



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

CYKlickÁ HRANOVÁ SÚVISLOSŤ KUBICKÝCH GRAFOV

(Bakalárska práca)

RUDOLF STAROVSKÝ

Vedúci: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava, 2008

Cyklická hranová súvislosť kubických grafov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Rudolf Starovský

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

Študijný odbor: 9.2.1 Informatika

Vedúci bakalárskej práce
RNDr. Edita Máčajová, PhD.

BRATISLAVA 2008

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu
vypracoval samostatne s použitím citovaných zdro-
jov.

.....

PodĎakovanie

Ďakujem mojej školiteľke RNDr. Edite Máčajovej, PhD.
za konzultácie a cenné rady, za výber témy a poskytnutie
literatúry.

Abstrakt

Autor: Rudolf Starovský

Názov práce: Cyklická hranová súvislosť kubických grafov

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra informatiky

Vedúci: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava 2008

V tejto práci sa venujem cyklickej hranovej súvislosti kubických grafov. Popisujem jej význam a prepojenie medzi niektorými otvorenými problémami z teórie grafov. Venujem sa aj algoritmu od Dvořáka, Káru, Kráľa a Pangráca na počítanie cyklickej hranovej súvislosti a jeho implementácii. Ako prílohu prikladám program na počítanie cyklickej hranovej súvislosti kubických grafov.

Kľúčové slová: cyklická hranová súvislosť, cyklický hranový rez, snarky

Predhovor

Za tému mojej bakalárskej práce som si vybral cyklickú hranovú súvislosť kubických grafov. I keď cyklická súvislosť sa nezaraduje k základom teórie grafov, pri štúdiu rôznych článkov ma zaujalo jej prepojenie s ďalšími známymi otvorenými problémami z teórie grafov, ktorému sa v tejto bakalárskej práci aj venujem.

Okrem zhrnutia základných poznatkov o cyklickej hranovej súvislosti a prepojenia s ďalšími oblasťami teórie grafov, som naprogramoval aj program na počítanie cyklickej hranovej súvislosti kubických grafov, ktorého časová zložitosť je $O(n^3 \log n)$. Tento program prikladám ako súčasť bakalárskej práce.

Obsah

1	Úvod	10
1.1	Cieľ práce	11
2	Význam a použitie cyklickej hranovej súvislosti	12
2.1	Snarky	13
2.2	Hypohamiltonovské grafy	17
2.3	Hypotéza o 5-toku	19
2.4	Fulerény	20
2.5	Dvojité pokrytie cyklami	22
3	Algoritmus na výpočet cyklickej hranovej súvislosti kubic- kých grafov	25
3.1	Základné vlastnosti	25
3.2	Dôkaz správnosti algoritmu a odhad zložitosti	28
3.3	Implementácia algoritmu	29
3.4	Testovanie	33
4	Záver	35

Zoznam obrázkov

2.1	Petersenov graf	13
2.2	Graf činka	15
2.3	Isaacsov snark I_5	18
2.4	Dvojitá hviezda	19
2.5	Pentakap	22

Kapitola 1

Úvod

Cyklickou súvislosťou ako parametrom grafu sa už v roku 1880 začal zaoberať Tait. Uvediem základné definície týkajúce sa cyklickej hranovej súvislosti tak, ako sú uvedené v [2].

Cyklický hranový rez grafu G je taký hranový rez, ktorého odstránením, aspoň dva z vytvorených komponentov G budú obsahovať cyklus. Ak G nie je súvislý a aspoň dva jeho komponenty obsahujú cyklus, potom prázdna množina hrán tvorí cyklický hranový rez.

Cyklická hranová súvislosť grafu G je mohutnosť najmenšieho cyklického hranového rezu. Ak G je súvislý, potom každý najmenší cyklický hranový rez, rozdelí G na práve dva komponenty.

Niektoré grafy vôbec neobsahujú cyklický hranový rez, napríklad: K_4 , K_5 , $K_{3,3}$ a W_n .

1.1 Cieľ práce

V tejto práci sa budem zaoberať cyklickou hranovou súvislosťou a jej významom v niektorých oblastiach teórie grafov. Uvediem ju v súvislosti so snarkami, pri ich dekompozícii a redukcii a v ďalšej časti aj v súvislosti so snarkami, ktoré sú hypohamiltonovské. Ďalej sa budem zaoberať Tuttovou hypotézou o 5-toku, pri ktorej sa cyklická hranová súvislosť udáva ako požiadavka na graf, ktorý by tvoril prípadný najmenší protipríklad. Potom rozoberiem využitie cyklickej hranovej súvislosti pri fullerénoch, grafoch, ktoré predstavujú uhlíkové molekuly. Všimnem si vplyv cyklickej hranovej súvislosti na ich štruktúru a za akých podmienok sú hamiltonovské. Napokon sa budem venovať problému dvojitého pokrytia grafu cyklami.

V ďalšej kapitole popíšem algoritmus od Dvořáka, Káru, Kráľa a Pangráca, ktorý v zložitosti $O(n^3 \log n)$ nájde cyklický hranový rez kubického grafu, ktorý dostane na vstupe a ako prílohu prikladám program na počítanie cyklickej hranovej súvislosti kubických grafov.

Kapitola 2

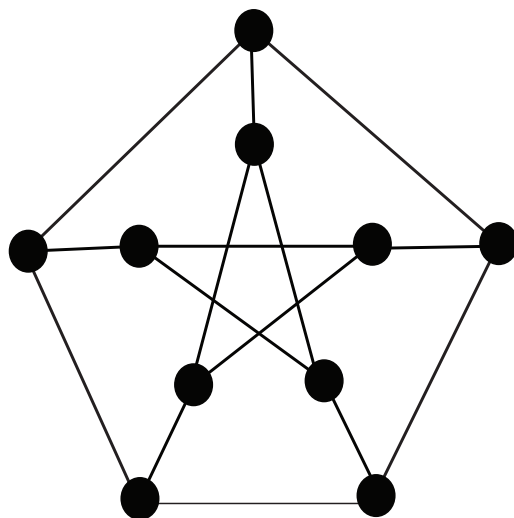
Význam a použitie cyklickej hranovej súvislosti

V tejto kapitole sa budem venovať problémom, pri ktorých sa cyklická hranová súvislosť ukázala byť podstatným parametrom. Najskôr sa budem zaoberať jej vplyvom na snarky a grafy, ktoré nie sú 3-zafarbiteľné a tým ako súvisí s ich ireducibilitou, nerozložiteľnosťou a jednoduchosťou. Potom si všimnem prepojenie medzi cyklickou súvislosťou a hypohamiltonovskými grafmi. Najmenší protipríklad k Tuttovej hypotéze o 5-toku rovnako musí spĺňať určité požiadavky na cyklickú hranovú súvislosť. Cyklická hranová súvislosť sa tiež využíva i na postačujúcu podmienku na existenciu hamiltonovskej kružnice vo fullerénoch, čo tvorí príspevok k potvrdeniu Barnettovej hypotézy. V krátkosti opíšem aj dvojité pokrytie cyklami, uvediem niektoré hypotézy a súvis s cyklickou hranovou súvislosťou.

2.1 Snarky

Netriviálne kubické grafy, ktorých hrany sa nedajú zafarbiť tromi farbami, sa skúmajú už viac ako sto rokov. Pôvodný zámer pre ich štúdium bolo pozorovanie P. G. Taita, že veta o štyroch farbách je ekvivalentná tvrdeniu, že každý bezmostový planárny kubický graf je hranovo 3-zafarbiteľný.

Pretože veta o štyroch farbách je pravdivá, neexistuje netriviálny pla-



Obr. 2.1: Petersenov graf

nárny kubický graf, ktorý by nebol hranovo 3-zafarbiteľný. Napriek tomu neplanárne grafy, ktoré nie sú 3-zafarbiteľné (napr. Petersenov graf - obr. 2.1) bolo veľmi náročné nájsť. V skutočnosti, v roku 1975, keď Isaacs skonštruoval dve nekonečné triedy týchto grafov, boli známe len štyri takéto grafy. To inšpirovalo Martina Gardnera, aby navrhol názov pre netriviálne kubické

grafy, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné. Nazval ich "snarky", odvodením z názvu balady od Lewisa Carolla "Hunting of the snarks" - poľovanie na snarky.

Slovo *netriviálne* však autori často chápu rôzne. V každom prípade však znamená, že graf nesmie obsahovať most. Ďalej "triviálny" môže znamenať aj to, že graf vznikne jednoduchou zmenou iného snarku. Zvyklo sa považovať za triviálny každý snark s vlastnosťou, že obsahuje kružnicu dĺžky 2 alebo 3, pretože ak nebol graf hranovo 3-zafarbiteľný, nestane sa ním ani po pridaní alebo odobratí tohto podgrafu. Podobne aj kružnica dĺžky 4 v snarku môže byť nahradená dvomi "rovnobežnými" hranami a vznikne potom menší snark. Preto snark by mal mať obvod aspoň 5.

Taktiež sa stalo štandardom vylúčiť snarky, ktoré obsahujú cyklický hranový rez pozostávajúci z dvoch alebo troch hrán. Ľahko sa dá vidieť, že po odstránení hrán tvoriacich rez zo snarku, dostaneme dva menšie grafy, z ktorých po pridaní malého počtu vrcholov alebo hrán, aspoň jeden je snark. Týmto spôsobom sa snarky s malými cyklickými hranovými rezmi tiež stali "triviálnymi" modifikáciami tých s menším počtom vrcholov. Preto snark by mal byť cyklicky hranovo 4-súvislý.

Z týchto dôvodov budem v tejto práci pod pojmom *snark* rozumieť taký kubický graf, ktorý nie je 3-zafarbiteľný, má obvod aspoň 5 a je cyklicky hranovo 4-súvislý.

Teraz sa budem zaoberať kubickými grafmi, ktoré nie sú 3-zafarbiteľné. Tieto grafy teda tvoria nadmnožinu snarkov. V ďalšom budem pod pojmom *nezafarbiteľný* myslieť túto množinu grafov. Nech G je niektorý taký graf. Existujú ďalšie dva typy operácií, pomocou ktorých môžeme graf G zjednodu-

šiť, tak že vznikne z neho jeden alebo dva menšie grafy, ktoré sú nezafarbiteľné a budú mať hlavné črty pôvodného grafu G . Prvý typ začína s grafom G , identifikuje v ňom nezafarbiteľnú časť, odstráni jej doplnok v grafe a k tomu, čo zostalo "prilepí" malý podgraf, tak aby výsledný graf bol kubický. Výsledný graf bude redukciou G . Druhý typ operácie rozdelí G na dva podgrafy, pridá malý počet vrcholov a hrán ku každému. Vzniknú tak dva grafy G_1, G_2 , každý s menším počtom vrcholov ako G . Dvojica $\{G_1, G_2\}$ sa nazýva dekompozícia G . Uvediem formálne definície spomenutých typov operácií.

Nech $G = M * N$ je nezafarbiteľný graf, ktorý je spojením dvoch k -pólov M a N ($k \geq 0$). Ak jeden z nich, povedzme M , je nezafarbiteľný, potom M môže byť rozšírený na nezafarbiteľný $\tilde{M} \supseteq M$ rádu $|\tilde{M}| \leq |G|$. Graf \tilde{M} sa nazýva k -redukcia grafu G .



Obr. 2.2: Graf činka

Nech M a N sú oba buď zafarbiteľné, alebo nezafarbiteľné. Potom zjavne každý z nich môže byť rozšírený na nezafarbiteľný graf \tilde{M} resp. \tilde{N} . Pretože G je nezafarbiteľný, môžeme použiť také \tilde{M} a \tilde{N} , že $|\tilde{M}| \leq |G|$ a $|\tilde{N}| \leq |G|$. Dvojica $\{\tilde{M}, \tilde{N}\}$, ktorá takto vznikne, sa bude nazývať k -dekompozícia grafu G . Budeme sa sústrediť na nezafarbiteľné grafy, ktoré sú k -ireducibilné, k -nerozložiteľné, resp. k -jednoduché, teda také, ktoré pre $m < k$ nemajú vlastnú m -redukciu, vlastnú m -dekompozíciu, resp. ani vlastnú m -redukciu,

ani vlastnú m -dekompozíciu. Pre viac informácií pozri [7].

Medzi týmito vlastnosťami a cyklickou súvislosťou platia vzťahy, ktoré opisujú nasledujúce vety. Jednotlivé dôkazy uviedli Nedela a Škoviera a možno ich nájsť v [7].

Veta 2.1.1 *Nech G je kubický graf, ktorý nie je 3-zafarbiteľný. Potom*

(a) *Ak $1 \leq k \leq 4$, potom G je k -ireducibilný práve vtedy, keď je cyklicky hranovo k -súvislý alebo graf činka (obr. 2.2).*

(b) *Ak $5 \leq k \leq 6$, potom G je k -ireducibilný práve vtedy, keď je kritický*

(c) *Ak $k \geq 7$, potom G je k -ireducibilný práve vtedy, keď je bikritický*

Táto veta charakterizovala k -ireducibilné nezafarbiteľné grafy pre každé $k \geq 1$ z hľadiska kritickosti. Nasledujúce vety charakterizujú k -jednoduché snarky ak $k \leq 5$.

Veta 2.1.2 *Nech G je kubický graf, ktorý nie je 3-zafarbiteľný, rôzny od grafu činka (obr. 2.2) a nech $1 \leq k \leq 4$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(a) *G je k -jednoduchý.*

(b) *G je k -ireducibilný.*

(c) *G je cyklicky hranovo k -súvislý.*

Veta 2.1.3 *Nech G je kubický graf, ktorý nie je 3-zafarbiteľný, rôzny od grafu činka (obr. 2.2). Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(a) *G je 5-jednoduchý.*

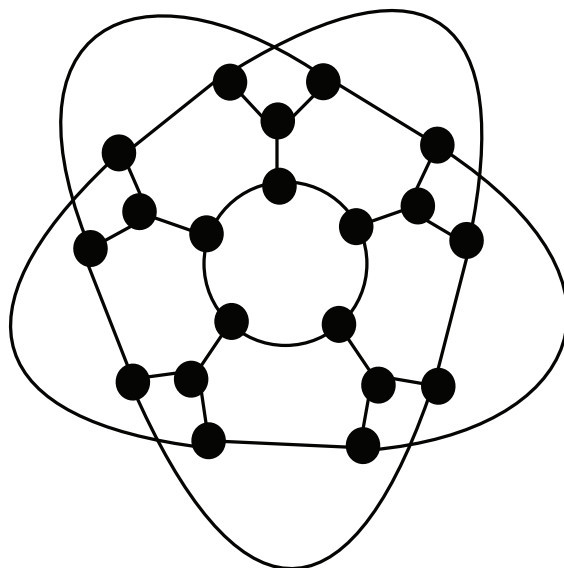
(b) *G je 5-nerozložiteľný.*

(c) *G je cyklicky hranovo 5-súvislý a kritický.*

2.2 Hypohamiltonovské grafy

Rozhodnúť o tom, či graf obsahuje hamiltonovskú kružnicu je NP-úplný problém aj v triede kubických grafov. Preto má význam skúmať také kubické grafy, ktoré sú hypohamiltonovské. Hypohamiltonovským grafom sa nazýva taký graf, ktorý neobsahuje hamiltonovskú kružnicu, ale odstránením ľubovoľného vrchola, ju bude už obsahovať. Keďže každý hamiltonovský graf musí byť 2-súvislý, pretože všetky jeho vrcholy ležia na hamiltonovskej kružnici, musí byť hypohamiltonovský graf 3-súvislý a stupeň každého vrchola musí byť aspoň 3. Pretože hamiltonovské grafy sú 3-zafarbiteľné (hrany ležiace na hamiltonovskej kružnici zafarbíme striedavo dvomi farbami a zvyšné hrany treťou), je prirodzené zaoberať sa takými kubickými grafmi, ktorých chromatický index je 4. Netriviálne príklady týchto grafov sú snarky. Najmenším hypohamiltonovským snarkom je Petersenov graf (obr. 2.1). V roku 1977 Gutt objavil triedu hypohamiltonovských snarkov, ktorá obsahuje aj Isaacsove snarky. Fiorini v roku 1983 dokázal, že Isaacsove snarky I_k rádu $4k$ sú hypohamiltonovské pre každé nepárne $k \geq 5$. To, že medzi hypohamiltonovské snarky, ktoré objavil Gutt, patria aj Isaacsove snarky, sa zistilo až neskôr. Steffen dokázal, že existujú hypohamiltonovské snarky každého párneho rádu väčšieho ako 90 (uvedené v [9]).

Stephen taktiež dokázal, že každý hypohamiltonovský kubický graf s chromatickým indexom 4 je bikritický. To znamená, že ak odstránime dva ľubovoľné vrcholy stane sa graf 3-zafarbiteľný. Naviac Škoviera a Nedela dokázali, že každý bikritický kubický graf je cyklicky hranovo 4-súvislý a má obvod aspoň. Preto každý hypohamiltonovský kubický graf s chromatickým indexom 4 má obvod aspoň 5 a cyklickú hranovú súvislosť aspoň 4, a teda

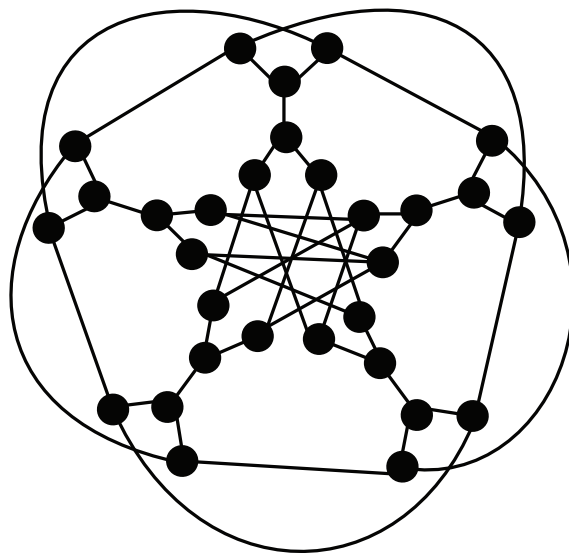


Obr. 2.3: Isaacsov snark I_5

je snarkom. Odstránenie jedného vrchola z grafu, ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný, nemôže zapríčiniť, že sa graf stane hranovo 3-zafarbiteľným. Hypohamiltonovské snarky ležia teda na hranici kubických grafov, ktoré sú hranovo 3-zafarbiteľné, a ktoré nie sú.

Podľa cyklickej hranovej súvislosti môžeme známe hypohamiltonovské snarky zaradiť takto. Snarky, ktoré skonštruoval Steffen v [9] majú cyklickú hranovú súvislosť 4. Sú známe 3 sporadické hypohamiltonovské snarky, ktoré majú cyklickú hranovú súvislosť 5: Petersenov graf (obr. 2.1), Isaacsov snark I_5 (obr. 2.3) a snark dvojitá hviezda (obr. 2.4). Isaacsove snarky I_k , kde $k \geq 7$ majú cyklickú hranovú súvislosť 6.

Mačajová a Škoviera uviedli metódu založenú na superpozícii, pomocou ktorej sa dá ukázať existencia hypohamiltonovského snarku pre ľubovoľné



Obr. 2.4: Dvojitá hviezda

dostatočne veľké párne číslo s cyklickou súvislosťou 5 a 6. Jemnou modifikáciou tejto metódy sa dá skonštruovať snark s cyklickou súvislosťou 4. Pre viac informácií pozri [6].

2.3 Hypotéza o 5-toku

Nech je daný graf G a nech D je jeho orientácia. Graf G pripúšťa nikde nulový k -tok ($k \geq 2$), ak k jeho orientovaným hranám sa dajú priradiť čísla $\pm 1, \dots, \pm (k - 1)$, tak, že pre každý vrchol bude platiť, že suma hodnôt na prichádzajúcich hranách sa rovná sume hodnôt na odchádzajúcich hranách. Graf s mostom nemá nikde-nulový k -tok pre žiadne $k \geq 2$. Hypotéza o 5-toku, ktorú vyslovil Tutte, hovorí že každý graf, ktorý nemá most, má nikde-nulový

5-tok. Uvediem niektoré výsledky, ktoré určujú požiadavky na najmenší protipríklad a využívajú pritom cyklickú hranovú súvislosť.

Je známe, že najmenší protipríklad k tejto hypotéze musí byť snark. Celmins dokázal, že tento protipríklad musí byť cyklicky hranovo 5-súvislý a jeho obvod musí byť aspoň 7. Kocholovi sa podarilo ukázať, že graf, ktorý by slúžil ako najmenší protipríklad k Tuttovej hypotéze by bol cyklicky hranovo 6-súvislý a jeho obvod by bol najmenej 9. Pretože všetky doteraz známe cyklicky hranovo 6-súvislé snarky majú obvod 6, tento protipríklad patrí do takej triedy grafov, o ktorej nevieme, či nie je prázdna.

Predtým Tutte a Jager a Swart vyslovili hypotézu, podľa ktorej všetky snarky majú obvod najviac 6. Kocholovi sa ju však podarilo vyvrátiť, tým že sa mu podarilo zostrojiť cyklicky hranovo 4- a 5-súvislé snarky s ľubovoľne veľkým obvodom. Ďalšie informácie možno nájsť v [4].

2.4 Fulerény

Fulerén je 3-súvislý planárny kubický graf, ktorého oblasti sú päť- a šesť-uholníky. Fulerény, teda nemusia byť nutne kubické grafy, platia však pri nich zaujímavé vlastnosti, týkajúce sa cyklickej hranovej súvislosti. Podľa Eulerovej formuly je počet päťuholníkov 12. Z chemického hľadiska, fulerény predstavujú uhlíkové molekuly v tvare sféry.

Cyklická hranová súvislosť zohrala dôležitú úlohu pri získavaní niektorých štruktúrálnych vlastností fulerénov, ako sú bikritickosť a 2-rozšíriteľnosť, z ktorých ďalej vyplýva určité zníženie počtu perfektných párení vo fulerénoch. Počet perfektných párení je taktiež indikátorom stability fulerénu.

Cyklická hranová súvislosť vo fullerénoch nemôže prekročiť 5, pretože odstránením piatich hrán spojených s päťuholníkovou oblasťou, vzniknú dve časti, ktoré obsahujú cyklus. Ďalšie informácie možno nájsť v [5].

Nasledujúce vety hovoria o vlastnostiach a štruktúre fullerénov. Ich dôkaz je rovnako uvedený v [5].

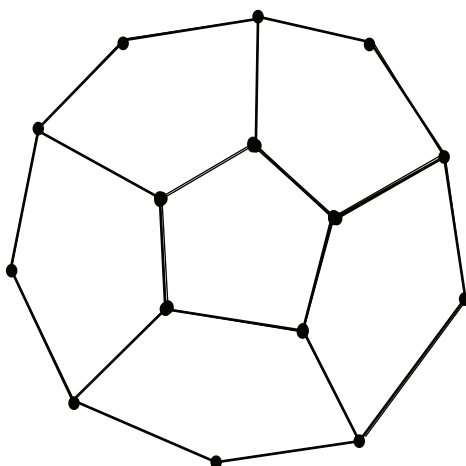
Veta 2.4.1 *Nech F je fullerén obsahujúci prstenec R , ktorý pozostáva z piatich oblastí a nech C a C' je vnútorná a vonkajšia kružnica prstenca R . Potom, buď*

- i) C alebo C' je oblasťou, alebo*
- ii) aj C aj C' majú dĺžku 10 a päť oblastí, ktoré tvoria R sú všetky šesťuholníky*

Cyklický hranový k -rez sa nazýva *triviálny*, ak aspoň jeden z výsledných komponentov je jednoduchý k -cyklus. Pentakapom (obr. 2.5) nazveme 6 päťuholníkových oblastí, z ktorých je jedna v strede a zvyšné tvoria jej (všetky) susedné oblasti.

Veta 2.4.2 *Nech F je fullerén obsahujúci netriviálny cyklický hranový 5-rez. Potom F obsahuje pentakap, presnejšie, buď F je dodekahedrón, alebo obsahuje dva disjunktné protiľahlé pentakapy.*

Existencia hamiltonovskej kružnice vo fullerénoch je tiež otvoreným problémom. Je to špeciálny prípad Barnettovej hypotézy, podľa ktorej každý 3-súvislý planárny graf, ktorého najväčšie oblasti sú šesťuholníky, obsahuje hamiltonovskú kružnicu. Ďalšia veta uvádza postačujúcu podmienku, aby fullerén obsahoval hamiltonovskú kružnicu.



Obr. 2.5: Pentakap

Veta 2.4.3 *Nech F je fullerén obsahujúci netriviálny cyklický hranový 5-rez. Potom F obsahuje Hamiltonovskú kružnicu. Navyiac*

i) ak počet šesťuholníkových oblastí je nepárny, potom existuje cesta, pozostávajúca z oblastí, ktorá obsahuje presne 2 päťuholníky z každého z dvoch pentakapov v F a hranice tejto cesty tvoria hamiltonovskú kružnicu v F ; a

ii) ak počet šesťuholníkových oblastí je párny potom existuje cesta, pozostávajúca z oblastí, ktorá obsahuje presne 6 päťuholníkov, z ktorého dva sú z prvého pentakapu a 4 sú z druhého pentakapu, a hranice tejto cesty tvoria hamiltonovskú kružnicu v F .

2.5 Dvojité pokrytie cyklami

Tento názov pochádza z anglického výrazu cycle double cover, ktorý budem ďalej používať. Termínom *k-cycle double cover* grafu G (*k-CDC*) sa označuje

množina L , ktorá obsahuje najviac k cyklov v G , takých, že každá hrana G je pokrytá práve dvomi cyklami z L .

Nech H je cyklus v kubickom grafe G . Komponent podgrafu H sa bude označovať *nepárny*, ak je to kružnica nepárnej dĺžky. Cyklus sa bude nazývať *pokrývajúci*, ak obsahuje rovnakú množinu vrcholov ako graf G . Ak G je bezmostový graf, potom minimálny počet nepárnych komponentov pokrývajúceho cyklu G sa bude nazývať *nepárnosť* grafu G a bude sa označovať $\xi(G)$. Pretože počet vrcholov kubického grafu je vždy párny, aj nepárnosť grafu bude vždy párna. Ak G obsahuje most, potom $\xi(G) = \infty$.

Seymour a Szekeres vyslovili hypotézu, že pre každý bezmostový graf, existuje nejaké k , pre ktoré má tento graf k -CDC. Celmins vyslovil silnejšiu hypotézu, že ľubovoľný bezmostový graf má 5-CDC. Tieto hypotézy sa označujú ako CDC, resp. 5-CDC. Bolo overené, že CDC platí pre grafy, ktoré neobsahujú subdivíziu Petersenovho grafu [1].

Podľa známej konštrukcie stačí overiť CDC a 5-CDC pre kubické grafy. Nižšie sú uvedené niektoré čiastkové výsledky v tejto oblasti. Dôkazy a ďalšie informácie z tejto oblasti sú uvedené v [3].

Veta 2.5.1 *Nech G je bezmostový kubický graf s nepárnosťou najviac 2. Potom G má 5-CDC.*

Veta 2.5.2 *Každý bezmostový graf s hamiltonovskou cestou má 5-CDC.*

Teraz sa budem sústrediť na cyklickú hranovú súvislosť grafu, ktorý by tvoril najmenší protipríklad k CDC. Štandardnou konštrukciou sa dá ukázať, že sa stačí zaoberať kubickými grafmi. Zrejme cyklická hranová súvislosť najmenšieho protipríkladu k CDC musí byť aspoň 2. Predpokladajme, že je práve 2.

Ukážem, že musí byť aspoň 3. Sporom. Nech najmenší protipríklad k CDC je taký kubický graf, ktorý má cyklickú hranovú súvislosť 2. Odstránim hrany, ktoré tvoria cyklický hranový rez. Vzniknú dva komponenty. Aby ostal graf kubický, v každom komponente spojím novou hranou vrcholy, ktoré majú stupeň 2. Tieto dva komponenty už budú mať CDC, pretože sú menšie ako pôvodný graf. Nájdem teda CDC na týchto komponentoch. Odstránením pridaných hrán, preruším v každom komponente dva cykly. Po obnovení hrán, ktoré tvorili cyklický hranový rez sa však dajú cykly vhodne prepojiť, tak aby mal pôvodný graf CDC, čo je spor.

Predpokladajme teraz, že cyklická hranová súvislosť najmenšieho protipríkladu k CDC je práve 3. Podobne ukážem, že musí byť aspoň 4. Opäť sporom. Nech najmenší protipríklad k CDC je taký kubický graf, ktorý má cyklickú hranovú súvislosť 3. Odstránim hrany, ktoré tvoria cyklický hranový rez. Vzniknú dva komponenty. Aby ostal graf kubický, do každého komponentu pridám nový vrchol a spojím ho z vrcholmi z toho istého komponentu, ktoré majú stupeň 2. Tieto komponenty už budú mať CDC, pretože sú menšie ako pôvodný graf. Nájdem teda CDC na týchto komponentoch. Znovu odstránením pridaných hrán a vrchola, preruším v každom komponente tri cykly. Po obnovení hrán, ktoré tvorili cyklický hranový rez sa však dajú cykly vhodne prepojiť, tak aby mal pôvodný graf CDC, čo je opäť spor.

Z uvedeného vyplýva, že cyklická hranová súvislosť najmenšieho protipríkladu k CDC musí byť aspoň 4.

Kapitola 3

Algoritmus na výpočet cyklickej hranovej súvislosti kubických grafov

V tejto časti sa budem venovať algoritmu, ktorý nájde cyklickú hranovú súvislosť kubického grafu v časovej zložitosti $O(n^3 \log n)$. Tento algoritmus uviedli Dvořák, Kára, Král a Pangrác [2]. Popíšem ako som tento algoritmus implementoval a testoval.

3.1 Základné vlastnosti

Uvediem základné vlastnosti a definície, ktoré platia a budem ich využívať. Dôkazy sú k dispozícii v [2]. Najskôr uvediem, čo sa označuje pojmami *plný strom* a *aktivita grafu*.

Strom s koreňom vo vrchole v a úrovňami $0, 1, \dots, d$, takými, že vrchol v

má troch synov a každý vrchol na úrovni medzi 1 a $d - 1$ má dvoch synov budeme nazývať *plný strom*.

Nech G' je súvislý podgraf grafu G . Potom *aktivita* grafu G' sa rovná $\sum_{v \in V(G')} (\deg_{G'} v - \deg_{G'} v)$.

Nasledujúca veta hovorí o vzťahu medzi počtom vrcholov a obvodom grafu a veľkosťou cyklického hranového rezu.

Veta 3.1.1 *Nech G je kubický graf s počtom vrcholov n a obvodom g , $n \geq 8$. Potom $g \leq 2 \lceil \log(n/3+1) \rceil$. Navyše, G obsahuje cyklický hranový rez, ktorého veľkosť je g .*

Ďalšia veta ukazuje, kedy je hranový rez cyklický v súvislosti s aktivitou podgrafov.

Veta 3.1.2 *Nech G_1 a G_2 sú vrcholovo-disjunktné súvislé podgrafy kubického grafu G , každý s aktivitou aspoň $k+1$. Ľubovoľný hranový rez, ktorý oddeľuje G_1 a G_2 , ktorý má veľkosť najviac k je cyklický hranový rez.*

V predchádzajúcich vetách bolo vidieť ako vplýva aktivita a veľkosť obvodu na prítomnosť cyklického hranového rezu. Teraz sa dostávam ku kľúčovej vete, ktorá sa bude využívať v algoritme na hľadanie cyklickej hranovej súvislosti kubického grafu.

Veta 3.1.3 *Nech G je kubický graf s cyklickou hranovou súvislosťou $\kappa \geq 1$. Potom je aspoň jedna z nasledujúcich podmienok splnená:*

- i) G obsahuje cyklus dĺžky κ .*
- ii) G obsahuje cyklický hranový rez veľkosti κ , taký že každá z dvoch častí obsahuje plný strom hĺbky $d = \lceil \log_2 \frac{\kappa+1}{3} \rceil$.*

Vďaka platnosti predchádzajúcich viet môžeme pristúpiť k uvedeniu očakávanej vety.

Veta 3.1.4 *Existuje algoritmus na počítanie cyklickej hranovej súvislosti kubických grafov, ktorého časová zložitosť je $O(n^3 \log n)$.*

Pseudokód algoritmu vyzerá takto:

```
cutsizesize := girth( $G$ )
cut := hrany incidentné s cyklom dĺžky  $cutsizesize$ 
for  $v \in V(G)$  do
  for  $w \in V(G)$  do
     $d := -1$ 
    paths :=  $\emptyset$ 
    repeat
       $d := d + 1$ 
       $T_v :=$  plný strom hĺbky  $d$  s koreňom vo  $v$ 
       $T_w :=$  plný strom hĺbky  $d$  s koreňom vo  $w$ 
      if  $T_v$  a  $T_w$  sú vrcholovo-disjunktné then break
      paths := findpaths( $T_v, T_w, paths$ )
      if  $|paths| < 3 * 2^d$  and  $|paths| < cutsizesize$  then
         $cutsizesize = |paths|$ 
        cut = findcut( $T_v, T_w, paths$ )
      fi
    while  $3 * 2^d < cutsizesize$ 
  endfor
endfor
```

3.2 Dôkaz správnosti algoritmu a odhad zložitosti

Môžeme predpokladať, že graf na vstupe má aspoň osem vrcholov. Podľa vety 3.1.1 takýto graf vždy obsahuje cyklický hranový rez. Ak by mal menej ako osem vrcholov môže ísť o graf K_4 , $K_{3,3}$, ktoré nemajú cyklický hranový rez, alebo je to graf so šiestimi vrcholmi v tvare obálky, ktorý má cyklický hranový rez veľkosti 3.

Na začiatku algoritmu nájdeme obvod grafu. To sa dá uskutočniť v čase $O(n^2)$ prehľadávaním do šírky postupne z každého vrchola. Veľkosť obvodu grafu je zároveň aj horným ohraničením pre cyklickú hranovú súvislosť grafu. Ak nie je totiž mohutnosť cyklického hranového rezu grafu menšia ako jeho obvod, tak potom hrany incidentné s cyklom dĺžky obvodu musia tvoriť cyklický hranový rez. V ďalšej časti sa budeme preto snažiť nájsť menší cyklický hranový rez.

Návod na postup nám ponúka veta 3.1.3. Algoritmus sa bude snažiť nájsť, čo najmenší rez, ktorý by oddeľoval plné stromy hĺbky d s koreňmi vo v a w (ak sú tieto stromy disjunktné) pre každú dvojicu v a w a pre hodnoty $0 \leq d \leq \log_2 \frac{k}{3}$, kde k je veľkosť najmenšieho cyklického hranového rezu nájdeneho doposiaľ. V prípade, že veľkosť rezu je menšia ako $3 \cdot 2^d$, potom tento rez je podľa vety 3.1.2 aj novou hornou hranicou na minimálny cyklický hranový rez (samozrejme ak je menší ako doteraz nájdenný).

Na hľadanie tohto rezu budem využívať Ford-Fulkersenov algoritmus a vetu, ktorú vyslovili, že veľkosť maximálneho toku sa rovná kapacite minimálneho rezu (pre dôkaz pozri [8]). Každá hrana v grafe bude mať kapacitu

jedna. Potom maximálny tok bude určovať počet disjunktných ciest. Buď nájdeme $3 \cdot 2^d$ disjunktných ciest medzi danými stromami, alebo hranový rez s veľkosťou menšou ako $3 \cdot 2^d$. Algoritmus pri každej iterácii buď navýši tok o jedna, čím sa zvýši počet disjunktných ciest medzi stromami, alebo sa zasekne a potom nájde rez, ktorého veľkosť bude rovnaká ako počet ciest.

Počet iterácií je ohraničený číslom $3 \cdot 2^d$. Každá iterácia potrebuje čas, ktorý je lineárny vzhľadom na počet hrán grafu G , teda je $O(n)$. Pre konkrétnu dvojicu vrcholov, je potrebných maximálne $3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{\lceil \log_2 g/3 \rceil}$ iterácií, preto počet iterácií Ford-Fulkersonovho algoritmu pre všetkých $O(\log g)$ plných stromov pre danú dvojicu vrcholov je najviac $O(g)$. Teda algoritmus beží v čase $O(n^3 g) = O(n^3 \log n)$.

Nech je κ cyklická súvislosť grafu G . Ak $\kappa = 0$, potom G je nesúvislý a algoritmus pracuje správne. Ak G obsahuje cyklus dĺžky κ , potom minimálny cyklický hranový rez sa nájde hneď na začiatku. V opačnom prípade existuje hranový rez (A, B) veľkosti κ , taký že aj $G[A]$, aj $G[B]$ obsahujú plný strom hĺbky $\lceil \log_2 \frac{\kappa+1}{3} \rceil$ podľa vety 3.1.3. V určitom kroku sa vypočítala minimálna množina hrán separujúca tieto dva plné stromy a jej veľkosť bola najviac κ . Pretože aktivita plného stromu hĺbky $\lceil \log_2 \frac{\kappa+1}{3} \rceil$ je aspoň $\kappa + 1$, našli sme cyklický hranový rez veľkosti κ (veta 3.1.2).

3.3 Implementácia algoritmu

Predpokladám, že kubický graf, ktorý je na vstupe je súvislý, neobsahuje paralelené hrany, ani slučky a má aspoň osem vrcholov. Program dostane na vstupe súbor v niektorom z požadovaných formátov. V súbore môže byť jeden

graf alebo aj viac grafov, ale musí byť zachovaný rovnaký počet vrcholov. Na vstupe programu sa zvolí v akom formáte bude vstupný súbor, pričom buď v stĺpcoch sú postupne prvý sused, druhý sused a tretí sused pre každý riadok, ktorý zodpovedá vrcholu, alebo v riadkoch sú postupne susedia pre všetky stĺpce, pričom stĺpec zodpovedá vrcholu. Ďalej bude na vstupe umiestnenie a názov súboru a počet vrcholov grafu. Presný popis formátu vstupu možno nájsť v súbore, ktorý je súčasťou prílohy k tejto práci.

Algoritmus som implementoval v jazyku C. Používal som tieto globálne premenné: *vertices*, *main_table*, *flow_table*, *sign_table*. V premennej *vertices* sa uchováva počet vrcholov grafu. Premenná *main_table* je dvojrozmerné pole (jeho veľkosť je 3 x počet vrcholov), kde sú pre každý vrchol uložené jeho susedia. Aj *flow_table* je tiež dvojrozmerné pole rovnakej veľkosti ako *main_table*. Uchováva rovnako aktuálne informácie o toku v grafe. Využíva sa pri Ford-Fulkersonovom algoritme. *Sign_table* je jednorozmerné pole pozostávajúce zo záznamov o informácii o toku vo vrchole a predchodcovi vo Ford-Fulkersonovom algoritme.

Na začiatku programu sa inicializujú jednotlivé premenné. Následne sa volá funkcia *length_of_girth*, ktorá vráti obvod grafu. Táto funkcia využíva funkciu *bfs*, ktorej úlohou je nájsť z daného vrchola dĺžku najkratšej kružnice. Funkcia *bfs* dostane na vstupe daný vrchol, jedného jeho suseda a pole, kde bude ukladať kópiu frontu, ktorý bude používať pri prehľadávaní do šírky. Suseda zaradí automaticky medzi navštívené vrcholy a prehľadávaním do šírky sa ho snaží nájsť z "druhej strany". Pre daný vrchol musíme túto funkciu zavolať dva-krát, pričom druhýkrát sa volá pre iného suseda. Ak by sa volala len pre jedného suseda, nemuseli by sme nájsť najkratšiu kružnicu.

Funkcia *length_of_girth* zároveň nájde aj cyklický hranový rez, ktorý zodpovedá obvodu. Zapamätaním si kópie frontu, ktorý sa využíva vo funkcii *bfs*, pre najmenšiu dĺžku kružnice do poľa *best*, vieme zrekonštruovať najmenšiu kružnicu. Hrany, ktoré sú s ňou incidentné budú tvoriť cyklický hranový rez.

Pre prácu funkcie *bfs* bola potrebná manipulácia s frontom. Funkcie pre prácu s ním som tiež implementoval štandardným spôsobom.

Program ďalej pokračuje hľadaním disjunktných ciest medzi plnými stromami postupne zväčšujúcej sa hĺbky pre každú dvojicu vrcholov. V prípade, že sú stromy danej hĺbky disjunktné, volá sa pre danú dvojicu vrcholov funkcia *findpaths*, ktorá dostane ako parametre indexy vrcholov, hĺbku stromov a smerník *paths*, kde sa budú nájdené cesty ukladať.

Informácia o toku v *sign_table* obsahuje symbol, podľa toho, či je daný vrchol zdroj, resp. ústie ("s", resp. "t"), alebo či mal počas Ford-Fulkersonovho algoritmu kladný, zaporný, resp. nulový tok ("+", "-", resp. "x"). Ak ide o vrchol plného stromu iný ako list, tak má symbol "!". Na začiatku sú všetky symboly inicializované na "x".

Dôležitou časťou funkcie *findpaths* je volanie funkcie *iteration*, ktorá realizuje Ford-Fulkersonov algoritmus. Každéj hrane v grafe zodpovedajú dva opačne orientované šípky, ktorých kapacita je 1. Pričom najviac jeden zo šípov má nenulový tok. Šíp je reprezentovaný vo *flow_table* takto: ak *y* je *i*-ty sused *z*, potom *flow_table*[*i,z*]=*v* a *main_table*[*i,z*]=*y*, kde *v* je hodnota toku zo *z* do *y*. Rovnako platí aj *flow_table*[*j,y*]=*w*, kde *w* je hodnota toku z *y* do *z* a zároveň *main_table*[*j,y*]=*z* ak *z* je *j*-ty sused *y*.

Prehľadávanie grafu sa realizuje postupne z každého zdroja. Zdroje sú v globálnej premennej *front*. Postupne sa vo while cykle z premennej *front*

vyberie jeden vrchol a preskúmajú sa jeho susedia. Ak ešte nie je susedný vrchol počas aktuálnej iterácie navštívený (jeho informácia o toku je "x") a tok z predchádzajúceho vrchola doň je 0, označí sa symbolom "+", ak tok z neho do predchádzajúceho vrchola je 1, označí sa symbolom "-". Zároveň sa do *sign_table* zaznačí aj jeho predchodca a vrchol sa pridá do frontu. Pokiaľ je susedný vrchol označený symbolom "t" a na danom šípe nie je tok, znamená to, že sme narazili na ústie. Rovnako sa zaznačí aj predchodca ústia a môže sa while cyklus úspešne skončiť. While cyklus skončí neúspešne, ak sa vyprázdni front a nepodarí sa naraziť na ústie. Podľa toho ako skončí while cyklus, budeme hovoriť, že aj iterácia skončila úspešne alebo neúspešne. Ďalej v rámci iterácie ešte prebieha rekonštrukcia cesty podľa predchodcov. V *sign_table*, až kým sa nenarazí na niektorý zdroj. Zároveň sa nastavujú aj hodnoty tokov vo *flow_table*, podľa príslušných symbolov. Nech b je vrchol na ceste a a je jeho predchodca. Ak je b označený symbolom "+" alebo "t" šíp $a \rightarrow b$ bude mať hodnotu toku 1. Ak je b označený symbolom "-", musel mať šíp $b \rightarrow a$ predtým hodnotu toku 1, tá sa teraz nastaví na 0.

Po každej úspešnej iterácii, treba vyčistiť *sign_table* a *front*. Zachovávajú sa len označenia zdrojov a ústí. Ak iterácia skončí neúspešne, tak je tok blokujúci a už sa nepodarí nájsť žiadnu novú cestu. Preto môžeme skončiť aj s ďalšími iteráciami. Dôležité však budú značky, ktoré vzniknú pri poslednej (i keď neúspešnej) iterácii, tie využijeme pri zostrojovaní rezu.

V prípade, že počet ciest, ktoré vrátila funkcia *findpaths* je pre danú hĺbku menší ako veľkosť doposiaľ nájdeného cyklického hranového rezu, zostrojíme pomocou *sign_table*, ktorá obsahuje údaje z poslednej iterácie rez. Uskutoční sa to funkciou *findcut*, ktorá prehľadáva cesty, ktoré dostane ako parameter,

od ústia smerom k zdroju, zastaví sa však hneď, ako narazí na symbol "+", "-", alebo "s", pretože práve tu zastala posledná iterácia. Práve posledné hrany týchto ciest (smerom od ústia po nájdený symbol) budú tvoriť rez.

Na výstup dá program cyklickú hranovú súvislosť daného kubického grafu a cyklický hranový rez tejto veľkosti. V prípade, že bolo vo vstupnom súbore viac grafov, na výstupe budú údaje pre každý graf postupne.

3.4 Testovanie

Algoritmus som testoval pomocou testovacieho programu, ktorý som realizoval backtrackingom. Ako globálne premenné som použil tabuľku susedov pre všetky vrcholy, zoznam všetkých hrán a premennú na ukladanie počtu nájdených cyklických komponentov. Na začiatku sa určila hodnota cyklickej hranovej súvislosti, ktorá sa má testovať, nech je to κ . Princíp testovania spočíval v tom, že sa budú za možný rez považovať všetky kombinácie k -tic hrán (postupne pre $k = 1, 2, \dots, \kappa$). Po vybratí konkrétnej k -tice sa overí, či vznikli dva komponenty, a či obsahujú cyklus. Ak áno, táto k -tica tvorí cyklický hranový rez a hodnota cyklickej hranovej súvislosti je k .

Ústrednou funkciou bola funkcia *backtrack*, ktorá mala vstupné parametre *level*, na ktorom sa backtracking nachádza a *i* - poradie hrany, ktorá bude tvoriť prípadný rez. Pri prvom volaní to bolo κ a 0. Na začiatku funkcie *backtrack* sa dočasne odstránila *i*-ta hrana zo zoznamu.

Ďalej nasledoval for-cyklus od *i* po takmer koniec zoznamu. Slovo *takmer* som použil preto, lebo posledných $m = level$ hrán sa nechávalo pre zostávajúce vnorenia. Pokiaľ bol $level > 1$ nasledovalo rekurzívne volanie

backrack(level-1, i+1). Pretože bolo treba zo zoznamu odstrániť o jednu hranu menej a chceli sme ju vybrať z hrán, ktoré sú v zozname v poradi neskôr ako posledne odobratá. Ak $level = 1$, mohli sme rekurziu zastaviť. V tejto chvíli bol zo zoznamu odobratý požadovaný počet hrán. Nasledovala kontrola počtu komponentov a cyklov. Prehľadával sa graf do šírky z každého vrchola, ktorý nepatril do žiadneho z doteraz nájdených komponentov pre túto množinu odobratých hrán. Zároveň sa po nájdení nového komponentu z každého jeho vrchola volala dvakrát funkcia *bfs* (jedenkrát by nestačilo, ak by sa sused nenachádzal na kružnici; funkcia *bfs* bola popísaná v predchádzajúcej časti tejto kapitoly). Funkcia *make* vrátila počet cyklických komponentov, ktorý sa uložil do globálnej premennej ak bol väčší ako doteraz nájdený počet.

Po skončení for-cyklu nasledoval (na každej úrovni rekurzie) návrat dočasne odstránenej hrany.

Po skončení rekurzívnej funkcie mal graf cyklickú súvislosť *level*, pokiaľ najvyšší počet cyklických komponentov dosiahnutých v rekurzii bol viac ako jeden.

Ďalej som testoval, či je rez, ktorý nájde optimalizovaný program, cyklický. Hrany, ktoré tvorili rez som odstránil zo zoznamu hrán a overil som, koľko cyklických komponentov našla funkcia *make*.

Program som testoval na všetkých kubických grafoch s počtom vrcholov najviac 18, ďalej na všetkých snarkoch, ktoré mali počet vrcholov najviac 28 a na niektorých sporadických snarkoch s počtom vrcholov najviac 54. Testovací program ukázal správnosť optimalizovaného programu na týchto vstupoch.

Kapitola 4

Záver

V práci som zhrnul základné poznatky, týkajúce sa cyklickej hranovej súvislosti. Ukázal som prepojenie medzi niektorými poprednými otvorenými problémami teórie grafov a cyklickou súvislosťou. Cyklická súvislosť teda vystupuje ako dôležitý paramater grafu.

Napokon som implementoval algoritmus od Dvořáka, Káru, Kráľa a Pangráca na počítanie cyklickej hranovej súvislosti a hľadanie minimálneho cyklického hranového rezu, ktorý pracuje v polynomiálnom čase $O(n^3 \log n)$.

Na túto prácu sa dá nadviazať ďalším skúmaním cyklickej súvislosti, ako i ďalším vylepšovaním časovej zložitosti algoritmu na jej počítanie.

Dodatok A

Príloha

Prikladám CD, na ktorom je napálený program na počítanie cyklickej hranovej súvislosti a hľadanie cyklického hranového rezu spolu so zdrojovými kódmi.

Literatúra

- [1] Brian Alspach and Cun-Quan Zhang. Cycle covers of cubic multigraphs. *Discrete Math.*, 111(1-3):11–17, 1993.
- [2] Zdeněk Dvořák, Jan Kára, Daniel Král, and Ondrej Pangrác. An algorithm for cyclic edge connectivity of cubic graphs.
- [3] Andreas Huck and Martin Kochol. Five cycle double covers of some cubic graphs. *J. Comb. Theory Ser. B*, 64(1):119–125, 1995.
- [4] Martin Kochol. Reduction of the 5-flow conjecture to cyclically 6-edge-connected snarks. *J. Comb. Theory Ser. B*, 90(1):139–145, 2004.
- [5] K. Kutnar and D. Marusic. On Cyclic Edge-Connectivity of Fullerenes. *ArXiv Mathematics e-prints*, February 2007.
- [6] Edita Máčajová and Martin Škoviera. Constructing hypohamiltonian snarks with cyclic connectivity 5 and 6. *Electron. J. Combin.*, 24:125–132, 2006.
- [7] Roman Nedela and Martin Škoviera. Decompositions and reductions of snarks. *J. Graph Theory*, 22(3):253–279, 1996.

- [8] Ján Plesník. *Grafové algoritmy*. VEDA, 1983.
- [9] E. Steffen. On bicritical snarks. *Math. Slovaca*, 51:141–150, 2001.