Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Vrcholovo-disjunktné cykly v grafoch.

Bakalárska práca

2013

Michal Janáčik

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Vrcholovo-disjunktné cykly v grafoch.

Bakalárska práca

Študíjny program:	Informatika
Študíjny odbor:	2508 informatika
Školiace pracovisko:	Katedra informatiky
Vedúci bakalarskej práce:	Mgr. Michal Kotrbčík

Bratislava, 2013
Michal Janáčik

84361107

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Michal Janáčik
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Vrcholovo-disjunktné cykly v grafoch

Cieľ: Cieľom práce je zhrnúť súčasný stav problematiky a nájsť dobré odhady pre maximálny počet vrcholovo-disjunktých cyklov v súčinoch grafov, prípadne v iných zaujímavých triedach.

Vedúci: Mgr. Michal Kotrbčík
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.

Dátum zadania: 16.10.2012

Dátum schválenia: 24.10.2012

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Poďakovanie

Chcel by som poďakovať môjmu vedúcemu bakalárskej práce, Mgr. Michalovi Kotrbčíkovi, za jeho pomoc a rady pri písaní práce.

Abstrakt

Objektom skúmania našej práce sú vrcholovo-disjuktné cykly v súčinoch grafov a ďalších príbuzných triedach. Po prezentovaní niektorých základných výsledkov z oblasti vrcholovo-disjuktných cyklov, decyklačného čísla a vzťahu medzi nimi, skúmame maximálny počet vrcholovo-disjukntných cyklov postupne v karteziánskom súčine, tenzorovom súčine, silnom súčine, lexikografickom súčine, v spojení grafov, ko-normálnom súčine, zakorenenom súčine a amalgamáciach. V jednotlivých triedach sa zamieravame na postačujúce a nutné podmienky exitencie veľkého počtu vrcholovo-disjunktných cyklov, pričom v niektorých prípadoch sa podarilo presne určiť maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov.

Kľúčové slová: vrcholovo-disjunktné cykly, karteziánsky súčin, tenzorový súčin, silný súčin, lexikografický súčin, ko-normálny súčin, spojenie, decyklačné číslo

Abstract

This paper deals with vertex-disjoint cycles in graph products and other related classes. After presenting some basic theorems from area of vertex-disjoint cycles, decycling number and about relation between these parametres, we examine maximum number of vertex-disjoint cycles in cartesian product, tensor product, strong product, lexicographical product, co-normal product, join and amalgamations. In individual classes we are focused on sufficient and necessary conditions of existence large number of vertex-disjoint cycles, while in some cases we can specify number of vertex-disjoint cycles.

Keywords: vertex-disjoint cycles, cartesian product, tensor product, strong product, lexicographical product, co-normal product, join, decycling number, feedback vertex set

Obsah

Úvod

V posledných desaťročiach sa v teórii grafov sa značná pozornosť venovala nájsť najväčší počet vrcholovo-disjunktných cyklov v grafe, daný počet označujeme $\varphi(G)$. Pre problém nájdenia tohto parametra platí že je NP-úplný, pretože obsahuje problém rozkladu na trojuholníky. Je známe, že problém rozkladu na trojuholníky je NP-úplný (Garey, Johnson [GJ79]).

Podobný problém je či v G existuje aspoň k vrcholovo-disjunktných cyklov pre fixné k. Zaoberal sa tým Bodlaender [Bod90] a dokázal, že v takom prípade má tento problém lineárnu časovú zložitosť.

Vrcholovo-disjunktným cyklom venoval dosť pozornsti aj Bollobás. Vo svojej práci [Bol78] charakterizoval grafy bez dvoch disjunktných cyklov.

Podobná pozornosť sa venovala problému nájdenia najväčšej množiny $F \subseteq V(G)$ indukujúcej les ako podgraf grafu G. Tento problém sa dá jednoducho previesť na problém nájdenia najmenšej podmnožiny $S \subseteq V(G)$, pre ktorú platí $G - S$ je acyklický graf. Každá množina S pre ktorú je graf $G - S$ acyklický sa nazýva decyklačná množina (decycling set). Veľkosť najmenšej decyklačnej množiny v grafe G nazývame decyklačným číslom (decycling number) G a označujeme ho $\phi(G)$.

Decyklačná množina sa niekedy nazýva aj feedback vertex set. Pod týmto pojmom sa problém odstránenia všetkých cyklov v grafe G odobratím množiny vrcholov z grafu objavuje napríklad v aplikáciach prevencie deadlocku v operačných systémoch, v riešení niektorých problémov v umelej inteligencii, distrubovaných algoritmov alebo pri probléme umiestoňovania optických sietí. Karp, Miller a Thatcher dokázali že problém určenia decyklačného čísla je NP-úplný, pozri [RRJ75].

Medzi problémom najväčšieho počtu vrcholovo-disjunktných cyklov $varphi(G)$ a decyklačného čísla $phi(G)$ je úzky vzťah: $\varphi(G) \leq \phi(G)$.

Predložená práca sa zaoberá určením najväčšieho počtu vrcholovo-disjunktných cyklov v niektorých konkrétnych triedach grafov a je rozdelená na dve kapitoly. V prvej kapitole prezentujeme množstvo známych výsledkov pre vrcholovo-disjuktné cykly v grafe, decyklačné číslo a pre vzťah medzi týmito dvomi paramatrami.

V druhej kapitole prezentujeme dosiahnuté výsledky pre počet vrcholovo-disjukntných cyklov postupne v karteziánskom súčine, tenzorovom súčine, silnom súčine, lexikografickom súčine, v spojení grafov, ko-normálnom súčine, zakorenenom súčine a amalgamáciach. Konkrétne sa venujeme postačujúcim a nutným podmienkam exitencie veľkého počtu vrcholovo-disjunktných cyklov, pričom v niektorých prípadoch sa podarilo presne určiť maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov.

Kapitola 1

Prehľad problematiky

V tejto kapitole uvádzame niektoré známe výsledky zo skúmanej oblasti. Pri prezentovaní základných definícií a výsledkov o výpočtovej zložitosti problému uvádzame charakterizáciu grafov bez dvoch vrcholovo-disjunktných cyklov. Ďalej uvádzame vzťah medzi hodnotami $\varphi(G)$ a $\phi(G)$ vo vonkajšoplanárnych grafoch, pre ktoré je známy tesný dolný a horný odhad tohto vzťahu. Na záver kapitoly prezentujeme niektoré výsledky pre decyklačné čísla v karteziánskom a silnom súčine.

1.1 Vrcholovo-disjunktné cykly

Definícia 1.1.1. *Množina $\mathcal{C}$ vrcholovo-disjunktných cyklov grafu G je množina takých cyklov, ktoré po dvojiciach navzájom nemajú žiadny spoločný vrchol.*

Veľkosť najväčšej množiny vrcholovo-disjunktných cyklov grafu G budeme označovať $\varphi(G)$.
Decyklačné číslo $\phi(G)$ grafu G je najmenší počet vrcholov grafu G takých, ktorých odstránením z grafu G vznikne acyklický graf.
Ak nie je uvedené inak, zvyšné pojmy sú definované a označované štandartným spôsobom.

Uvažujme nasledovný problém. Pre daný graf $G = (V, E)$ chceme zistiť či obsahuje aspoň k vrcholovo-disjunktných cyklov. Ak k je súčasťou vstupu, tak tento problém je NP-úplný, pretože obsahuje Rozklad na trojuholníky ako špeciálny prípad ($k = |V|/3$). Je známe, že problém rozkladu na trojuholníky je NP-úplný (Garey, Johnson [GJ79]). Pre fixné k sa tento problém dá riešiť v čase $O(n)$ (Bodlaender [Bod90]).

Veta 1.1.2. *(Bollobás [Bol78]) Nech G je multigraf bez dvoch vrcholovo-disjunktných cyklov. Nech $\delta(G) \geq 3$ a nech neexistuje vrchol ktorý patrí do všetkých cyklov. Potom platí jedno z nasledujúcich šiestich tvrdení.*

1. *G má tri vrcholy a násobné hrany spájajúce každý pár vrcholov.*
2. *G je K_4 v ktorom jeden z trojuholníkou môže mať násobné hrany.*
3. *$G = K_5$.*
4. *G je K_5 bez jednej hrany, pričom niektoré z hrán nesusediace s chýbajúcou hranou môžu byť násobnými hranami.*
5. *G je koleso (wheel) ktorého hrany idúce do stredu (spokes) môžu byť násobnými hranami.*
6. *G vzniklo z $K_{3,p}$ pridaním hrán alebo znásobnením hrán v menšej partícii $K_{3,p}$.*

Veta 1.1.3. *(Bollobás [Bol78]) Graf G neobsahuje dva vrcholovo-disjunktné cykly práve vtedy, keď buď obsahuje vrchol v taký, že graf $G - v$ je les, alebo G vznikol zo subdivízie (subdivision) G_0 z grafov vymenovaných vo Vete 1.1.2 pridaním lesa a najviac jedna hrana spájaja každý strom lesa a G_0.*

Dôsledok 1.1.4. *(Bollobás [Bol78]) Nech graf G je graf rádu $n \geq 6$ bez dvoch vrcholovo-disjunktných cyklov. Potom platí*

- *G má najviac $3n - 6$ hrán,*
- *$\delta(G) \leq 3$, a*
- *cykly G môžu byť zastúpené tromi vrcholmi.*

1.2 Vonkajšoplanárne grafy

Veta 1.2.1. *Nech G je vonkajšoplanárny graf. Potom $\varphi(G) \leq \phi(G) \leq 2\varphi(G)$.*

Prvá nerovnosť je jednoduchá na dokázanie, druhú cez greedy algoritmus dokázali Kloks, Lee, Liu [TCMJ02].

Definícia 1.2.2. *S_k je graf, kde $V(G) = 0, 1, \dots, 2k-1$ a $E(G) = \{i(i+1) : 0 \leq i \leq 2k-1\} \cup \{i(i+2) : i$ je párne$\}$ (indexy sú modulo $2k$).*

Veta 1.2.3. *(Chang, Fu, Lien [CFL13]) Platí $\phi(S_k) = \lceil k/2 \rceil$ a $\varphi(S_k) = \lfloor k/2 \rfloor$.*

Graf G je S_3-strom rádu t práve vtedy, keď obsahuje presne t S_3 vrcholovo-disjunktných subdivízii a každá hrana mimo subdivízii nepatrí do žiadneho cyklu.

Veta 1.2.4. *(Chang, Fu, Lien [CFL13]) Pre vonkajšoplanárny graf G platí $\phi(G) = 2\varphi(G)$ práve vtedy, keď G je S_3-strom.*

Veta 1.2.5. *(Chang, Fu, Lien [CFL13]) Pre vonkajšoplanárny graf G platí $\phi(G) = \varphi(G)$ práve vtedy, keď G nemá žiadnu S_k-subdivíziu pre všetky k nepárne.*

1.3 Decyklačné čísla karteziánskych súčinov

$G \square H$ označuje karteziánsky súčin grafov G, H.

Veta 1.3.1. *(Bau, Beineke [BB02]) Ak $m, n \geq 3$, tak*

$$\phi(P_m \square P_n) \geq \left\lfloor \frac{mn - n - m + 2}{3} \right\rfloor.$$

Veta 1.3.2. *(Bau, Beineke [BB02]) Pre $n \geq 4$ platí:*

1. $\phi(P_2 \square P_n) = \lfloor n/2 \rfloor$
2. $\phi(P_3 \square P_n) = \lfloor 3n/4 \rfloor$
3. $\phi(P_4 \square P_n) = \lfloor n \rfloor$

Veta 1.3.3. *(Pike, Zou [PZ05]) Pre $m, n \geq 3$ platí:*

$$\phi(C_n \square C_m) = \begin{cases} \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil & \text{ak } m = 4 \\ \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil & \text{ak } n = 4 \\ \left\lceil \frac{mn+2}{3} \right\rceil & \text{inak} \end{cases}$$

Veta 1.3.4. *(Hartnell, Whitehead [HW08]) Nech F je les s n vrcholmi. Potom platí* $\phi(F \square K_3) = n$.

1.4 Decyklačné čísla silných súčinov

Definícia 1.4.1. *Silný súčin (strong product) $G \boxtimes H$ grafov G a H je graf s množinou vrcholov $V(G) \times V(H)$ a dva vrcholy (u, u') a (v, v') sú susedné práve vtedy, keď*

- *$u = v$ a u' je susedný s v' v grafe H, alebo*
- *$u' = v'$ a u je susedný s v v grafe G, alebo*
- *u je susedný s v v grafe G a u' je susedný s v' v grafe H.*

Veta 1.4.2. *(Xie [Xie07])* $\phi(P_n \boxtimes P_m) = \min\{n \cdot \lfloor m/2 \rfloor, m \cdot \lfloor n/2 \rfloor\}$.

Veta 1.4.3. *(Xie, Chan [XC])* $\phi(P_m \boxtimes C_n) = \min\{m \cdot \lceil n/2 \rceil, n \cdot \lfloor m/2 \rfloor + \lceil m/2 \rceil\}$.

Veta 1.4.4. *(Xie, Chan [XC]) Nech n alebo m je párne, potom* $\phi(C_m \boxtimes C_n) = \min\{m \cdot \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor, n \cdot \lceil m/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor\}$*. Nech n aj m sú obe nepárne a $m \leq n$, potom* $n \cdot \lceil m/2 \rceil \leq \phi(C_m \boxtimes C_n) \leq n \cdot \lceil m/2 \rceil + 1$.

Veta 1.4.5. *(Xie, Chan [XC])* $\phi(K_m \boxtimes P_n) = mn - 2 \cdot \lceil n/2 \rceil$.

Veta 1.4.6. *(Xie, Chan [XC])* $\phi(K_m \boxtimes K_n) = mn - 2$.

Veta 1.4.7. *(Xie, Chan [XC]) Nech $m \geq 3$, potom* $\phi(K_{1,m-1} \boxtimes P_n) = n$.

Veta 1.4.8. *(Xie, Chan [XC]) Nech $m, n \geq 3$, potom* $\phi(K_m \boxtimes C_n) = n + m - 1$.

Kapitola 2

Vrcholovo-disjunktné cykly v súčinoch grafov

V tejto najväčšej kapitole prezentujeme dosiahnuté výsledky pre počet vrcholovo-disjunktných cyklov v súčinoch grafov a niektorých príbuzných triedach. Venujeme sa prevažne postačujúcim a nutným podmienkam existencie veľkého počtu vrcholovo-disjunktných cyklov, pričom v niektorých prípadoch presne určujeme maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov.

2.1 Karteziánsky súčin grafov

Na začiatku sekcie uvedieme dve tvrdenie platiace všeobecne pre maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov v grafe. Ďalej uvedieme postačujúce podmienky pre karteziánsky súčin na dosiahnutie najväčšie počtu vrcholovo-disjunktných cyklov pre tento súčin a pár tvrdení pre prácu s podgrafmi v súčine. Potom uvedieme tvrdenie platiace pre súčin grafov s obvodom aspoň 4. Nakoniec porovnáme niektoré výsledky pre maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov s decyklačným číslom.

Definícia 2.1.1. *Karteziánsky súčin $G \square H$ grafov G a H je graf s množinou vrcholov $V(G) \times V(H)$, pričom dva vrcholy (u, u') a (v, v') sú susedné práve vtedy keď*

- $u = v$ *a* u' *je susedný s* v' *v grafe* H, *alebo*
- $u' = v'$ *a* u *je susedný s* v *v grafe* G.

Počet vrchlov grafu G budeme označovať n, počet vrcholov grafu H budeme označovať m. Počet vrcholovo-disjunktný cyklov grafu G budeme označovať $\varphi(G)$.

Veta 2.1.2. *Ak G je jednoduchý graf, potom $\varphi(G) \leq \lfloor n/3 \rfloor$.*

Dôkaz. Najkratší možný cyklus v jednoduchom grafe má dĺžku 3, teda každý cyklus pokrýva aspoň 3 vrcholy, a preto $\varphi(G) \leq \lfloor n/3 \rfloor$. □

Lema 2.1.3. *Ak G_1, G_2, …, G_n sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G, tak $\varphi(G) \geq \varphi(G_1) + \varphi(G_2) + \cdots + \varphi(G_n)$.*

Dôkaz. Pre každý podgraf G_i nech $\mathcal{C}_i$ označuje najvačšiu množinu vrcholovo-disjunkt -ných cyklov grafu G_i, teda $\mathcal{C}_i$ obsahuje práve $\varphi(G_i)$ cyklov a tieto sú po dvoch vrcholovo-disjunktné. Nech $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$. Potom množina $\mathcal{C}$ obsahuje práve $\sum_{i=1}^{n} \varphi(G_i)$ cyklov. Zároveň množina $\mathcal{C}$ obsahuje len cykly z grafu G, teda zjavne nie je väčšia ako najväčšia množina vrcholovo-disjunktných cyklov grafu G. Takže obsahuje najviac $\varphi(G)$ cyklov, z čoho vyplýva platnosť dokazovanej nerovnosti. □

Pod pojmom pokryť budeme rozumieť nasledovný koncept: Graf G sa dá pokryť grafom G' práve vtedy, keď graf G vieme rozložiť na vrcholovo-disjunktné podgrafy G_1, G_2, …, G_n také, že $|V(G)| = \sum_{i=1}^{n} |V(G_i)|$ a $G' \simeq G_i$ pre všetky i, kde $1 \leq i \leq n$. Pod pojmom pokryť trojuholníkmi budeme rozumieť pokryť C_3, pokryť štvoruholníkmi C_4.

Veta 2.1.4. *Ak G a H sú jednoduché grafy, pričom aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi, potom $\varphi(G \square H) = nm/3$.*

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti nech sa graf G dá pokryť trojuholníkmi, teda $\varphi(G) = n/3$. Rozdeľme si graf G na vrcholovo-disjunktné podgrafy, pričom každý podgraf je práve trojuholník. Pre každý takýto podgraf T platí $\varphi(T \square H) = m$, týchto podgrafov je evidentne $n/3$. Podľa Lemy 2.1.3 platí $\varphi(G \square H) \geq nm/3$, podľa Vety 2.1.2 platí $\varphi(G \square H) \leq \lfloor nm/3 \rfloor$, a teda dostávame $\varphi(G \square H) = nm/3$. □

Dôsledok 2.1.5. *Nech $G_1, \ldots, G_n$ sú jednoduché grafy a aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi. Potom platí $\varphi(G_1 \square \cdots \square G_n) = |V(G_1)| \cdot \ldots \cdot |V(G_n)|/3$.*

Lema 2.1.6. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Potom platí $\varphi(G \square H) \geq \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \square H_j)$.*

Dôkaz. Nech grafy G' a H' sú grafy ktoré vzniknú z grafov G a H odobratím všetkých hrán, ktoré nie sú v ich podgrafoch $G_1, G_2, \ldots, G_k$ a $H_1, H_2, \ldots, H_l$ (teda $G' = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ a $H' = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_l$). Pre súčin $G' \Box H'$ potom evidentne platí $\varphi(G' \Box H') = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \Box H_j)$. Graf $G' \Box H'$ je podgraf grafu $G \Box H$, teda podľa Lemy 2.1.3 platí $\varphi(G \Box H) \geq \varphi(G' \Box H')$, z čoho vyplýva že platí dokazovaná nerovnosť. □

Veta 2.1.7. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G, a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech $\varphi(G_i \Box H_i) = |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3$ platí pre všetky i, j, kde $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$. Potom $\varphi(G \Box H) = nm/3$.*

Dôkaz. Podľa podmienok z tvrdenia dokazovanej vety platí nasledujúca séria rovností:

$$\sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \Box H_j) = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3 =$$

$$(\sum_{1 \leq i \leq k} |V(G_i)|) \cdot (\sum_{1 \leq j \leq l} |V(H_j)|)/3 = |V(G)| \cdot |V(H)|/3 = nm/3$$

. Použitím Lemy 2.1.6 dostávame $\varphi(G \Box H) \geq nm/3$, podľa Vety 2.1.2 platí $\varphi(G \Box H) \leq \lfloor nm/3 \rfloor$, a teda $\varphi(G \Box H) = nm/3$. □

Veta 2.1.8. *Nech G a H sú jednoduché grafy, H je graf s perfektným párením, a nech platí $|V(G)| \equiv \mu(H) \equiv n \bmod 3$ a $n \geq \max\{|V(G)|, \mu(H)\}$. Označme m počet vrcholov v súčine $(G * H) \Box K_n$. Potom $\varphi((G * H) \Box K_n) = m/3$.*

Dôkaz. Ak $n \bmod 3 = 0$, tak graf K_n vieme pokryť trojuholníkmi. Potom podľa Vety 2.1.4 platí $\varphi((G * H) \Box K_n) = m/3$.

Nech $n \bmod 3 \neq 0$. V prípade že $|V(G)| = \mu(H)$, tak ľahko vidieť že graf $G * H$ sa dá pokryť trojuholníkmi, teda podľa Vety 2.1.4 platí $\varphi((G * H) \Box K_n) = m/3$.

V prípade že $|V(G)| \neq \mu(H)$ sa graf $G * H$ už trojuholníkmi pokryť nedá. Ale dá sa pokryť graf $(G * H) \Box K_n$, vo zvyšnej časti dôkazu si zostrojíme takéto pokrytie.

Graf $(G * H) \Box K_n$ si predstavme ako n kópií grafu $G * H$, kde každý vrchol v z $G * H$ je spojený hranou s vrcholom v z každej kópie $G * H$. Teda prvú vrstvu máme kópie $G * H$, druhú kompletné grafy pre všetky vrcholy $G * H$. Ani jedna vrstva sa osamote pokryť trojuholníkmi nedá, teda niektoré vrcholy sú pokryté v prvej vrstve, niektoré v druhej. Označme si vrcholy grafu G ako $a, b, \ldots$, páriace hrany grafu H ako $1, 2, \ldots$, príklad trojuholníka v prvej vrstve je $a1$. Nech $n = \max\{|V(G)|, \mu(H)\}$. V každej kópii $G * H$ si označíme $l = \min\{|V(G)|, \mu(H)\}$ disjunktných trojuholníkov. Bez ujmy na všeobecnosti nech $\mu(H) > |V(G)|$. V každej kópii máme označené všetky vrcholy

G, v prvej kópii mám označené v H páriace hrany $1, 2, \ldots, l$, v druhej $2, 3, \ldots, l+1$, až sa dostaneme k poslednej l-tej kópii, kde sú označené hrany $\mu(H), 1, \ldots, l-1$. Týmto spôsobom nám ostalo neoznačených presne $\mu(H) - |V(G)|$ hrán, ten počet je ale deliteľný 3, teda tieto hrany máme po vrcholoch pokryté v druhej vrstve. Teda platí $\varphi((G * H)\Box K_n) = m/3$. Ak $n > \max\{|V(G)|, \mu(H)\}$, v prvých $\max\{|V(G)|, \mu(H)\}$ kópiach máme pokryté všetky vrcholy spôsobom popísaným vyššie. Počet zvyšných kópii je deliteľný tromi, a teda máme všetky vrcholy pokryté v druhej vrstve. Takže platí $\varphi((G * H)\Box K_n) = m/3$. □

Dôsledok 2.1.9. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)|+\cdots+|V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech každý podgraf G_i je buď trojuholník alebo $G_i = G'_i * H'_i$, pričom $|V(G'_i)| \equiv \mu(H'_i) \equiv n \bmod 3$ a $n = \max_i\{|V(G'_i)|, \mu(H'_i)\}$. Nech každý podgraf H_j je trojuholník alebo $H_j = K_n$. Potom $\varphi(G\Box H) = |V(G)| \cdot |V(H)|/3$.*

Dôkaz. Podľa Vety 2.1.8. pre všetky $G_i = G'_i * H'_i$ také že $|V(G'_i)| \equiv \mu(H'_i) \equiv n \bmod 3$, platí $\varphi(G_i\Box K_n) = n|V(G_i)|/3$. Podľa Vety 2.1.4 $\varphi(C_3\Box H_i) = 3|V(H_i)|/3$ a $\varphi(G_i\Box C_3) = 3|V(G_i)|/3$, teda podľa Vety 2.1.7 platí $\varphi(G\Box H) = |V(G)| \cdot |V(H)|/3$. □

Lema 2.1.10. *Ak G a H sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4, potom aj ich súčin $G\Box H$ má obvod aspoň 4.*

Dôkaz. Pre vrcholy $G\Box H$ uvažujme súradnice (g, h), kde g je vrchol G, h je vrchol H. Potom trojuholník v $G\Box H$ znamená tri vrcholy (g_1, h_1), (g_2, h_2) a (g_3, h_3) navzájom susedné. Z definície súčinu platí, že dva vrcholy (g_1, h_1) a (g_2, h_2) sú susudné len vtedy, keď jedna zo súradnic ostala nezmenená. V takom prípade v $G\Box H$ trojuholníky (za predpokladu že neboli už v jednom z pôvodných grafov) existovať nemôže, pretože na neho by sme potrebovali aspoň jednu dvojicu vrcholov kde sa zmenia obe súradnice. □

Veta 2.1.11. *Ak G a H sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4, potom $\varphi(G\Box H) \leq \lfloor nm/4 \rfloor$.*

Dôkaz. Najkratší možný cyklus v jednoduchom grafe bez trojuholníkov má dĺžku 4. Podľa Lemy 2.1 súčin $G\Box H$ troujholníky neobsahuje, teda každý cyklus pokrýva aspoň 4 vrcholy. Z toho vyplýva že platí $\varphi(G\Box H) \leq \lfloor nm/4 \rfloor$. □

Dôkaz nasledujúcej vety sa opiera o rovnakú myšlienku ako dôkaz Vety 2.1.4, s tým rozdielom, že tentokrát uvažujeme štvoruholníky namiesto trojuholníkov.

Veta 2.1.12. *Nech G a H sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4, pričom aspoň jeden z nich sa dá pokryť štvoruholníkmi. Potom $\varphi(G\Box H) = nm/4$.*

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti nech sa graf G dá pokryť štvoruholníkmi, teda $\varphi(G) = n/4$. Rozdeľme si teda tento graf na vrcholovo-disjunktné podgrafy, pričom každý podgraf je práve štvoruholník. Pre každý takýto podgraf T platí $\varphi(T\Box H) = m$, týchto podgrafov je evidentne $n/4$. Podľa Lemy 2.1.3 platí $\varphi(G\Box H) \geq nm/4$, podľa Vety 2.1.11 platí $\varphi(G\Box H) \leq \lfloor nm/4 \rfloor$, a teda dostávame $\varphi(G\Box H) = nm/4$. $\Box$

Dôsledok 2.1.13. *Nech $G_1, \ldots, G_n$ sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4. Nech aspoň jeden z nich sa dá pokryť štvoruholníkmi. Potom platí $\varphi(G_1\Box \cdots \Box G_n) = |V(G_1)| \cdot \ldots \cdot |V(G_n)|/4$.*

Symbolom $\mu(G)$ označujeme veľkosť najväčšieho párenia grafu G. Počet vrcholov G obsiahnutý v najväčšom párení sa teda rovná $2\mu(G)$.

Veta 2.1.14. *Ak G a H sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4, potom $\varphi(G\Box H) \geq \mu(G) \cdot \mu(H)$.*

Dôkaz. To že graf G má párenie o veľkosti $\mu(G)$ zároveň znamená, že má $\mu(G)$ vrcholovo-disjunktných podmnožín P_2. Potom podľa Lemy 2.1.6 platí $\varphi(G\Box H) \geq \sum_{1\leq i\leq \mu(G), 1\leq j\leq \mu(H)} \varphi(P_2\Box P_2) = \mu(G) \cdot \mu(H)$ a teda platí dokazovaná nerovnosť. $\Box$

Dôsledok 2.1.15. *Nech grafy G a H sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4 a perfektným párením. Potom $\varphi(G\Box H) = nm/4$.*

Dôsledok 2.1.16. *Nech $G_1, \ldots, G_n$ sú jednoduché grafy s obvodom aspoň, nech aspoň dva z nich majú perfektné párenie. Potom platí $\varphi(G_1\Box \cdots \Box G_n) = |V(G_1)| \cdot \ldots \cdot |V(G_n)|/4$.*

Dôkaz. Keďže karteziánsky súčin je komutatívny, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať že G_1 a G_2 majú perfektné párenie. Podľa Dôsledku 2.1.15 platí, že ich súčin sa dá pokryť štvoruholníkom, potom podľa Dôsledku 2.1.13 platí $\varphi(G_1\Box \cdots \Box G_n) = |V(G_1)| \cdot \ldots \cdot |V(G_n)|/4$. $\Box$

Veta 2.1.17. *Nech G a H sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4. Ak $\varphi(G\Box H) = nm/4$, tak aspoň jeden z grafov G a H má perfektné párenie.*

Dôkaz. $G \square H$ si predstavme ako štvorcovú sieť vrcholov, ktorá má n riadkov a m stĺpcov. Každý stĺpec predstavuje jednu kópiu G, každý riadok jednu kópiu H. Hrany G vytvárajú hrany v stĺpcoch, hrany H v riadkoch. $\varphi(G \square H) = nm/4$ znamená že našu sieť je pokrytá štvoruholníkmi. Z definície karteziánskeho súčinu vyplýva že v sieti nie sú žiadne hrany s končiacimi vrcholmi v rôznych riadkoch aj stĺpcoch. Teda každý štvoruholník buď celý patrí do jedného riadku/stĺpca, vtedy ten štvoruholník patril už do jedného z pôvodných grafov, alebo patrí do dvoch riadkoch a dvoch stĺpcoch po dvoch vrcholoch spojených hranov, jedna hrana v G, jedna v H. Štvoruholník patriaci do riadku si označme R, patriaci do stĺpca S. Štvoruholník prechádzajúci medzi vrstvami sa dá považovať za $P_2 \square P_2$.
Každý riadok je pokrytý kombináciou štvoruholníkov R a $P_2 \square P_2$, a vrcholov, ktoré sú pokryté nejakým štvoruholníkom S. Keď máme aspoň jeden riadok pokrytý len štvoruholníkmi R a $P_2 \square P_2$ alebo $\varphi(H) = m/4$ (toto môže platiť a pritom môže existovať také pokrytie, že taký riadok existovať nebude), potom v grafe H, ktorý určuje hrany v riadkoch, existuje perfektné párenie. Keď taký riadok neexistuje a zároveň platí $\varphi(H) \neq m/4$, potom každý riadok pretína nejaký štvoruholník S. Potom jediné, čo potrebujeme aby v grafe G existovalo perfektné párenie je, aby n bolo párne. Keby ale n bolo nepárne, m by muselo deliteľné štyrmi a nejaký vrchol každého stĺpca by musel byť pokrytý R. Ale spolu s m deliteľnými štyrmi dostávame $\varphi(H) = m/4$, čo sme ale vylúčili. $\square$

Z uvedených tvrdení platiacich pre $\varphi(G \square H)$ vychádzame pri porovní s tvrdeniami platiacími pre $\phi(G \square H)$, ktoré sú uvedené v rámci Sekcie 1.3. Vyberieme špeciálne prípady, kedy sa tieto dva parametre blížia alebo sú dokonca rovné. F je acyklický graf.

Súčin	$\varphi(G \square H)$	$\phi(G \square H)$
$P_2 \square P_n$	$= \lfloor n/2 \rfloor$	$= \lfloor n/2 \rfloor$
$P_4 \square P_n$	$= \lfloor n \rfloor$	$= \lfloor n \rfloor$
$C_3 \square C_n$	$= n$	$= \lceil (3n+2)/3 \rceil$
$C_3 \square F$	$= n$	$= n$

2.2 Tenzorový súčin grafov

Na úvod tejto sekcie uvádzame dve tvrdenia o podgrafoch súčinov. Ďalej prezentujeme postačujúcu podmienku pre dosiahnutie najväčšieho počtu vrcholovo-disjunkntých grafov v tenzorovom súčine a nakoniec jednu základnú vetu pre súčiny grafov s obvodom aspoň 4.

Definícia 2.2.1. *Tenzorový súčin (tensor product) $G \times H$ grafov G a H je graf s množinou vrcholov $V(G) \times V(H)$, pričom dva vrcholy (u, u') a (v, v') sú susedné práve vtedy keď u je susedný s v v grafe G a zároveň u' je susedný s v' v grafe H.*

Dôkazy nasledujúcich dvoch tvrdení sú analogické s dôkazmi zodpovedajúcich tvrdení platiacich pre Karteziánsky súčin (Lema 2.1.6 a Veta 2.1.7).

Lema 2.2.2. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Potom platí $\varphi(G \times H) \geq \sum\limits_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \times H_j)$.*

Dôkaz. Nech grafy G' a H' sú grafy ktoré vzniknú z grafov G a H odobratím všetkých hrán, ktoré nie sú v ich podgrafoch $G_1, G_2, \ldots, G_k$ a $H_1, H_2, \ldots, H_l$ (teda $G' = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ a $H' = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_l$). Pre súčin $G' \times H'$ potom evidentne platí $\varphi(G' \times H') = \sum\limits_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \times H_j)$. Graf $G' \times H'$ je podgraf grafu $G \times H$, teda podľa Lemy 2.1.3 platí $\varphi(G \times H) \geq \varphi(G' \times H')$, z čoho vyplýva že platí dokazovaná nerovnosť. $\square$

Veta 2.2.3. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G, a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech $\varphi(G_i \times H_i) = |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3$ platí pre všetky i, j, kde $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$. Potom $\varphi(G \times H) = nm/3$.*

Dôkaz. Podľa podmienok z tvrdenia dokazovanej Vety platí následujúca séria rovností:

$$\sum_{(1 \leq i \leq k)(1 \leq j \leq l)} \varphi(G_i \times H_j) = \sum_{(1 \leq i \leq k)(1 \leq j \leq l)} |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3 =$$

$$(\sum_{(1 \leq i \leq k)} |V(G_i)|) \cdot (\sum_{(1 \leq j \leq l)} |V(H_j)|)/3 = |V(G)| \cdot |V(H)|/3 = nm/3$$

. Použitím Lemy 2.2.2 dostávame $\varphi(G \times H) \geq nm/3$, podľa Vety 2.1.2 platí $\varphi(G \times H) \leq \lfloor nm/3 \rfloor$, a teda $\varphi(G \times H) = nm/3$. $\square$

Lema 2.2.4. *Nech G je ľubovoľný z grafov $K_3 \times K_3$, $K_3 \times K_4$, $K_3 \times K_5$, $K_4 \times K_4$, $K_4 \times K_5$, $K_5 \times K_5$. Potom $\varphi(G) = \lfloor |V(G)|/3 \rfloor$.*

Veta 2.2.5. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech každý podgraf G_i a H_j je jeden z grafov K_3, K_4 alebo K_5. Potom $\varphi(G \times H) = |V(G)| \cdot |V(H)|/3$.*

Dôkaz. Podľa Lemy 2.2.4 pre každý možný súčin $G_i \times H_j$ platí $\varphi(G_i \times H_j) = |V(G_i)| \cdot |V(G_j)|/3$ a teda podľa Vety 2.2.3 platí $\varphi(G \times H) = |V(G)| \cdot |V(H)|/3$. $\square$

Veta 2.2.6. *Ak grafy G a H sú jednoduché grafy a G je graf s obvodom aspoň 4, potom aj ich súčin $(G \times H)$ má obvod aspoň 4.*

Dôkaz. Pre vrcholy $G \times H$ uvažujme súradnice (g, h), kde g je vrchol G, h je vrchol H. Potom trojuholník v $G \times H$ znamená tri vrcholy (g_1, h_1), (g_2, h_2) a (g_3, h_3) navzájom susedné. Z definície súčinu platí, že dva vrcholy (g_1, h_1) a (g_1, h_1) sú susudné len vtedy, keď sú obe súradnice zmenené a (g_1, g_2), (h_1, h_2) sú susedné v príslušnom z pôvodných grafov. Teda aby nám vrcholy (g_1, h_1), (g_2, h_2) a (g_3, h_3) tvorili trojuholník v súčine, musia byť vrcholy g_1, g_2 a g_3 rôzne a susedné v G, a vrcholy h_1, h_2 a h_3 rôzne a susedné v H. Taký prípad nám ale nemôže nastať pretože G neobsahuje trojuholník. $\square$

2.3 Silný súčin

Na úvod tejto sekcie uvádzame dve tvrdenia o podgrafoch súčinov. Ďalej prezentujeme niekoľko postačujúcich podmienok pre dosiahnutie najväčšieho počtu vrcholovo-disjunkntých grafov v silnom súčine. Nakoniec porovnáme niektoré výsledky pre maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov s decyklačným číslom.

Definícia 2.3.1. *Silný súčin (strong product) $G \boxtimes H$ grafov G a H je graf s množinou vrcholov $V(G) \times V(H)$ a dva vrcholy (u, u') a (v, v') sú susedné práve vtedy, keď*

- *$u = v$ a u' je susedný s v' v grafe H, alebo*
- *$u' = v'$ a u je susedný s v v grafe G, alebo*
- *u je susedný s v v grafe G a u' je susedný s v' v grafe H.*

Veta 2.3.2. *Platí $V(G \boxtimes H) = V(G \square H) = V(G \times H)$ a $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \sqcup E(G \times H)$.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva priamo z definícii daných súčinov. $\square$

Dôkazy nasledujúcich dvoch tvrdení sú analogické s dôkazmi zodpovedajúcich tvrdení platiacich pre Karteziánsky súčin (Lema 2.1.6 a Veta 2.1.7).

Lema 2.3.3. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Potom platí $\varphi(G \boxtimes H) \geq \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \boxtimes H_j)$.*

Dôkaz. Nech grafy G' a H' sú grafy ktoré vzniknú z grafov G a H odobratím všetkých hrán, ktoré nie sú v ich podgrafoch $G_1, G_2, \ldots, G_k$ a $H_1, H_2, \ldots, H_l$ (teda $G' = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ a $H' = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_l$). Pre súčin $G' \boxtimes H'$ potom evidentne platí $\varphi(G' \boxtimes H') = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \boxtimes H_j)$. Graf $G' \boxtimes H'$ je podgraf grafu $G \boxtimes H$, teda podľa Lemy 2.1.3 platí $\varphi(G \boxtimes H) \geq \varphi(G' \boxtimes H')$, z čoho vyplýva že platí dokazovaná nerovnosť. $\square$

Veta 2.3.4. *Nech $G_1, G_2, ..., G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G, a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech $\varphi(G_i \boxtimes H_i) = |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3$ platí pre všetky i, j, kde $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$. Potom $\varphi(G \boxtimes H) = nm/3$.*

Dôkaz. Podľa podmienok z tvrdenia dokazovanej vety platí následujúca séria rovností:

$$\sum_{(1 \leq i \leq k)(1 \leq j \leq l)} \varphi(G_i \boxtimes H_j) = \sum_{(1 \leq i \leq k)(1 \leq j \leq l)} |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3 =$$

$$(\sum_{(1 \leq i \leq k)} |V(G_i)|) \cdot (\sum_{(1 \leq j \leq l)} |V(H_j)|)/3 = |V(G)| \cdot |V(H)|/3 = nm/3$$

. Použitím Lemy 2.3.3 dostaváme $\varphi(G \boxtimes H) \geq nm/3$, podľa Vety 2.1.2 platí $\varphi(G \boxtimes H) \leq \lfloor nm/3 \rfloor$, a teda $\varphi(G \boxtimes H) = nm/3$. $\square$

Nasledujúce tri tvrdenia sú dôsledkom Vety 2.3.2 a tvrdení platiacich pre karteziánsky a tenzorový súčin, preto ich uvádzame bez dôkazu (Veta 2.1.4, Dôsledok 2.1.5 a Veta 2.2.5).

Veta 2.3.5. *Ak G a H sú jednoduché grafy, pričom aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi, potom $\varphi(G \boxtimes H) = nm/3$.*

Dôsledok 2.3.6. *Nech $G_1, \ldots, G_n$ sú jednoduché grafy a aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi. Potom platí $\varphi(G_1 \boxtimes \cdots \boxtimes G_n) = |V(G_1)| \cdot \ldots \cdot |V(G_n)|/3$.*

Veta 2.3.7. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech každý podgraf G_i a H_j je jeden z grafov K_3, K_4 alebo K_5. Potom $\varphi(G \boxtimes H) = |V(G)| \cdot |V(H)|/3$.*

Veta 2.3.8. *Ak vieme jeden z jednoduchých grafov G a H kompletne pokryť cestou P_3 a druhý má perfektné párenie (vieme ho pokryť cestou P_2), tak $\varphi(G \boxtimes H) = nm/3$.*

Dôkaz. Ľahko vidieť že platí $\varphi(P_3 \boxtimes P_2) = nm/3$. Po aplikovaní Vety 2.3.4 dostávame $\varphi(G \boxtimes H) = nm/3$. □

Z uvedených tvrdení platiacich pre $\varphi(G \boxtimes H)$ vychádzame pri porovní s tvrdeniami platiacími pre $\phi(G \Box H)$, ktoré sú uvedené v rámci Sekcie 1.4. Vyberieme dva špeciálne prípady, v prvom sa tieto dva parametre sú ešte pomerne blízsko, v druhom je medzi nimi už veľký rozdiel.

Súčin	$\varphi(G \boxtimes H)$	$\phi(G \boxtimes H)$
$P_2 \boxtimes P_n$	$= \lfloor 2n/3 \rfloor$	$= 2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor$
$K_m \Box K_n$	$<= \lfloor nm/3 \rfloor$	$= mn - 2$

2.4 Lexikografický súčin grafov

Na úvod tejto sekcie uvádzame dve tvrdenia o podgrafoch súčinov. Ďalej prezentujeme potom niekoľko postačujúcich podmienok pre dosiahnutie najväčšieho počtu vrcholovo-disjunkntých grafov v lexikografickom súčine.

Definícia 2.4.1. *Lexikografický súčin (Lexicographic product) $G \cdot H$ grafov G a H je graf s množinou vrcholov $V(G) \times V(H)$ a dva vrcholy (u, u') a (v, v') sú susedné práve vtedy keď*

- *$u = v$ a u' je susedný s v' v grafe H, alebo*
- *u je susedný s v v grafe G.*

Lexikografický súčin nie je komutatívny, avšak vo veľa prípadoch platí $\varphi(G \cdot H) = \varphi(H \cdot G)$.

Veta 2.4.2. *Platí $V(G \cdot H) = V(G \boxtimes H) = V(G \Box H)$ a $E(G \cdot H) \supseteq E(G \boxtimes H) = E(G \Box H) \sqcup E(G \times H)$.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva priamo z definícii daných súčinov. □

Dôkazy nasledujúcich dvoch tvrdení sú analogické s dôkazmi zodpovedajúcich tvrdení platiacich pre Karteziánsky súčin (Lema 2.1.6 a Veta 2.1.7).

Lema 2.4.3. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Potom platí $\varphi(G \cdot H) \geq \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \cdot H_j)$.*

Dôkaz. Nech grafy G' a H' sú grafy ktoré vzniknú z grafov G a H odobratím všetkých hrán, ktoré nie sú v ich podgrafoch $G_1, G_2, \ldots, G_k$ a $H_1, H_2, \ldots, H_l$ (teda $G' = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ a $H' = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_l$). Pre súčin $G' \cdot H'$ potom evidentne platí $\varphi(G' \cdot H') = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \cdot H_j)$. Graf $G' \cdot H'$ je podgraf grafu $G \cdot H$, teda podľa Lemy 2.1.3 platí $\varphi(G \cdot H) \geq \varphi(G' \cdot H')$, z čoho vyplýva že platí dokazovaná nerovnosť. □

Veta 2.4.4. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G, a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech $\varphi(G_i \cdot H_i) = |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3$ platí pre všetky i, j, kde $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$. Potom $\varphi(G \cdot H) = nm/3$.*

Dôkaz. Podľa podmienok z tvrdenia dokazovanej Vety platí nasledujúca séria rovností:

$$\sum_{(1 \leq i \leq k)(1 \leq j \leq l)} \varphi(G_i \cdot H_j) = \sum_{(1 \leq i \leq k)(1 \leq j \leq l)} |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3 =$$

$$(\sum_{(1 \leq i \leq k)} |V(G_i)|) \cdot (\sum_{(1 \leq j \leq l)} |V(H_j)|)/3 = |V(G)| \cdot |V(H)|/3 = nm/3$$

. Použitím Lemy 2.4.3 dostávame $\varphi(G \cdot H) \geq nm/3$, podľa Vety 2.1.2 platí $\varphi(G \cdot H) \leq \lfloor nm/3 \rfloor$, a teda $\varphi(G \cdot H) = nm/3$. □

Nasledujúce tri tvrdenia sú dôsledkom Vety 2.4.2 a tvrdení platiacich pre karteziánsky a tenzorový súčin, preto ich uvádzame bez dôkazu (Veta 2.1.4, Dôsledok 2.1.5 a Veta 2.2.5).

Veta 2.4.5. *Ak G a H sú jednoduché grafy, pričom aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi, potom $\varphi(G \cdot H) = nm/3$.*

Dôsledok 2.4.6. *Nech $G_1, \ldots, G_n$ sú jednoduché grafy a aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi. Potom platí $\varphi(G_1 \cdot \ldots \cdot G_n) = |V(G_1)| \cdot \ldots \cdot |V(G_n)|/3$.*

Veta 2.4.7. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech každý podgraf G_i a H_j je jeden z grafov K_3, K_4 alebo K_5. Potom $\varphi(G \cdot H) = |V(G)| \cdot |V(H)|/3$.*

Veta 2.4.8. *Nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H, kde pre všetky podgrafy H_i platí $|V(H_i)| = 3$ a $|E(H_i)| = 1$, a graf G má perfektné párenie, tak $\varphi(G \cdot H) = nm/3$.*

Dôkaz. Podgrafy H_i sú zložené z cesty P_2 a jedného izolovaného vrcholu. Súčin $P_2 \cdot H_i$ si môžeme predstaviť ako dve kópie H_i, kde každý vrchol jednej kópie je spojený s každým z druhej, teda požadované cykly sú v tvare izolovaný vrchol susedný s P_2 z druhej kópie. Teda $\varphi(P_2 \cdot H_i) = nm/3$, a podľa Vety 2.4.4 platí $\varphi(G \cdot H) = nm/3$. □

Pozn. Pri používaní tejto vety si treba dávať pozor na to, že lexikografický súčin nie komutatívny, a teda Veta neplatí pre $H \cdot G$. Vezmime si graf H', ktorý spĺňa podmienky pre podgrafy H_i z tvrdenia vety, potom $\varphi(H' \cdot P_2) = 1 \neq nm/3$.

2.5 Spojenie grafov

V tejto sekcii uvádzame jednu postačujúcu podmienku platiacu pre spojenie všeobecných grafov, a potom jednu nutnú podmienku platiacu pre spojenie grafov s obvodom aspoň 4.

Definícia 2.5.1. *Spojenie (join) dvoch grafov $G * H$ dostaneme disjunktným zjednotením grafov G a H a spojením každého vrcholu z grafu G hranou s každým vrcholom grafu H.*

Symbolom M_G označujeme nejaké párenie grafu G, pričom $|M_G|$ značí počet hrán v párení M_G. Symbolom $\xi(M_G)$ označujeme počet nespárených vrcholov v párení M_G v grafe G, teda $|\xi(M_G)| = |V(G)| - 2|M_G|$.

Veta 2.5.2. *Nech G a H sú jednoduché grafy. Potom pre ich spojenie $(G * H)$ platí* $\varphi(G * H) \geq \max\limits_{M_G, M_H} \Big\{ \min\{|\xi(M_G)|, |M_H|\} + \min\{|\xi(M_H)|, |M_G|\} \Big\}$.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme že obvod grafov je aspoň 4, potom na každý cyklus dĺžky 3 potrebujeme hranu z jedného grafu a vrchol z druhého. Pre všetky dvojice párení M_G, M_H uvažujme nasledovnú konštrukciu. Nespárené vrcholy G nám vytvárajú trojuholníky s páriacimi hranami párenia M_H v H, takýchto trojuholníkou je $\min\{|\xi(M_G)|, |M_H|\}$ a rovnako nespárené vrcholy H nám vytvárajú trojuholníky s páriacimi hranami párenia M_G v G, takýchto trojuholníkou je $\min\{|\xi(M_H)|, |M_G|\}$. Nájdeme teda dvojicu M_G, M_H kedy je takýchto trojuholníkov najviac. Potom ich je v $(G * H)$ určite aspoň toľko. □

Dôsledok 2.5.3. *Nech G a H sú jednoduché grafy s obvodom aspoň 4. Potom $\varphi(G * H) = nm/3$ práve vtedy keď existujú párenia M_G, M_H také, že $|M_G| = |\xi(M_H)|$ a $|M_H| = |\xi(M_G)|$.*

Dôkaz. Predpokladajme že existujú párenie M_G, M_H také, že $|M_G| = |\xi(M_H)|$ a $|M_H| = |\xi(M_G)|$. Potom použitím konštrukcie z dôkazu Vety 2.5.2 máme pokrytý celý graf $(G*H)$ trojuholníkmi. Zároveň keďže G a H majú obvod aspoň 4, tak každý trojuholník musí mať jeden koniec v G a druhý v H. Vtedy ale v prípade že máme pokrytie $(G*H)$ trojuholníkmi, tak každý trojuholník je zložený z vrcholu jedného grafu a páriacej hrany druhého. Potom naše hľadáne pokrytia sú všetky páriace hrany v grafoch G, H, ktoré sé časťou niektorého trojuholníka. □

2.6 Ko-normálny súčin grafov

V tejto časti práce uvádzame dve tvrdenia o podgrafoch v súčine a potom niekoľko postačujúcich podmienok pre dosiahnutie najväčšieho počtu vrcholovo-disjunkntých grafov v ko-normálnom súčine. Na konci sekcie sa pozrieme na súvislosť ko-normálneho súčinu a spojenia grafov a vyvodíme z toho ďalšie postačujúcu podmienku.

Definícia 2.6.1. *Ko-normálny súčin (Co-normal product) $G \bullet H$ grafov G a H je graf s množinou vrcholov $V(G) \times V(H)$ a dva vrcholy (u, u') a (v, v') sú susedné práve vtedy, keď*

- *u' je susedný s v' v grafe H, alebo*
- *u je susedný s v v grafe G.*

Veta 2.6.2. *Platí $V(G \bullet H) = V(G \cdot H) = V(G \boxtimes H) = V(G \Box H)$ a $E(G \bullet H) \supseteq E(G \cdot H) \supseteq E(G \boxtimes H) = E(G \Box H) \sqcup E(G \times H)$.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva priamo z definícii daných súčinov. □

Dôkazy nasledujúcich dvoch tvrdení sú analogické s dôkazmi zodpovedajúcich tvrdení platiacich pre Karteziánsky súčin (Lema 2.1.6 a Veta 2.1.7).

Lema 2.6.3. *Nech $G_1, G_2, \dots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \dots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Potom platí $\varphi(G \bullet H) \geq \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \varphi(G_i \bullet H_j)$.*

Dôkaz. Nech grafy G' a H' sú grafy ktoré vzniknú z grafov G a H odobratím všetkých hrán, ktoré nie sú v ich podgrafoch $G_1, G_2, \ldots, G_k$ a $H_1, H_2, \ldots, H_l$ (teda $G' = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ a $H' = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_l$). Pre súčin $G' \bullet H'$ potom evidentne platí $\varphi(G' \bullet H') = \sum_{1 \le i \le k, 1 \le j \le l} \varphi(G_i \bullet H_j)$. Graf $G' \bullet H'$ je podgraf grafu $G \bullet H$, teda podľa Lemy 2.1.3 platí $\varphi(G \bullet H) \ge \varphi(G' \bullet H')$, z čoho vyplýva že platí dokazovaná nerovnosť. □

Veta 2.6.4. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G, a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech $\varphi(G_i \bullet H_i) = |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3$ platí pre všetky i, j, kde $1 \le i \le k, 1 \le j \le l$. Potom $\varphi(G \bullet H) = nm/3$.*

Dôkaz. Podľa podmienok z tvrdenia dokazovanej Vety platí nasledujúca séria rovností:

$$\sum_{(1 \le i \le k)(1 \le j \le l)} \varphi(G_i \bullet H_j) = \sum_{(1 \le i \le k)(1 \le j \le l)} |V(G_i)| \cdot |V(H_j)|/3 =$$

$$(\sum_{(1 \le i \le k)} |V(G_i)|) \cdot (\sum_{(1 \le j \le l)} |V(H_j)|)/3 = |V(G)| \cdot |V(H)|/3 = nm/3$$

. Použitím Lemy 2.6.3 dostávame $\varphi(G \bullet H) \ge nm/3$, podľa Vety 2.1.2 platí $\varphi(G \bullet H) \le \lfloor nm/3 \rfloor$, a teda $\varphi(G \bullet H) = nm/3$. □

Nasledujúce tri tvrdenia sú dôsledkom Vety 2.6.2 a tvrdení platiacich pre karteziánsky a tenzorový súčin, preto ich uvádzame bez dôkazu (Veta 2.1.4, Dôsledok 2.1.5 a Veta 2.2.5).

Veta 2.6.5. *Ak G a H sú jednoduché grafy, pričom aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi, potom $\varphi(G \bullet H) = nm/3$.*

Dôsledok 2.6.6. *Nech $G_1, \ldots, G_n$ sú jednoduché grafy a aspoň jeden z nich sa dá pokryť trojuholníkmi. Potom platí $\varphi(G_1 \bullet \cdots \bullet G_n) = |V(G_1)| \cdot \ldots \cdot |V(G_n)|/3$.*

Veta 2.6.7. *Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu G a nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H. Nech $|V(G_1)| + \cdots + |V(G_k)| = |V(G)|$ a $|V(H_1)| + \cdots + |V(H_l)| = |V(H)|$. Nech každý podgraf G_i a H_j je jeden z grafov K_3, K_4 alebo K_5. Potom $\varphi(G \bullet H) = |V(G)| \cdot |V(H)|/3$.*

Veta 2.6.8. *Nech $H_1, H_2, \ldots, H_l$ sú vrcholovo-disjunktné podgrafy grafu H, kde pre všetky podgrafy H_i platí $|V(H_i)| = 3$ a $|E(H_i) = 1$, a graf G má perfektné párenie, tak $\varphi(G \bullet H) = \varphi(H \bullet G) = nm/3$.*

Dôkaz. Veta je dôsledkom Vety 2.6.2, Vety 2.4.8 platiacej pre lexikografický súčin a toho, že ko-normálny súčin je na rozdiel od lexikografického komutatívny. □

Veta 2.6.9. *Nech G je jednoduchý graf, potom $G \bullet P_2 = G * G$, teda formálnejšie $V(G \bullet P_2) = V(G * G)$ a $E(G \bullet P_2) = E(G * G)$.*

Dôkaz. Vyplýva z definícií ko-normálneho súčinu a spojenia. □

Veta 2.6.10. *Nech G a H sú jednoduché grafy a nech H má perfektné párenie. Ak v grafe G existuje párenie M_G pre ktoré platí $|M_G| = |\xi(M_G)|$, tak $\varphi(G \bullet H) = nm/3$.*

Dôkaz. Vyplýva z Dôsledku 2.5.3, Vety 2.6.4 a Vety 2.6.9. □

2.7 Zakoreňový súčin

V tejto sekcii presne určujeme čomu sa rovná maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov v koreňom súčine, a nutnú podmienku pre dané dva grafy na dosiahnutie maximálneho počtu vrcholovo-disjunktných cyklov v triede koreňových súčinov.

Definícia 2.7.1. *Zakorenený graf (rooted graph) je graf G s jedným význačným vrcholom, ktorý sa nazýva koreň grafu.*

Definícia 2.7.2. *Nech G je graf a H je graf s koreňom. Zakoreňových súčinom (rooted product) $G \circ H$ nazývame súčin definovaný nasledujúco: Máme $|V(G)|$ kópií grafu H, a každý vrchol v_i grafu G ztotožníme s koreňom z i-tej kópie grafu H.*
Formálnejšie, za predpokladu $V(G) = g_1, \ldots, g_n$, $V(H) = h_1, \ldots, h_m$ a h_1 je koreň grafu H, platí $G \circ H := (V, E)$, kde

- $V = (g_i, h_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, *a*
- $E = ((g_i, h_1), (g_k, h_1)) : (g_i, g_k) \in E(G) \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} ((g_i, h_j), (g_i, h_k)) : (h_j, h_k) \in E(H)$.

V prípade že graf G je tiež graf s koreňom, vrchol (g_1, h_1) sa dá pokladať ako koreň grafu $G \circ H$.

Veta 2.7.3. *Majme graf G a graf s koreňom H (koreň označený ako h_1). Nech pre*

- *koreň h_1 platí $\varphi(H) > \varphi(H - h_1)$. Potom $\varphi(G \circ H) = |V(G)| \cdot \varphi(H)$.*
- *koreň h_1 platí $\varphi(H) = \varphi(H - h_1)$. Potom $\varphi(G \circ H) = |V(G)| \cdot \varphi(H) + \varphi(G)$.*

Dôsledok 2.7.4. *Ak graf G a graf s koreňom H sú acyklické, tak aj ich súčin $(G \circ H)$ je acyklický graf.*

Teda pre acyklické grafy G a H platí $\varphi(G \circ H) = 0$.

Dôsledok 2.7.5. $\varphi(G \circ H) = \lfloor |V(G) \cdot V(H)/3\rfloor$ *vtedy a len vtedy keď* $\varphi(H) = \lfloor V(H)/3 \rfloor$.

2.8 Amalgamácie

V tejto sekcii presne určujeme čomu sa rovná maximálny počet vrcholovo-disjunktných cyklov v amalgamáciach grafu, a nutnú podmienku pre dané dva grafy na dosiahnutie maximálneho počtu vrcholovo-disjunktných cyklov v triede amalgamácii.

Definícia 2.8.1. *Majme grafy G a H. Operácia $G \dagger H$ sa nazýva vrcholová amalgamácia a je definovaná takto: Vyberieme vrchol g_i z grafu G, vrchol h_j z grafu H, zjednotíme grafy G a H a ztotžníme vrcholy g_i, h_j do spoločného vrcholu.*
Formálnejšie, $G \dagger H := (V, E)$, kde $V = V(G - g_i) + V(H - h_j) + (g_i, h_j)$ a $E = E(G) + E(H)$.

Veta 2.8.2. *Majme grafy G a H a označené vrcholy $g_i \in V(G)$ a $h_j \in V(H)$. Potom $\varphi(G \dagger H) = \varphi(G - g_i) + \varphi(H - h_j)$.*

Dôsledok 2.8.3. *Ak graf G a graf s koreňom H sú acyklické, tak aj ich vrcholová amalgamácia $(G \dagger H)$ je acyklický graf.*

Dôsledok 2.8.4. $\varphi(G \dagger H) = \lfloor |(V(G - g_i) + V(H - h_j))/3\rfloor$ *vtedy a len vtedy keď* $\varphi(G - g_i) = \lfloor V(G - g_i)/3\rfloor$ *a* $\varphi(H - g_i) = \lfloor V(H - g_i)/3\rfloor$.

Definícia 2.8.5. *Majme grafy G a H. Operácia $G \ddagger H$ sa nazýva hranová amalgamácia a je definovaná takto: Vyberieme vrchol g_i z grafu G, vrchol h_j z grafu H, zjednotíme grafy G a H a vrcholy g_i, h_j spojíme hranou.*
Formálnejšie, $G \ddagger H := (V, E)$, kde $V = V(G) + V(H)$ a $E = E(G) + E(H) + (g_i, h_j)$.

Veta 2.8.6. *Majme grafy G a H a označené vrcholy $g_i \in V(G)$ a $h_j \in V(H)$. Potom $\varphi(G \ddagger H) = \varphi(G) + \varphi(H)$.*

Dôsledok 2.8.7. *Ak graf G a graf s koreňom H sú acyklické, tak aj ich hranová amalgamácia $(G \ddagger H)$ je acyklický graf.*

Dôsledok 2.8.8. $\varphi(G \ddagger H) = \lfloor |(V(G) + V(H))/3 \rfloor$ *vtedy a len vtedy keď* $\varphi(G) = \lfloor V(G)/3 \rfloor$ *a* $\varphi(H) = \lfloor V(H)/3 \rfloor$ *a* $|V(G)| - \varphi(G) + |V(H)| - \varphi(H) \leq 2$.

Záver

V práci sme sa venovali skúmaním maximálneho počtu vrcholovo-disjuknetných cyklov v špeciálnych triedach grafov, hlavne v rôznych typov súčinov grafov a im podobným triedam, a porovnali niektoré výsledky s príbuzným decyklačným číslom.

V prvej časti sme zhrnuly základné poznatky o probléme počtu vrcholovo-disjukntných cyklov v grafoch a uviedli sme zložitosť tohto problému. Ďalej sme uviedli vzťah pre počet vrcholovo-disjukntných cyklov a decylačného čísla vo vonkajšoplanárnych grafoch. Nakoniec sme zhrnuli výsledky pre decyklačné číslo v súčinoch grafov.

Druhej časti bola zameraná na hľadane samotného maximálneho počtu vrcholovo-disjukntných cyklov postupne v karteziánskom súčine, tenzorovom súčine, silnom súčine, lexikografickom súčine, v spojení grafov, ko-normálnom súčine, zakorenenom súčine a amalgamáciach. Pri každej triede sme uviedli nejaké vzťahy platiace pre počet vrcholovo-disjukntných cyklov, hlavne postačujúce podmienky existencie veľkého počtu takýchto cyklov. V niektorých triedach sa podarilo presne určiť ich počet. Pre karteziánsky a silný súčin sme porovnali počet vrcholovo-disjunktných cyklov s decyklačným číslom.

Literatúra

[BB02] Sheng Bau and Lowell W. Beineke. The decycling number of graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 25:285–298, 2002.

[Bod90] H.L. Bodlaender. *On disjoint cycles.* Ultrecht University, 1990.

[Bol78] Béla Bollobás. *Extremal graph theory.* Courier Dover Publications, 1978.

[CFL13] Huilan Chang, Hung-Lin Fu, and Min-Yun Lien. The decycling number of outerplanar graphs. *J Comb Optim*, 25:536–542, 2013.

[GJ79] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences).* W. H. Freeman, 1979.

[HW08] B.L. Hartnell and C.A. Whitehead. Decycling sets in certain cartesian product graphs with one factor complete. *Australasian Journal of Combinatorics*, 40:305–315, 2008.

[PZ05] David A. Pike and Yubo Zou. Decycling cartesian products of tho cyckles. *Siam J. Discrete Math*, 19(3):651–663, 2005.

[RRJ75] Karp RM., Miller RE., and Thatcher JW. Reducibility among combinatorial problems. *J Symb Log*, 40:618–619, 1975.

[TCMJ02] Kloks T., Lee C-M., and Liu J. New algorithms for k-face cover, k-feedback vertex set, and k-disjoint cycles on plane and planar graphs. *Proceedings of the 28th international workshop on graphtheoretic concepts in computer science*, 2573:282–295, 2002.

[XC] Jinshan Xie and Xiao Chen. Decycling numbers of strong product graphs involving paths, circuits, star or complete graphs.

[Xie07] Jinshan Xie. Decycling number of the strong product of two paths. *Journal of Fuzhou University (Natural Science)*, (1):16–19, 2007.