# Metrické vlastnosti náhodne indukovaných podgrafov n-rozmernej hyperkocky

BAKALÁRSKA PRÁCA

**Maroš Bajtoš**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

9.2.1 Informatika

Vedúci záverečnej práce
doc. RNDr. Eduard Toman, CSc.

BRATISLAVA 2008

Týmto prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s odbornou pomocou školitela a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, máj 2008 Maroš Bajtoš

**Abstrakt**

Predložená práca sa zaoberá niektorými metrickými vlastnosťami náhodne indukovaných podgrafov n-rozmerných hyperkociek. Cieľ práce je vyčísliť horné a dolné ohraničenie vrcholového pokrytia pre špeciálny pravdepodobnostný model - náhodne indukované podgrafy n-rozmerných hyperkociek s daným počtom vrcholov (tento model bol zavedený v [5]). Ná nájdenie týchto ohraničení je použitý všeobecný greedy algoritmus pre hľadanie vrcholového pokrytia[2] a niektoré výsledky z [1] a z [3]. Vrcholové pokrytie náhodne indukovaného podgrafu hyperkocky je úzko späté s minimalizáciou boolovských funkcií.

Kľúčové slová: náhodné grafy, vrcholové pokrytie, boolovské funkcie

# Obsah

# 1 Úvod

V predloženej práci sa zaoberáme náhodne indukovanými podgrafmi n-rozmernej hyperkocky. Pod n-rozmernou hyperkockou myslíme graf, ktorého vrcholy sú binárne vektory dĺžky n a hrana je medzi každými dvoma vrcholmi, ktoré sa líšia práve v jednej súradnici. Náhodne indukovaný graf je graf, ktorý vznikol z pôvodnej n-rozmernej hyperkocky odobratím niekoľkých vrcholov - pravdepodobnosť p ponechania konkrétneho vrcholu v kocke je parameter pravdepodobnostného modelu. Okrem parametra p, zadefinujeme parameter (resp. funkciu) m(n) a triedu uvažovaných podgrafov obmedzíme na podgrafy s m(n) vrcholmi. Ako neskôr ukážeme, parameter p nebude v našich výpočtoch hrať žiadnu rolu.

Cieľom práce je vyčísliť horný a dolný odhad vrcholového pokrytia náhodného grafu, ktoré je konštruované greedy algoritmom. Keďže nie je možné vyčísliť tieto hodnoty všeobecne pre celú triedu grafov, hodnoty, ku ktorým dospejeme budú platiť iba takmer vždy - konkrétnejšie s pravdepodobnosťou blížiacou sa jednej tak ako sa n blíži k nekonečnu. Rovnako budú vyčíslené aj hodnoty pre ostatné metrické veličiny. A teda výsledkom práce budú hodnoty, ktoré budú platiť pre majoritnú časť grafov - množstvo grafov, pre ktoré platiť nebudú bude zanedbateľné.

V práci bude použitých niekoľko štandardných pravdepodobnostných metód a kombinatorických techník. Taktiež sa opierame o niekoľko techník, ktoré boli použité v [1] a v práci sú použité niektoré výsledky z [3].

## 1.1 Pojmy a značenie

Nech G je graf. Množinu vrcholov grafu G označme V(G) a množinu hrán grafu označme E(G).

Nech $B = \{0,1\}$. Nech $V = B^n$ a nech $E = \{(x,y); (x,y \in V) \wedge (|\{i; (x)_i \neq (y)_i\}| = 1)\}$. Potom graf G pre ktorý platí V(G) = V a E(G) = E nazývame n-rozmernou hyperkockou. A teda hyperkocka je jednoduchý graf s $2^n$ vrcholmi (ktoré sú reprezentované binárnymi vektormi dĺžky n), ktorý má hranu medzi každými dvoma bodmi, ktoré sa líšia práve v jednej súradnici.

Nech $Q_n$ je n-rozmerná hyperkocka. Potom symbolom $R_n$ budeme značiť množinu všetkých jej podgrafov, ktoré vznikli odobratím niekoľkých vrcholov z $Q_n$ a teda

$$R_n = \{R; (V(R) \subseteq V(Q_n)) \wedge (E(R) = \{(x,y); x,y \in V(R) \wedge (x,y) \in E(Q_n)\}\}$$

Nech $K = \{K_1, K_2, ...K_x\}$ je konečná množina. Nech $L = \{L_1, L_2, ...L_y\}$ je množina podmnožín K (teda nech $L_i \subseteq K$) a nech $\bigcup_{i=1}^{y} L_i = K$. Potom dvojcu (K,L) nazveme hypergrafom, prvky množiny K budú vrcholy a prvky množiny L budú hrany daného hypergrafu.

Pravdepodobnosť istej udalosti budeme značiť výrazom Pr[ udalosť ].

## 1.2 Popis modelu

V tejto časti formálne zadefinujeme model, ktorým sa zaoberáme. V predchádzajúcej kapitole sme definovali množinu $R_n$, ktorá predstavuje istú triedu podgrafov n-rozmernej kocky, konkrétne triedu, ktorá vznikla odobratím niekoľkých vrcholov z hyperkocky. Nie je však naším cieľom študovať túto triedu. Pre účely tejto práce zvolíme parameter (resp. funkciu) m a zadefinujeme množinu

$$R_{n,m} = \{R; (R \in R_n) \wedge (|R| = m)\}$$

Teda naším cieľom je študovať konkrétnu triedu podgrafov, s práve m vrcholmi, kde m = f(n) pre ľubovoľnú, pevne zvolenú, funkciu f. Navyše budeme požadovať, aby $\frac{m}{2^n} \to c$ pre nejakú konkrétnu konštantu $c \in (0, 1)$. Pre formálnu definíciu pravdepodobnostného modelu (priestoru), ktorý budeme študovať, ostáva zadefinovať pravdepodobnostnú funkciu $P : R_{n,m} \to (0, 1)$.

Vychádzame zo štandardného pravdepodobnostného modelu $(R_n, P_R)$, v ktorom platí:

$$Pr[v \in G] = p$$

a pre ktorý je funkcia $P_R : R_n \to (0, 1)$ definovaná nasledovne:

$$P_R(G) = p^{(|V(G)|)}(1-p)^{(|V(Q_n)|-|V(G)|)}$$

pričom $p \in (0, 1)$ je pevne zvolený parameter.

Teraz je potrebné odvodiť pravdepodobnostnú funkciu pre triedu grafov $R_{n,m}$, ktorá by vychádzala z popísaného modelu.

**Lema 1.** Nech $R \in R_{n,m}$. Potom platí

$$P(R) = \frac{1}{\begin{pmatrix} 2^n \\ m \end{pmatrix}}$$

Dôkaz: Označme udalosťou A výber konkrétneho grafu $R \in R_{n,m}$ a udalosťou B výber ľubovoľného grafu z $R_{n,m}$. Potrebujeme vyjadriť podmienenú pravdepodobnosť udalosti A za podmienky udalosti B v pravdepodobnostnom modeli $(R_n, P_R)$. Dosadením do vzorca získavame:

$$\begin{aligned} P(R) &= Pr[A|B] \\ &= \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]} \\ &= \frac{p^m(1-p)^{2^n-m}}{\begin{pmatrix} 2^n \\ m \end{pmatrix} p^m(1-p)^{2^n-m}} \\ &= \frac{1}{\begin{pmatrix} 2^n \\ m \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

□

Poznámka: Výsledná funkcia nie je ničím prekvapivá, každý graf z $R_{n,m}$ má rovnaký počet vrcholov a teda jeho výber je rovnako pravdepodobný. Keďže grafov s m vrcholmi je práve $\begin{pmatrix} 2^n \\ m \end{pmatrix}$, predpis funkcie $P(R)$ je priamočiary.

Pre potreby tejto práce treba ešte odvodiť pravdepodobnosť, že konkrétna množina Z je podmnožinou V(R) pre náhodne indukovaný graf R.

**Lema 2.** Nech $Z \subseteq V(Q_n)$, $|Z| = k$ a zároveň $k < m^{\frac{1}{2}}$ a $k < 2^{\frac{n}{2}}$. Potom pre $n \to \infty$ platí:

$$Pr[Z \subseteq V(R)] = (\frac{m}{2^n})^{|Z|}$$

Dôkaz: Označme udalosťou A, že množina Z je podmnožinou V(R) pre náhodný graf $R \in R_{n,m}$ a udalosťou B výber ľubovoľného grafu z $R_{n,m}$. Opäť chceme vyjadriť podmienenú pravdepodobnosť udalosti A za podmienky udalosti B. Dosadením do vzorca získavame:

$$\begin{aligned} Pr[A|B] &= \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]} \\ &= \frac{p^{|Z|} \begin{pmatrix} 2^n - |Z| \\ m - |Z| \end{pmatrix} p^{m-|Z|}(1-p)^{2^n - m}}{\begin{pmatrix} 2^n \\ m \end{pmatrix} p^m (1-p)^{2^n - m}} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 2^n - |Z| \\ m - |Z| \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2^n \\ m \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Túto pravdepodobnosť je možné tiež asymptoticky tesne odhadnúť pre $n \to \infty$, $k < m^{\frac{1}{2}}$ a $k < 2^{\frac{n}{2}}$ hodnotou:

$$\left(\frac{m}{2^n}\right)^{|Z|}$$

$\square$

## 1.3 Vzťah medzi vrcholovým pokrytím a DNF boolovskej funkcie

Najmenšie vrcholové pokrytie náhodného podgrafu n-rozmernej hyperkocky je úzko späté s minimalizáciou zápisu boolovskej funkcie s n premennými v disjunktívnej normálnej forme (DNF). Množinu vrcholov hyperkocky ($V(Q_n)$) tvorí $2^n$ binárnych vektorov dĺžky n. Každému grafu $R \in R_n$ priradíme konkrétnu boolovskú funkciu n premenných $f$ nasledovným spôsobom:

$$f(a_1, a_2, ....a_n) = 1$$

práve vtedy keď

$$(a_1, a_2, ....a_n) \in V(R)$$

kde $R$ je daný graf, ku ktorému zostrojujeme boolovskú funkciu. Ako vidno tento vzťah je bijektívny, každý graf $R \in R_n$ jednoznačne určuje jednu boolovskú funkciu n premenných a naopak.

Zoberme teraz ľubovoľné vrcholové pokrytie grafu R jeho podhyperkockami. Každej hyperkocke ktorá sa v danom pokrytí nachádza priradíme konjunkciu $K$ nasledovným spôsobom:

$$K(a_1, a_2, ....a_n) = b_{i_1}, b_{i_1}, ...., b_{i_r}$$

kde $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$, súradnice $a_{i_1}, a_{i_2}...a_{i_r}$ majú rovnakú hodnotu pre všetky body danej podhyperkocky z pokrytia. Ďalej $b_{i_k} = a_{i_k}$ ak hodnota $a_{i_k} = 1$ resp. $b_{i_k} = \overline{a_{i_k}}$ ak hodnota $a_{i_k} = 0$.

Je jednoduché nahliadnuť že tento vzťah je opäť bijektívny a teda každej podhyperkocke grafu R vieme jednoznačne priradiť konkrétnu konjunkciu a naopak. Navyše týmto spôsobom vieme jednoduchým spôsobom z vrcholového pokrytia zostrojiť DNF danej boolovskej funkcie - každej hyperkocke z pokrytia vieme priradiť konjunkciu. Tieto konjunkcie spolu tvoria členy DNF. A teda minimálne vrcholové pokrytie grafu R jeho podhyperkockami zodpovedá minimálnemu zápisu v DNF k nemu zostrojenej boolovskej funkcii.

# 2 Gradientné pokrytie náhodného grafu kockami.

Cieľom tejto časti je objasniť pojem gradientného (greedy) pokrytia, uviesť konštruktívny algoritmus na jeho zostrojenie a uviesť znenie a dôkaz vety, ktorá v tejto práci zohráva kľúčovú úlohu.

## 2.1 Algoritmus pre zostrojenie gradientného pokrytia

Nech (X,A) je ľubovoľný hypergraf. Cieľom tohto algoritmu je zkonštruovať množinu B - gradietné pokrytie - pre ktorú platí:

$$B \subseteq A$$
$$(X, B) \text{ je hypergraf}$$

Algoritmus:

Vyber hranu $A_i \in A$ maximálnej mohutnosti a vytvor množinu $B_1 = \{A_i\}$.

Opakuj: Nech $B_{k-1}$ je podmnožina hrán z A vybratých v prvých k-1 krokoch činnosti algoritmu, $X_k$ je podmnožina vrcholov hypergrafu, ktoré nie sú obsiahnuté v žiadnej z doteraz vybratých hrán. Ak množina $X_k$ je prázdna, algoritmus ukončí svoju prácu a jeho výsledkom je množina $B_{k-1}$. V opačnom prípade algoritmus vyberá hranu $A_i \in A$ obsahujúcu najväčší počet vrcholov z $X_k$ a vytvorí množinu $B_k = B_{k-1} \cup \{A_i\}$.

Je zrejmé, že algoritmus ukončí svoju prácu po konečnom počte krokov a jeho výsledkom je pokrytie hypergrafu s dĺžkou rovnou počtu krokov algorytmu (Označme ju $l(X, A)$).

## 2.2 Horný odhad pre gradientné pokrytie všeobecného hypergrafu

Nasledujúca veta bola dokázaná v [2].

**Veta 1:** Nech (X,A) je hypergraf a nech existuje jeho podhypergraf (Y,B) taký, že stupeň v(x) každého vrchola $x \in Y$ podhypergrafu nie je menší ako $v (v \leq |B|)$ a pre niektoré $\varepsilon > 0 : |Y| \geq (1 - \varepsilon).|X|$. Potom dĺžka $l(X, A)$ gradientného pokrytia hypergrafu (X,A) vyhovuje nerovnosti:

$$l(X, A) \leq 1 + \varepsilon.|X| + \frac{|B|}{v}. \ln \frac{|X|.v.e}{|B|}$$

Keďže táto veta má zásadný význam, uvedieme aj jej dôkaz.

Dôkaz: Nech (X,A) je hypergraf, (Y,B) je jeho podhypergraf a spolu s $v$ a $\varepsilon$ vyhovujú podmienkam vety. Aplikujeme gradientný algorytmus na hypergraf (X,A). Nech $\delta_k$ je relatívna početnosť vrcholov, ktoré nie sú pokryté po uskutočnení k-teho kroku gradientného algoritmu. Je prirodzené položiť $\delta_0 = 1$. Zrejme $\delta_k$ klesá pre rastúce k, pričom $\delta_r = 0$ pre posledný r-tý krok algoritmu.

Indukciou dokážeme, že platí:

$$\delta_k \leq \varepsilon + (1 - \varepsilon).(1 - \alpha) \qquad (\mathbf{1}*)$$

pričom $\alpha = \frac{v}{|B|}$.

Báza: pre $k = 0$ tvrdenie triviálne platí.

Krok: ukážeme, že ak $(\mathbf{1}*)$ platí pre $k (k \geq 0)$, tak platí aj pre $k + 1$:

Ak $\delta_k \leq \varepsilon$, tak nerovnosť $(\mathbf{1}*)$ je viditeľne splnená, inak $\delta_k > \varepsilon$ dokážeme:

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &\leq \delta_k - (\delta_k - \varepsilon).\alpha \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{2}*) \\ \Leftrightarrow |X|.\delta_{k+1} &\leq |X|.\delta_k + |X|.(\delta_k - \varepsilon).\alpha \qquad (\mathbf{3}*) \end{aligned}$$

, ktorú dokážeme a z platnosti $(\mathbf{2}*)$ a indukčného predpokladu potom bude platiť $(\mathbf{1}*)$ pre $k+1$:

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &\leq \delta_k - (\delta_k - \varepsilon).\alpha = (1-\alpha).\delta_k + \varepsilon.\alpha \leq (1-\alpha).\left(\varepsilon + (1-\varepsilon)(1-\alpha)^k\right) + \varepsilon.\alpha \\ &= (1-\alpha).\varepsilon + (1-\varepsilon)(1-\alpha)^{k+1} + \varepsilon.\alpha = \varepsilon + (1-\varepsilon)(1-\alpha)^{k+1} \end{aligned}$$

Označme $Y_k$ množinu vrcholov $x \in Y$, ktoré nie sú pokryté po ukončení k-teho kroku algoritmu. Na to aby sme dokázali platnosť $(\mathbf{3}*)$ potrebujeme ukázať, že na k+1-om kroku algoritmu môžeme vybrať hranu h z množiny $A/B_k$ obsahúcu aspoň $|X|.(\delta_k - \varepsilon).\alpha$ vrcholov nepatriacich do množiny $Y_k$. Je zrejmé že:

$$|Y_k| \geq |Y| - (1-\delta_k).|X| \geq (1-\varepsilon)|X| - (1-\delta_k).|X| = (\delta_k - \varepsilon).|X|$$

V dôsledku toho, že $\forall x \in Y$ je $v(x) \geq v$, priemerný počet vrcholov $x \in Y_k$, pokrytých hranou $h \in B$, je aspoň $\frac{|Y_k|.v}{|B|}$. Preto v množine B (a teda aj v množine A) nájdeme hranu obsahujúcu aspoň $|X|(\delta_k - \varepsilon).\alpha$ nepokrytých vrcholov. To znamená, že platí $(\mathbf{3}*)$ a teda aj $(\mathbf{2}*)$.

Je zrejmé, že pre ľubovoľné prirodzené k nie je počet krokov gradientného algoritmu (a teda dĺžka pokrytia hypergrafu (X,A)) väčší ako $k + |X|.\delta_k$, čo v dôsledku $(\mathbf{1}*)$ nie je väčšie ako:

$$k + |X|.\left(\varepsilon + (1-\varepsilon).(1-\alpha)^k\right) \leq k + |X|(\varepsilon + e^{-\alpha.k})$$

pretože ako ukážeme $(1-\varepsilon).(1-\alpha)^k \leq e^{-\alpha.k}$, pre $\varepsilon \in \langle 0,1\rangle$ a $\alpha \in \langle 0,1\rangle$
Definujme funkciu f: $f(\alpha) = (1-\alpha).e^{\alpha}$.

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon).(1-\alpha)^k \leq e^{-\alpha.k} &\Leftarrow (1-\alpha)^k \leq e^{-\alpha.k} \\ &\Leftrightarrow (1-\alpha) \leq e^{-\alpha.k} \\ &\Leftrightarrow (1-\alpha).e^{-\alpha.k} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow f(\alpha) \leq 1 \end{aligned}$$

Pre funkciu f platí:

- $f(0) = 1$
- $\forall \alpha \in \langle 0,1\rangle f'(\alpha) = -\alpha.e^{\alpha} \leq 0$, takže pre $\alpha$ z intervalu $\langle 0,1\rangle$ je funkcia f nerastúca.

Vďaka spomenutým dvom vlastnostiam funkcie f platí $\forall \alpha \in \langle 0,1\rangle f(\alpha) \leq 1$, a preto:

$$(\forall k \geq 0) l(X,A) \leq k + |X|.(\varepsilon + e^{-\alpha.k})$$

Ak položíme $k = \lceil \frac{1}{2}.\ln(|X|.\alpha)\rceil$ tak dostaneme tvrdenie vety □

# 3 Horný a dolný odhad vrcholového pokrytia

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli a dokázali vetu, ktorá má v tejto práci zásadný význam. Našim cieľom bude nájsť parametre (a podhypergraf (Y,B)) pre danú vetu a následne jej využitím dosiahnuť požadovaný výsledok. Treba však objasniť niektoré vzťahy medzi skúmaným pravdepodobnostným modelom a parametrami tejto vety.

Ako už bolo spomenuté, všetky metrické vlastnosti ako aj výsledné odhady gradientného pokrytia budú platiť pre nahodé grafy s pravdepodobnosťou blížiacou sa k 1 tak ako sa n blíži k nekonečnu. Cieľom bude teda nájsť parametre pre Vetu 1, ktoré budú platiť práve týmto spôsobom.

Avšak Vetu 1 nie je možné priamo aplikovať na zadefinovaný model, keďže v znení vety sa uvažuje o hypergrafe a doteraz sme uvažovali len o hyperkockách - ktoré aj napriek podobnosti názvu, nemajú s hypergrafmi nič spoločné - hyperkocka je jednoduchý graf. Zmienenú vetu využijeme nasledovným spôsobom:

Vrcholy hypergrafu (X,A) budú totožné s vrcholmi náhodne indukovaného grafu R
Hrany hypergrafu (X,A) budú všetky podhyperkocky náhodne indukovaného grafu R

Vo Vete 1 je určený horný odhad pre pokrytie hypergrafu hyperhranami. V našom prípade teda ide o pokrytie náhodne indukovaného podgrafu hyperkocky jej podkockami a teda v konečnom dôsledku je vyčíslený horný odhad zápisu boolovskej funkcie n premenných v DNF (získanej gradientným algoritmom).

Aby sme mohli využiť Vetu 1, je potrebné zostrojiť podhypergraf (Y,B), s parametrami, ktoré by umožnili aplikovaním vety dosiahnuť čo najlepší odhad. Tento podhypergraf (Y,B) bude tvoriť "zdravé jadro" hypergrafu, pričom vrcholy, ktoré v tomto podhypergrafe nie sú zahrnuté, budú tvoriť zanedbateľnú časť vzhľadom na celý hypergraf. Toto zdravé jadro bude tvoriť množina podhyperkociek konkrétnej dimenzie, ktorú odvodíme v kapitole 5.

V kapitole 4 sa budeme zaoberať podhyperkockami náhodne indukovaného grafu. Vyčíslime strednú hodnotu a disperziu pre metrickú veličinu $X_{n,k}$ - počet k-rozmerných podhyperkociek grafu R. Pre túto veličinu uvedieme aj asymptoticky presný odhad, ktorý bude platiť s pravdepodobnosťou blížiacou sa k jednej tak ako sa n blíži k nekonečnu. Tieto medzivýsledky neskôr použijeme na vyčíslenie hodnoty $|B|$ zo znenia vety.

Kapitola 5 sa zaoberá ďalšími parametrami - potrebujeme určiť dimeziu podhyperkociek (a s tým súvisiaci parameter v), ktoré budú tvoriť zdravé jadro (podhypergraf (Y,B) zo znenia vety). Najprv určíme strednú hodnotu a disperziu novej premennej $Y_{n,k}$ - počtu k-rozmerných podhyperkociek obsahujúcich fixný vrchol. Je jednoduché nahliadnuť, že v našom prípade ide vlastne o stupeň daného fixného vrcholu v podhypergrafe (Y,B), ktorý budeme konštruovať. Ukážeme, že disperziu tejto premennej vieme odhadnúť len pre dimenzie ohraničené istou funkciou $k_0$. V nadväznosti na tento medzivýsledok ukážeme, že ak zvolíme všetky $k_0$-rozmerné kocky za podhypergraf (Y,B) dosiahneme požadovaného výsledku - vrcholov, ktoré sa nenachádzajú v žiadnej z $k_0$-rozmerných kociek je zanedbateľné množstvo (teda limitne nula) a takisto všetky vrcholy tohto podhypergrafu dosahujú istý stupeň (opäť až na zanedbateľné množstvo vrcholov).

Kapitola 6 obsahuje vyčíslenie horného odhadu vrcholového pokrytia náhodne indukovaných podgrafov n-rozmernej hyperkocky aplikáciou dosiahnutých výsledkov a Vety 1.

V kapitolách 4 až 6 sa zaoberáme iba horným odhadom pre gradientné vrcholové pokrytie. Pre vyčíslenie dolného odhadu stačí využiť výsledky z diplomovej práce M.Kovalíkovej [3]. Horný odhad je vyčíslený v kapitole 7.

# 4 Hyperkocky - náhodné veličiny

V tejto časti sa zaoberáme podhyperkockami náhodne indukovaného grafu R. Zavedieme novú náhodnú premennú, odvodíme jej strednú hodnotu a rozptyl a dokážeme aj ďalšie tvrdenia, ktoré využijeme v ďalších kapitolách.

Označme symbolom $X_{n,k}$ náhodnú premennú - počet k-rozmerných podhyperkociek náhodne indukovaného podgrafu n-rozmernej hyperkocky.

**Lema 3:**

$$E(X_{n,k}) = \binom{n}{k} 2^{n-k} \frac{\binom{2^n - 2^k}{m - 2^k}}{\binom{2^n}{m}}$$

Dôkaz: Túto hodnotu získame priamočiarym aplikovaním postupu z Lemy 2. □

Poznámka: Strednú hodnotu môžeme tiež asymptoticky tesne odhadnúť pre $k < \frac{\log m}{2}$ a $k < \frac{n}{2}$ hodnotou:

$$E(X_{n,k}) = \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^k}$$

Poznámka: V prípade, že k nespĺňa dané ohraničenie, uvedený výraz je horný odhad pre $E(X_{n,k})$.

**Lema 4:**

$$Var(X_{n,k}) = \binom{n}{k}^2 2^{n-k} \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^k}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned}
Var(X_{n,k}) &= E(X_{n,k}^2) - E(X_{n,k})^2 \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} 2^{n-j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} \frac{\binom{2^n - (2^{k+1} - 2^j)}{m - (2^{k+1} - 2^j)}}{\binom{2^n}{m}} \\
&+ \left[ \binom{n}{k}^2 2^{2(n-k)} - \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} 2^{n-j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} \right] \frac{\binom{2^n - 2^{k+1}}{m - 2^{k+1}}}{\binom{2^n}{m}} \\
&- \binom{n}{k}^2 2^{2(n-k)} \left( \frac{\binom{2^n - 2^k}{m - 2^k}}{\binom{2^n}{m}} \right)^2 \\
&= 2^n \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} 2^{-j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} \left[ \frac{\binom{2^n - (2^{k+1} - 2^j)}{m - (2^{k+1} - 2^j)}}{\binom{2^n}{m}} - \frac{\binom{2^n - 2^{k+1}}{m - 2^{k+1}}}{\binom{2^n}{m}} \right] \\
&+ \binom{n}{k}^2 2^{2(n-k)} \left[ \frac{\binom{2^n - 2^{k+1}}{m - 2^{k+1}}}{\binom{2^n}{m}} - \left( \frac{\binom{2^n - 2^k}{m - 2^k}}{\binom{2^n}{m}} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Disperziu môžeme zhora odhadnúť hodnotou:

$$
\begin{aligned}
Var(X_{n,k}) &\leq 2^n \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} 2^{-j} \left( \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^{k+1}-2^j} - \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^{k+1}} \right) \\
&= 2^n \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} 2^{-j} \left( \left(\frac{m}{2^n}\right)^{-2^j} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Postupnosť $a_j = 2^{-j} \left( \left(\frac{m}{2^n}\right)^{-2^j} - 1 \right)$ je neklesajúca, teda pre $Var(X_{n,k})$ platí:

$$
\begin{aligned}
Var(X_{n,k}) &\leq 2^n \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^{k+1}} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} \\
&= 2^{n-k} \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^{k+1}} \left( \left(\frac{m}{2^n}\right)^{-2^k} - 1 \right) \binom{n}{k}^2 \\
&\leq \binom{n}{k}^2 2^{n-k} \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^k}
\end{aligned}
$$

□

**Lema 5:** Nech $k < \frac{n}{2}$ a $k < \frac{\log m}{2}$. Potom platí:

$$
\binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^k} - \varepsilon \leq X_{n,k} \leq \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^k} + \varepsilon
$$

Kde $\varepsilon = \varphi(n) \binom{n}{k} \sqrt{2^{n-k} \left(\frac{m}{2^n}\right)^{2^k}}$ a $\varphi$ je ľubovoľne rastúca funkcia.

Dôkaz: Podľa Chebyshevovej nerovnosti platí

$$
\lim_{n\to\infty} Pr[|X_{n,k} - E(X_{n,k})| \geq \varepsilon] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_{n,k})}{\varepsilon^2} = 0
$$

a teda

$$
\lim_{n\to\infty} Pr[|X_{n,k} - E(X_{n,k})| < \varepsilon] = 1
$$

□

Teraz zaveďme nové označenie:

$p = \left(\frac{m}{2^n}\right)$ a $b = \frac{1}{p}$

A nový parameter $\mu$:

Nech $\mu$ je najmenšie celé číslo ktoré spĺňa nerovnosť:

$$
\mu \geq \log \log_b 2^n
$$

Keďže $\mu$ je najmenšie také číslo, platí aj

$$\mu - 1 < \log \log_b 2^n$$

Z toho plynú nasledujúce nerovnosti:

**1a.** $\left(\frac{1}{p}\right)^{2^\mu} \geq 2^n$ teda $p^{2^\mu} \leq 2^{-n}$

**1b.** $\left(\frac{1}{p}\right)^{2^\mu - 1} < 2^n$ teda $p^{2^\mu - 1} > 2^{-n}$

Teraz ukážeme niekoľko tvrdení, ktoré budú vychádzať z vyššie uvedených poznatkov.

**Lema 6:** Nasledujúce tvrdenie platia pre každý náhodne indukovaný graf R s pravdepodobnosťou blížiacou sa k jednej tak ako n $\rightarrow \infty$:

1. R neobsahuje podkocky s rozmerom k pre $k > \mu$.
2. $X_{n,k} \sim \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) 2^{n-k} p^{2^k}$ pre $k \leq \mu - 2$ (a pre $k < \frac{n}{2}$ a $k < \frac{\log m}{2}$)

Dôkaz:

**1.** Chceme ukázať, že $\lim_{n\rightarrow\infty} X_{n,k} = 0$ (pre $k > \mu$). Na základe tvrdenia z Lemy 5. vieme, že stačí ukázať nasledovné:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \varphi(n) 2^{n-k} p^{2^k} = 0$$

Označme $l_k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \varphi(n) 2^{n-k} p^{2^k}$ a položme $k = \mu + r$ kde $r \geq 1$. Z platnosti $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \leq n^k$ a z nerovnosti **1a** vyplýva:

$$\begin{aligned}
l_k &\leq n^k \varphi(n) 2^{n-k} p^{2^k} \\
&= \varphi(n) 2^{k \log n + n - k} p^{2^k} \\
&= \varphi(n) 2^{(\mu+r) \log n + n - k} p^{2^k} \\
&= \varphi(n) 2^{(\mu+r) \log n + n - k} p^{2^\mu * 2^r} \\
&\leq \varphi(n) 2^{(\mu+r) \log n + n - k} \left(p^{2^\mu}\right)^{2^r} \\
&\leq \varphi(n) 2^{(\mu+r) \log n + n - k} \left(2^{-n}\right)^{2^r} \\
&= \varphi(n) 2^{(\mu+r) \log n + n - k - n(2^r)} \\
&= \varphi(n) 2^{(\mu+r) \log n - n(2^r - 1) - k}
\end{aligned}$$

A teda $\lim_{n\rightarrow\infty} l_k = 0$.

**2.** Teraz dokážeme že $E(X_{n,k}) \sim X_{n,k}$, teda že $X_{n,k} \sim \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^{n-k}p^{2^k}$. Opäť môžeme využiť Lemu 5. - stačí ukázať, že platí $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \varphi(n)\sqrt{2^{n-k}p^{2^k}} = o\left(\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^{n-k}p^{2^k}\right)$ (pre $k \leq \mu - 2$). Teda chceme ukázať že:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \varphi(n)\sqrt{2^{n-k}p^{2^k}}}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^{n-k}p^{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{2^{n-k}p^{2^k}}} = 0$$

Kedže vieme že $\varphi(n)$ je ľubovoľne rastúca funkcia, stačí ukázať, že $\lim_{n\to\infty} 2^{n-k}p^{2^k} = \infty$. Označme $l_k = 2^{n-k}p^{2^k}$ a položme $k \leq \mu - 2$. Z uvedeného a z platnosti **1b** vieme vyvodiť nasledovné:

$$\begin{aligned} l_k &\geq 2^{n-(\mu-2)}p^{2^{\mu-2}} \\ &= 2^{n-(\mu-2)}\left(p^{2^{\mu-1}}\right)^{2^{-1}} \\ &\geq 2^{n-(\mu-2)}\left(2^{-n}\right)^{2^{-1}} \\ &= 2^{n-(\mu-2)-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Z horného ohraničenia pre $\mu$ vyplýva, že $\lim_{n\to\infty} l_k = \infty$ a teda tvrdenie platí. $\square$

# 5 Vrcholy - náhodné veličiny

Pre potreby tejto časti zavedieme novú náhodnú premennú $Y_{n,k}$ - počet k-rozmerných podkociek grafu R, ktoré obsahujú fixný vrchol $v \in V(R)$.

Ďalej ukážeme niekoľko zaujímavých faktov. Zistíme, že existuje rozmer $k_0$ taký, že pre asymptoticky všetky vrcholy náhodného grafu (s pravdepodobnosťou blížiacou sa k 1 tak ako $n \to \infty$) platí že $Y_{n,k}$ je len veľmi málo vzdialená od jej očakávanej hodnoty. V snahe dokázať toto tvrdenie (ktoré neskôr formálne zadefinujeme), dokážeme niekoľko pomocných liem.

Najprv odvodíme základné hodnoty pre $Y_{n,k}$ - $E(Y_{n,k})$ a $Var(Y_{n,k})$.

**Lema 7:**

$$E(Y_{n,k}) = \binom{n}{k} p^{2^k-1}$$

.

Dôkaz: Túto hodnotu získame priamočiarim aplikovaním Lemy 2. □

**Lema 8:** $Var(Y_{n,k}) \leq \frac{c(k_0)^3}{n} E^2(Y_{n,k})$, pre $k \leq k_0$, kde $k_0 = \log\log_b n$

Dôkaz: Pre odvodenie $Var(Y_{n,k})$ použijeme vzťah $Var(Y_{n,k}) = E(Y_{n,k}^2) - E^2(Y_{n,k})$. Keďže hodnotu druhého člena už poznáme, stačí odvodiť len hodnotu prvého člena - $E(Y_{n,k}^2)$. Vyjadríme teda očakávaný počet usporiadaných dvojíc K,L (kde K, L sú k-rozmerné kocky) ktoré patria do R a zároveň vrchol v patrí do K,L :

$$\begin{aligned} E(Y_{n,k}^2) &= \sum_{(K,L)} Pr[K, L \subseteq R \wedge v \in K, L] \\ &= \sum_{K \cap L = \{v\}} Pr[K, L \subseteq R \wedge v \in K, L] \\ &+ \sum_{K \cap L \neq \{v\}} Pr[K, L \subseteq R \wedge v \in K, L] \end{aligned}$$

Teraz odvoďme počet tých kociek, ktorých prienik je len vrchol v:

$$\begin{aligned} \sum_{K \cap L = \{v\}} Pr[K, L \subseteq R, v \in K, L] &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} p^{2^{k+1}-2} \\ &\leq \binom{n}{k}\binom{n}{k} p^{2^{k+1}-2} \\ &= E^2(Y_{n,k}) \end{aligned}$$

Odvodenie druhého člena bude o niečo zložitejšie:

$$\sum_{K \cap L \neq \{v\}} Pr[K, L \subseteq R \wedge v \in K, L] = \sum_{r=1}^{k} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\binom{n-k}{k-r} p^{2^{k+1}-2^r}$$

Teraz ukážeme, že pre $k \leq k_0$ je prvý člen sumy najväčší, teda ukážeme že platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n-k}{k-1}p^{2^{k+1}-2^1}}{\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\binom{n-k}{k-r}p^{2^{k+1}-2^r}} \geq 1$$

Odvodenie. Pre premennú j platí $1 \leq r \leq k$. Všetky nerovnosti platia v limitných prípadoch, teda pre $n \to \infty$ :

$$\begin{aligned}
\log\log_b n &\geq k \\
\log\log_b n &\geq \log\left(2^k-2\right) - \log(r-1) \\
\log_b n &\geq \frac{2^k-2}{r-1} \\
\log_b n &\geq 2\log_b(k+1) + \frac{2^k-2}{r-1} \\
\log_b n &\geq \log_b\left((k+1)^2 b^{\frac{2^k-2}{r-1}}\right) \\
\log_b n &\geq \log_b\left((k+1)^2 b^{\frac{2^k-2}{r-1}} + 2k\right) \\
n-2k &\geq (k+1)^2 b^{\frac{2^k-2}{r-1}} \\
\frac{n-2k}{(k+1)^2} p^{\frac{2^k-2}{r-1}} &\geq 1 \\
\frac{\sqrt[r-1]{r!}(n-2k+2)}{(k+1)^2} p^{\frac{2^r-2}{r-1}} &\geq 1 \\
\frac{r!(n-2k+2)^{r-1}}{(k-r+1)^{2(r-1)}} p^{2^r-2} &\geq 1 \\
\frac{r!((k-r)!)^2(n-2k+r)!}{((k-1)!)^2(n-2k+1)!} p^{2^r-2} &\geq 1 \\
\frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n-k}{k-1}p^{2^{k+1}-2^1}}{\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\binom{n-k}{k-r}p^{2^{k+1}-2^r}} &\geq 1
\end{aligned}$$

Teraz už len stačí odhadnúť zhora túto sumu:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^{k} \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r} \binom{n-k}{k-r} p^{2^{k+1}-2^r} \\
\leq \quad & k \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k}{k-1} p^{2^{k+1}-2^1} \\
\leq \quad & kn \binom{n-1}{k-1}^2 p^{2^{k+1}-2^1} \\
\leq \quad & \frac{k^3}{n} \binom{n}{k}^2 p^{2^{k+1}-2^1} \\
\leq \quad & \frac{k_0^3}{n} E^2(Y_{n,k})
\end{aligned}
$$

Z toho vyplýva, že $Var(Y_{n,k})$ vieme odhadnúť nasledovne

$$
\begin{aligned}
Var(Y_{n,k}) &= E(Y_{n,k}^2) - E^2(Y_{n,k}) \\
&\leq E^2(Y_{n,k}) + \frac{k_0^3}{n} E^2(Y_{n,k}) - E^2(Y_{n,k}) \\
&= \frac{k_0^3}{n} E^2(Y_{n,k})
\end{aligned}
$$

□

**Lema 9:** Nech $k_0 = \log \log_b n$ a nech $0 \leq k \leq k_0$ Potom platí:

$$
Pr\left[ |Y_{n,k} - E(Y_{n,k})| \geq \frac{1}{k_0} E(Y_{n,k}) \right] \leq \frac{(k_0)^5}{n}
$$

Dôkaz: Tvrdenie vyplýva priamo z Chebysevovej nerovnosti, ak zvolíme $\varepsilon = \frac{1}{k_0} E(Y_{n,k})$ □

# 6 Horný odhad pre vrcholové pokrytie

**Lema 10:** Nech $\varepsilon_R(k_0)$ je relatívny počet tých vrcholov z náhodne indukovaného grafu R, takých, že $Y_{n,k_0} < \binom{n}{k_0} p^{2^{k_0}-1}(1-\frac{1}{k_0})$. Potom s pravdepodobnosťou blížiacou sa k 1 tak ako $n \to \infty$ platí:

$$\varepsilon_R(k_0) \quad \leq \quad \frac{(k_0)^6}{n}$$

Dôkaz: Na základe predchádzajúcej lemy vieme odvodiť očakávaný počet vrcholov z R, pre ktoré platí $|Y_{n,k} - E(Y_{n,k})| \geq \frac{1}{k_0} E(Y_{n,k})$. Označme túto premennú $b_k(R)$.

$$\begin{aligned} E(b_k(R)) \quad &= \quad \sum_{v \in R} \frac{(k_0)^5}{n} \\ &\leq \quad \frac{(k_0)^5}{n} m \end{aligned}$$

Použitím Markovovej nerovnosti pre $b_k(R)$ dostávame:

$$Pr[b_k(R) \geq k_0 E(b_k(R))] \quad \leq \quad \frac{1}{k_0}$$

A keďže $k_0 \to \infty$ platí:

$$\lim_{n \to \infty} Pr[b_k(R) \leq \frac{(k_0)^6}{n} m] = 1$$

Teraz je už jednoduché nahliadnuť, že premennú $\varepsilon_R(k_0)$ vieme ohraničiť v limitnom prípade nasledovne:

$$\varepsilon_R(k_0) \quad \leq \quad \frac{\frac{(k_0)^6}{n} m}{m} = \frac{(k_0)^6}{n}$$

$\square$

**Veta 2:** Veľkosť gradientného pokrytia náhodného grafu R hyperkockami, je s pravdepodobnosťou blížiacou sa k 1 tak ako $n \to \infty$ najviac

$$\frac{2^n}{\log_b n} (c + o(1))$$

kde $c \in (0, 1)$ je konštanta z definície študovaného pravdepodobnostného modelu (teda $\frac{m}{2^n} \to c$)

Dôkaz: Pre ukázanie tejto vety použijeme Vetu 1 (ako podhypergraf (Y,B) zvolíme hypergraf tvorený všetkými podhyperkockami grafu R rozmeru $k_0$) s naledovnými parametrami:

$$
\begin{aligned}
v &= \binom{n}{k_0} p^{2^{k_0}-1}\left(1-\frac{1}{k_0}\right) \\
\varepsilon &= \varepsilon_R(k_0) \\
|X| &= m \\
|B| &= \binom{n}{k_0} 2^{n-k_0} p^{2^{k_0}}
\end{aligned}
$$

Dosadením do rovnice zo znenia Vety 1. dostávame nasledovné:

$$
\begin{aligned}
l_A &\leq 1+\varepsilon|V|+\frac{|B|}{v}\ln\frac{|X|ve}{|B|} \\
&= 1+\frac{k_0^6}{n}m+\frac{\binom{n}{k_0} 2^{n-k_0} p^{2^{k_0}}}{\binom{n}{k_0} p^{2^{k_0}-1}\left(1-\frac{1}{k_0}\right)}\ln\frac{m\binom{n}{k_0} p^{2^{k_0}-1}\left(1-\frac{1}{k_0}\right)e}{\binom{n}{k_0} 2^{n-k_0} p^{2^{k_0}}} \\
&= 1+\frac{k_0^6}{n}m+\frac{2^{n-k_0}p}{1-\frac{1}{k_0}}\ln\frac{m\left(1-\frac{1}{k_0}\right)e}{2^{n-k_0}p}
\end{aligned}
$$

Keďže $p=\left(\frac{m}{2^n}\right)$ s pravdepodobnosťou blížiacou sa k 1 tak ako $n\to\infty$ platí:

$$
\begin{aligned}
l_A &\leq 1+\frac{k_0^6}{n}m+\frac{2^{n-k_0}\left(\frac{m}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{k_0}}\ln\frac{m\left(1-\frac{1}{k_0}\right)e}{2^{n-k_0}\left(\frac{m}{2^n}\right)} \\
&\leq 1+\frac{k_0^6}{n}m+\frac{m}{2^{k_0}}\ln\left(2^{k_0}e\right) \\
&= 1+\frac{k_0^6}{n}m+\frac{m}{\log_b n}(\ln\log_b n+1) \\
&= m\left(\frac{1}{m}+\frac{k_0^6}{n}+\frac{\ln\log_b n}{\log_b n}+\frac{1}{\log_b n}\right) \\
&= \frac{m+o(2^n)}{\log_b n} \\
&= \frac{2^n}{\log_b n}\left(c+o(1)\right)
\end{aligned}
$$

A teda horné ohraničenie pre gradientné pokrytie grafu g je rovné:

$$
\frac{2^n}{\log_b n}\left(c+o(1)\right)
$$

□

# 7 Dolný odhad pre vrcholové pokrytie

Pre získanie dolného odhadu vrcholového pokrytia použijeme výsledky z práce M.Kovalíkovej. Uveďme ten najpodstatnejší (toto tvrdenie je súčasť vety 4. z [3]):

**Lema 11:** Nech $\lambda_2 = \log\log_b n + \log\log\log_b n + \varepsilon$. Potom s pravdepodobnosťou idúcou k 1 tak ako $n \to \infty$ platí:

$$V^+_{n,\lambda_2}(R) = o(2^n)$$

kde $V^+_{n,\lambda_2}$ je počet vrcholov náhodne indukovaného podgrafu n-rozmernej hyperkocky, ktoré sú pokryté (v gradientnom pokrytí) podkockami rozmeru väčšieho ako $\lambda_2$ a $\varepsilon$ je ľubovoľná kladná nenulová konštanta.

Na základe lemy 11. je možné určiť dolný odhad vrcholového pokrytia.

**Veta 3:** Veľkosť gradientného pokrytia náhodného grafu R hyperkockami, je s pravdepodobnosťou blížiacou sa k 1 tak ako $n \to \infty$ aspoň

$$\frac{2^n}{\gamma \log\log_b n \log_b n}(c - o(1))$$

kde $\gamma > 1$ a $c \in (0, 1)$ je konštanta z definície študovaného pravdepodobnostného modelu (teda $\frac{m}{2^n} \to c$).

Dôkaz: Na základe Lemy 11 vieme povedať, že absolútna väčšina vrcholov (teda limitne všetky vrcholy) náhodného grafu sú pokryté podkockami rozmeru menšieho ako $\lambda_2$. Pre získanie dolného odhadu pre gradientné pokrytie je teda postačujúce vyčísliť počet potrebných podkociek rozmeru $\lambda_2$ na pokrytie týchto vrcholov. S pravdepodobnosťou blížiacou sa k jednej tak ak $n \to \infty$ ( a pre $\gamma > 1$)platí nasledovné:

$$l_A \geq \frac{V(R) - V^+_{n,k}(R)}{2^{\lambda_2}} > \frac{m - o(2^n)}{2^\varepsilon \log\log_b n \log_b n} \geq \frac{\frac{m}{2^n}2^n - o(2^n)}{\gamma \log\log_b n \log_b n} = \frac{2^n}{\gamma \log\log_b n \log_b n}(c - o(1))$$

□

# 8 Záver

Na záver zhrnieme dosiahnuté výsledky. Najprv sme v kapitole 4 odvodili niekoľko pravdepodobnostných hodnôt premennej $X_{n,k}$ - teda počtu podkociek v náhodne indukovanom grafe n-rozmernej hyperkocky. Vypočítali sme disperziu a očakávanú hodnotu tejto premennej. To umožňilo dokázať ďalšie fakty o tomto modele - asymptoticky presný odhad premennej $X_{n,k}$ (ktorý bol rovný $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^{n-k}p^{2^k}$) a určiť maximálnu dimenziu v ktorej ešte je možný výskyt podkociek ($\log\log_b n$). V ďalšej kapitole sme sa zaoberali premennou $Y_{n,k}$ - počtom k-rozmerných podkociek, ktoré obsahujú fixný vrchol v. Táto premenná je vlastne stupeň vrchola v, ak uvažujeme ako hrany len k-rozmerné podkocky. K tejto premennej sme opäť určili disperziu a očakávanú hodnotu. Všetky tieto získané medzivýsledky nás v kapitole 6 doviedli k jednej z hlavných viet tejto práce - vete o hornom odhade gradenientného pokrytia náhodne indukovaného grafu s daným počtom vrcholov. Použitím vety 1 a zjednodušením získaného výsledku sme dosiahli požadovanú hodnotu horného odhadu - $\frac{2^n}{\log_b n}(c + o(1))$. Posledná kapitola sa zaoberá dolným odhadom pre vyššie spomínané pokrytie. V tejto kapitole sú použité výsledky z práce M.Kovalíkovej [3]. Ako sa ukázalo po vyčíslení tejto hodnoty, horný a dolný odhad nie sú asymptotické funkcie. Gradientné pokrytie náhodne indukovaného podgrafu n-rozmernej hyperkocky s daným počtom vrcholov teda zatiaľ nemá asymptoticky presný odhad.

Oblasť, ktorou sa zaoberá táto práca má stále veľa otázok, na ktoré by bolo potrebné nájsť odpovede. Keďže rozsah tejto práce bol obmedzený časovo aj priestorovo, nebolo možné sa venovať ďalším témam. Medzi témy, ktoré s touto prácou súvisia a stáli by za preskúmanie určite patrí aj odhad gradientného pokrytia náhodne indukovaného podgrafu n-rozmernej hyperkocky s daným počtom vrcholov v závislosti od rôznych funkcií m(n), najmä funkcií ktoré sa blížia k nule tak ako sa n blíži k nekonečnu rôznymi rýchlosťami.

# 9 Literatúra

[1] TOMAN E., STANEK M.: Analysis of Greedy Algorythm for Vertex Covering of Random Graph by Cubes. Computing and Informatics, Vol. 25, 2006, 393-404

[2] A.A. Sapozhenko: On D.N.F. Complexity Obtained by Help of Greedy Algorithm. Diskretny analiz, Vol. 21, 1972, pp. 62-72 (In Russian)

[3] M. KOVALÍKOVÁ: Metrické vlastnosti boolovských funkcií s daným počtom jednotiek, Diplomová práca, FMFI UK 2006.

[4] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1, 3rd Ed., J. Wiley and Sons, New York 1970.

[5] F. Mileto, G.Putzolu: Average values of quantities appearing in Boolean function minimalization, IEE EC-13, 2, 1964.

[6] E. M. Palmer: Graphical Evolution: Appendixes, New York 1985.

[7] S. V. Yablonsky, O.B. Lupanov: Discrete Mathematics and Mathematical Problems of Cybernetics, Nauka, Moscow 1974.

[8] E. Toman, J. Tomanová: Some Estimates Of The Complexity of Disjunctive Normal Forms Of A Random Boolean Function, Computers and Artificial Intelligence, Vol. 10, 1991, No. 4, 327 - 340

[9] K. Zvára, J.Štepán: Pravděpodobnost a matematická statistika, 1. vydanie, VEDA Bratislava, 2002