FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Bakalárska práca

Bratislava 2009 Slavomír Takáč

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Informatika

Asymptotická analýza rekurencií

Bakalárska práca

Diplomant: Slavomír Takáč

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Martin Stanek, PhD.

Bratislava 2009

Prehlasujem, že túto prácu som vypracoval sám, iba s použitím uvedenej literatúry a s pomocou diplomového vedúceho.

....
Slavomír Takáč

Aj touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcemu práce Martinovi Stanekovi za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri vypracovávaní tejto práce.

Obsah

Glosár

Pri zapisovaní intervalov budem používať notáciu $[x, y]$, resp. (x, t) pre uzavretý, resp. otvorený interval medzi bodmi x a y. A podobne aj pre ich kombinácie $[x, y)$, resp. $(x, y]$ pre otvorený z prava, resp. z ľava.

Def: (Θ notácia) $f(x) = \Theta(g(x))$ pre $x \in M$ vtedy a len vtedy, keď existujú konštanty $c_1, c_2 \in R^+$ také, že pre všetky $x \in M$ platí $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 f(x)$. V prípade, že neuvedieme množinu M, tak to znamená, že uvedený odhad platí pre nejaký interval $[n, \infty)$, kde n je dostatočne veľké prirodzené číslo.

Def: ($\mathcal{O}$ notácia) $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pre $x \in M$ vtedy a len vtedy, keď existuje konštanta $c \in R^+$ taká, že pre všetky $x \in M$ platí $|f(x)| \leq c|g(x)|$. V prípade, že neuvedieme množinu M, tak to znamená, že uvedený odhad platí pre nejaký interval $[n, \infty)$.

Def: (Ω notácia) $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pre $x \in M$ vtedy a len vtedy, keď existuje konštanta $c \in R^+$ taká, že pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geq c|g(x)|$. V prípade, že neuvedieme množinu M, tak to znamená, že uvedený odhad platí pre nejaký interval $[n, \infty)$.

1 Úvod

Podľa Cormen, Leiserson, Rivest [5], rekurentné rovnice sú študované aspoň od roku 1202 L. Fibonaccim, po ktorom sú pomenované Fibonacciho čísla. A. De Moivre zaviedol metódu vytvárajúcich funkcií (generating functions) a neskôr Knuth [6] a Liu [9] ukázali, ako riešiť lineárne rekurentné rovnice pomocou tejto metódy. Purdom, Brown [10] uvádzajú rozšírenú metódu riešenia. Špeciálne metódou „rozdeľuj a panuj“ sa zaoberal Aho, Hopcroft, Ullman [1] avšak skúmali len niektoré veľmi konkrétne typy funkcií. Všeobecnejšou metódou je tzv. Master metóda, ktorú dokázal Bentley, Haken, Saxe [4]. Najpopulárnejší tvar tejto metódy uvádza Cormen, Leiserson, Rivest [5], kým mierne zovšeobecnenú verziu uvádza Roura [11] a Verma [12]. Najznámejším zovšeobecnením je však Akra-Bazziho metóda [2], hoci - ako ukážeme - nie je zovšeobecnením v každom aspekte, pretože nerieši niektoré okrajové prípady, ktoré Master metóda umožňuje vyriešiť'.

V práci sa zaoberáme asymptotickou analýzou riešení lineárnych rekurentných rovníc, aké sa vyskytujú napr. pri odhadovaní zložitosti algoritmu využívajúceho metódu „rozdeľuj a panuj" (divide et impera).

Uvedieme najznámejšie z týchto metód a budeme tiež skúmať rôzne ich okrajové prípady.

2 Rozdeľuj a panuj

„Rozdeľuj a panuj“ je stratégia riešenia niektorých úloh, v ktorých je možné vyriešiť pôvodný problém rozdelením na niekoľko menších podproblémov, pričom ak poznáme ich riešenie, tak z toho sa následne určí riešenie pôvodnej úlohy. Typickým príkladom sú niektoré triediace algoritmy, napr. algoritmus Merge sort. Jeho úlohou je utriediť n-prvkovú postupnosť. Spôsob, akým to rieši, spočíva v tom, že najprv rozdelí túto postupnosť na dve rovnako veľké časti a každú z nich utriedi. Následne už len spojí tieto dve utriedené postupnosti do jednej. Samotné spájanie takýchto dvoch utriedených postupností vyžaduje vykonanie iba $\Theta(n)$ operácií. Lebo ak máme dve utridené postupnosti, a chceme ich spojiť do jednej, tak stačí dať ukazovatele na začiatky oboch postupností a v každom kroku porovnáme, ktorý ukazovateľ ukazuje na nižší prvok. A ten prvok potom pridáme do novej postupnosti a príslušný ukazovateľ posunieme na nasledovný prvok (pozn. pre jednoduchosť uvažujme, že n je mocnina čísla 2).

Potom ak $T(n)$ vyjadruje čas potrebný na utriedenie celej postupnosti, tak platí

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

keďže k vyriešeniu úlohy na vstupe veľkosti n sme riešili dva vstupy s veľkosťou $\frac{n}{2}$ a okrem toho sme vykonali ešte $\Theta(n)$ ďalších operácií.

3 Master metóda

Veta 3.1 (Aho et al.[1])**.**

Nech

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{ak } n = 0, \\ f(n) + aT(\lfloor n/b \rfloor), & \text{ak } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

kde $a, b \in [1, \infty)$ a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

1. ak $f(n) = \mathcal{O}(n^k)$ pre nejaké $k < \log_b a$, potom

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

[1] Aho et al. [1], Cormen et al. [5] (str. 73)

2. ak $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, potom

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

3. ak $f(n) = \Omega(n^k)$ pre nejaké $k > \log_b a$ a existuje $c < 1$ také, že pre všetky dostatočne veľké n platí $af(\lfloor n/b \rfloor) \leq cf(n)$, potom

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Dôkaz:

Uvedieme len ideu dôkazu. Pre $n = b^k$ platí

$$T(n) = f(n) + aT(n/b) = f(b^k) + aT(b^k/b)$$

$$= f(b^k) + aT(b^{k-1}) = f(b^k) + a\left(f(b^{k-1}) + aT(b^{k-1}/b)\right)$$

$$= f(b^k) + af(b^{k-1}) + a^2T(b^{k-2}) =$$

$$= f(b^k) + af(b^{k-1}) + a^2(f(b^{k-2}) + aT(b^{k-2}/b)) =$$

$$= f(b^k) + af(b^{k-1}) + a^2f(b^{k-2}) + a^3T(b^{k-3}) =$$

$$...$$

$$= f(b^k) + af(b^{k-1}) + a^2f(b^{k-2}) + ... + a^kf(1)$$

Master metóda si všíma 3 špecifické prípady akú vlastnosť môže mať tento súčet.

Prvý prípad hovorí o situácii, keď asymptoticky najväčší člen uvedeného súčtu je $a^kf(1)$, kým ostatné členy uvedeného súčtu v porovnaní s ním klesajú aspoň geometrickým radom, čo znamená, že ich prítomnosť asymptoticky nezväčší hodnotu celkového súčtu a teda súčet bude len

$$\Theta(a^kf(1)) = \Theta(a^k) = \Theta(a^{\log_b n}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Analogicky tretí prípad hovorí o opačnom extréme, keď najväčší člen je $f(b^k)$, kým ďalšie členy v porovnaní s ním klesajú aspoň geometrickým radom. A teda celkový súčet bude opäť asymptoticky rovný len najväčšiemu členu postupnosti, teda

$$\Theta(f(b^k)) = \Theta(f(n)).$$

Napokon medzi týmito dvoma extrémami sa uvádza ešte jeden špeciálny prípad, kedy sú všetky členy približne rovnako veľké, t.j. keď

$$f(b^k) = \Theta(a^k f(1))$$

$$f(n) = \Theta(a^k) = \Theta(a^{\log_b n}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

a keďže všetkých $k+1$ členov má hodnotu $\Theta(n^{\log_b a})$, potom ich súčet bude

$$\Theta(n^{\log_b a}\ k) = \Theta(n^{\log_b a}\ \log n)$$

$\square$

Poznámka: Možno si všimnúť, že vo všetkých 3 prípadoch Master metódy je podstatné porovnávanie funkcie f s tzv. homogénnym riešením uvednej rekurencie, t.j. s takou funkciou h pre ktorú platí

$$h(n) = ah(n/b).$$

Od pôvodnej rekurencie sa líši len tým, že sme zanedbali člen $f(n)$. Je to teda dolný odhad riešenia a z úvah, ktoré sme uviedli k prípadu 2 badať, že $h(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

Ak si teda všimneme uvedenú rekurenciu

$$T(n) = f(n) + aT(n/b)$$

vidíme, že pravá strana má dve časti: heterogénnu (funkcia f) a homogénnu ($aT(n/b)$).

Master metóda hovorí v podstate to, že ak f je polynomiálne menšia od homogénneho riešenia, tak ju možno v rekurencii zanedbať, pretože asymptoticky sa prejaví len homogénna časť rekurencie. Analogicky v prípade, že f rastie polynomiálne rýchlejšie než homogénne riešenie, tak vtedy v uvedenom rekurentnom vzťahu bude podstatná len ona, kým homogénnu časť môžme zanedbať. V oboch týchto triviálnych prípadoch bude platiť

$$T(n) = \Theta(f(n) + h(n))$$

A netriviálne prípady sú teda len tie, keď sa homogénna a heterogénna časť nelíšia dostatočne výrazne. A najšpecifickejší taký prípad je práve prípad 2, lebo on skúma situáciu, kedy f a h sú asymptoticky rovné, t.j. každá z nich je od tej druhej väčšia alebo menšia najviac o nejaký konštantný násobok. To sa prejaví tým, že vo výsledku pribudne faktor $\log n$.

Príklad 1

$$T(n) = \begin{cases} 0; & \text{ak } n = 0 \\ n + 4T(\lfloor n/2 \rfloor); & \text{ak } n \leq 1 \end{cases}$$

Keďže n je polynomiálne menšia funkcia než homogénne riešenie, ktoré je $\Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$, tak výsledok je asymptoticky rovný homogénnemu riešeniu, t.j.

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Príklad 2

Časová zložitosť vyššie popísaného algoritmu Merge sort spĺňa vzťah

$$T(n) = \begin{cases} 0; & \text{ak } n = 0 \\ \Theta(n) + 2T(\lfloor n/2 \rfloor); & \text{ak } n \leq 1. \end{cases}$$

Teda heterogénna zložka je asymptoticky rovná homogénnemu riešeniu $\Theta(n)$, teda vo výsledku pribudne faktor $\log n$, čiže

$$T(n) = \Theta(n \log n).$$

Príklad 3

Hľadanie k-teho najmenšieho prvku postupnosti dĺžky n metódou bisekcie (využívajúci fakt, že medián je možné nájsť v lieárnom čase) má zložitosť:

$$T(n) = \begin{cases} 0; & \text{ak } n = 0 \\ \Theta(n) + T(\lfloor n/2 \rfloor); & \text{ak } n \leq 1. \end{cases}$$

Keďže heterogénna časť je $\Theta(n)$, čo rastie polynomiálne rýchlejšie než homogénna $\Theta(1)$, tak platí $T(n) = \Theta(n)$.

Výnody a nedostatky Master metódy:

V praxi je Master metóda veľmi užitočná, keďže v bežných prípadoch algoritmov spravidla stále nastáva práve jeden z uvedených 3 prípadov. Okrem toho je táto metóda veľmi ľahko použiteľná, keďže nevyžaduje žiadne zvláštne zručnosti v matematickej ani v kombinatorickej analýze. Jej nevýhodou je, že predpokladá, že vstup bol rozdelený na úseky rovnakej dĺžky. Ďalším jej nedostatkom je, že okrem dvoch triviálnych prípadov uvádza už iba jeden špeciály, takže ľahko možno vymyslieť rekurenciu, pri ktorej bude Master metóda nepoužiteľná, obzvlášť na akademickej pôde, kde cielená snaha generovať úlohy takého typu má svoje opodstatnenie.

Práve tieto nedostatky sú sčasti eliminované v nasledovnej metóde.

4 Akra-Bazziho metóda

Veta 4.1 (Akra-Bazzi[2])**.**

Ak pre $T \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f \in (0,\infty)^{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in (0,\infty)^k$, $b \in (1,\infty)^k$ platí

$$T(n) = \begin{cases} 0; & \text{ak } n = 0, \\ f(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i T(\lfloor n/b_i \rfloor); & \text{ak } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 1 \tag{2}$$

$$(\forall c_1 > 1)(\exists c_2 > 0)(\forall x > c_1)\,(f(x) \leq f(x/c_1) \leq c_2 f(x)) \tag{3}$$

potom

$$T(n) = \Theta\left(n^p \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\,\mathrm{d}x\right), \tag{4}$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je riešenie rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^{-p} = 1. \tag{5}$$

[2]Cormen et al. [5] (str. 89), Akra-Bazzi [2] (str. 195)

Poznámka: V bežnej praxi sa častejšie možno stretnúť s trochu inou formuláciou[3], ktorá sa líši hlavne v podmienke (3) nasledovne

$$\exists c \in \mathbb{R} : f'(x) = \mathcal{O}(x^c). \tag{6}$$

Avšak už takáto modifikácia, napriek svojej popularite, nie je korektná. Uveďme trochu konkrétnejšiu podobu takého tvrdenia aj s následným kontrapríkladom.

Hypotéza: 4.2.

Ak

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{ak } n = 0 \\ f(n) + T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right), & \text{ak } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pričom f je kladná neklesajúca funkcia spĺňajúca podmienku (6), potom

$$T(n) = \Theta\left(\int_1^n \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) \tag{7}$$

Kontrapríklad:

Uvažujme predpis

$$f(x) = xg(x)$$

kde g je kladná neklesajúca funkcia taká, že

$$g(x) \in \mathcal{O}(x) \tag{8}$$

$$g'(x) \in \mathcal{O}(x) \tag{9}$$

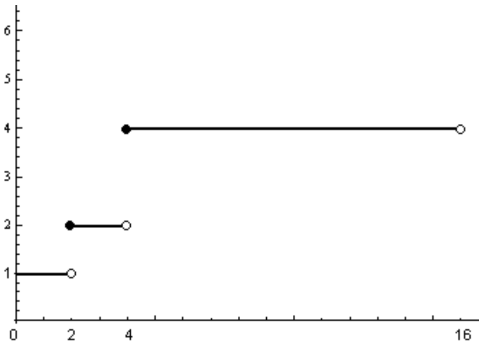
Potom podľa Master metódy platí

$$T(x) = \Theta(f(x)), \tag{10}$$

lebo

$$f(x) = xg(x) = x\Omega(1) = \Omega(x),$$

[3] Leighton [7] (str. 2), [8] (str. 14)



Obrázok 1: funkcia w

pričom exponent $1 > 0 = \log_2 1$
a tiež

$$f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor g\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) \leq \frac{1}{2} x g(x) \leq \frac{1}{2} f(x).$$

Sú však splnené aj podmienky Hypotézy 4.2, lebo

$$f'(x) = (xg(x))' = g(x) + xg'(x) = \mathcal{O}(x + x \cdot x) = \mathcal{O}(x^2)$$

a teda podľa Hypotézy 4.2 by malo platiť

$$T(n) = \Theta\left(\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx\right) = \Theta\left(\int_1^n \frac{xg(x)}{x} dx\right) = \Theta\left(\int_1^n g(x) dx\right) \tag{11}$$

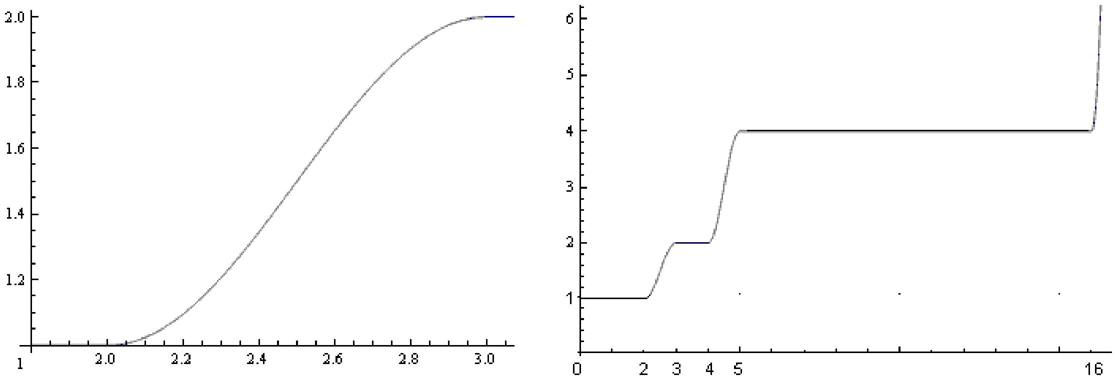
Stačí teda už len nájsť takú neklesajúcu funkciu g spĺňajúcu podmienky (8) a (9), pre ktorú výsledky (11) a (10) budú navzájom rôzne.

Definujme si funkciu w (pozri obrázok 1) nasledovne

$$w(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x < 2 \\ 2^{2^{\lfloor \lg \lg x \rfloor}} & \text{ak } x \geq 2 \end{cases} \tag{12}$$

Znamená to, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in [2^{2^n}, 2^{2^n+1})$ platí $w(x) = 2^{2^n}$.

Teda x je neklesajúca, po častiach konštantná funkcia, so zlomovými bodmi v 2^{2^n}, kde $n \in \mathbb{N}_0$, v ktorých platí $w(x) = x$, kým v ostatných bodoch intervalu $(1, \infty)$ platí $w(x) < x$. Aby sme však odstránili nespojitosť a hlavne



Obrázok 2: funkcia g

nediferencovateľnosť, tak použijeme goniometrický spline, ktorý na intervale $(2^{2^n}, 2^{2^n}+1)$ spôsobí plynulý prechod od jednej hodnoty k druhej, kým na iných miestach ostanú pôvodné hodnoty. Teda definujme (pozri obrázok 2) si nasledovnú funkciu

$$g(x) = w(x-1)\cos^2(x\pi/2) + w(x)\sin^2(x\pi/2) \tag{13}$$

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ zrejme platí:

- na intervale $[2^{2^{n-1}}+1, 2^{2^n})$, platí $g(x) = 2^{2^{n-1}}$
- na intervale $[2^{2^n}, 2^{2^n}+1]$, hodnota $g(x)$ hladko rastie z $2^{2^{n-1}}$ na 2^{2^n}
- na intervale $(2^{2^n}+1, 2^{2^{n+1}})$, platí $g(x) = 2^{2^n}$

Teda funkcia je po častiach konštantná s výnimkou malých intervalov typu $[2^{2^n}, 2^{2^n}+1]$, kde prechádza z hodnoty $2^{2^{n-1}}$ na 2^{2^n}. Pre jej deriváciu platí

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(w(x-1)\cos^2(x\pi/2) + w(x)\sin^2(x\pi/2)\Big) = \\ &= -w(x-1)\sin(x\pi)\frac{\pi}{2} + w(x)\sin(x\pi)\frac{\pi}{2} = \\ &= \Big(w(x) - w(x-1)\Big)\frac{\pi\sin(x\pi)}{2} \in [0, x\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Pričom pri úpravách som využil, že $w'(x-1) = w'(x) = 0$, keďže w je po častiach konštantná. Výnimkou sú len zlomové body, avšak v nich je nulová príslušná goniometrická funkcia, ktorou som tieto výrazy násobil. Naviac aj g' je tiež spojitá funkcia, keďže na intervale $(2^{2^n}, 2^{2^n}+1)$ najprv vzrastá z nuly a napokon opäť klesá k nule a mimo intervalov tohto typu je už všade nulová, keďže je na tých intervaloch konštantná, vďaka čomu $w(x) - w(x-1) = 0$. Platí teda podmienka (8) a preto, ako sme ukázali, podľa hypotézy 4.2 by malo platiť (11). Majme $n \in 2^{2^m}$, kde $m \in \mathbb{N}$. Ukázali sme, že pre $x < n$, t.j. pre $x < 2^{2^m}$ platí $g(x) \leq 2^{2^{m-1}} = \sqrt{2^{2^m}} = \sqrt{n}$, a pre $x \in (n, n+1]$, t.j. pre $x \in (2^{2^m}, 2^{2^m} + 1]$, platí $g(x) \leq 2^{2^m} = n$, a tiež $g(n+1) = 2^{2^m} = n$. Podľa (11) by potom malo platiť

$$T(n+1) = \int_1^{n+1} g(x)dx = \int_1^n g(x)dx + \int_n^{n+1} g(x)dx$$

$$\leq \int_1^n \sqrt{n}dx + \int_n^{n+1} ndx < n\sqrt{n} + n = \mathcal{O}(n\sqrt{n})$$

$$T(n+1) = \mathcal{O}(n^{3/2}) \tag{14}$$

Lenže podľa výsledku (10) získaného Master metódou by malo platiť

$$T(n+1) = \Theta(f(n)) = \Theta((n+1)g(n+1)) = \Theta((n+1)n)$$

$$T(n+1) = \Theta(n^2) \tag{15}$$

Očividne horný odhad (14) je asymptoticky nižší než tesný odhad (15), teda nemôžu súčastne platiť, keďže $\mathcal{O}(n^{3/2}) \cap \Theta(n^2) = \emptyset$.

□

Poznámka: Na tomto príklade zároveň vidíme, že Akra-Bazziho metóda je pri niektorých typoch funkcií dokonca obmedzenejšia než Master metóda, keďže podmienky korektnej verzie Akra-Bazziho metódy nemôžu byť splnené pre takéto typy funkcií.

5 Všeobecnejšie typy rekurencií

Niektorí autori[4] uvažujú rekurentné vzťahy pre funkcie, ktorých definičný obor je $\mathbb{R}$, teda nie len celé čísla, ako to býva obvykle. Má to určité výhody, napr. nemusíme zabezpečovať, aby argument bol celé číslo, takže častokrát sa s takýmito rekurenciami pracuje ešte jednoduchšie. Sú tu však aj určité problémy, pretože kým pri metóde rozdeľuj a panuj postačovalo, aby daná rekurencia platila až od nejakého dostatočne veľkého n, a stále sa asymptoticky bude správať rovnako, tuná to tak už nemusí platiť, pretože obyčajne môžme vymyslieť funkciu, ktorá hoci pre dostatočne veľké x spĺňa daný rekurentný vzťah, avšak jej hodnoty sú veľmi rôznorodé, takže sa nedá zhora ohraničiť žiadnou rastúcou funkciou. Dokonca je možné, že jej hodnota je nekonečná. Naproti tomu, pri rekurenciách definovaných len pre prirodzené čísla už takéto problémy nevzniknú. Ukážme nejaké typy rekurencií na reálnych číslach.

pre $x < 1$

$$T(x) = \mathcal{O}(1) \tag{16}$$

pre $x \geq 1$

$$T(x) = f(x) + \int_0^1 T(xt)\mathrm{d}a(t) \tag{17}$$

pričom je použitý Lebegov integrál, a f, a sú nezáporné neklesajúca funkcie, pričom a je zľava spojitá, $a(0) = 0$, $a(1) \geq 1$, konštantná na intervale $[1, \infty)$.

Motiváciou k takejto rekurencii je určovanie strednej hodnoty času nedeterministických algoritmov, ktorých časová zložitosť môže nadobúdať asymptoticky rôzne hodnoty, pričom to závisí od náhodilosti. Tak napríklad rekurencia (17) vyjadruje strednú hodnotu riešenia nasledovnej rekurencie

$$T(x) = f(x) + a(1)T(x\xi_x) \tag{18}$$

kde ξ_x pre jednotlivé x sú nezávislé náhodné výbery náhodnej premennej ξ, ktorá nadobúda hodnoty z intervalu $(0, 1)$, pričom pre všetky $t \in [0, 1]$

[4] napr. Bazzi-Mitter

platí

$$P[\xi < t] = \frac{a(t)}{a(1)}.$$

Tvrdenie: 5.1.

Ak T spĺňa (16) a (17) a f spĺňa predpoklad (3) z Akra-Bazziho vety, potom T spĺňa aj dôsledok (4) tej vety, t.j.

$$T(x) = \Theta\left(x^p \int_1^x \frac{f(t)}{t^{p+1}}\,\mathrm{d}t\right)$$

pričom opäť analogicky berieme p ako reálne riešenie rovnice

$$\int_0^1 t^p\,\mathrm{d}a(t) = 1.$$

Poznámka: Z podmienky $a(1) \geq 1$ vyplýva, že $p \geq 0$. Bazzi-Mitter [3] uvádzajú toto tvrdenie pre prípad $p > 0$, kým v prípade $p = 0$ pridávajú ešte dodatočný predpoklad, že intergrál $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}a(t)$ konverguje. Pokladajú však za otvorený problém[5], či táto dodatočná podmienka už nie je zbytočná, pretože sa im nepodarilo nájsť žiadnu rekurenciu, ktorej riešenie by nebolo v uvedenom odhade. Aj niektorí iní autori[6] uvádzajú toto ako otvorený problém, pričom podľa ich domnienok by uvedený odhad mal platiť vždy, teda aj v prípade $p = 0$, resp. $a(1) = 1$.

Uveďme teda kontrapríklad k tvrdeniu 5.1, ktorý je práve takým prípadom, keď $p = 0$ a kedy uvedený odhad funkcie T neplatí. Neplatí však preň ani to, že integrál $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}a(t)$ konverguje, takže sa zdá, že táto dodatočná podmienka nie je zbytočná a otvorený problém je tým vyriešený. Neskôr však ukážeme, že ani táto podmienka ešte úplne nezachráni tvrdenie 5.1, pričom problém bude práve v tom, že pracujeme na obore reálnych čísiel, kde už riešenia rekurencií nemusia byť jednozančné.

Kontrapríklad k 5.1.

Uvažujme, že $f(x) = 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $a(1) = 1$. Potom podľa Tvrdenia 5.1 by malo platiť

$$T(x) = \Theta\left(1 \cdot \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = \Theta(\ln(x)) \tag{19}$$

[5]Bazzi-Mitter [3] (str. 54)

[6]napr. Roura [11] (str. 190)

Našou úlohou je nájsť vhodné a, T spĺňajúce zadanie, avšak nespĺňajúce odhad (19).

Nech teda pre všetky $t \in (0, 1]$

$$a(t) = 1/\ln(e/t). \tag{20}$$

Vtedy (17) po úprave nadobudne tvar

$$T(x) = 1 + \int_0^1 \frac{T(xt)\mathrm{d}t}{t\ln^2(e/t)} \tag{21}$$

V rekurencii (18) s náhodnými premennými by to znamenalo, že faktor ξ je spojitá náhodná premenná, ktorá má v bode t hustotu $1/(t\ln^2(e/t))$. Ak by sme chceli uvažovať podobnú verziu, v ktorej ξ by bola diskrétna náhodná premenná, tak stačí vzťah (20), t.j. že $a(t) = 1/\ln(e/t)$, nahradiť nasledovným

$$a(t) = 1/\lceil\ln(e/t)\rceil. \tag{22}$$

Vtedy (18) po úprave bude

$$T(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(xe^{-n})}{n(n+1)}. \tag{23}$$

Čo by vo verzii s náhodnými premennými (18) znamenalo, že faktor ξ je diskrétna náhodná premenná z množiny $\{e^{-n} | n \in \mathbb{N}\}$, pričom

$$\forall n \in \mathbb{N} : P[\xi = e^{-n}] = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Vyriešiť však uvedenú rekurenciu nie je až také triviálne.

Ak položíme $c_n = T(e^n)$ pre $n \in \mathbb{N}_0$, a inak $c_n = 0$, potom z (23) dostávame, že pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$c_n = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{n-i}}{i(i+1)} \tag{24}$$

čo je už klasický typ rekurencií a má pomerne jednoduchú vytvárajúcu funkciu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = -\frac{z}{(1-z)^2\ln(1-z)}$$

a indukciou sa ľahko presvedčíme, že platí

$$c_n = \mathcal{O}\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Podobne pre T potom platí

$$T(x) = \mathcal{O}\left(\frac{\ln x}{\ln \ln x}\right). \tag{25}$$

Avšak podľa hypotézy nám vyšiel odhad (19), ktorý uvádza

$$T(x) = \Theta(\ln(x)),$$

čo je spor s (25).

$\square$

Ako sme spomínali, tvrdenie 5.1 má aj ďalší problém, ktorý spočíva v tom, že nakoľko definičným oborom týchto funkcií nie sú celé čísla, ale reálne čísla, je možné vymyslieť takú rekurenciu, ktorá by pripúšťala viac riešení, vrátane nekonečných. Bazzi-Mitter totiž pri zdôvodňovaní tvrdenia 5.1 vychádzali z nasledovnej hypotézy

Hypotéza: 5.2 (Bazzi-Mitter[7]).

Ak funkcia T spĺňa vzťahy

$$\begin{cases} T(x) \leq 0 & \text{ak } x \leq 1, \\ T(x) \leq \int_0^1 T(xt)\mathrm{d}a(t) & \text{ak } x > 1, \end{cases} \tag{26}$$

kde a je neklesajúca funkcia spojitá v bode 1, potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T(x) \leq 0 \tag{27}$$

Poznámka: Hoci napohľad sa zdá, že táto hypotéza by mala platiť, dokonca triviálne, skutočnosť je značne komplikovanejšia a dôvodom je, že uvedená rekurencia je na reálnych číslach, v ktorých už neplatí analogický princíp ako v matematickej indukcii, kde by stačilo tvrdenie overiť pre bázu a potom stačí výrok pre x dokázať za predpokladu, že už platí pre všetky argumenty

[7]Bazzi-Mitter [3] (str. 45)

menšie od x. Nasledovný príklad demonštruje, že pri reálnych číslach naozaj takáto indukcia nemusí platiť

Kontrapríklad k 5.2.

Funkcia nesplĺňajúca (27), t.j. nadobúdajúca aj kladné hodnoty, je napr.

$$T(x) = \begin{cases} n!(n-1)! & \text{ak } x = 1 + \frac{1}{n} \text{ pre nejaké } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{ak } x \neq 1 + \frac{1}{n} \text{ pre každé } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{28}$$

Zrejme pre $x \leq 1$ platí $T(x) = 0 \leq 0$, teda prvá podmienka z (26) platí. Ukážeme však, že T splĺňa aj druhú podmienku, t.j. pre $x > 1$ uvažujeme napríklad nasledovný prípad rekurencie

$$T(x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} T\left(\left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) x\right) \tag{29}$$

Čo je naozaj rekurencia typu (26), keďže z (23) vieme, že platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$$

Stačí už len z (28) ukázať, že platí (29).

Sú teda dve možnosti:

1. Ak pre každé prirodzené číslo n platí $x \neq 1 + \frac{1}{n}$, tak podľa (28) platí $T(x) = 0$, keďže však podľa (28) je T nezáporné, tak naozaj

$$T(x) = 0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} T\left(\left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) x\right) \tag{30}$$

2. Ak pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí $x = 1 + \frac{1}{n}$, potom

$$T(x) = T\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n!(n-1)! = \frac{1}{n(n+1)} n!(n+1)! = \frac{1}{n(n+1)} T\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} T\left(\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} T\left(\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) x\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} T\left(\left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) x\right)$$

$\square$

Poznámka: Ako badat' z predošlého príkladu, nejednoznačnost' možno vyrobit' akonáhle sa nedá určit' hodnota v nejakom bode na konečný počet krokov. Zjednodušený príklad je nasledovný

Príklad:

$$T(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \leq x_0, \\ T(r(x)), & \text{ak } x > x_0, \end{cases} \tag{31}$$

pričom pre všetky x platí

$$r(x) < x. \tag{32}$$

Zrejme konštantná funkcia $T(x) = 0$ spĺňa uvedený vzt'ah. Akonáhle však existuje nejaké $s \in \mathbb{R}$ také, že

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : r^n(s) > x_0, \tag{33}$$

potom aj pre l'ubovol'né kladné c funkcia

$$T(x) = \begin{cases} c, & \text{ak } \exists n, m \in \mathbb{N}_0 : r^n(s) = r^m(x), \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{34}$$

spĺňa rekurentný vzt'ah (31), ked'že z definície vidíme, že T nadobúda len dve hodnoty $\{0, c\}$, pričom $T(x) = c$ vtedy a len vtedy ak

$$\exists n, m \in \mathbb{N}_0 : r^n(s) = r^m(x).$$

Stačí ukázat', že $T(x) = c$ vtedy a len vtedy, ked' $T(r(x)) = c$, lebo potom aj $T(x) = 0$ vtedy a len vtedy ked' $T(r(x)) = 0$, a teda $T(x) = T(r(x))$ platí pre všetky x, čo hovorí uvedená rekurencia (ona má naviac už len podmienku, aby $T(x) = 0$ pre všetky $x \leq x_0$, avšak to je triviálne splnené aj tu, lebo ak $T(x) \neq 0$, t.j. $T(x) = c$, tak použitím (32), (34), (33) dostávame $x \leq r^m(x) = r^n(x) > x_0$). Ukážme teda, že všetky x platí

$$T(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad T(r(x)) = c$$

„$\Rightarrow$": Ak $T(x) = c$ znamená to, že existuje $n, m \in \mathbb{N}_0$ také, že platí $r^n(s) = r^m(x)$, potom však

$$r^{n+1}(s) = r(r^n(s)) = r(r^m(x)) = r^{m+1}(x) = r^m(r(x))$$

a teda z (34) potom dostávame $T(r(x)) = c$.

„$\Leftarrow$": Ak $T(r(x)) = c$ znamená to, že existuje $\exists n, m \in \mathbb{N}_0$ také, že platí $r^n(s) = r^m(r(x))$, teda $r^n(s) = r^{m+1}(x)$, a z (34) potom máme $T(r(x)) = c$.

Napokon ešte poznamenajme, že pre $n = m = 0$ dostávame, že $T(s) = c$, teda existuje aspoň jeden bod, v ktorom je T nenulové, čo znamená, že takéto riešenie je iné než pred tým zmienené triviálne riešenie, ktorým je funkcia nadobúdajúca iba hodnotu 0. Tým sme ukázali, že (34) neurčuje funkciu T jednoznačne.

$\square$

Je dobré tiež pripomenút', že uvedený príklad netriviálneho riešenia platí aj pre $c = \infty$. Budeme sa totiž zaoberat' množinou rozšírených nezáporných reálnych čísel, teda obsahujúcich aj ∞. Má to svoj praktický dôvod, lebo napr. pri analyzovaní časovej zložitosti algoritmov častokrát ešte vopred nevieme, či taký algoritmus vždy skončí. Hlavne ak by sme nad reálnymi číslami uvažovali metódu „rozdel'uj a panuj", ktorá náhodne rozdelí daný interval na dve časti a potom sa rekurzívne spustí na oboch. Napr. klasický Quick-sort má časovú zložitost'

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{ak } n = 1, \\ n - 1 + T(R_n) + T(n - R_n), & \text{ak } n \in \{2, 3, 4, ..\}, \end{cases} \tag{35}$$

kde $R_n \in \{1, 2, .., n-1\}$ je náhodilé, pričom každú z uvedených hodnôt môže nadobudnút' s rovnakou pravdepodobnost'ou, t.j. s pravdepodobnost'ou $\frac{1}{n-1}$.

Potom pre $t(n) = E(T(n))$ strednú hodnotu náhodnej funkcie T platí, že $t(1) = E(T(1)) = 0$ a pre všetky $n > 1$

$$t(n) = E(T(n)) = E(n - 1 + T(R_n) + T(n - R_n))$$

$$t(n) = E(n-1) + E(T(R_n)) + E(T(n - R_n)))$$

$$t(n) = n - 1 + 2E(T(R_n))$$

$$t(n) = n - 1 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} E(T(i))$$

$$t(n) = n - 1 + \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} t(i)$$

Ako vieme, táto rekurentná rovnica má jednoznačné riešenie, a platí

$$t(n) \in \Theta(n \log n).$$

Ak by sme však (40) rozšírili na reálne čísla, t.j. R_x by bolo rovnomerné náhodné z intervalu $(0, x)$, atď'., tak zrazu pri vhodnom výbere R_x by už bola možná aj udalost', že by sme takýmto postupom nikdy neskončili, teda čas behu programu by bol ∞. Samozrejme, takáto možnost' má nulovú pravdepodobnost', to však ešte nevylučuje, že stredná hodnota nemôže byt' nekonečno. Nie je to totiž jednoznačné, a ani klasická teória pravdepodobnosti sa takýmito prípadmi nezaoberá, ale zaoberá sa len náhodnými premennými, ktoré môžu nadobúdat' len reálne hodnoty. V našom prípade na výpočet strednej hodnoty dostávame rekurentný vzt'a

$$t(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \leq 1 \\ x + \frac{2}{x}\int_0^x t(s)ds, & \text{ak } x > 1 \end{cases} \tag{36}$$

Kde síce existuje aj riešenie z množiny $\Theta(x \log x)$, avšak predsa nie je jediné, lebo funkcia

$$t(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \leq 1 \\ \infty, & \text{ak } x > 1 \end{cases} \tag{37}$$

zrejme tiež spĺňa podmienky (36), ked'že pre $x > 1$ je

$$\int_0^x t(x) = \int_1^x t(x) = (x-1) \cdot \infty = \infty.$$

V nasledovných úvahách ukážeme nejaké nutné a postačujúce podmienky, kedy má rekurencia jedno a kedy viac riešení a tiež ukážeme, že vo všeobecnosti je zaujímavé skôr hl'adat' najmenšie nezáporné riešenie, ktoré je vždy len jedno.

6 Podmienky jednoznačnosti

Majme rekurenciu

$$\forall x \in \mathbb{R} : T(x) = \sum_{(a,r) \in W_x} aT(r) \tag{38}$$

pričom pre všetky $(a, r) \in W_x$, platí $a > 0$, $r < x$ a ak $V_x = \emptyset$, tak hodnotu sumy kladieme rovnú 0.

Definícia 6.1.

Hovoríme, že funkcia $T(x) = 0$ je *triviálne riešenie* rekurencie (38).

Poznámka: Zrejme totiž pre všetky x platí $0 = \sum_{(a,r) \in W_x} a \cdot 0$, teda triviálne riešenie je vždy riešením. Problém je, že toto riešenie nemusí byť jediné.

Definícia 6.2.

Hovoríme, že hodnota v bode x *priamo závisí* od hodnoty v bode r práve vtedy, ak existuje $a > 0$ také, že $(a, r) \in W_x$.

Poznámka: Nech

$$B = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad W_x = \emptyset\} \tag{39}$$

t.j. B je množina tých prvkov, ktoré sú priamo definované ako nulové. Na tejto množine je teda hodnota T určená jednoznačne. Taktiež je zrejmé, že hodnota v bode x je definovaná jednoznačne práve vtedy, ak priamo závisí len od hodnôt, ktoré sú tiež určené jednoznačne. Napohľad by sa teda mohlo zdať, že stačí vytvoriť postupnosť množín $B_1, B_2, B_3, B_4, ...$, kde $B_1 = B$ a pre všetky $i > 1$ množina B_i obsahuje práve tie body, v ktorých hodnota funkcie T priamo závisí len od hodnôt z predošlých množín uvedenej postupnosti. A napokon by sme urobili zjednotenie týchto množín a výsledkom by bola množina práve tých bodov, v ktorých je hodnota určená jednoznačne. To však nemusí byť pravda, lebo hoci jednoznačnosť bude aj na tomto zjednotení, predsa však to nevylučuje jednoznačnosť mimo nej. Napr. keby sme mali vzťahy:

$T(0) = 0$
$T(1 - \frac{1}{n+1}) = T(1 - \frac{1}{n})$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$
$T(1) = \sum_{n=1}^{\infty} T(1 - \frac{1}{n})$

Vtedy by bolo $B_n = \{1 - \frac{1}{n}\}$ a teda prvok 1 sa nenachádza nikde v postupnosti $B_1, B_2, ...$, predsa je však zrejmé, že hodnota v bode 1 je tiež určená jednoznačne, keďže je len súčtom jednoznačne určených hodnôt. Takýto spôsob indukcie z dola nahor nám teda nepomôže k nájdeniu nutnej podmienky jednoznačnosti. Dá sa to však docieliť pri opačom smere.

Veta 6.1.

Rekurencia (38) má jediné riešenie práve vtedy, ak nejestvuje klesajúca nekonečná postupnosť $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ taká, že x_i priamo závisí od x_{i+1}.

Dôkaz vety 6.1.

Dokážme obmenu vety, t.j. že rekurencia má viac riešení vtedy a len vtedy ak existuje nekonečná postupnosť $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ v ktorej x_i priamo závisí od x_{i+1}.

„$\Leftarrow$": Predpokladajme, že rekurentná relácia (38) má aj nejaké netriviálne riešenie T, t.j. také, ktoré nadobúda aj nenulové hodnoty. Nech x_1 je ľubovoľný taký prvok. Keďže však $0 \neq T(x_1) = \sum_{(a,r)\in W_{x_1}} aT(r)$ tak musí existovať aj nejaké $(a, x_2) \in W_{x_1}$ také, že $T(x_2) \neq 0$, lebo keby pre všetky $(a, x_2) \in W_{x_1}$ bolo $T(x_2) = 0$, potom aj $aT(x_2) = 0$ a teda aj celá suma by bola 0, čo je spor s tým, že je nenulová. Analogicky z toho, že $T(x_2) \neq 0$ vyplýva, že existuje aj nejaké nenulové $T(x_3)$ od ktorého závisí hodnota $T(x_2)$, a všeobecne, z toho, že existuje nejaké $T(x_i) \neq 0$ vyplýva, že existuje aj nejaké $a_{i+1}, x_{i+1} \in W_{x_i}$ také, že $T(x_{i+1}) \neq 0$.

„$\Rightarrow$": Predpokladajme, že existuje taká nekonečná postupnosť. Z toho vyplýva neprázdnosť množiny B definovanej ako množina všetkých prvkov x takých, že existuje nekonečná postupnosť $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, pričom $x_1 = x$ a pre všetky $i \in \mathbb{N}$ x_i priamo závisí od x_{i+1}, t.j. že existuje $a_{i+1} > 0$ také, že $a_{i+1}, x_{i+1} \in W_{x_i}$. Potom funkcia

$$T(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ak } x \in B, \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R}\backslash B, \end{cases} \tag{40}$$

je netriviálnym riešením rekurencie (38). To, že je netriviálne vyplýva z toho, že $B \neq \emptyset$. Ukážme, že je aj riešením uvedenej rekurencie. Ak $x \in B$, to znamená, že existuje nekonečná postupnosť $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ taká, že hodnota v bode x_i priamo závisí od hodnoty v bode x_{i+1} pre všetky $i \in \mathbb{N}$, pričom $x_1 = x$. Ak si však definujeme $x'_i = x_{i+1}$ potom postupnosť $(x'_i)_{i=1}^{\infty}$ má tiež vlsatnosť, že x_i priamo závisí od hodnoty v bode x_{i+1} pre všetky $i \in \mathbb{N}$. Teda aj $x_2 \in B$. A naopak, ak hodnota v bode x priamo závisí od hodnoty v nejakom bode x' takom, že $x' \in B$, t.j. že existuje $(x'_i)_{i=1}^{\infty}$, kde pre každé i hodnota v x_i priamo závisí od hodnoty v x_{i+1}, potom použitím substitúcie $x_i = x'_{i+1}$ a $x_1 = x$ dostávame postupnosť $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ opäť s uvedenou vlastnosťou, čo znamená, že $x \in B$. Platí teda, že $x \in B$ vtedy a len vtedy ak existuje nejaké $(a', x') \in W_x$ také, že $x' \in B$. Patričnosť do B však máme indikovanú funkciou T. Naozaj teda platí

$$T(x) = \sum_{(a,r)\in W_x} aT(r)$$

lebo ak je ľavá strana 0 znamená to, že $x \notin B$, potom však aj pre všetky $(a, r) \in W_x$ platí $T(r) = 0$, a keďže súčet núl je nula, tak aj celá pravá strana rovnice je 0. Podobne ak ľavá strana je ∞ znamená to, že $x \in B$ a teda existuje nejaké $(a', x') \in W_x$ také, že $T(x') = \infty$ teda aj $a'T(x') = \infty$ a keďže súčet nezáporných prvkov s nekonečnom je nekonečno, tak aj celá pravá strana je ∞.

7 Najmenšie nezáporné riešenie

Uvažujme trochu všeobecnejší typ rekurencie než (38), keď do relácie pridáme aj nejakú inú funkciu. Taktiež podmienku $r < x$ zmeňme na $r \leq x$. Teda rekurencia nadobúda tvar

$$\forall x \in \mathbb{R} : \tau(x) = \tau(x) + \sum_{(a,r)\in W_x} a\tau(r) \tag{41}$$

pričom pre všetky $(a, r) \in W_x$, platí $a > 0$, $r \leq x$. Ďalej si môžme definovať notáciu, že výrazy typu $\sum_{(a,r)\in W_x} a\tau(r)$ môžme zapísať ako $A\tau(x)$, resp. $A_x\tau$, kde operátor A transformuje funkciu τ na funkciu $A\tau$, pričom základná vlastnosť tejto transformácie je jej linearita, t.j. pre každú postupnosť nezáporných funkcií $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ a nezáporných reálnych konštánt $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ platí

$$A_x(c_1\alpha_1 + c_1\alpha_1 + c_1\alpha_1 + ...) = c_1A_x\alpha_1 + c_2A_x\alpha_2 + c_3A_x\alpha_3 + ...$$

V predošlej kapitole sme ukázali, že rekurencie môžu mat' aj viac riešení. Teraz ukážeme, akým spôsobom je možné nájst' najmenšie nezáporné riešenie a tiež dokázat' jeho existenciu.

Chceme, aby platilo

$$\tau = \varphi + A\tau.$$

Riešenie budeme hl'adat' pomocou iterácie.
Nech

$$\tau_0 = 0$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ nech

$$\tau_n = \varphi + A\tau_{n-1}$$

Lema 7.1. *Pre všetky* $n \in \mathbb{N}_0$ *platí*

$$\tau_n = A^0\varphi + A^1\varphi + A^2\varphi + ...A^{n-1}\varphi$$

Dôkaz matematickou indukciou:
1. pre $n = 0$ to platí priamo z definície τ_0
2. ak pre nejaké n platí uvedená rovnost', potom

$$\tau_{n+1} = \varphi + A\tau_n = \varphi + A(A^0\varphi + A^1\varphi + A^2\varphi + ...A^{n-1}\varphi)$$

$$\tau_{n+1} = \varphi + A\varphi + A^2\varphi + A^3\varphi + ...A^n\varphi$$

□

Lema 7.2.

Ak γ je nejaké nezáporné riešenie rekurencie $\gamma = \varphi + A\gamma$, potom pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\tau_n \leq \gamma$$

Dôkaz matematickou indukciou:
1. pre $n = 0$ máme $\tau_0 = 0$, a ked'že γ je nezáporné, tak naozaj $\tau_n \leq \gamma$
2. ak pre nejaké n platí $\tau_n \leq \gamma$, potom

$$\tau_{n+1} = \varphi + A\tau_n \leq \varphi + A\gamma = \gamma$$

□

Veta 7.1.

Funkcia
$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \tau_n = A^0\varphi + A^1\varphi + A^2\varphi + ...$$
je najmenšie nezáporné riešenie rovnice

$$\tau = \varphi + A\tau$$

.

Dôkaz Ľahko sa presvedčíme o tom, že uvedená funkcia je riešením danej rekurencie. Stačí dosadiť do pravej strany a ukážeme, že je rovná ľavej strane. Teda

$$\varphi + A\tau = \varphi + A(\varphi + A\varphi + A^2\varphi + ...) = \varphi + A\varphi + A^2\varphi + A^3\varphi + ... = \tau$$

Ďalej ukážme, že toto riešenie je spomedzi všetkých nezáporných riešení najmenšie. Sporom predpokladajme, že existuje nejaké nezáporné riešenie γ také, že pre nejaké x platí $\tau(x) > \gamma(x)$. Podľa lemy 7.2 však pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\tau_n(x) \leq \gamma(x)$, teda najmenšie horné ohraničenie $\tau_n(x)$ pre $n \to \infty$ nemôže byť väčšie než $\gamma(x)$. Avšak tým ohraničením je $\tau(x)$, teda $\tau(x) \leq \gamma(x)$, čo je spor s tým, že $\tau(x) > \gamma(x)$.

$\square$

Poznámka:

Pokiaľ by sme teda hľadali odhad pre takéto iterácie, tam už triviálne platí domnienka 5.2, a teda aj aj tvrdenie 5.1 Bazzi-Mittera bude platiť, samozrejme s tou dodatočnou podmienkou pre $p = 0$, o ktorej sme ukázali, že nie je zbytočná.

8 Záver

V tejto práci sme ukázali najznámejšie metódy asymptotických odhadov rekurencií typu „rozdeľuj a panuj“, porovnávajúc ich výhody a nevýhody oproti ostatným metódam a uviedli sme problémy, na ktoré tieto metódy narážajú. Zanalyzovali sme tiež viaceré extrémne prípady v týchto metódach, kedy už neplatia, pričom sme tiež uviedli niekoľko kontrapríkladov k rôznych tvrdeniam, s ktorými sa možno bežne stretnúť. Tým sme vyriešili niekoľko drobných otvorených problémov, hlavne ten, či nie je zbytočná dodatočná podmienka v Bazzi-Mitterovej metóde, o čom sme ukázali, že nie je. Dôkladne sme poukázali hlavne na problém viacznačnosti, s ktorým sa ľahko možno stretnúť hlavne keby sme definičný obor rekurencií ľubovoľne rozšírili na reálne čísla. Zároveň sme vysvetlili spôsob, ako aj v takýchto prípadoch je stále možné hľadať nejaké kánonické riešenie, ktoré je vždy len jedno a ktoré možno vyrátať ako limitu postupných aproximácií. To umožňuje matematickou indukciou robiť odhady riešenia rekurencie, keďže stačí dokázať neostrý pre všetky iterácie a potom bude platiť aj pre limitu.

9 Literatúra

Referencie

[1] Aho, A. V., Hopcroft, J. E., Ullman, J. D., *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, 1974

[2] Akra, M., Bazzi, L., *On the Solution of Linear Recurrence Equations*, Computational Optimization and Applications, 1998. `http://www.springerlink.com/content/u3g231k87g41m491`

[3] Bazzi, L., Miiter, S., *The Solution of Linear Probabilistic Recurrence Relations*, Algorithmica, 2003. `www.mit.edu/~mitter/publications/solutionoflinearprob.pdf`

[4] Bentley, J. L., Haken, D., Saxe, J. B., *A general method for solving divide-and-conquer recurrences*, SIGACT News, 12(3):6-44, 1980. `http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1008861.1008865`

[5] Cormen, T. T., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C., *Introduction to algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, 1990. Second edition, 2001 `http://books.google.com/books?id=NLngYyWFl_YC`

[6] Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, 1968. Second edition, 1973.

[7] Leighton, T.: *Notes on Better Master Theorems for Divide-and-Conquer Recurrences*, Massachusetts Institute of Technology, 1996. `courses.csail.mit.edu/6.046/spring04/handouts/akrabazzi.pdf`

[8] Leighton, T., Dijk, M., Cowan, B., *Recurrences I*, Massachusetts Institute of Technology, 2008 `courses.csail.mit.edu/6.042/fall08/lec14.pdf`

[9] Liu, C. L., *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, 1968.

[10] Purdom, P. W., Jr., Brown, C. A., *The Analysis of Algorithms*. Holt, Rinehart, and Winston, 1985.

[11] Roura, S., *Improved master theorems for divide-and-conquer recurrences*, Journal of the ACM (JACM), 2001. http://portal.acm.org/citation.cfm?id=375837

[12] Verma, R. M., *A general method and a master theorem for divide-and-conquer recurrences with applications*, Journal of Algorithms, 1994. http://portal.acm.org/citation.cfm?id=249377