)) &= E\left(\sum_{1\leq j\leq r} \mathcal{I}_j\right) = r \cdot E(\mathcal{I}_1) \\ &= \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot p^{k\cdot 2^{k-1}} \cdot \left(1 - p^{(k+2)2^{k-1}}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Teraz dokážeme, že pre pravdepodobnosti asymptoticky menšie ako $t(n)$ nemá takmer žiadny graf vlastnosť $\mathcal{P}$.

Nech $p(n)/t(n) = \gamma(n)$. Predpokladáme, že $p(n)$ je asymptoticky menšie ako $t(n)$. čiže $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = 0$.

Z vety 1.12 vyplýva, že stačí ukázať rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} E(\mathcal{X}_k) = 0$.

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{X}_k) &= \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot p^{k\cdot 2^{k-1}} \cdot \left(1 - p^{(k+2)2^{k-1}}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot \left(\gamma(n) \cdot \left(\sqrt[k\cdot 2^{k-1}]{2^n} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{n}\right)^{-1}\right)^{k\cdot 2^{k-1}} \\
&\quad \cdot \left(1 - \left(\gamma(n) \cdot \left(\sqrt[k\cdot 2^{k-1}]{2^n} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{n}\right)^{-1}\right)^{(k+2)2^{k-1}}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot \frac{\gamma(n)^{k\cdot 2^{k-1}}}{2^n \cdot n^k} \cdot \left(1 - \frac{\gamma(n)^{(k+2)2^{k-1}}}{(2^n)^{\frac{k+2}{k}} \cdot n^{k+2}}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \cdot \frac{\gamma(n)^{k\cdot 2^{k-1}}}{2^k \cdot n^k} \cdot \left(1 - \frac{\gamma(n)^{(k+2)2^{k-1}}}{(2^n)^{\frac{k+2}{k}} \cdot n^{k+2}}\right)^{n-k},
\end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E(\mathcal{X}_k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{\gamma(n)^{k\cdot 2^{k-1}}}{2^k \cdot n^k} \cdot \left(1 - \frac{\gamma(n)^{(k+2)2^{k-1}}}{(2^n)^{\frac{k+2}{k}} \cdot n^{k+2}}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma(n)^{k\cdot 2^{k-1}}}{2^k} \cdot \left(1 - \frac{\gamma(n)^{(k+2)2^{k-1}}}{(2^n)^{\frac{k+2}{k}} \cdot n^{k+2}}\right)^{n-k} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

nakoľko rátame limitu súčinu funkcií, z ktorých jedna má limitu 0 a druhá je ohraničená.

Ešte potrebujeme ukázať, že pre pravdepodobnosti väčšie ako $t(n)$ majú takmer všetky grafy vlastnosť $\mathcal{P}$.

Zaveďme si novú náhodnú premennú $\mathcal{X}_{i,j}$ takto:

$$\mathcal{X}_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ak } K_i \text{ a } K_j \text{ sú maximálne } k\text{-rozmerné podkocky,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Pre $i = 1, 2, \ldots, r$ bude A_i označovať udalosť, že kocka K_i je maximálna k-rozmerná podkocka.

Pod *okolím* podkocky K budeme rozumieť všetky vrcholy hyperkocky Q_n, z ktorých vedie hrana do nejakého vrchola podkocky K (kocka K je súčasťou svojho okolia).

Z každého vrchola podkocky K vychádza k hrán patriacich kocke K a $n-k$ hrán trčiacich z K. Koncové vrcholy hrán trčiacich z jednotlivých vrcholov kocky K musia byť navzájom rôzne: ak by vrchol $v \notin K$ mal v K aspoň dvoch susedov x a y, tak medzi x a y existuje cesta dĺžky 2. Pritom x a y nemôžu byť spojené hranou (bipartitný graf Q_n neobsahuje trojuholníky), čiže najkratšia možná cesta medzi nimi má dĺžku 2. Lenže všetky cesty minimálnej dĺžky medzi dvomi vrcholmi z K patria do K, preto aj vrchol v musí patriť do K, čo je spor s jeho voľbou.

Z úvahy v predošlom odseku vyplýva, že veľkosť okolia podkocky rádu k je $(n-k+1)2^k$.

Dobrá dvojica podkociek K_i, K_j je taká neusporiadaná dvojica, že prienik okolí kociek K_i a K_j je prázdny. Dvojicu kociek, ktorá nie je dobrá, budeme nazývať *zlou dvojicou.* Označme $\mathcal{D}$ množinu všetkých dobrých dvojíc podkociek.

Ďalším krokom je horný odhad počtu zlých dvojíc. K danej k-rozmernej podkocke K grafu Q_n spočítame, s najviac koľkými kockami L môže tvoriť zlú dvojicu. Okolie kocky L musí mať s okolím kocky K spoločný aspoň jeden vrchol; kocka L je určená svojou telesovou uhlopriečkou, čiže druhým vrcholom tejto uhlopriečky.

Keď máme danú kocku K, tak počet kociek, s ktorými tvorí zlú dvojicu, je nanajvýš $(n-k+1)2^k \cdot \binom{n}{k}$, nakoľko $(n-k+1)2^k$ je počet možností, ako vybrať prvý vrchol uhlopriečky kocky L v okolí kocky K a $\binom{n}{k}$ je počet možností, ako vybrať druhý vrchol — z n súradníc vyberieme k, ktoré budeme meniť.

Na základe predchádzajúceho odstavca a faktu, že počet možností pre výber prvej kocky je $r = 2^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$ vieme ohraničiť počet zlých dvojíc kociek m takto:

$$m \leq 2^{n-k} \cdot \binom{n}{k}(n-k+1) \cdot 2^k \cdot \binom{n}{k}$$

Poďme teraz odhadnúť $E(\mathcal{X}_{i,j})$. Keďže $E(\mathcal{X}_{i,j}) = P(A_i \cap A_j)$, nastávajú dve možnosti:

- ak (K_i, K_j) je dobrá dvojica podkociek, tak $E(\mathcal{X}_{i,j}) = P(A_i) \cdot P(A_j)$
- inak $E(\mathcal{X}_{i,j}) = P(A_i \cap A_j) \leq 1$

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{X}_k^2) &= E\left(\sum_{1\le i,j\le r}\mathcal{X}_{i,j}\right) = \sum_{1\le i,j\le r} E(\mathcal{X}_{i,j})\\
&= \sum_{(K_i,K_j)\in\mathcal{D}} E(\mathcal{X}_{i,j}) + \sum_{(K_i,K_j)\notin\mathcal{D}} E(\mathcal{X}_{i,j})\\
&\le \sum_{(K_i,K_j)\in\mathcal{D}} P(A_i)\cdot P(A_j) + 2^n\cdot(n-k+1)\binom{n}{k}^2\cdot 1
\end{aligned}$$

Keďže $P(A_i) = P(A_j) = P[\mathcal{X}_1 = 1] = p^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-p^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}$ pre dobrú dvojicu kociek a počet všetkých dobrých dvojíc získame tak, že od počtu všetkých dvojíc odrátame zlé dvojice, čiže

$$\binom{\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}}{2}\cdot 2 - 2^n\cdot\binom{n}{k}^2\cdot(n-k+1),$$

tak dostávame, že

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{X}_k^2) \le\ & \left(\binom{\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}}{2}\cdot 2 - 2^n\cdot\binom{n}{k}^2\cdot(n-k+1)\right)\\
&\cdot\left(p^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-p^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}\right)^2 + 2^n\cdot(n-k+1)\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Dôkaz zakončíme použitím 3.3, čím ukážeme, že $X(G) > 0$ pre skoro všetky grafy z $\mathcal{G}_n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{E(\mathcal{X}_k^2)}{E(\mathcal{X}_k)^2} &\le \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\binom{\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}}{2}\cdot 2 - 2^n\cdot\binom{n}{k}^2\cdot(n-k+1)\right)}{\binom{n}{k}^2\cdot(2^{n-k})^2\cdot\left(p^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-p^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}\right)^2}\\
&\quad\frac{\cdot\left(p^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-p^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}\right)^2}{1}\\
&\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot(n-k+1)\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k}^2\cdot(2^{n-k})^2\cdot\left(p^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-p^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}\right)^2}\\
&\le 1+\lim_{n\to\infty}\frac{2^k\ cdot(n-k+1)}{2^{n-k}\cdot\left(p^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-p^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}\right)^2}
\end{aligned}$$

Nech $p(n)/t(n) = \gamma(n)$. Tentokrát predpokladáme, že $p(n)$ je asymptoticky väčšie ako $t(n)$. čiže $\lim_{n\to\infty}\gamma(n) = \infty$. Potom

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} & \quad \frac{(n-k+1)}{2^{n-2k}\cdot\left(p^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-p^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}\right)^2} \\
= & \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{n-2k}\cdot\left(\gamma(n)\cdot t(n)^{k\cdot 2^{k-1}}\cdot(1-\gamma(n)\cdot t(n)^{(k+2)2^{k-1}})^{n-k}\right)^2} \\
= & \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n^k)^2\cdot(\gamma^{k\cdot 2^{k-1}})^2\cdot\left(\left(1-\gamma^{(k+2)2^{k-1}}\cdot(2^{-n})^{\frac{k+2}{k}}\right)^{n-k}\right)^2\cdot 2^{n-k}} \\
= & \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n^k)^2\cdot(\gamma^{k\cdot 2^{k-1}})^2\cdot e^0\cdot 2^{n-k}} \\
= & \quad 0,
\end{aligned}$$

pre $p(n)$ asymptoticky menšie ako $q(n) = (n-k)^{\frac{-1}{(k+2)2^{k-1}}}$ (pre takéto p bude vo výraze vystupovat „iba“ e^0). Čiže

$$\lim_{n\to\infty} E(\mathcal{X}_k^2)/E(\mathcal{X}_k)^2 = 1,$$

čo sme chceli dokázať.

$\square$

Poznámka 3.1. Existenciu hraničnej pravdepodobnosti $q(n)$ sme už vopred očakávali na základe toho, že pre $p \to 1$ začína byť podghraf hyperkocky príliš hustý a teda k-rozmerné podkocky nie sú maximálne, lebo sú súčasťou väčších kociek.

Záver

V práci sme sa zaoberali enumeráciou označených objektov a určovaním prahových funkcií podgrafov niektorých tried grafov.

V druhej kapitole sme ukázali niekoľko spôsobov, ako vypočítať počet označených stromov na n vrcholoch. Týmto sme demonštrovali enumeračné techniky pre spočítavanie označených objektov. V dôkaze Cayleyho vety sme použili „obyčajnú“ matematickú indukciu, ale aj iné prístupy, napríklad Polyovu metódu, Prüferove kódy či determinanty.

V tretej kapitole sme pracovali s pravdepodobnostným priestorom, v ktorom sa hrany v grafe vyskytovali s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$, pričom p bola závislá od n. Uviedli sme definíciu prahovej funkcie a popísali všeobecnú metódu na jej zisťovanie.

Túto metódu sme použili na určenie prahovej funkcie pre existenciu maximálnej k-rozmernej podkocky v náhodne indukovanom podgrafe n-rozmernej hyperkocky. Podľa vety 3.4

$$t(n) = \left(\sqrt[k \cdot 2^{k-1}]{2^n} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{n} \right)^{-1}.$$

Na určenie tejto funkcie sme použili dve náhodné premenné:

- $\mathcal{X}_k(G)$, ktorá je rovná počtu maximálnych podkociek rádu k. Určili sme jej strednú hodnotu.

- $\mathcal{X}_{i,j}$ indikujúcej, či K_i a K_j sú zároveň maximálne k-rozmerné podkocky. Pomocou $\mathcal{X}_{i,j}$ sme odhadli $E(\mathcal{X}_k(G)^2)$, keďže túto hodnotu sme potrebovali pre použitie vety 3.3

Z vety 3.4 a poznámky 3.1 vidieť, že maximálna k-rozmerná podkocka existuje pre pravdepodobnosť vzniku hrany asymptoticky väčšiu ako $t(n)$ a asymptoticky menšiu ako $(n-k)^{\frac{-1}{(k+2)2^{k-1}}}$. Existencia maximálnej k-rozmernej podkocky teda patrí do triedy funkcií, ktoré sú ohraničené dvomi funkciami, čiže sú popísané tzv. „pravdepodobnostným intervalom“ — zovšeobecnením prahovej funkcie.

Oblasť určovania prahových funkcií pre vlastnosti náhodne indukovaných grafov nie je ešte veľmi prebádaná. Vo svojej diplomovej práci by som chcela určiť prahové funkcie pre ďalšie vlastnosti náhodne indukovaných grafov, napríklad prahové funkcie kostier niektorých tried grafov.

Literatúra

[1] DIESTEL R.: Graph Theory, 3rd Ed., Springer, New York 2005.

[2] HARMAN R.: Pravdepodobnosť a štatistika; Poznámky k prednáškam, FMFI UK 2007.

[3] MATOUŠEK J., NEŠETŘIL j.: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum, Praha 2007.

[4] ŠVANTNER J.: Vlastnosti náhodne indukovaných podgrafov k-partitného grafu, Diplomová práca, FMFI UK 2006.

[5] ZVOLENSKÁ Z.: Vlastnosti náhodne indukovaných podgrafov bipartitného grafu, Diplomová práca, FMFI UK 2004.