Katedra Informatiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Malé cyklové pokrytia v grafoch

(Bakalárska práca)

František Grega

Vedúci: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD. Bratislava, 2009

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

. . . .

Poďakovanie

Ďakujem môjmu školiteľovi prof. RNDr. Martinovi Škovierovi, PhD. za konzultácie a cenné rady, za výber témy a poskytnutie literatúry. Ďalej ďakujem blízkym za trpezlivosť a pomoc.

Abstrakt

Autor: František Grega
Názov práce: Malé cyklové pokrytia v grafoch
Univerzita komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra informatiky
Vedúci: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Bratislava 2009

Táto práca sa zaoberá cyklovými pokrytiami v grafoch a ich vlastnosťami. Poukazujeme v nej na súvis rôznych pohľadov na ten istý problém.

Kľúčové slová: CDC, SCDC, PPDC, cyklus, kružnica, pokrytie cyklami

Abstract

Author: František Grega
Title: Small cycle double covers in graphs
Comenius University in Bratislava
Faculty of mathematics, physics and informatics
Department of Computer Science
Advisor: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Bratislava 2009

This work is about cycle covers in graphs and their properties. We are pointing out relation of various aspects of the same problem.

Keywords: CDC, SCDC, PPDC, cycle, cycle cover

Predhovor

Problematika cyklových pokrytí v grafoch je relatívne známou v oblasti teórie grafov. Rieši otázku, ako je možné pokryť graf súborom cyklov tak, aby boli splnené nejaké podmienky. Postupom času sa teória obohatila o nové poznatky, smery, ktorými sa v súčastnosti výskum v tejto oblasti uberá. Otázka cyklových pokrytí zasahuje do oblastí, ako toky v grafoch, farbenie grafov a pod.

Cyklové pokrytia grafov, ako oblasť skúmania teórie grafov som si vybral, pretože ma tento predmet zaujal a chcel som obohatiť svoje vedomosti o výskum v podobe bakalárskej práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Cieľ práce

Témou dvojitých cyklových pokrytí sa začali zaoberať v 70. rokoch 20. storočia Seymour a Szerkes, ktorí formulovali základnú hypotézu tejto teórie. Od toho času sa rozvinula do rôznych podôb a našou snahou bude urobiť akýsi prehľad jednej vybranej podoby tejto teórie, porovnať ju s ostatnými a overiť platnosť zadanej hypotézy na konkrétnej triede grafov.

1.2 Terminológia a označenia

Kružnica. Súvislý graf s všetkými vrcholmi stupňa 2.

Cyklus. Graf s všetkými vrcholmi párneho stupňa.

Karteziánsky súčin grafov ($\square$). Karteziánsky súčin $G\square H$ grafov G, H je graf s

$$V(G\square H) = \{v_1v_2 \,|\, v_1 \in V(G), v_2 \in V(H)\}$$

a

$$E(G\Box H) = \{\, (uv, xy) | (u = x \text{ a } (v, y) \in E(H)),$$
$$\text{alebo } ((u, x) \in E(G) \text{ a } v = y)\,\}.$$

Dvojité cyklové pokrytie (CDC). Hovoríme, že graf G má CDC práve vtedy, keď má súbor kružníc $\mathbf{C}(G)$ taký, že každá hrana z G leží práve v dvoch kružniciach z $\mathbf{C}(G)$.

Malé dvojité cyklové pokrytie (SCDC). Hovoríme, že graf G má SCDC práve vtedy, keď má CDC a platí, že $|\mathbf{C}(G)| < |V(G)|$.

Dvojité pokrytie cestami (PPDC). Hovoríme, že graf G má PPDC práve vtedy, keď má súbor ciest $\mathbf{P}(G)$ taký, že každá hrana z G leží v práve dvoch cestách z $\mathbf{P}(G)$ a každý vrchol z G je koncovým vrcholom v práve dvoch cestách z $\mathbf{P}(G)$. Pod vlastnosťou *byť koncovým vrcholom nejakej cesty* myslíme, že ak máme cestu $v_1, v_2, ..., v_n$, tak jej koncovými vrcholmi sú v_1 a v_n.

Používané označenia

Kružnicu o dĺžke n budeme označovať, ako C_n. Cestu dĺžky n označíme, ako P_n, strom ako T.

Majme graf $G\Box H$. Uvažujme, že $V(H) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. *Kópiou grafu* G nazývame graf G^i, $0 \le i \le n$, pre ktorý platí, že $u \in V(G) \to uv_i \in V(G^i)$ a tiež, že $(x, y) \in E(G) \to (xv_i, yv_i) \in E(G^i)$. Obdobné označenie bude platiť aj pri kópiach grafu H v grafe $G\Box H$ a tiež označenie kópie cesty (kružnice) $P \in G$ ($C \in G$) v grafe $G\Box H$ budeme označovať podľa príslušnosti cesty (kružnice) konkrétnej kópie napríklad grafu G^i, ako P^{G^i} (C^{G^i}). Ak v texte nebudeme používať aj kópie grafu H, tak si toto označenie zjednodušíme na P^i (C^i). Kópie vrcholov budeme označovať, ako v^i.

Označenie $G \simeq H$ hovorí, že grafy G a H sú navzájom *izomorfné*. To znamená, že ak „premenujeme" vrcholy jedného grafu, vhodným spôsobom, tak budú totožné.

$K_{m,n}$ označuje kompletný bipartitný graf. Potom označením $V(K_{m,n}) = (A, B)$ myslíme jeho delenie na 2 časti a platí $V(K_{m,n}) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ a $E(G) = \{(u, v) \mid u \in A, v \in B\}$.

Nech G je graf, ktorý má PPDC $\mathbf{P}$. Graf $A(\mathbf{P})$ je multigraf, ktorý má rovnakú množinu vrcholov, ako G. Pre všetky $P \in \mathbf{P}$, $A(\mathbf{P})$ má hranu medzi dvoma koncovými vrcholmi P. Uvedomme si, že $A(\mathbf{P})$ je 2-pravidelný multigraf a teda je jednoduché orientovať hrany z $A(\mathbf{P})$ tak, aby pre každý vrchol $v \in A(\mathbf{P})$ platilo, že $d^+(v) = d^-(v) = 1$, ak $d^+(v)$ je počet hrán končiacich v v a $d^-(v)$ je počet hrán začínajúcich v v. Je jednoduché potom túto orientáciu hrán premietnuť do grafu G, kde každá cesta $P \in \mathbf{P}$ má rovnakú orientáciu, ako jej asociovaná hrana v $A(\mathbf{P})$. Takéto orientovanie ciest nazývame *vyvážené*. Ak $P^{\rightarrow}$ je orientovaná cesta, tak $P^{\leftarrow}$ je opačne orientovaná cesta.

Kapitola 2

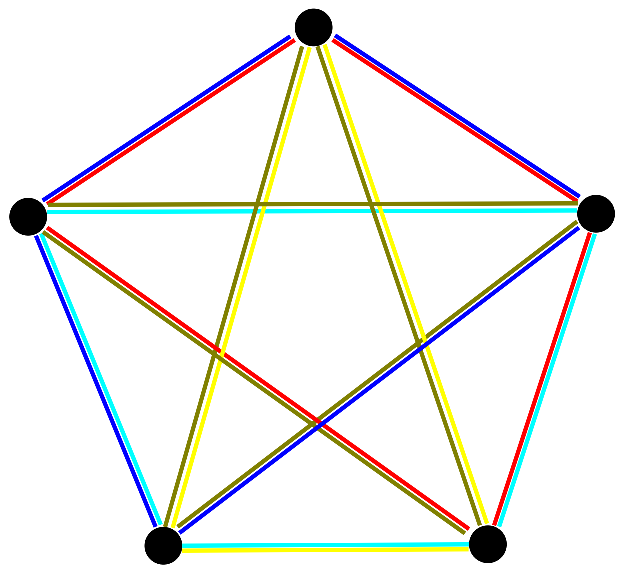
Hypotézy

Najskôr v tejto kapitole uvedieme základné hypotézy a vety , ktoré nám priblížia danú problematiku. Taktiež sa pokúsime načrtnúť súvis medzi nimi.

2.1 Hypotéza CDC

Hypotéza 2.1 *Každý bezmostý graf má systém cyklov (t.j. podgrafov s párnymi stupňami) taký, že každá hrana je v práve dvoch cykloch vo systéme. (Každý bezmostý graf má CDC.)*

Túto hypotézu formulovali v 70. rokoch nezávisle od seba Szerkes a Seymour, pričom autorstvo sa častejšie pripisuje Seymour. Szerkes vyslovil hypotézu CDC pre kubické grafy, ktorá je ekvivalentná s hypotézou CDC. V súčastnosti sa považuje za jeden z najzávažnejších otvorených problémov v teórii grafov. V postupe pri riešení hypotézy CDC pre rôzne triedy grafov sa často využívajú znalosti z oblasti tokov, ako napríklad nikde nulový 4-tok, alebo podobne znalosti z oblasti problémov zafarbiteľnosti hrán určitým počtom



Obr. 2.1: Kompletný graf K_5 a CDC s počtom cyklov 5

farieb (napríklad 3-zafarbiteľnosť). Jeden možný prístup pri dokazovaní hypotézy CDC by mohlo byť aj napríklad ukázanie, že každý graf obsahuje redukovateľnú konfiguráciu, podgraf, ktorý može byť nahradený menším podgrafom. Vo všeobecnosti sa podarilo ukázať, že problém CDC sa dá redukovať na kubické grafy, ktoré niesú 3-zafarbiteľné (tzv. snarky).

2.1.1 Hranové grafy

V práci [MS01] bolo ukázané, že dokazovanie hypotézy CDC pre hranové grafy je rovnako ťažké, ako dokazovanie hypotézy CDC pre dvojsúvislé grafy. Taktiež bolo ukázané, že ak má graf G CDC, tak aj $L(G)$ má CDC.

2.1.2 Planárne grafy

Stenové dvojité cyklové pokrytie (FCDC) grafu G je definované, ako súbor kružníc taký, že ak G je topologický dvojsúvislý rovinný graf, t.j. rovinný graf s daným rovinným nakreslením, tak pre každú stenu S_i grafu G platí, že hrany incidentné so stenou S_i tvoria kružnicu K_i a platí že K_i patrí FCDC. Nakoľko každá hrana grafu G je incidentná práve s 2 stenami, tak patrí 2 kružniciam z FCDC a teda FCDC je CDC. Uvedomme si, že dvojsúvislosť nám zaručí, že každá hrana je incidentná práve s 2 stenami, resp. vôbec fakt, že každá hrana leží na nejakej kružnici grafu G.

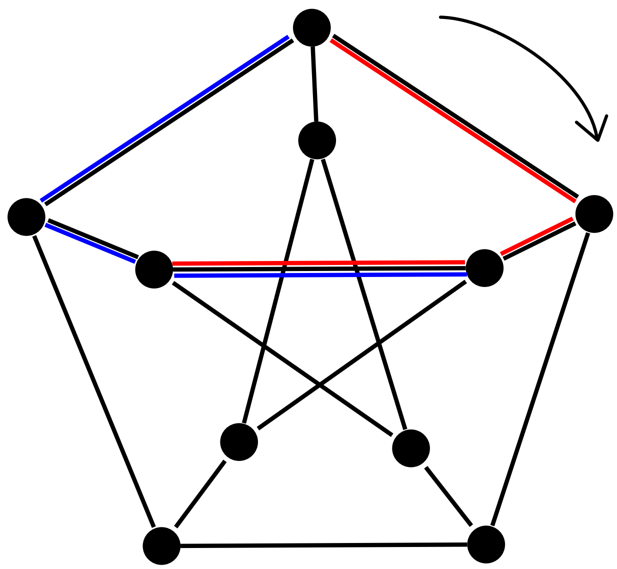
2.2 Hypotéza PPDC

Hypotéza 2.2 *Každý jednoduchý graf má PPDC.*

Túto hypotézu dokázal Li v [Li90]. Dôležitou vlastnosťou PPDC, vďaka ktorej má zmysel sa s ním zaoberať je, že ak máme graf G bez izolovaných vrcholov, tak vždy existuje PPDC grafu G také, že žiadna cesta z daného PPDC nemá dĺžku 0.

2.3 Hypotéza SCDC

Hypotéza 2.3 *Každý jednoduchý bezmostý graf na n vrcholoch má dvojité pokrytie kružnicami, pričom kružníc je najviac $n-1$. (Každý jednoduchý bezmostý graf má SCDC.)*



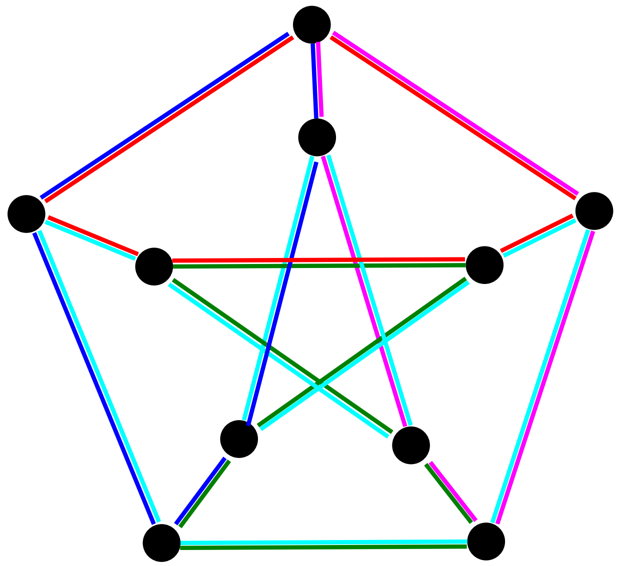
Obr. 2.2: Petersenov graf a PPDC.

Pri riešení hypotézy CDC vyvstala automaticky otázka, či je možné nejako ohraničiť počet cyklov v dvojitom cyklovom pokrytí grafu. Túto hypotézu (SCDC) načrtol Bondy a dnes je stále otvorená, pretože niektoré grafy na n vrcholoch vyžadujú v svojich CDC najmenej $n-1$ kružníc a zároveň nie je zatiaľ známy jednoduchý graf na n vrcholoch, ktorý by vyžadoval viac, ako $n-1$ kružníc vo svojom najmenšom CDC. Medzi grafy, ktoré vyžadujú najmenej $n-1$ kružníc patria napríklad kompletné grafy, čo vyplýva z nasledovnej vety.

Veta 2.1 *Majme graf G, ktorý má CDC. Počet kružníc v tomto CDC bude minimálne maximálny stupeň grafu.*

Dôkaz.

Majme teda graf G. Nech $v \in V(G)$ a platí, že v má maximálny stupeň $d(v) = n$. Potom vieme, že keďže každá hrana incidentná s v je v CDC práve



Obr. 2.3: Petersenov graf a SCDC s počtom cyklov 5

dvakrát a platí, že každá kružnica z CDC obsahuje buď dve hrany incidentné s v, alebo žiadnu, tak počet kružníc v CDC bude minimálne $\frac{2n}{2} = n$, čo je zároveň maximálny stupeň grafu. ■

Poznámka: V texte sa objavujú striedavo pojmy cyklus a kružnica. Uvedomme si, že nakoľko CDC nemá špecifikovaný počet kružníc v pokrytí grafu, môžeme používať pri vyslovovaní hypotézy pojem kružnice namiesto cyklu. V hypotéze SCDC to však neplatí a tak pre SCDC budeme používať pojem kružnice. Uvedomme si tiež, prečo je hypotéza zameraná na jednoduché grafy. Ak by sme mali graf G s násobnými hranami, kde $|V(G)| \leq d(v) \wedge v \in V(G)$, tak je zrejmé, že CDC bude mať najmenej $|V(G)|$ kružníc. Využili sme predchádzajúcu vetu o minimálnom počte CDC.

2.3.1 Hranové grafy

Bolo dokázané, že hranový graf ľubovoľného grafu bez vrcholа stupňa 2 má SCDC. Uvádzame niekoľko viet ohľadom SCDC na hranových grafoch.

Veta 2.2 *Ak T je strom neobsahujúci 2-most, tak $L(T)$ má SCDC. [MS01]*

Veta 2.3 *Pre všetky $n \geq 2$ $L(K_n)$ má SCDC. [MS01]*

Veta 2.4 *$L(K_{m,n})$ má SCDC pre $m, n \geq 1$ okrem prípadu, keď $\{m, n\} = \{1, 2\}$. [MS01]*

Veta 2.5 *Ak G je planárny graf neobsahujúci 2-most, tak $L(G)$ má SCDC. [MS01]*

2.3.2 Planárne grafy

Hoci sme v predchádzajúcej sekcii ukázali, že FCDC je CDC, pre SCDC to neplatí. Ak totiž G je jednoduchý dvojsúvislý planárny graf na n vrcholoch obsahujúci viac, ako $2n - 3$ hrán, tak platí, že G má najmenej n stien. Predchádzajúce vyplýva z Eulerovho vzorca ($|V(G)| - |E(G)| + s = 2$), kde s je počet stien v grafe.

Veta 2.6 *Maximálne planárne grafy majú SCDC. [Sey93]*

Toto sú jednoduché planárne grafy, kde každá stena formuje trojuholník.

Veta 2.7 *4-súvislé planárne grafy majú SCDC. [Sey93]*

2.3.3 Karteziánsky súčin grafov

Táto trieda grafov sa zdá byť v istom zmysle ideálnou, pretože pri dokazovaní SCDC pre graf z tejto triedy môžeme často využiť poznatky z PPDC. V nasledujúcej kapitole uvedieme dôkaz, ktorý, ako aj dôkazy nasledovných viet, sa o PPDC opierajú.

Veta 2.8 *$G \square P_2$ má SCDC. [NS08]*

Veta 2.9 *$G \square P_k$, pre $k \geq 3$, má SCDC ak G má SCDC. [NS08]*

Veta 2.10 *Nech G je n vrcholový graf bez izolovaných vrcholov a nech G má SCDC. Potom pre ľubovoľný strom T, $G \square T$ má SCDC. [NS08]*

Veta 2.11 *Nech G je graf na n vrcholoch bez izolovaných vrcholov. Potom pre všetky $k \geq 2$, $G \square C_{2k}$ má SCDC s $2n$ kružnicami. Navyše, ak G má SCDC, tak $G \square C_{2k-1}$ má SCDC s najviac $3n - 1$ kružnicami. [NS08]*

2.4 Ďalšie hypotézy

Hypotéza 2.4 *(5-CDC) Každý bezmostý graf má systém cyklov S taký, že $|S| \leq 5$ a každá hrana je práve v dvoch cykloch.*

Hypotéza 2.5 *(5-CDC) (iná formulácia) Každý bezmostý graf má dvojité pokrytie kružnicami také, že kružnice je možné zafarbiť 5 farbami tak, že každá hrana je v práve 2 kružniciach rôznej farby.*

Predchádzajúce dve hypotézy sú ekvivalentné.

Kapitola 3

Aplikácia

V tejto kapitole ukážem súvis medzi triedou hranových grafov kompletných bipartitných grafov a triedou karteziánskych súčinov grafov.

3.1 Hranové grafy a karteziánsky súčin grafov

Veta 3.1 $L(K_{m,n}) \simeq K_m \Box K_n$.

Dôkaz.

Nech $V(K_{m,n}) = (A, B)$ a $|A| = m$, $|B| = n$. $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Potom

$$V(L(K_{m,n})) = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_n), (a_2, b_1), ...(a_m, b_n)\}$$

a

$$E(L(K_{m,n})) = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) |\, x_1 = x_2 \operatorname{xor} y_1 = y_2\}.$$

Nech $|V(K_m)| = m$, $|V(K_n)| = n$. Nech $V(K_m) = \{c_1, c_2, ...c_m\}$, $V(K_n) = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$.

Potom

$$V(L(K_m \square K_n)) = \{c_1d_1, c_1d_2, ..., c_1d_n, c_2d_1, ...c_md_n\}$$

a

$$E(L(K_m \square K_n)) = \{(x_1y_1, x_2y_2) |\, x_1 = x_2 \,\mathrm{xor}\, y_1 = y_2\}.$$

Zjavne existuje bijektivne zobrazenie $\varphi((a_i, b_j)) = c_id_j$ pre všetky $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Keďže bijektívne zobrazenie z množiny vrcholov na množinu vrcholov nie je nič iné, ako tzv. „premenovanie" vrcholov, tak platí, že grafy $L(K_{m,n})$ a $K_m \square K_n$ sú izomorfné a teda $L(K_{m,n}) \simeq K_m \square K_n$. ■

3.2 Karteziánsky súčin a SCDC

Veta 3.2 *K_n má SCDC s $n-1$ hamiltonovskými kružnicami.*

Konštrukčný dôkaz tejto vety sa dá nájsť v [Bon90b].

Veta 3.3 *$G \square H$ má SCDC, ak G a H majú SCDC a ak platí, že aspoň jeden z grafov G, H má v nejakom svojom SCDC hamiltonovskú kružnicu.*

Dôkaz.

Dôkaz je z veľkej časti podobný dôkazu vety 2.11. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že H má SCDC s hamiltonovskou kružnicou C. Nech $\mathbf{P}(G)$ je PPDC grafu G. Ďalej len $\mathbf{P}$. Nech $\mathbf{P}$ je vyvážené. Nech $|G| = n$.

Uvažujeme 2 prípady:

$|C| = 2k$. Nech $Q \in \mathbf{P}$ je cesta, ktorá má koncové vrcholy p a q. Nech pre $0 \leq i \leq 2k-1$, Q^i má koncové vrcholy p^i a q^i. Potom

$$C_Q = Q^{0\rightarrow} \cup \{q^0q^1\} \cup Q^{1\leftarrow} \cup \{p^1p^2\} \cup Q^{2\rightarrow} \cup \{q^2q^3\} \cup Q^{3\leftarrow} \cup \{p^3p^4\} \cup$$

$$... \cup Q^{2k-2\rightarrow} \cup \{q^{2k-2}q^{2k-1}\} \cup Q^{2k-1\leftarrow} \cup \{p^{2k-1}p^0\}.$$

Potom C_Q je kružnica v $G \square C$ a $\mathbf{C_P} = \{C_Q | Q \in \mathbf{P}\}$ je súbor n kružníc, ktoré dvakrát pokrývajú všetky hrany z G^i, $0 \leq i \leq 2k-1$ a raz všetky hrany z C^{H^i}, $0 \leq i \leq n-1$. Zjavne nám ostáva pokryť $2k-2$ kružníc zo SCDC v grafe H v každom z grafov H^i, $0 \leq i \leq n-1$. Dostávame tak $(2k-2)n + n$ kružníc, čo je zjavne menej, ako $2kn$.

$|C| = 2k-1$. Potom

$$C_Q = Q^{0\rightarrow} \cup \{q^0q^1\} \cup Q^{1\leftarrow} \cup \{p^1p^2\} \cup Q^{2\rightarrow} \cup \{q^2q^3\} \cup Q^{3\leftarrow} \cup \{p^3p^4\} \cup$$

$$... \cup Q^{2k-3\leftarrow} \cup \{p^{2k-3}p^{2k-2}, p^{2k-2}p^0\}.$$

Potom C_Q je kružnica v $G \square C$ a $\mathbf{C_P} = \{C_Q | Q \in \mathbf{P}\}$ je súbor n kružníc, ktoré dvakrát pokrývajú všetky hrany z G^i, $0 \leq i \leq 2k-3$ a raz všetky hrany z C^{H^i}, $0 \leq i \leq n-1$. Keďže G má SCDC, tak dostávame ďalších $n-1$ cyklov, spolu teda $2n-1$ cyklov. Zjavne nám ostáva pokryť $2k-3$ kružníc v každom z grafov H^i, $0 \leq i \leq n-1$. Dostávame tak $(2k-3)n + 2n - 1 = 2kn - n - 1$ kružníc, čo je menej, ako $(2k-1)n$. ■

Veta 3.4 *$K_m \square K_n$ má SCDC pre $m, n \geq 1$ okrem prípadu, keď $\{m, n\} = \{1, 2\}$.*

$K_1 \square K_1$ má SCDC triviálne.

$K_m \square K_2 = K_m \square P_2$, $m > 1$ má SCDC, čo je zrejmé z 2.8.

$K_m \square K_n$, $m, n \geq 3$ má SCDC, čo vyplýva z predchádzajúcich viet. ■

Veta 3.5 *$L(K_{m,n})$ má SCDC pre $m, n \geq 1$ okrem prípadu, keď $\{m, n\} = \{1, 2\}$.*

Vyplýva z viet 3.1 a 3.4. ■

Kapitola 4

Záver

V tejto práci sme urobili zhrnutie poznatkov o malých cyklových pokrytiach na planárnych grafoch, hranových grafoch, kartézskych súčinov grafov, načrtli sme súvislosti medzi hypotézami a skonštruovali dôkazy viet 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, čím sme napríklad overili platnosť hypotézy SCDC pre kartézsky súčin grafov, ako je to uvedené v kapitole 3.

Literatúra

[Bon90a] J. A. Bondy. Perfect path double covers of graphs. *Journal of Graph Theory*, 14:259–272, 1990.

[Bon90b] J. A. Bondy. Small cycle double covers of graphs. *Cycles and Rays*, pages 21–40, 1990.

[Li90] H. Li. Perfect path double covers in every simple graph. *Journal of Graph Theory*, 14:645–650, 1990.

[MS01] G. MacGillivray and K. Seyffarth. Classes of line graphs with small cycle double covers. *Australasian Journal of Combinatorics*, 24:91–114, 2001.

[NS08] R. J. Nowakowski and K. Seyffarth. Small cycle double covers of products i: Lexicographic product with paths and cycles. *Journal of Graph Theory*, Volume 57 , Issue 2:99–123, February 2008.

[Sey93] K. Seyffarth. Small cycle double covers of 4-connected planar graphs. *Combinatorica*, 13:477–482, 1993.