Katedra Informatiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Dekompozícia kompletných grafov na kružnice

(bakalárska práca)

Ján Kováč

Študijný program: Informatika
Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Robert Lukoťka
Bratislava, 2010

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

. . . .

Chcem sa podakovať môjmu školitelovi RNDr. Robertovi Lukoťkovi za výber témy, cenné rady a trpezlivosť, Márii Lukyovej za obetavú kontrolu pravopisu a RNDr. Michalovi Foríškovi za poskytnutie templatov pre sadzbu v programe TEX.

Abstrakt

Autor:	Ján Kováč
Názov bakalárskej práce:	Dekompozícia kompletných grafov na kružnice
Škola:	Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra informatiky
Vedúci bakalárskej práce:	RNDr. Robert Lukoťka
Rozsah práce:	29 strán
Bratislava, jún 2010	

Táto práca sa zaoberá dekompozíciou všeobecných kompletných grafov na kružnice danej dĺžky. Prinášame v nej prehľad výsledkov, dosiahnutých pri skúmaní jednoduchých a orientovaných kompletných grafov. Načrtneme spôsob dokazovania týchto výsledkov. Taktiež sa budeme venovať štúdiu rozkladov viacnásobných kompletných grafov na kružnice. Dokážeme, že základné nutné podmienky dekompozície sú postačujúce ak stupeň násobnosti grafu je párny a minimálny.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: dekompozícia na kružnice, všeobecné kompletné grafy, orientované kompletné grafy

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V tejto práci sa zaoberáme dekompozíciou všeobecných kompletných grafov na kružnice pevne zadanej dĺžky. Všeobecným kompletným grafom rozumieme kompletný graf, ktorý má všetky hrany rovnakej násobnosti, a môže mať orientáciu hrán.

Na označenie budeme používať písmená n, m a k. Písmeno n bude označovať počet vrcholov kompletného grafu, k označuje násobnosť hrán grafu a m označuje dĺžku kružníc na ktoré ho rozkladáme. Toto označenie používame v celej práci.

Základné nutné podmienky, aby jednoduchý kompletný graf K_n mohol mať C_m dekompozíciu, sú

1. $3 \leq m \leq n$
2. $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2m}$
3. každý vrchol má párny stupeň

V prípade jednoduchých kompletných grafov narážame v tretej podmienke na problém pri n párnom, budeme sa teda zaoberať grafom $K_n - I$, ktorý spĺňa podmienky a je veľmi podobný kompletnému grafu.

Riešeniu problému dekompozície grafov bolo venovaných množstvo prác, keďže táto téma sa rozvýja už pol storočie. Vo väčšine z nich sa autori venovali jednoduchým kompletným grafom, ale boli uverejnené aj články venované niektorým špeciálnym prípadom všeobecných kompletných grafov. Niektoré z významnejších výsledkov uvedieme nižšie.

Začneme prehľadom prác venovaných jednoduchým kompletným grafom. To, že základné nutné podmienky sú aj postačujúce pre m-párne a $n \equiv 1 \pmod{2m}$ bolo ukázané v prácach Gotziga[1] a Rosu[2]. Rodgerovi[3] sa podarilo ukázať, že ak n je nepárne a nutné podmienky sú postačujúce pre n spĺňajúce podmienku $m \leq n \leq 3m$, potom sú tieto podmienky postačujúce aj pre ľubovolné n nepárne. Ekvivalentný výsledok pre n-párne, a teda pre grafy $K_n - I$, dokázala Šajna[4]. Vďaka týmto sa zjednodušilo uvažovanie o jednoduchých kompletných grafoch na grafy s počtom vrcholov v rozsahu $m \leq n \leq 3m$. Následne sa podarilo Alspachovi a Gavlasovi [5] ukázať, že nutné podmienky sú aj postačujúce, ak parametre n a m majú rovnakú paritu. Prípad s rôznou paritou parametrov vyriešila neskôr Šajna[6]. Tieto práce uzavreli problém dekompozície kompletných grafov na kružnice rovnakej dĺžky. Autori oboch dôkazov postupovali veľmi podobne. Najprv pomocou už zmienených výsledkov obmedzili parameter n na prirodzené čísla z intervalu $< m\,; 3m >$ a potom riešili zvlášť prípady keď n bolo menšie ako $2m$ a keď bolo väčšie alebo rovné $2m$. V niektorých podprípadoch sa naviac ukázala potreba rôzneho prístupu k dôkazu, ak podiel $n/nsd(n,m)$ bol menší ako podiel $n/nsd(n-1,m)$, špeciálny prístup si taktiež vyžadovali niektoré prípady s malými parametrami.

Okrem prípadu jednoduchých kompletných grafov bola zujímavá aj otázka orientovaných kompletných grafov. V tomto prípade formulujeme základné podmienky dekompozície nasledovne:

1. $3 \leq m \leq n$
2. $n(n-1) \equiv 0 \pmod{m}$
3. do každého vrchola vchádza rovnaký počet hrán ako z neho vychádza

Ukázať, že nutné podmienky sú aj postačujúce sa podarilo viacerým autorom v [7]. Tento výsledok je zujímavý aj preto, že z neho triviálne vyplýva aj riešenie problému pre dvojnásobné neorientované grafy.

V niektorých prácach sa zase hľadali nutné a postačujúce podmienky na dekompozíciu kompletných grafov na cykly rôznych dĺžok. Bryant a Maenhaut[8] ukázali, že K_n (prípadne $K_n - I$, ak n je párne) sa dá dekomponovať na h Hamiltonových kružníc a t trojuholníkov práve vtedy, ak tieto parametre spĺňajú podmienku, že $nh + 3t$ je rovné počtu hrán v grafe. Bryant a Horsley vo svojej práci ukázali, že graf K_n je dekomponovateľný na kružnice dĺžok $m_1, m_2, \ldots, m_t$ práve vtedy, keď počet hrán grafu je rovnaký ako súčet hrán kružníc a ak n je dostatočne veľké.

Ďalším smerom výskumu sú aj dekompozície viacnásobných kompletných grafov. V prípade viacnásobných grafov sú základné nutné podmienky dekompozície tieto:

1. $3 \leq m \leq n$
2. $k \cdot n(n-1) \equiv 0 \pmod{2m}$
3. každý vrchol má párny stupeň

Ako sme už spomenuli vyššie, tvrdenie, že základné nutné podmienky sú aj postačujúce, v prípade dvojnásobných grafov triviálne vyplýva z výsledku pre orientované kompletné grafy uverejnenom v [7]. Medzi ďalšie dosiahnuté výsledky patrí napríklad aj práca B.R. Smitha v ktorej dokazuje, že nutné podmienky sú postačujúce pre rozklad k-násobných kompletných grafov na kružnice dĺžky k a pre rozklad k-násobných orientovaných grafov(s $2k$ šípmi medzi dvoma vrcholmi) na orientované kružnice.

V tejto práci sa podrobnejšie venujeme dôkazom uvedeným v [4, 5, 6, 7], teda výsledkom, ktoré ukazujú, že základné nutné podmienky dekompozície sú postačujúce v prípade jednoduchých kompletných grafov a v prípade rozkladu orientovaných kompletných grafov na orientované kružnice.

Po vyriešení problému dekompozície jednoduchých a orientovaných kompletných grafov, zostal aktuálnym už len problém s viacnásobnými hranami. Hlavnou úlohou tejto práce je predstaviť náš dôkaz, že základné nutné podmienky sú postačujúce aj v prípade viacnásobných kompletných grafov s párnym stupňom násobnosti, ktorý je zároveň minimálny vzhľadom na parametre n a m. Tento výsledok nepokrýva všetky prípady, keď stupeň násobnosti je párny, pretože pri minimalizácii stupňa násobnosti k, môže vzniknúť potreba riešiť dekompozíciu grafu s nepárnym stupňom. Na uzavretie problému dekompozície viacnásobných kompletných grafov by preto bolo potrebné ešte ukázať, že základné nutné podmienky sú postačujúce aj pre k nepárne a minimálne.

Kapitola 2

Základné pojmy a označenie

Nech G je graf, množinu vrcholov budeme označovať $V(G)$ a množinu hrán $E(G)$. Budeme sa prevažne zameriavať na grafy bez orientácie a bez slučiek. Orientovaný kompletný graf s n vrcholmi budeme označovať K_n^*, tento graf má medzi každými dvoma vrcholmi dva šípy s opačnými smermi.

Komplement grafu $\bar{G}$ je graf, ktorý má rovnakú množinu vrcholov ako G, a hranu medzi dvomi vrcholmi má práve vtedy, keď graf G nemá.

Cestu v grafe obsahujúcu p hrán (a teda $p+1$ vrcholov) budeme volať p-cesta. Jednoduchý kompletný graf s n vrcholmi budeme označovať K_n a k- násobný kompletný graf s n vrcholmi budeme označovať K_n^k.

Kružnicu s m vrcholmi, a teda aj s m hranami, označíme ako C_m.

Orientovaná kružnica C_m^*, je kružnica, ktorá sa skladá z orientovaných šípov, je súvislá a platí, že z každého vrcholu vychádza práve jeden šíp a tiež práve jeden z neho vychádza.

V tejto práci sa zaoberáme dekompozíciou grafov na iné grafy. Preto teraz uvedieme definíciu dekompozície.

Definícia 1. O grafe G hovoríme, že sa dá *rozložiť(dekomponovať)* na grafy H_1 a H_2 práve vtedy, keď G je hranovo disjunktným zjednotením grafov H_1 a H_2, túto skutočnosť označujeme $G \cong H_1 \oplus H_2$.

Definícia 2. Ak pre graf G platí $G \cong H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_l$ kde $H_1, H_2, \ldots, H_l$

sú všetky izomorfné s H, potom hovoríme, že G je H*-dekomponovateľný* a množinu $\{H_1, H_2, \ldots, H_l\}$ nazveme H*-dekompozíciou* grafu G.

Graf G je teda C_m-dekomponovateľný práve vtedy, ak sa dá rozložiť na podgrafy izomorfné s kružnicou dĺžky m.

Teraz definujeme niektoré pojmy, ktoré budeme neskôr používať pri prehľade metód použitých na dekompozíciu jednoduchých grafov a pri dôkazoch týkajúcich sa viacnásobných kompletných grafov.

Definícia 3. *Znásobením* grafu G budeme rozumieť graf G^k, ktorý vznikne z jednoduchého grafu G tak, že každá jeho hrana sa stane k -násobnou.

Všimnime si, že toto označenie je v súlade s našim označením všeobecného kompletného grafu. Naozaj, $(K_n)^k$ je rovnaký graf, ako všeobecný kompletný graf K_n^k.

Definícia 4. Nech k je prirodzené číslo a L je podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, [\frac{k}{2}]\}$. *Cirkulant* $S = S(n, L)$ je graf s vrcholou množinou $V(S) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ a s hranovou množinou $E(S) = \{u_i u_{i+l} | I \in Z_n, l \in L\}$. Kde o hrane $u_i u_{i+l}$ budeme hovoriť, že má dĺžku l, a o L budeme hovoriť, že je množinou hranových dĺžok cirkulantu S.

Poznamenajme, že K_n je izomorfný s $S(n, \{1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\})$ pre n párne a pre n nepárne je K_n izomorfný s $S(n, \{1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\})$.

Pri uvažovaní o viacnásobných grafoch oceníme užitočnosť pojmu viacnásobný cirkulant. Budeme využívať dva rôzne typy viacnásobných cirkulantov. Homogénny viacnásobný cirkulant je vlastne obyčajný cirkulant, ktorý ma káždú hranu práve k -násobnú. Tento typ cirkulantu budeme označovať $S^k(n, L)$.

Niekedy potrebujeme uvažovať o nehomogénnom cirkulante. Takýto cirkulant vznikne väčšinou odobratím niektorých hrán z homogénneho cirkulantu. Tento typ viacnásobného cirkulantu budeme označovať ako $S(n; L_0, L_1, \ldots, L_k)$, vznikne hranavo disjunktným zjednotením cirkulantov $S(n; L_i)$ kde $i = 0, \ldots k$, ktoré majú rovnakú množinu vrcholov. Hrany ľubovolného z týchto cirkulantov budeme nazývať *vrstva*.

Definícia 5. Nech G_1 a G_2 sú grafy, $V(G_1) = \{v_{1,0}, v_{1,1}, \dots, v_{1,n}\}$ a $V(G_2) = \{v_{2,0}, v_{2,1}, \dots, v_{2,n}\}$, potom graf H, ktorý vznikne *spojením* grafov G_1 a G_2 (označujeme $H = G_1 \bowtie G_2$), definujeme nasledovne, $V(H) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(H) = E(V_1) \cup E(V_2) \cup \{v_{1,i}v_{2,j} |$ pre všetky i a $j\}$

Pomocou predchádzajúcej definície sa môžeme na graf K_n pozerať ako na graf $K_{n-1} \bowtie K_1$. Graf K_n^k môžeme zase označiť ako $(K_{n-1} \bowtie K_1)^k$. Tento spôsob označenia využijeme najmä pri dôkaze dekompozície k-násobného grafu s párnym počtom vrcholov.

Definícia 6. Rotáciou ρ na Z_n budeme označovať cyklickú permutáciu $(n-1, 0, 1, \dots, n-2)$. V prípade, že existuje jednoznačné priradenie medzi nejakou množinou vrcholov a Z_n, napríklad v prípade cirkulantu, môžeme používať rotáciu ρ priamo na túto množinu vrcholov. Teda $\rho(v_i) = v_{(i+1) \ mod \ n}$. Symbolom ρ_A budeme označovať rotáciu prvkov množiny A.

Toto zobrazenie budeme často využívať v kapitole 3. pri dôkaze dekompozície grafu K_n^k.

Definícia 7. Cesta P v cirkulante $S(k, L)$ sa nazýva cik-cak cesta vtedy, ak žiadne dve hrany tejto cesty nemajú rovnakú dĺžku. Množinu všetkých hranových dĺžok použitých pri konštrukcii cesty P budeme označovať $L(P)$ a budeme ju nazývať množina dĺžok hrán cesty P.

Rotácia cesty P v cirkulante S je cesta Q, ktorá vznikne cyklickým premenovaním vrcholov, formálne: $Q = \rho^i(P) \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Názov cik-cak cesty pochádza zo spôsobu, akým sa zvyčajne táto konštrukcia používa pri rozkladaní jednoduchých kompletných grafov na kružnice. Zvyčajná konštrukcia cik-cak cesty P s $L(P) = (l_1, l_2, \dots, l_p)$ v cirkulante $S(k, L)$ je takáto: $u_0 u_{-l_1} u_{-l_1+l_2} u_{-l_1+l_2-l_3} \dots u_{-l_1+l_2-l_3 \dots (-1)^p l_p}$.

Kapitola 3

Prehľad techník použitých pri dekompozícii jednoduchých a orientovaných grafov

V tejto kapitole načrtneme postupy využívané v prácach [3, 4, 5, 6] pri dekompozícii jednoduchých kompletných grafov a v práci [7] na dekompozíciu kompletných orientovaných grafov.

3.1 Rozklad jednoduchých grafov

Najskôr uvedieme definície niektorých pojmov, ktoré v tejto časti využívame. Symbolom $G(2)$ budeme označovať graf, ktorý vznikne z grafu G takto: $V(G(2)) = V(G) \times Z_2$, $E(G(2)) = \{v_{i1}^{j1} v_{i2}^{j2} \mid j1, j2 \in Z_2, v_j \in V(G(2)), v_{i1}v_{i2} \in E(G)\}$, teda v $G(2)$ sú hranou spojené vrcholy u a v vtedy, keď boli spojené u a v v G, alebo ak u je kópia vrcholu spojeného s v.

Cieľom nasledujúceho textu je priblížiť dôkaz vety:

Veta 3.1. Jednoduchý kompletný graf K_n(resp. $K_n - I$) má C_m dekompozíciu práve vtedy, keď sú splnené základné nutné podmienky dekompozície.

Dôkaz tohto tvrdenia postupoval matematickou indukciou vzhľadom na vzťah parametrov n a m. V prácach [3] a [4] bol dokázaný indukčný krok a v prácach [5] a [6] bola dokázaná báza indukcie. Báza indukcie v tomto prípade znamenala dôkaz tvrdenia, že ak graf K_n (resp. $K_n - I$) spĺňa základné nutné podmienky C_m dekompozície, tak potom je C_m dekomponovateľný, pre n menšie alebo rovné $3m$, indukčný krok potom vychádzajúc z bázy ukázal toto tvrdenie pre všetky n. Netradične uvedieme najprv popis indukčného kroku.

3.1.1 Indukčný krok

V tejto podkapitole vychádzame, ako už bolo spomenuté, z prác Rodgera[3] a Šajny[4], ktorým sa podarilo ukázať nasledujúce tvrdenie:

Ak pre každé n nepárne spĺňajúce $m \leq n \leq 3m$, platí, že základné nutné podmienky dekompozície grafu K_n na kružnice C_m sú aj postačujúce, tak potom sú postačujúce pre každé n nepárne[3]. A že podobné tvrdenie platí aj pre n párne, graf $K_n - I$ a kružnicu C_m[4].

Keďže tieto dôkazy sú si veľmi podobné, budeme sledovať dôkaz Šajny[4]. Potrebujeme teda dokázať, že ak $K_n - I$, má C_m dekompozíciu pre všetky n párne a menšie alebo rovné ako $3m$, ktoré spĺňajú základné nutné podmienky dekompozície, tak potom má C_m dekompozíciu pre všetky n, spĺňajúce základné nutné podmienky.

Majme graf $K_n - I$ spĺňajúci nutné podmienky dekompozície, ktorého počet vrcholov je väčší ako $3m$. Dekompozíciu tohto grafu môžeme rozložiť na dekompozíciu niekoľkých grafov. Konkrétne na rozklad viacero grafov izomorfných s $(K_{2m} - I) \bowtie \bar{K}_t$, kompletného grafu s t vrcholmi bez jedna-faktoru a kompletného a-partitného grafu s $2m$ vrcholmi v každej partícii. Môžeme predpokladať, že t je menšie alebo rovné ako $3m$. Vďaka [3] vieme, že graf $K_{a(2m)}$ je C_m dekomponovateľný pre a väčšie ako 2. Vďaka predpokladom tvrdenia zase máme, že K_t pre t menšie ako $3m$ je C_m dekomponovateľný. Dôkaz sa preto zredukuje na dekompozíciu grafu $(K_{2m} - I) \bowtie \bar{K}_t$. Podrobný dôkaz tejto dekompozíce je obsahom práce [4], na ktorú odkazujeme čitateľa v prípade jeho záujmu. Pri dôkaze sa graf $(K_{2m} - I) \bowtie \bar{K}_t$ rozdelí na tri logické časti, dve izomorfné s K_m(označ. A a B), $\bar{K}_t$(časť C) a hrany medzi nimi, potom definuje kratšie kružnice medzi časťami A a B a následne ich rozšíri na kružnice dĺžky m nahradením niektorých hrán medzi A a B dvojicou hrán A-C a C-B.

3.1.2 Báza indukcie

Teraz priblížime dôkaz bázy indukcie tohto problému. Ako sme spomenuli budeme riešiť tento problém pre n menšie alebo rovné ako $3m$. Táto otázka bola vyriešená v prácach [5] a [6]. Pri dôkaze sú rozlíšené štyri hlavné podprípady podľa parity parametrov n a m. Keďže riešenia jednotlivých podúloh sú si podobné, priblížime v tejto práci základné postupy dôkazu podprípadu pre n párne a m nepárne podľa [6]. Čitateľa v prípade jeho záujmu o podrobné riešenie odkazujeme na spomenuté diela.

Štruktúra dôkazu, ktorému sa budeme teraz venovať obsahuje dve hlavné časti. Najprv je uvedený dôkaz tvrdenia pre n spĺňajúce $2m \leq n \leq 3m$ a následne je dokázaný zvyšný prípad $m \leq n \leq 2m$.

Dôkaz prípadu, keď n spĺňa $2m \leq n \leq 3m$ je jednoduchý, využíva tvrdenie, že ak G je C_m dekomponovateľný, potom aj $G(2)$, pokiaľ spĺňa základné nutné podmienky dekompozíce, je C_m dekomponovateľný. Keďže n je párne a m nepárne, je možné postupovať takýmto spôsobom, obidva menšie grafy sú už tvaru $K_{\frac{n}{2}}$, teda ak $\frac{n}{2}$ je nepárne, dá sa využiť výsledok dosiahnutý v [5] na rozklad obidvoch menších častí, potom sa pomocou jednoduchých uváh prevedú kružnice v jednotlivých častiach na kružnice pokrývajúce aj hrany medzi týmito časťami. Prípad keď $\frac{n}{2}$ je párne sa rieši podobne ako dvojnásobné komplenté grafy v práci [7], pretože keď „spojíme“ vrcholy v_i^0 a v_i^1 získame graf izomorfný s K_n^2.

Druhá časť dôkazu, teda pre n v intervale $m \leq n \leq 2m$ je trochu zložitejšia. Na graf $K_n - I$ sa budeme pozerať ako na $K_{n-2} \bowtie \bar{K}_2$, kde vrcholy grafu $\bar{K}_2$ budeme nazývať centrálne vrcholy. Umožňujú pri konštrukcii kružnice dĺžky m vychádzať z jednej cesty dĺžky m-2, ktorá sa prepojí cez jeden z centrálnych vrcholov, alebo sa dá vychádzať z dvoch kratších ciest. Samotný dôkaz je veľmi technický a nebudeme ho tu uvádzať, spočíva v rozložení grafu na niekoľko pomerne komplikovaných podgrafov a v ich následnej dekompozícii na kružnice.

3.2 Rozklad orientovaných grafov

Dôkaz toho, že základné nutné podmienky dekompozície sú aj postačujúce pre kompletné orientované grafy, bol uverejnený v [7]. V tejto podkapitole priblížime postup dôkazu uvedený vo vyššie zmienenej práci.

Podobne ako pri jednoduchých kompletných grafoch tak aj pri orientovných grafoch rozlíšime rôzne prípady podľa parity parametrov m a n.

Špeciálna situácia nastane, ak m aj n sú nepárne, vtedy totiž K_n^* spĺňa základné podmienky dekompozície práve vtedy, keď ich spĺňal aj graf K_n. Rozklad orientového grafu na orientované kružnice je rovnaký ako dekompozícia jednoduchého kompletného grafu, pretože jednoducho každú kružnicu využijeme dvakrát, raz v každom smere.

Prípad m nepárne a n párne je zaujímavý tým, že môžeme uvažovať priamo dekompozíciu K_n^* namiesto $K_n - I$ ako pri jednoduchých grafoch. Pri dôkaze zostávajúcich troch prípadov (okrem prípadu keď sú n aj m nepárne) postupujeme, podobne ako pri jednoduchých kompletných grafoch, matematickou indukciou vzhľadom na vzťah n a m. Teda zvlášť sa vyrieši prípad, keď n je „malé“ vzhľadom na m (t.j. $n \leq 3m$) a ostatné prípady potom zredukujeme na riešenie tohto pomocou konštrukcie popísanej v nasledujúcej časti.

3.2.1 Indukčný krok

Za predpokladu, že m je párne, sa dá dokázať nasledujúce tvrdenie: ak sú základné nutné podmienky aj postačujúce pre $n \leq 2m$, tak potom sú tieto podmienky postačujúce pre každé n. Keďže pri dôkaze tohto tvrdenia sa využíva rozklad na bipartitné grafy, nemôžeme tento postup využiť pre m nepárne, kde sa preto musíme uspokojiť s rovnakými výsledkami ako pri jednoduchých kompletných grafoch.

Uvažujme teda m párne a kompletný orientovaný graf s n vrcholmi, kde n je väčšie ako $2m$. Pre jednoduchosť v označení uvažujme n nepárne.

Najprv ukážeme, že K_{m+1}^* sa dá rozložiť na orientované cykly dĺžky m. Jeho vrcholy označíme ako $u, u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$. Vrchol u bude centrálny vrchol.

Definujme C nasledovne: $u, u_0, u_{-1}, u_1, u_{-2}, \ldots, u_{\frac{m}{2}-1}, u$. Jej postupnými rotáciami postupne dostaneme dekopozíciu grafu K^*_{m+1}.

Teraz rozložíme graf K^*_n na jeden podgraf $K_{n'}$, kde n' je menšie ako $2m$, a potrebné množstvo podgrafov izomorfných s K_{m+1}. Z indukčného predpokladu vieme rozložiť na orientované kružnice dĺžky m graf $K_{n'}$, rozklad grafov K_{m+1} sme ukázali. Potrebujeme ešte dekomponovať hrany medzi jednotlivými komponentami. Tieto hrany sú izomorfné niekoľkým grafom $K^*_{m,m+t}$, ktorých dekompozícia bola vyriešená v [9], týmto sme uzavreli dôkaz tohto tvrdenia.

3.2.2 Báza indukcie

Táto časť je rozdelená na dva podproblémy. Najprv je ukázaná platnosť lemy, že orientovaný cirkulant s $\frac{m}{2}$ kladnými hranovými dĺžkami, ktorý ma ku každej z nich aj prislúchajúcu zápornú, sa dá dekomponovať na orientované kružnice dĺžky m. Dôkaz tejto lemy je veľmi podobný ako dôkaz všeobecnejšej lemy 4.2, ktorý uvádzame neskôr pri viacnásobných grafoch.

Druhý podproblém je definovanie obvodových kružníc tak, aby zostávajúce hrany splnili podmienky nedávno spomenutej lemy. Riešenie je dosť technické a delí sa na viaceré prípady podľa delitelnosti čísla m štyrmi. Nebudeme ho na tomto mieste uvádzať, záujemcov odkazujeme na pôvodnú publikáciu [7].

Kapitola 4

Dekompozícia viacnásobných grafov pre k párne a minimálne

V tejto kapitole dokážeme, že graf K_n^k je C_m dekomponovateľný ak platia základné nutné podmienky a ak k je párne a minimálne.

Ak k nie je minimálne, teda ak existuje C_m dekompozícia grafu K_n^s, kde $s = \frac{k}{t}$ pre nejaké t, môžeme túto dekompozíciu zopakovať t-krát a získame dekompozíciu grafu K_n^k. My sa preto v nasledujúcom dôkaze venujeme len prípadu, keď k je minimálne. Ak sa pri minimalizácii párneho parametra k stane potrebným hľadať dekompozíciu grafu s nepárnym stupňom násobnosti, tak tento prípad je nad rámec tohto dôkazu.

V tejto kapitole budeme označovať vrcholy grafu K_n^k ako u_i kde $i \in Z_n$. Pri uvádzaní hranových dĺžok v cirkulante neuvažujeme orientáciu, ale pri definovaní ciest v grafe používame aj záporné hranové dĺžky, ich význam je tento: ak začneme vo vrchole u_l a ďalej používame hranovú dĺžku a tak sa dostaneme do vrcholu u_{l+a} pri hranovej dĺžke $-a$, zase do vrcholu u_{l-a}.

Keďže často používame postupy využité pri dekompozícii jednoduchých grafov, budeme niekedy používať pojem vrstva. Každá hrana $e_{i,j}$ v grafe K_n^k je k-násobná, rozdelíme ju teda na k jednoduchých hrán označených ako $e_{i,j}^1, e_{i,j}^2, \ldots, e_{i,j}^k$. Množinu hrán $\{e_{i,j}^l \mid \text{ pre všetky } i \text{ a } j\}$ budeme nazývať l-tá vrstva.

Pri dokazovaní najprv ohraničíme parametre k a n, vzhľadom na m. V celej kapitole budeme uvažovať k minimálne, teda pre dané n a m budeme uvažovať k najmenšie také, aby základné nutné podmienky dekompozície boli splnené.

Platí, že keď k máme párne a minimálne, potom aj m je párne. Jedinou výnimkou môže byť, ak k sa rovná dvom, vtedy má zmysel uvažovať aj m nepárne pre n párne kvôli podmienke (2). Tento prípad bol vyriešený v [7]. Preto v ďalšom texte predpokladáme m párne. Teraz uvedieme lemu, v ktorej ukážeme, že sa v ďalšom dokazovaní môžeme obmedziť na n spĺňajúce $m \leq n \leq 2m$.

Lema 4.1. Nech k a m sú párne, ďalej nech platí $3 \leq m \leq n$. Ak pre každé $n \leq 2m$, pre ktoré platia základné nutné podmienky dekompozície, existuje C_m dekompozícia grafu K_n^k, tak potom existuje dekompozícia grafu K_n^k pre každé n spĺňajúce základné nutné podmienky.

Dôkaz Môžeme uvažovať $n = v \cdot m + r$, kde r je minimálne a nezáporné. Rozdeľme graf K_n^k na $v - 1$ častí po m vrcholoch a jednu časť s $m + r$ vrcholmi. Prípadom, keď r je nulové sa zaoberať nebudeme, pretože vtedy minimálne k, pre ktoré graf K_n^k je C_m-dekomponovateľný, je jedna. Graf K_m môžeme dekomponovať podľa [6, 5], pretože spĺňa základné podmienky dekompozície aj bez násobnosti hrán. Opakovaním dekompozície grafu K_m pre každú vrstvu získame kompletnú dekompozíciu grafu K_m^k a tým vybavíme hrany vnútri každej časti s m vrcholmi. Hrany v podgrafe izomorfnom s K_{m+r}^k dekomponujeme podľa predpokladu lemy a dekompozíciu hrán medzi spomenutými podgrafmi ukážeme v ďalšej časti dôkazu.

Teraz teda potrebujeme dokázať nasledujúce tvrdenie: bipartitný graf $K_{m,m+r}$ je C_m dekomponovateľný. Poznamenajme, že hrany medzi dvomi časťami izomrfnými s K_m^k, indukujú bipartitný graf, v ktorom r je nulové.

Označme A, B množiny vrcholov bipartície grafu $(K_{m,m+r})^k$, $|A| = m \wedge |B| = m + r$. Označme vrcholy grafu takto $A = \{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$, $B = \{u_0, u_1, \ldots, u_{m+r-1}\}$.

Teraz môžeme definovať kružnicu C_0 nasedovne: $v_1 u_1 v_2 u_2 \ldots v_{\frac{m}{2}}, u_{\frac{m}{2}}, v_1$. Označme C množinu kružníc $C = \{C_0, \rho_B^1(C_0), \ldots, \rho_B^{m+r-2}(C_0)\}$. Všimnime si, že množina C, je vlastne dekompozíciou dvojnásobného bipartitného grafu s jednou partíciou veľkosti $m+r$ a druhou s $\frac{m}{2}$ vrcholmi(lebo sme použili len polovicu vrcholov z A).

Teda platí, že $C \cup \rho_A^{\frac{m}{2}}(C)$ je dekompozícia grafu $(K_{m,m+r})^2$. Vďaka tomu, že stupeň násobnosti k je párny, môžeme vyššie ukázanú dekompozíciu rozšíriť na rozklad grafu $K_{m,m+r}$. ∎

Teraz môžeme pristúpiť k hlavnej časti dôkazu nášho tvrdenia. Rozdelíme ho na dva veľké prípady, v prvej podkapitole ukážeme platnosť tvrdenia pre n nepárne a v druhej dokážeme jeho platnosť pre prípad, keď n je párne.

4.1 Prípad pre n nepárne

V tejto podkapitole budeme dokazovať platnosť tvrdenia, že základné nutné podmienky dekompozície kompletného viacnásobného grafu s nepárnym počtom vrcholov a párnym stupňom násobnosti, sú zároveň aj postačujúce.

Vďaka leme 4.1 nám stačí uvažovať o n spĺňajúcom $m \leq n \leq 2m$.

Najprv dokážeme lemu, ktorá nám umožní dekomponovať dvojnásobný cirkulant $S^2(n;A)$, kde A obsahuje lubovoľné hranové dĺžky od 1 do $\frac{n-1}{2}$ a jediné, čo požadujeme je, aby počet jej prvkov bol $\frac{m}{2}$. Táto lema vychádza z podobnej lemy uvedenej pri riešení problému pre orientované grafy [7]. Naša verzia je trochu upravená a zovšeobecnená. Neskôr sa na ňu budeme často pri konštrukcii odvolávať.

Lema 4.2. Nech m je párne a n nepárne, ďalej nech spĺňajú $4 \leq m \leq n$. Ak $A = \{a_1, a_2, \dots a_{\frac{m}{2}}\}$, kde $a_1, a_2, \dots a_{\frac{m}{2}}$ sú kladné celé čísla, usporiadané takto $a_1 < a_2 < \dots < a_{\frac{m}{2}} < \frac{n}{2}$, potom $S^2(n;A)$ je C_m dekomponovateľná.

Dôkaz Označme vrcholy v cirkulante nasledovne: $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$. Predpokladajme najprv, že m je deliteľné štyrmi. Na popísanie cesty v $S(n;A)$ špecifikujeme počiatočný vrchol a postupnosť hranových dĺžok použitých pri jej konštrukcii. Nech P obsahuje $m-1$ hrán, začína v u_0 a používa hranové dĺžky takto $a_1, -a_2, a_3, \dots, -a_{k-1}, -a_k, ak-1, \dots, -a_1$ a tomto poradí.

Všimnime si, že sme použili každú hranovú dĺžku práve dvakrát okrem a_k. Navyše, každý vrchol sme použili najviac raz, pretože, vďaka konštrukcii cesty P, v prvej polovici(po použitie hrany $-a_k$), vzdialenosť použitých vrcholov od u_0 rastie a v druhej tiež. Zároveň sme si to nemohli „pokaziť“ ani použitím hrany $-a_k$, pretože nemôže mať dĺžku väčšiu ako $\frac{n-1}{2}$. Táto cesta je teda dobre definovaná. Skúsme teraz zistiť, v akom vrchole sme skončili:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{k-1} - a_k + a_{k-1} - \cdots - a_1 = -a_k \pmod{n}$$

Keď za P pripojíme hranu a_k tak získame kružnicu C dĺžky m. Vďaka týmto vlastnostiam máme množinu $\{C, \rho(C), \rho^2(C), \ldots, \rho^{(n-1)}(C)\}$, čo je dekompozícia grafu $S(n; A)$. Pretože každá hranová dĺžka je použitá dvakrát v každej z kružníc, a vďaka tomu, že permutujeme vrcholy n-krát, odoberieme každú hranu dvakrát.

Ak m nie je deliteľné štyrmi, zostrojíme cestu P takto: začneme v u_0 a pokračujeme hranami dĺžok $a_1, -a_2, a_3, \ldots, -a_{k-1}, -a_k, ak-1, \ldots, -a_1$, použitých v tomto poradí. Potom platí

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{k-1} + a_k + a_{k-1} - \cdots - a_1 = a_k \pmod{n}$$

Keď pripojíme za P hranu dĺžky $-a_k$ vznikne kružnica C, dĺžky m, a množina kružníc $\{C, \rho(C), \rho^2(C), \ldots, \rho^{(n-1)}(C)\}$ je dekompozícia grafu $S(n; A)$. ■

Vďaka leme 4.2 nám stačí rozložiť graf K_n^k na hranovo disjunktné zjednotenie grafov izomorfných s C_m a $S^2(n, A)$, kde $|A| = \frac{m}{2}$. Teraz ukážeme, že vieme graf K_n^k dekomponovať na $\frac{k}{2}$ grafov izomorfných s $S^2(n, A)$ a na niekoľko kružníc dĺžky m.

Kým využijeme $\frac{k}{2}$-krát lemu 4.2, potrebujeme odobrať ešte $\frac{n-1}{2} - \frac{m}{2}$ hrán z každej vrstvy. Spolu je to $k \cdot \frac{n-1-m}{2}$ hrán.

Teraz môžeme pristúpiť k samotnému dôkazu tvrdenia. Pretože prípady, keď $k \leq 2$ sú vyriešené v [7], [5] a [6], budeme predpokladať, že k je aspoň 4.

Označme $m_0 = \frac{m}{k}$. Poznamenajme že m je deliteľné číslom k, ak k je minimálne. Ďalej označme $d = nsd(n, m)$, $m' = \frac{m}{d}$, $n' = \frac{n}{d}$. Prípad keď $d = 1$ vyriešime ako zvláštny prípad neskôr, situácia keď $d = m$ nemôže nastať, lebo potom minimálne $k = 1$ a my predpokladáme k aspoň 4. Teda budeme predpokladať, že $3 \leq d < m$.

Využijeme fakt, že graf K_n^k môžeme rozdeliť na d sektorov, každý s n' vrcholmi. Poznamenajme, že ak definujeme nejakú kružnicu tak, aby v každom sektore využila m' hranových dĺžok, tak jej celková dĺžka bude m. Definujme teda m'-cestu $P_{0,0}$ takto: začneme vo vrchole u_0 a postupne budeme využívať hrany dĺžok
$-1, 2, -3, 4, ..., -(m'-1), m'+n'-\frac{m'}{2}$.
Táto cesta teda skončí vo vrchole $u_{n'}$.

Cestu $P_{j,0}$ definujme takto: začneme vo vrchole u_0 a budeme postupne využívať hrany dĺžok
$-(n'\cdot j+1), n'\cdot j+2, -(n'\cdot j+3), \ldots, -(n'\cdot j+m'-1), n'\cdot j+m'+n'-\frac{m'}{2}$.
Všimnime si, že táto cesta tiež začína vo vrchole u_0, končí v $u_{n'}$ a využíva m' hrán, ale neobsahuje ani jednu hranu takej dĺžky aká by bola v $P_{j',0}$, ak $j' \neq j \pmod d$ a j aj j' sú celé čísla z intervalu $< 0, \frac{d-1}{2} >$.

Cesta $P_{j,i}$ vznikne nasledovne: $P_{j,i} = \rho^{i\cdot n'} P_{j,0}$. Teda cesta $P_{j,i}$ začína vo vrchole $n' \cdot i$ a potom využíva hrany tak, ako je spomínané v definícii cesty $P_{j,0}$. Parameter i môžeme preto prirodzene ohraničiť na také i, ktoré spĺňajú podmienku $0 \leq i \leq d-1$.

Cesty $P_{j,0}, P_{j,1}, \ldots, P_{j,d-1}$ sú navzájom vnútorne disjunktné, pretože každá z nich začína v inom vrchole a využívajú rôzne hranové dĺžky, ktoré sú naviac zvolené tak, aby neprišlo ku konfliktu ani pri počítaní v grupe Z_n. Zároveň cesty $P_{j,i}$ a $P_{j,i+1}$ majú spoločný jeden koncový vrchol. Zreťazením ciest $P_{j,i}$, kde i ide od 0 po $d-1$, vznikne kružnica $C_{j,0}$ dĺžky m.

Definujme kružnicu $C_{j,l} = \rho^l(C_{j,l})$. Zamyslime sa nad tým, aké hodnoty parametra l majú zmysel, ak nechceme, aby sa nám kružnice opakovali. Všimnime si, že rovnaké cesty sa zopakujú pre parametre $l = 0$ a $l = n'$, teda ako parameter l budeme brať celé čísla z intervalu $< 0, n'-1 >$.

Uvažujme množiny kružníc $M_j = \{C_{j,0}, C_{j,1}, \ldots, C_{j,n'-1}\}$. Keď z grafu K_n odoberieme niektorú množinu M_j, odoberieme vlastne m' hranových dĺžok, ktoré sú rôzne.

Aby sme mohli využiť lemu 4.2, musíme vedieť zostávajúce hrany usporiadať do vrstiev tak, aby vznikli dvojnásobné cirkulanty požadované v predpokladoch. Toto vieme zabezpečiť, ak vždy odoberieme z grafu množinu M_j párne veľa krát. Konštrukciu množín M_j sme popisovali na grafe K_n^1, ale pri našich úvahách môžeme preusporiadať hrany medzi jednotlivými vrstvami.

Napríklad: $k = 4$, z prvej a druhej vrstvy odoberieme množinu kružníc M_j, potom vyberieme $\frac{m'}{2}$ hranových dĺžok z tých, čo sme odstránili pomocou M_j, a príslušné hrany presunieme z tretej a štvrtej vrstvy na vrstvy jeden a dva, teda, premenujeme ich. Tým dosiahneme, že na každej vrstve bude rovnako veľa hrán a zároveň 1. a 2. vrstva, rovnako ako 3. a 4., obsahujú hrany rovnakých dĺžok čo dovoluje použiť lemu 4.2.

Vo všeobecnosti vieme takýmto spôsobom odoberať z vrstiev grafu $S^k(n, Z_{n-1})$ hranové dĺžky po $\frac{2m'}{k}$ tak, že potom vieme organizovať zostávajúce hrany, aby vyhovovali predpokladom lemy 4.2.

Zamyslime sa teraz, koľko najviac hranových dĺžok vieme odobrať z rokladaného grafu. Zjednotenie množín M_j cez všetky j spĺňajúce $0 \leq j \leq \frac{d-1}{2}$ definuje množinu kružníc pomocou ktorej vieme z každej vrstvy grafu K_n^k odobrať $m' \cdot \frac{d-1}{2} = \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}$ teda spolu s lemou 4.2 vieme odobrať $\frac{2m-m'}{2}$ hrán, celkový počet hrán je $\frac{n-1}{2}$, teraz rozoberieme 2 prípady:

1. ak $\mathbf{\frac{n-1}{2} \leq \frac{2m-m'}{2}}$

   Potrebujeme ukázať, že pomocou množín M_j vieme odobrať práve toľko hranových dĺžok, aby zostávajúce spĺňali podmienky lemy 4.2. Vďaka vyššie popísanej možnosti preusporiadať hrany medzi vrstvami, stačí overiť numerickú časť tohto tvrdenia. Teda potrebujeme ukázať, že $\frac{n(n-1-m)}{2} \cdot k \equiv 0 (\text{mod } 2m)$.

   Platnosť tohto vzťahu dokážeme nasledovne, predpokladáme, že k je minimálne, z toho a z druhej nutnej podmienky dekomponovateľnosti vyplýva $\frac{n(n-1)}{2} \equiv m_0 \text{ (mod } 2m_0)$, kde $m_0 = \frac{m}{k}$. Toto sa dá zapísať ako $\frac{n(n-1)}{2} = t \cdot m_0$ kde t je nepárne. Označme $r = n - m - 1$. Potom ak dosadíme do vzťahu dostávame:

$$\frac{n(r+m)}{2} = t \cdot m_0$$
$$\frac{n \cdot r}{2} \cdot (m \cdot n) = t \cdot m_0$$
$$\frac{n \cdot r}{2} = t' \cdot m_0, \text{ kde } t \text{ je párne}$$
$$\frac{n(n-m-1)}{2} \cdot k \equiv 0 (\text{mod } 2m)$$

   Teda sme dokázali, že v tomto prípade vieme vyberať množiny M_j vždy po dvoch. Vďaka tomuto faktu a tomu, že v predpokladoch lemy 4.2

nás zaujíma len počet hrán, sú tieto predpoklady splnené a ukázali sme tak platnosť nášho tvrdenia pre tento prípad.

Poznamenajme, že toto je jediné miesto, kde sa musíme spoliehať na to, že k je minimálne. Všetky ostatné časti tohto dôkazu by sa dali veľmi jednoducho opraviť aj pre k nie minimálne, len za cenu komplikovanejšieho označenia.

2. ak $\mathbf{\frac{n-1}{2} \geq \frac{2m-m'}{2}}$
   V tomto prípade využijeme ešte dvakrát lemu 4.2, odoberieme teda dva cirkulanty $S^2(n;A)$, $|A| = \frac{m}{2}$; tentokrát neodoberáme hrany po vrstvách, ale naprieč všetkými vrstvami. To znamená, že po odobratí preusporiadame hrany medzi vrstvami tak, ako to bolo popísané vyššie. Teda z jednej vrstvy odoberieme navyše $2 \cdot m_0$ hrán. Touto konštrukciou nezmeníme paritu výrazu $\frac{n(n-m-1)}{2 \cdot m_0}$, naviac počet hrán v jednej vrstve $n - 1 - \frac{m}{2} - 2 \cdot m_0$ je nezáporný, teda môžme znovu odoberať hrany pomocou množín M_j, ako v prípade 1.

Všimnime si, že jediná časť dôkazu, kde uvažujeme o konkrétnych dĺžkach sú množiny M_l, v ostatných častiach rozkladu môžeme využívať ľubovolné hranové dĺžky, teda pri riešení konkrétneho príkladu najprv vypočítame počet množín M_l, ktoré potrebujeme odobrať, odoberieme ich a až potom budeme dekomponovať ostatné hrany podľa lemy 4.2.

Zostáva nám dokázať špeciálny prípad, keď $d = 1$
Graf K_n^k budeme rozkladať na hranovo disjunktné podgrafy izomorfné s $S^2(n;A)$, kde $|A| = \frac{m}{2}$. Označme $m_0 = \frac{m}{k}$. Množinu A budeme postupne brať takto $\{1, 2, \dots, \frac{m}{2}\}, \{1+m_0, 2+m_0, \dots, \frac{m}{2}+m_0\}, \dots, \{l, l+1, \dots, \frac{n-1}{2}, 1, \dots, \frac{m}{2} - \frac{n-1}{2} - 1\}, \dots, \{\frac{n-1}{2} - m_0 + 1, \frac{n-1}{2} - m_0 + 1, \dots, \frac{m}{2} - m_0 + 1\}$.

Tvrdíme, že týmto spôsobom s využitím lemy 4.2 vieme rozložiť graf K_n^k na hranovo disjunktné kružnice dĺžky m. Potrebujeme ešte dokázať, že každá hranová dĺžka bude použitá práve v $\frac{k}{2}$ rôznych podgrafoch grafu K_k^n izomorfných s $S^2(n;A)$. Počet rôznych hranových dĺžok je $\frac{n-1}{2}$, Toto číslo, je vďaka našim predpokladom, deliteľné číslom m_0. Vďaka tomu sa každá hranová dĺžka vyskytne práve $\frac{\frac{m}{2}}{m_0} = \frac{k}{2}$-krát. $\blacksquare$

4.2 Prípad pre n párne

V tejto podkapitole budeme dokazovať platnosť tvrdenia, že základné nutné podmienky dekompozície kompletného viacnásobného grafu s párnym počtom vrcholov a párnym minimálnym stupňom násobnosti, sú zároveň aj postačujúce.

Vďaka leme 4.1 nám stačí uvažovať n spĺňajúce $m \leq n \leq 2m$.

Podobne ako v predchádzajúcej kapitole najprv ukážeme lemu, pomocou ktorej budeme neskôr môcť zjednodušiť samotný dôkaz. O grafe K_n^k budeme uvažovať ako o $(K_{n-1} \bowtie K_1)^k$. Kde vrchol podgrafu K_1 budeme nazývať *centrálny vrchol* a budeme ho označovať v, hodnotu $n-1$ budeme označovať ako $\tilde{n}$, teda budeme hovoriť o rozklade grafu $(K_{\tilde{n}} \bowtie K_1)^k$.

Lema 4.3. Nech n a m sú párne, množiny A_0, A_1 hranových dĺžok spĺňajú nasledovné $|A_0| = \frac{m}{2} - 1$, $|A_1| = \frac{m}{2} - 1$, ich prvky sú väčšie alebo rovné jednej a menšie alebo rovné ako $\frac{\tilde{n}-1}{2}$.

Potom graf $S(\tilde{n}; A_0, A_1) \bowtie K_1$ je C_m dekomponovateľný.

Dôkaz Hranové dĺžky v množine A_0 označme nasledovne $1 \leq a_{0,0} < a_{0,1} < \cdots < a_{0,\frac{m}{2}-2} \leq \frac{\tilde{n}-1}{2}$, podobne hranové dĺžky v množine A_1 označíme $1 \leq a_{1,0} < a_{1,1} < \cdots < a_{1,\frac{m}{2}-2} \leq \frac{\tilde{n}-1}{2}$. Najprv definujeme cestu P_0, ktorá začne vo vrchole u_0 a bude postupne využívať hrany dĺžok $a_{0,1}, -a_{0,2}, \ldots, sig \cdot a_{0,\frac{m}{2}-1}, -sig \cdot a_{1,\frac{m}{2}-1}, sig \cdot a_{1,\frac{m}{2}-2}, \ldots, -a_{1,1}$, kde sig označuje $(-1)^{\frac{m}{2}}$.

Cesta P_0 teda využíva každú z hranových dĺžok v množinách A_1 a A_2 práve raz. Keď definujeme množinu ciest $P_0, \rho(P_0), \rho^2(P_0), \ldots \rho^{\tilde{n}-1}(P_0)$, bude táto množina obsahovať každú hranu v dvojnásobnom nehomogénnom cirkulante $S(\tilde{n}; A_0, A_1)$ práve raz. Ak teraz definujeme kružnicu C_i ako vP_iv, dostávame dekompozícu grafu $S(\tilde{n}; A_0, A_1) \bowtie K_1$ na kružnice dĺžky m a tým je naša lema dokázaná. ∎

Pristúpme teraz k samotnému dôkazu. Máme graf $K_n^k \cong (K_{\tilde{n}} \bowtie K_1)^k$, kde samozrejme platí $\tilde{n} = n-1$. Pokiaľ by sme chceli využiť lemu 4.3, museli by sme dekomponovať graf $S(\tilde{n}; A_0, A_1, \ldots, A_{k-1})$, kde každá z množín A_i obsahuje

$\frac{\tilde{n}-m}{2}$. Keďže $\tilde{n}$ je nepárne dostávame podobnú situáciu ako v predchádzajúcej podkapitole, ale situáciu máme jednoduchšiu, pretože nemusíme zabezpečiť, aby vždy dve vrstvy mali rovnaké množiny hrán pri využití pomocnej lemy, pretože, na rozdiel od lemy 4.2, lema 4.3 umožňuje rôzne množiny A_0 a A_1.

Podobne ako v predchádzajúcom prípade zavedieme teraz základné označenie a ohraničenie používaných parametrov. Predpopkladajme, že k je aspoň 4, označme $d = nsd(\tilde{n}, m)$, $\tilde{n}' = \frac{\tilde{n}}{d}$, $m' = \frac{m}{d}$.

Prípad $d = 1$ vyriešime neskôr. Ak $d = m$, tak potom platí $\frac{n(n-1)}{2} \equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$, teda základné nutné podmienky sú splnené už pre $k = 1$, čo už je vyriešené v spomínaných prácach. Preto v ďalšom texte budeme predpokladať, že $3 \leq d \leq m - 1$.

Pri našej konštrukcii je zaujímavá parita jednotlivých parameterov, preto sa teraz zamyslime, čo o nej vieme povedať. Našim základným predpokladom je, že n je párne, potom $\tilde{n} = n - 1$ je nepárne. Takisto uvažujeme, že m je párne, potom samozrejme d je nepárne, m' párne a $\tilde{n}'$ je nepárne.

V ďalšom texte budeme dekomponovať graf $S^k(\tilde{n}, Z_{\tilde{n}-1})$ tak, aby zostalo v každej vrstve $\frac{m}{2} - 1$ hranových dĺžok. To potrebujeme, aby sme mohli využiť lemu 4.3. Definujme cestu $P_{0,0} = u_0 u_{-1} u_1 \dots u_{-\frac{m'}{2}-1} u_{\tilde{n}'}$. Cestu $P_{j,0}$ definujeme nasledovne $P_{j,0} = u_0 u_{-j\cdot\tilde{n}-1} u_1 \dots u_{-j\cdot\tilde{n}-\frac{m'}{2}-1} u_{\tilde{n}}$. Na definúciu ciest $P_{j,i}$ využijeme znovu cyklickú permutáciu ρ, teda $P_{j,i} = \rho^{i\cdot\tilde{n}}(P_{j,0})$.

Rovnako ako v prechádzajúcej podkapitole sme získali množninu množín kružníc $M = \{M_0, M_1, \dots, M_{\frac{d-1}{2}}\}$, ktorá vznikne takto: $C_j^{(0)} = P_{j,0} P_{j,1} \dots P_{j,d-1}$, $C_j^{(t)} = \rho^t(C_j^{(0)})$, množina $M_j = \{C_j^{(t)} | 0 \leq t \leq \tilde{n}' - 1\}$. Pokiaľ odoberieme z cirkulantu $S(\tilde{n}, Z_{\frac{\tilde{n}-1}{2}})$ niektorú z množín kružníc M_j odstránime z hranovej množiny cirkulantu m' hranových dĺžok.

Potrebujeme ukázať, že týmto spôsobom vieme zredukovať množinu hranových dĺžok cirkulantu na $\frac{m}{2} - 1$ prvkov. Pretože uvažujeme k-násobný graf, môžeme odoberané hrany distribuovať medzi jednotlivé vrstvy grafu rovnomerne a teda z jednej vrstvy odoberieme s jednou množinou M_j práve $\frac{m'}{k}$ hranových dĺžok, podobný spôsob sme podrobnejšie popísali v predchádzjúcej podkapitole. Poznamenajme, že vďaka minimálnosti k označuje zlomok $\frac{m'}{k}$ celé číslo a že každú z množín M_j môžeme teda odobrať k krát. Z tretej

základnej nutnej podmienky dekompozície máme $k \cdot \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{m}$ čo môžeme napísať ako
$k \cdot \frac{n \cdot \tilde{n}}{2} \equiv 0 \pmod{m}$ po vydelení číslom d, keďže $\tilde{n}'$ je nesúdelitelné s m, dostávame
$k \cdot \frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{m'}$. Podarilo sa nám teda ukázať, že počet hranových dĺžok, ktoré potrebujeme odobrať $\frac{n-2}{2} - (\frac{m}{2} - 1) = \frac{n}{2} - \frac{m}{2}$ je deliteľný počtom hrán, ktoré vieme odobrať spolu s jednou množinou M_j.

Teraz potrebujeme overiť, či vieme odobrať dostatočný počet hranových dĺžok. Množín M_j máme k dispozícii $\frac{d-1}{2}$, teda spolu vieme týmto spôsobom odobrať $\frac{d-1}{2} \cdot m' = \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}$. Celkový počet hranových dĺžok je $\frac{\tilde{n}-1}{2}$, my vieme odobrať $\frac{m}{2} - \frac{m'}{2}$, pomocou množín M_j a $\frac{m}{2} - 1$ pomocou lemy 4.3. Teda ak je n vzhľadom k m a m' príliš veľké, t.j. $2m \geq n \geq 2m - m'$, budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcej podkapitole a využijeme raz lemu 4.2 na odobratie prebytočných hrán, tým sme tento prípad dokázali.

Poznamenajme ešte, že aj tu platí poznámka uvedená v predchádzajúcej podkapitole a teda, že len obvodové kružnice požadujú špecifické hranové dĺžky pri svojej konštrukcii.

Ešte musíme dokázať prípad keď $n - 1$ je nesúdeliteľné s m, teda keď $d = 1$. Budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcej podkapitole, kde sme riešili podobný problém. Uvažujeme teda graf izomorfný s $S^k(\tilde{n}, A)$, kde $|A| = \frac{n-m}{2}$, keďže v leme 4.3 nepožadujeme nijaké špeciálne vlastnosti hranových dĺžok, zvoľme napríklad $A = Z_{n-m}$. Platí, že počet hranových dĺžok aj s násobnosťou je deliteľný číslom m, preto môžeme použiť presne rovnaký postup ako v predchádzajúcej podkapitole.

Rozdelme teda graf $S^k(\tilde{n}, Z_{n-m})$ na niekoľko cirkulantov $X(\tilde{n}, A)$ spĺňajúcich podmienky lemy 4.2. Definujme $m_0 = \frac{m}{k}$. Množinu A budeme postupne brať takto $\{1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\}, \{1 + m_0, 2 + m_0, \ldots, \frac{m}{2} + m_0\}, \ldots, \{l, l + 1, \ldots, \frac{\tilde{n}-1}{2}, 1, \ldots, \frac{m}{2} - \frac{\tilde{n}-1}{2} - 1\}, \ldots, \{\frac{\tilde{n}-1}{2} - m_0 + 1, \frac{\tilde{n}-1}{2} - m_0 + 1, \ldots, \frac{m}{2} - m_0 + 1\}$. Týmto spôsobom vieme dekomponovať graf $S^k(\tilde{n}, Z_{n-m})$ na kružnice dĺžky m.

Podarilo sa nám teda ukázať tvrdenie vyslovené v úvode tejto podkapitoly a tým ukončiť hlavnú časť tejto práce. ∎

Záver

V tejto práci sme sa venovali otázke, či v prípade dekompozície kompletných viacnásobných grafov na kružnice zadanej dĺžky sú základné nutné podmienky aj postačujúce. Podarilo sa nám dokázať, že základné nutné podmienky dekompozície sú postačujúce ak stupeň násobnosti grafu je párny a minimálny. Tento výsledok nepokrýva všetky prípady, keď stupeň násobnosti je párny, pretože pri minimalizácii stupňa násobnosti k, môže vzniknúť potreba riešiť dekompozíciu grafu s nepárnym stupňom. Na uzavretie problému dekompozície viacnásobných kompletných grafov je potrebné ešte ukázať, že základné nutné podmienky sú postačujúce aj pre k nepárne a minimálne.

Literatúra

[1] A. Kotzig, "On decompositions of the complete graph into 4k-gons," *Mat-Fiz Cas 15*, 1965.

[2] A. Rosa, "On cyclic decompositions of the complete graph into (4m + 2)-gons," *Mat-Fiz Cas 16*, 1966.

[3] C. C. Lindner, C. A. Rodger, D. G. Hoffman, "On the construction of odd cycle systems," *Journal of Graph Theory*, vol. 13, 1989.

[4] M. Sajna, "On decomposing $K_n - I$ into cycles of a fixed odd length," *Discrete Math.*, vol. 244, no. 1-3, pp. 435–444, 2002.

[5] H. Gavlas, B. Alspach, "Cycle decompositions of K_n and $K_n - I$," *J Combin Thery Ser B 81*, 2001.

[6] M. Sajna, "Cycle decompositions III: Complete graphs and fixed length cycles," 2001.

[7] B. Alspach, H. Gavlas, M. Sajna, and H. Verrall, "Cycle decompositions IV: complete directed graphs and fixed length directed cycles," *J. Comb. Theory Ser. A*, vol. 103, no. 1, pp. 165–208, 2003.

[8] B. Maenhaut, Darryn Bryant, "Decompositions of complete graphs into triangles and hamilton cycles," *Journal of Combinatorial Designs*, vol. 12, 2004.

[9] D. Sotteau, "Decompositions of $K_{m;n}$ ($K_{m;n}$) into cycles (circuits) of length $2k$," *J. Combin. Theory Ser.*, p. 7581, 1981.