

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

5-CYKLY A ICH ZHLUKY V INVOLUČNÝCH
SNARKOCH
BAKALÁRSKA PRÁCA

2021
RADOSLAV SMARŽÍK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

5-CYKLY A ICH ZHLUKY V INVOLUČNÝCH
SNARKOCH
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: FMFI.KI - Katedra informatiky
Školiteľ: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Bratislava, 2021
Radoslav Smaržík



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Radoslav Smaržík
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: 5-Cykly a ich zhľuky v involučných snarkoch
5-Cycles and their clusters in involution snarks

Anotácia: Involučný snark je nezafarbiteľný kubický graf (snark) na $2n$ vrcholoch, ktorý obsahuje dve disjunktné bezchordové kružnice dĺžky n a permutácia určená zvyšnými n hranami je involúcia. Involučné snarky tvoria zaujímavú podtriedu permutačných snarkov a vďaka svojej pevnej štruktúre sú vhodným objektom výskumu, ktorý môže vnieť viac svetla do štruktúry snarkov ako takých.

Cieľom práce bude analyzovať štruktúru známych involučných snarkov, najmä zhľukov 5-cyklov (klastrov) v nich obsiahnutých, a na základe tejto analýzy skonštruovať nekonečné rodiny involučných snarkov. Analýza štruktúry si môže vyžadovať využitie výpočtových prostriedkov.

Cieľ: Na získanie požadovaných poznatkov bude potrebné
- naštudovať si súvisiacu problematiku
- identifikovať typy klastrov v involučných snarkoch
- zistené výsledky interpretovať a pokúsiť sa o ich zovšeobecnenie na nekonečné triedy involučných snarkov.

Poznámka: Táto práca má potenciál na pokračovanie v diplomovej práci.

Kľúčové slová: permutačný snark, involúcia, permutačný 2-faktor, cyklická súvislosť, zhľuk (klaster) 5-cyklov

Vedúci: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky

Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Dátum zadania: 31.10.2020

Dátum schválenia: 04.01.2021

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie: Touto cestou by som sa rád poďakoval svojmu školiteľovi prof. RNDr. Martinovi Škovierovi, PhD., za poskytnuté materiály a pomoc pri vytváraní tejto bakalárskej práce.

Abstrakt

Involučný snark je kubický graf bez hranového 3-zafarbenia s 2-faktorom tvoreným dvoma bezchordovými cyklami, ktorý sa dá reprezentovať permutáciou rádu 2 - involúciou. Snark, ktorého všetky vrcholy ležia v jednom klastri 5-cyklov označujeme ako snark s kompletným klastrom. V práci popisujeme spôsob, ako snark Blanuša 1 rozšíriť na involučný snark s kompletným klastrom rádu 34 a ako sme vďaka tomuto postupu vytvorili všeobecnú konštrukciu pre vytváranie involučných snarkov s kompletným klastrom. V práci je predstavená aj nekonečná rodina involučných snarkov, ktorá využíva nami objavenú konštrukciu na vytváranie involučných snarkov s kompletným klastrom.

Kľúčové slová: permutačný snark, involúcia, permutačný 2-faktor, cyklická súvislosť, zhluk(klaster) 5-cyklov

Abstract

An involution snark is an uncolourable cubic graph which has a 2-factor consisting of two chordless cycles and which can be represented by a permutation of order 2 (involution). A snark with complete cluster is one whose vertices are in one cluster of 5-cycles. In this work we describe a method how the snark Blanusa 1 can be extended to an involution snark with complete cluster of order 34. We present a new general method of construction of involution snarks with complete cluster. In this work we also present an infinite family of involution snarks with complete cluster. This infinite family uses our construction of involution snark with complete cluster.

Keywords: permutation snark, involution, permutation 2-factor, cyclic edge connectivity, cluster of 5-cycles

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy a definície	3
1.1 Definície	3
1.2 Permutácie	6
2 Snarky	9
2.1 Snark	9
2.2 História snarkov	10
2.2.1 Graf činka	12
2.2.2 Petersenov graf	12
2.2.3 Blanušove snarky	14
2.2.4 Descartesov snark	14
2.2.5 Szekeresov snark	15
3 Permutačné snarky	17
3.1 Permutačný snark	17
3.1.1 Reprezentácie permutačného snarku	18
3.2 Involučné snarky	20
3.3 Konštrukcia permutačných snarkov	21
3.3.1 Metóda 4-súčinu	21
3.4 Vytváranie involučných snarkov	22
4 Klastre	27
4.1 Klaster 5-cyklov	27
4.1.1 Petersenovské klastre	28
4.1.2 Nepetersenovské klastre	28
5 Involučné snarky s kompletným klastrom	31
5.1 Program na overovanie vlastností snarkov	31
5.2 Malé involučné snarky s kompletným klastrom	32
5.3 Rozšírenie snarku Blanuša 1	34

5.4	Nekonečná rodina	35
Záver		47
Príloha		51

Zoznam obrázkov

2.1	Permutačný snark rádu 34 s cyklickou súvislosťou 5 [14]	11
2.2	Graf činka	12
2.3	Petersenov graf [23]	12
2.4	Prvý Blanušov snark	13
2.5	Druhý Blanušov snark	13
2.6	Descartes snark [21]	14
2.7	Szekeres snark [22]	15
3.1	Dve neizomorfné bicyklické reprezentácie snarku Blanuša 1	18
3.2	Dve rôzne permutačné reprezentácie snarku Blanuša 1	20
3.3	Blanuša 1 s involučnou reprezentáciou $(0)(1\ 7)(2\ 5)(3\ 8)(4\ 6)$	21
3.4	Petersenov dipól s vyznačenými permutačnými cyklami	23
4.1	Petersenovský klaster isochróm	28
4.2	Nepetersenovský klaster s 18 vrcholmi	28
5.1	Blanuša 1	32
5.2	Druhý graf v súbore INVOL_34.ALL	33
5.3	Šiesty graf v súbore INVOL_34.ALL	33
5.4	Siedmy graf v súbore INVOL_34.ALL	33
5.5	Blanuša 1	34
5.6	Permutačné cykly prechádzajúce dipólmi, variant 1	36
5.7	Permutačné cykly prechádzajúce dipólmi, variant 2	36
5.8	Petersenov dipól D_1 s vyznačenými hranami h_1, h_2, h_3, h_4	36
5.9	Blanuša 1 s vyznačenými dipólmi	37
5.10	Involučná reprezentácia snarku Blanuša 1 $(0)(1\ 6)(2\ 8)(3\ 5)(4\ 7)$	38
5.11	Involučná reprezentácia snarku Blanuša 1 $(0)(1\ 7)(2\ 5)(3\ 8)(4\ 6)$	38
5.12	Odstránenie hrany h_1	40
5.13	Odstránenie hrany h_2	40
5.14	Odstránenie hrany h_3	40
5.15	Odstránenie hrany h_4	41

5.16	Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = a, e'_2 = h_1$	42
5.17	Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = a, e'_2 = h_2$	42
5.18	Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = a, e'_2 = h_3$	43
5.19	Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = b, e'_2 = h_2$	43
5.20	Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = b, e'_2 = h_3$	43
5.21	Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = b, e'_2 = h_4$	43
5.22	Prechod permutačných cyklov cez Petersenov dipól, variant 1	45
5.23	Prechod permutačných cyklov cez Petersenov dipól, variant 2	45

Úvod

V tejto bakalárskej práci sa budeme venovať involučným snarkom s kompletným klastrom. Involučné snarky sú zaujímavou podtriedou permutačných snarkov, čo sú kubické grafy, ktoré nemajú hranové 3-zafarbenie a ktorých 2-faktor sa skladá z dvoch bezchordových cyklov. Každý involučný snark rádu $2n$ vieme jednoznačne reprezentovať permutáciou na n -prvkovej množine, ktorá je involúcia. Pojem involučný snark sa v odbornej literatúre zatiaľ neobjavil, a teda nie je poriadne preskúmaný.

Potreba skúmania takýchto snarkov vyplýva z toho, že majú dobrú a pevnú štruktúru. Zároveň aj snark Blanuša 1, druhý najmenší netriviálny snark, patrí medzi involučné snarky. Napriek tomu, že sa tento snark často objavuje pri skúmaní snarkov, jeho involučná vlastnosť nebola zatiaľ využitá.

Zároveň nás bude zaujímať skúmanie snarkov s kompletným klastrom. Petersenov graf je jediný známy snark, v ktorom každá hrana leží v 5-cykle. Snarky s kompletným klastrom túto vlastnosť zatiaľ najlepšie približujú. Doteraz však bolo známych iba niekoľko málo snarkov s kompletným klastrom. Je zaujímavé, že niektoré z nich sú involučné snarky.

Napriek tomu, že počas skúmania snarkov boli skonštruované rôzne nekonečné rodiny, ktoré využívajú rôzne metódy rozširovania snarku na väčší snark, žiadna z týchto nekonečných rodín neobsahovala iba involučné snarky s kompletným klastrom. Práve, preto je cieľom tejto bakalárskej práce skúmať štruktúru involučných snarkov a klastrov v nich. Na základe toho sa pokúsime skonštruovať nekonečnú rodinu involučných snarkov s kompletným klastrom. Ako štartovací graf použijeme snark Blanuša 1, ktorý sa zdá byť najvhodnejším kandidátom, keďže je to najmenší involučný snark s kompletným klastrom. Ak sa nám podarí nájsť nejaký postup, ktorým tento snark rozšírime na väčší involučný snark s kompletným klastrom, tak jeho zovšeobecnením by sa nám mohlo podariť zdefinovať aj nekonečnú rodinu.

Kapitola 1

Základné pojmy a definície

V prvej časti tejto kapitoly si zdefinujeme základné pojmy a definície z teórie grafov, ktoré je nutné poznať pri čítaní tejto bakalárskej práce. Potrebujeme ich na vysvetlenie zložitejších pojmov v nasledujúcich kapitolách. Definície z teórie grafov sú spracované podľa [2] a [19]. V druhej časti si zas povieme základné pojmy o permutáciách, ktoré neskôr využijeme pri permutačných snarkoch.

1.1 Definície

Definícia 1. *Graf* G je usporiadaná dvojica dvoch množín $G = (V, E)$, kde množina $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je neprázdna konečná množina *vrcholov* grafu G a množina $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ je množina *hrán* grafu G . Každá hrana $e \in E$ spája dva vrcholy $v_i, v_j \in V$, pričom dovoľujeme, aby $v_i = v_j$. Hrana, ktorá má na oboch koncoch ten istý vrchol sa nazýva *slučka*. Hrana, ktorá spája dva rôzne vrcholy sa nazýva *spojnica*. Hranu e , ktorá má koncové vrcholy v_i a v_j môžeme zapísať ako $e = v_i v_j$. Napriek tomu, že tento zápis nie je jednoznačný, vždy z kontextu by malo byť jasné akú hranu tým myslíme.

V definícii 1 sme zdefinovali neorientovaný graf. V tejto bakalárskej práci sa venujeme iba neorientovaným grafom, takže pod označením *graf* budeme vždy chápať *neorientovaný graf*.

Definícia 2. Nech $G = (V, E)$ je graf. *Rád grafu* G alebo *počet vrcholov* grafu G je mohutnosť množiny vrcholov V . Rád grafu G označujeme symbolom $|G|$.

Definícia 3. Nech $G = (V, E)$ je graf. *Počet hrán* grafu G je mohutnosť množiny hrán E . Počet hrán grafu G označujeme symbolom $||G||$.

Definícia 4. Nech v_i, v_j sú vrcholy grafu G a hrana $e = v_i v_j$ je hrana v grafe G , ktorá tieto vrcholy spája. Potom platí vzťah, že vrcholy v_i a v_j sú *incidentné* s hranou e a tiež platí aj opačný vzťah, že hrana e je *incidentná* s vrcholmi v_i a v_j .

Definícia 5. Vrcholy v_i a v_j sú *susedné vrcholy* ak existuje hrana e , ktorá tieto vrcholy spája, čiže pre hranu e platí $e = v_i v_j$.

Definícia 6. Hrany e_i a e_j sú *susedné hrany* ak existuje vrchol v , ktorý je incidentný s oboma hranami.

Definícia 7. Nech $G = (V, E)$ je graf. Pojem *sled* označuje striedavú postupnosť vrcholov a hrán $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_n, e_n$, pričom $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ a $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$. Pre každú hranu e_i z tejto postupnosti platí, že je incidentná s vrcholmi v_{i-1} a v_i . V slede sa môžu vrcholy a hrany opakovať.

Definícia 8. *Uzavretý sled* je sled, pre ktorý platí, že prvý vrchol je rovnaký ako posledný vrchol.

Definícia 9. *Cesta* je sled, v ktorom sa neopakujú vrcholy. Z podmienky o neopakovaní vrcholov vyplýva, že sa v ceste neopakujú ani hrany. Väčšinou sa cesta zapisuje ako postupnosť vrcholov (vynechávajú sa hrany). *Dĺžka cesty* označuje počet hrán, ktoré sa v danej ceste nachádzajú.

Definícia 10. *Cyklus* v grafe je uzavretý sled, pre ktorý platí, že jediné dva rovnaké vrcholy sú prvý a posledný vrchol. Ostatné vrcholy a hrany sa v postupnosti nachádzajú najviac raz. *Dĺžka cyklu* označuje počet vrcholov, ktoré sa v danom cykle nachádzajú. Občas sa namiesto pomenovania cyklus používa označenie *kružnica*.

Definícia 11. *Obvod grafu* G je dĺžka najkratšieho cyklu v grafe G .

Definícia 12. *Bezchordový cyklus* $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ v grafe G je taký cyklus, že pre všetky vrcholy v_i a v_j , $|i - j| \geq 2$ neexistuje hrana, ktorá tieto vrcholy v grafe G spája.

Definícia 13. *Stupeň vrchola* v označuje počet hrán, s ktorými je vrchol v incidentný. Čo tiež znamená, že je to číslo, ktoré vyjadruje s koľkými vrcholmi vrchol v susedí. Slučka prispieva hodnotou 2.

Definícia 14. *Kubický graf* $G = (V, E)$ je taký graf G , pre ktorý platí, že stupeň každého vrcholu $v \in V$ je 3. Pre kubický graf platí $||G|| = (3 \cdot |G|)/2$.

Definícia 15. *Podgraf* grafu $G = (V, E)$ je graf $G' = (V', E')$ taký, že $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Definícia 16. *Indukovaný podgraf* G' grafu G je taký podgraf, že s každými dvoma vrcholmi sa tam nachádzajú aj všetky hrany, ktoré ich spájajú.

Definícia 17. Nech $G = (V, E)$ je graf. *Faktor* grafu G je ľubovoľný graf $H = (V, E')$, pre ktorý platí, že $H \subseteq G$. Jednoduchšie povedané faktor grafu G je jeho ľubovoľný podgraf, ktorý má rovnakú množinu vrcholov ako graf G .

Definícia 18. k -Faktor grafu $G = (V, E)$ je taký faktor grafu G , v ktorom každý vrchol $v \in V$ je stupňa k .

Definícia 19. 2-Faktor grafu $G = (V, E)$ je taký faktor grafu G , v ktorom ľubovoľný vrchol $v \in V$ je stupňa 2. Čo znamená, že 2-faktor grafu G musí byť tvorený len disjunktnými cyklami.

Definícia 20. Nech $G = (V, E)$ je graf. Množina hrán $M \subseteq E$ sa nazýva *párenie* grafu G , ak žiadne dve hrany $e_i, e_j \in M$ nemajú spoločný vrchol. V anglickej literatúre sa pojem párenie grafu označuje slovom *matching*.

Definícia 21. Hovoríme, že párenie M v grafe G je *perfektné párenie*, ak všetky vrcholy z grafu G sú pokryté množinou M , čiže ak všetky vrcholy grafu G sa nachádzajú v nejakej hrane z množiny hrán M . Grafy s nepárnym počtom vrcholov nemôžu mať perfektné párenie. V anglickej literatúre sa takémuto páreniu hovorí *perfect matching*. Perfektné párenie je to isté ako 1-faktor.

Definícia 22. Graf $G = (V, E)$ je *súvislý graf*, ak pre každú dvojicu vrcholov $v_i, v_j \in V$, $v_i \neq v_j$ existuje v grafe G cesta z vrcholu v_i do vrcholu v_j , čiže cesta, ktorej počiatočný vrchol je v_i a koncový vrchol je v_j .

Definícia 23. *Komponent* grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G . Súvislý graf má len jeden komponent.

Definícia 24. *Most* v grafe G je taká hrana $e \in G$, pre ktorú platí, že ak ju z grafu G odstránime, tak sa zväčší počet komponentov v grafe G .

Definícia 25. *Cyklická súvislosť* grafu G je najmenší počet hrán, ktorých odstránením vzniknú komponenty grafu G , z ktorých aspoň dva komponenty obsahujú nejaký cyklus.

Definícia 26. *Hranové k -zafarbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $k \geq 0$, ktoré každej hrane z grafu G priradí farbu z množiny $\{1, \dots, k\}$ tak, aby platilo, že neexistujú dve susedné hrany s rovnakou farbou. Graf, ktorý obsahuje slučku nemá k -zafarbenie.

Definícia 27. *Chromatický index* grafu G je najmenší počet farieb, ktoré sú potrebné na zafarbenie hrán grafu G tak, aby žiadne dve susedné hrany v grafe G nemali rovnakú farbu. Chromatický index grafu G označujeme $\chi'(G)$.

Definícia 28. Nech $G = (V, E)$ a $H = (V', E')$ sú dva grafy. Hovoríme, že graf G je *izomorfný* s grafom H , ak existuje bijektívne zobrazenie $f : V \rightarrow V'$ také, že pre každú dvojicu vrcholov $v_i, v_j \in V$ platí: $v_i v_j \in E \Leftrightarrow f(v_i) f(v_j) \in E'$. Zobrazenie f v takom prípade nazývame *izomorfné zobrazenie* alebo skrátene *izomorfizmus*. Ak pre graf H navyše platí $H = G$, tak zobrazenie f je *automorfizmus*.

1.2 Permutácie

V bakalárskej práci sa venujeme permutačným snarkom, ktoré sú spojené s permutáciami. Preto musíme zaviesť základné pojmy, ktoré sa týkajú permutácií.

Definícia 29. Nech M je konečná množina. Ľubovoľná bijekcia $\varphi : M \rightarrow M$ sa nazýva *permutácia*.

V našom prípade budeme používať iba množiny tvaru $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, pretože prvky ľubovoľnej n -prvkovej množiny môžeme označiť číslami 0 až $n - 1$. Tým si zjednodušíme prácu s permutáciami.

Majme množinu $M = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ a permutáciu $\varphi : M \rightarrow M$. Na zápis permutácie φ môžeme využívať *dvojriadkový zápis*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \varphi(0) & \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n-1) \end{pmatrix}$$

Namiesto zdĺhavého dvojriadkového zápisu môžeme permutáciu φ zapísať aj ako $\varphi = (\varphi(0) \varphi(1) \varphi(2) \dots \varphi(n - 1))$, pretože horný riadok v dvojriadkovom zápise je vždy postupnosť čísel od 0 po $n - 1$. Takýto spôsob označujeme ako *jednoriadkový zápis* permutácie. My tento zápis však používať nebudeme. Radšej využijeme zápis permutácie na cykly, ktorý využíva *rozklad permutácie na súčin disjunktných cyklov*. Takýto zápis permutácie je častokrát veľmi žiadaný, pretože nám dáva lepšiu predstavu, ako sa daná permutácia správa. Na to, aby sme vedeli zapísať permutáciu ako súčin disjunktných cyklov, potrebujeme zaviesť pojem *cyklus permutácie*.

Definícia 30. *Cyklická permutácia* φ na množine $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ je taká permutácia, pre ktorú platí, že $\varphi(x_0) = x_1, \varphi(x_1) = x_2, \dots, \varphi(x_{k-1}) = x_k, \varphi(x_k) = x_0$. Cyklickú permutáciu označujeme ako $(x_0 \dots x_k)$.

Definícia 31. Nech φ je ľubovoľná permutácia. Hovoríme, že cyklická permutácia $(a_0 \dots a_k)$ je *cyklus permutácie* φ , ak $\varphi(a_0) = a_1, \varphi(a_1) = a_2, \dots, \varphi(a_{k-1}) = a_k, \varphi(a_k) = a_0$.

Definícia 32. Dva cykly permutácie sú *disjunktné*, ak nehýbu tým istým prvkom.

Každý cyklus permutácie môžeme zapísať viacerými spôsobmi. Napríklad cyklus $(1\ 2\ 3)$ môžeme zapísať ako $(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)$. Preto je niekedy vhodné cyklus usporiadať, napríklad tak, že prvý člen v cykle je najmenší prvok, ktorý sa v cykle nachádza.

Nie každá permutácia je cyklus. Napríklad permutácia φ s jednoriadkovým zápisom $\varphi = (3\ 1\ 2\ 5\ 4)$ nezodpovedá definícii 31. Túto permutáciu môžeme však zapísať ako súčin dvoch disjunktných cyklov ako $\varphi = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$. Dokonca platí, že ľubovoľnú permutáciu vieme previesť na súčin disjunktných cyklov. Teraz si predstavíme algoritmus, ako z klasického zápisu permutácie môžeme získať rozklad permutácie na disjunktné cykly, teda *cyklický zápis* permutácie.

Algoritmus na vytvorenie cyklového rozkladu

Nech φ je permutácia na n -prvkovej množine a $\varphi = (\varphi(0)\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n-1))$ je jej jednoriadkový zápis. Cyklický zápis permutácie φ bude tvorený cyklami permutácie, ktoré postupne vytvoríme. Cyklus permutácie začneme vytvárať tak, že vyberieme ľubovoľný prvok $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Prvok k zapíšeme do zátvorky, ktorá predstavuje práve vytváraný cyklus permutácie. Následne zoberieme prvok $\varphi(k)$ a skontrolujeme, či sa v našom vytváranom cykle už nachádza. Ak sa tento prvok $\varphi(k)$ v cykle už nachádza, tak uzavrieme cyklus a máme vytvorený jeden cyklus. Ak sa však tento prvok v cykle ešte nenachádza, tak ho do práve vytváraného cyklu permutácie pridáme. Následne opakujeme celý proces s tým, že sa snažíme pridať prvok $\varphi(\varphi(k))$. Takto pokračujeme, kým nenarazíme na prvok, ktorý sa v cykle už nachádza. Vždy, ako prvé nastane to, že sa zopakuje prvok, ktorý bol do cyklu pridaný ako prvý. Keď narazíme na prvok, ktorý sa v cykle už nachádza, tak tento prvok tam nepridávame. Namiesto toho uzavrieme cyklus a skončíme proces vytvárania daného cyklu. Proces rozkladu permutácie na súčin disjunktných cyklov pokračuje tým, že zoberieme ďalší ľubovoľný prvok z $\{0, 1, \dots, n-1\}$, okrem tých prvkov, ktoré už v nejakom cykle sú a vytvárame ďalší cyklus rovnakým spôsobom. Končíme v momente, keď všetky prvky z $\{0, 1, \dots, n-1\}$ sú v nejakom cykle permutácie. Všetky cykly, ktoré sme týmto postupom získali tvoria *cyklický zápis* permutácie.

Ako príklad prevodu permutácie na cyklický zápis si zoberme permutáciu, ktorej jednoriadkový zápis je $\varphi = (1\ 0\ 2)$. Ako prvé zoberme napríklad prvok 0 a vložme ho do prvého cyklu. Prvok 0 sa nám vďaka permutácii φ zobrazí na 1. Teraz sa pokúsme pridať 1 do vytváraného cyklu. Keďže prvok 1 sa v tomto cykle ešte nenachádza, tak ho do cyklu pridáme. Následne podľa vyššie uvedeného algoritmu musíme skúsiť pridať prvok $\varphi(1)$, čo je prvok 0. Prvok 0 sa už v cykle nachádza, a teda prišli sme do bodu, kedy sa nám prvok zopakoval. Podľa algoritmu už ukončíme cyklus. Tým sme vytvorili cyklus $(0\ 1)$. Ako ďalšie by sme zobrali ľubovoľný prvok, ktorý v žiadnom cykle ešte nie je. V tomto príklade máme jedinú možnosť, a to prvok 2. Postupom z algoritmu by sme prišli k tomu, že by sme vytvorili cyklus (2) . Tým by sa minuli všetky prvky, a teda výsledný cyklický zápis by bol $\varphi = (0\ 1)(2)$.

Na tomto príklade si môžeme všimnúť, čo by sa stalo v prípade, keby sme do prvého cyklu, ako prvý zvolený prvok vybrali 2. Získali by sme zápis $\varphi = (2)(0\ 1)$. Z tohto príkladu vidno, že súčin disjunktných cyklov je komutatívny a je jedno, v akom poradí zapíšeme cykly permutácie.

Na konci tejto časti ešte zavedieme základné pojmy, ktoré súvisia s cyklickým zápisom permutácie a hlavne s cyklami permutácie.

Definícia 33. *Dĺžka cyklu permutácie* je počet prvkov, ktoré sa v danom cykle permutácie nachádzajú.

Napríklad dĺžka cyklu permutácie $(3\ 1\ 0\ 2)$ je 4.

Definícia 34. Cyklus permutácie nazývame *pevný bod* alebo *pevný bod permutácie*, ak má tento cyklus dĺžku 1.

Definícia 35. Cyklus permutácie nazývame *transpozícia*, ak má tento cyklus permutácie dĺžku 2.

Definícia 36. Permutácia, ktorej cyklický zápis tvoria len cykly dĺžky ≤ 2 sa nazýva *involúcia*. To znamená, že cyklický zápis involúcie je tvorený len pevnými bodmi a transpozíciami.

Kapitola 2

Snarky

V tejto kapitole sa oboznámime s pojmom snark. Povieme si niečo o histórii snarkov a predstavíme si najvýznamnejšie snarky, ktoré boli skonštruované.

2.1 Snark

Definícia 37. Súvislý kubický graf, ktorý nemá hranové 3-zafarbenie sa nazýva *snark*.

Definícia 38. Snark G je *netriviálny snark*, ak pre graf G platí, že jeho cyklická súvislosť ≥ 4 a jeho obvod je ≥ 5 .

V tejto bakalárskej práci pracujeme so snarkami, ktorých cyklická súvislosť je aspoň 4 a ich obvod je aspoň 5. Preto sme vyššie zadefinovali aj pojem pre takéto snarky, a to *netriviálne snarky*. Tento pojem sa používa aj v článku [5]. Snarky, ktoré nie sú netriviálne môžeme označiť pojmom *triviálne snarky*.

Teraz si ešte zadefinujeme špeciálny typ snarku, a to *permutačný snark*. Na zadefinovanie permutačného snarku ešte potrebujeme vedieť, čo je *permutačný kubický graf*. Nasledujúce dve definície sme čerpali z článku [14].

Definícia 39. *Permutačný kubický graf* G je kubický graf, ktorý má 2-faktor pozostávajúci z dvoch bezchordových cyklov. Takýto 2-faktor grafu G nazývame *permutačný 2-faktor* a cykly, ktoré ho tvoria voláme *permutačné cykly*. Hrany, ktoré nepatria do žiadneho permutačného cyklu voláme *priečky*.

Z definície 39 vyplýva, že bezchordové cykly, ktoré tvoria 2-faktor grafu G sú rovnakej dĺžky a každý z nich má dĺžku $n/2$.

Definícia 40. *Permutačný snark* je permutačný kubický graf, ktorý je snark.

V bakalárskej práci často pracujeme s tým, že permutačný cyklus C_1 z permutačného snarku G označujeme, ako červený cyklus a permutačný cyklus C_2 označujeme ako modrý cyklus.

Pre permutačné snarky platí, že všetky permutačné snarky okrem grafu činka sú netriviálne snarky [14]. Graf činka je graf, ktorý tvoria dva vrcholy spojené hranou, pričom z oboch vrcholov vychádza slučka.

Snarky sú významná trieda kubických grafov, o čom nás presvedča ich súvis s viacerými ťažkými problémami a dlhodobo otvorenými hypotézami v teórii grafov. Snarky sú potenciálnymi protipríkladmi k hypotéze o dvojitém pokrytí cyklami (cycle double cover conj), k Tuttovej 5-tokovej hypotéze, Fulkersonovej hypotéze, Fan-Raspaudovej hypotéze a iným. Problém rozhodnúť či kubický graf je hranovo 3-zafarbiteľný alebo je snark, je jeden z najjednoduchšie formulovateľných NP-úplných problémov [10].

Najstarší výsledok týkajúci sa snarkov pochádza z roku 1880. Dokázal ho škótsky matematik P. G. Tait a hovorí, že každý planárny graf sa dá vrcholovo zafarbiť 4 farbami práve vtedy, keď každý kubický bezmostový graf sa dá hranovo zafarbiť 3 farbami. Veta o 4 farbách, teda hovorí, že neexistujú planárne snarky.

2.2 História snarkov

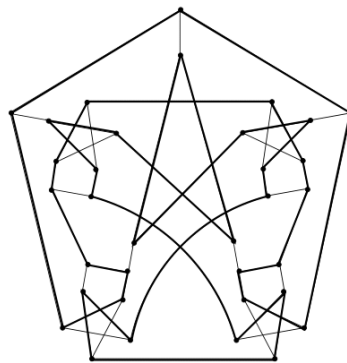
Snarky sú ešte mladá trieda grafov, ktorá bola objavená pomerne nedávno. Prvá štúdia, v ktorej bol spomenutý bezmostový kubický graf s chromatickým indexom 4 pochádza z roku 1880. V tom období škótsky matematik Peter Guthrie Tait dokázal, že Veta o štyroch farbách (Four color theorem) je ekvivalentná s výrokom, že neexistuje snark, ktorý by bol planárny graf [18]. Prvý snark bol objavený až v roku 1898 [9]. Išlo o slávny *Petersenov graf*. Až v roku 1946 došlo k objaveniu ďalšieho snarku. Konkrétne juhoslovenský matematik Danilo Blanuša objavil snark rádu 18 [1]. Tento snark voláme *prvý Blanušov snark*. O dva roky neskôr v roku 1948 W. T. Tutte pod pseudonymom Blanche Descartes objavil ďalší snark, tentokrát išlo o snark s 210 vrcholmi [7]. V roku 1973 George Szekeres objavil ďalší snark, ktorý nesie meno po svojom objaviteľovi, a teda *Szekeresov snark* [17].

Môžeme si všimnúť, že objavovanie prvých snarkov šlo veľmi pomaly. Od roku 1880 do roku 1973 bolo objavených iba pár grafov, o ktorých sme vedeli povedať, že sú to snarky. Prelom prišiel až v roku 1975, kedy došlo k obrovskému objavu, s ktorým prišiel americký matematik Rufus Isaacs [11]. Tomu sa podarilo objaviť dve nekonečné triedy snarkov. Prvú nekonečnú triedu snarkov dnes poznáme pod názvom *Isaacs flower snarks* (po slovensky *Isaacove snarky*), čo vychádza z anglického slova flower (kvetina). Označenie flower snarky sa používa na základe toho, že zakreslenie týchto snarkov pripomína kvet. Druhá nekonečná trieda snarkov niesla názov *BDS* (*Blanuša-Descartes-Szekeres*). Už názov tejto triedy napovedá, že sa v nej nachádzajú Blanušove snarky, Descartesov snark a aj Szekeresov snark. BDS je trieda snarkov,

ktorá vznikla z Petersenovho grafu iterovaním 4-súčinom. Metóde 4-súčinu sa budeme viac venovať v kapitole 3. Názov tieedy BDS sa nakoniec neuchytil. Isaacovi sa dokonca podarilo v tom istom roku objaviť aj snark, ktorý mal 30 vrcholov a nepatril ani medzi BDS snarky, ani medzi flower snarky.

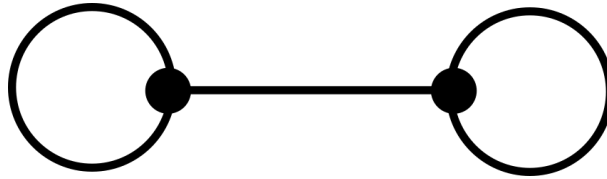
V tom období sa ešte nepoužíval pojem snark. Zmena nastala až v roku 1976, keď americký matematik Martin Gardner prvýkrát použil pojem *snark*. Tento pojem sa uchytil a využíva sa dodnes.

Ako ďalšie v histórii snarkov malo veľký zmysel skúmanie permutačných snarkov. Permutačným snarkom predchádzalo skúmanie permutačných grafov. Ako prvý sa štúdiu permutačných grafov začali venovať matematici Chartrand a Harary. V ich knihe [6] zovšeobecnením Petersenovho grafu zaviedli pojem permutačný graf. Keďže Petersenov graf tvorí základ permutačných snarkov, tak problematika tejto témy sa zdá byť veľmi dôležitá. Napriek tomu sa však v minulosti tejto problematike nevenovalo veľa matematikov. Za zmienku napríklad stojí čínsky matematik Cun-Quan Zhang a jeho kniha [24], v ktorej sa zmieňuje o permutačných snarkoch. Zhang v tejto knihe vyslovil hypotézu, že jediný permutačný snark s cyklickou súvislosťou 5 je Petersenov graf. To však neskôr bolo vyvrátené v článku [4] z roku 2013. V ňom sa podarilo počítačom zostrojiť permutačný snark rádu 34, ktorý mal cyklickú súvislosť 5. Tento permutačný snark rádu 34 môžeme vidieť na obrázku 2.1. O čosi neskôr, konkrétne v roku 2017 sa podarilo tento permutačný snark rádu 34 zovšeobecniť na celú nekonečnú triedu permutačných snarkov s cyklickou súvislosťou 5. Túto triedu objavili Hägglund a Hoffmann-Ostenhof vo svojom článku [8]. V roku 2019 Škoviera a Mačajová spoločne publikovali článok [14] o permutačných snarkoch, v ktorom sa venujú trom všeobecným metódam, ako vytvárať nové permutačné snarky rádu $n \equiv 2 \pmod{8}$, z už vytvorených permutačných snarkov.



Obr. 2.1: Permutačný snark rádu 34 s cyklickou súvislosťou 5 [14]

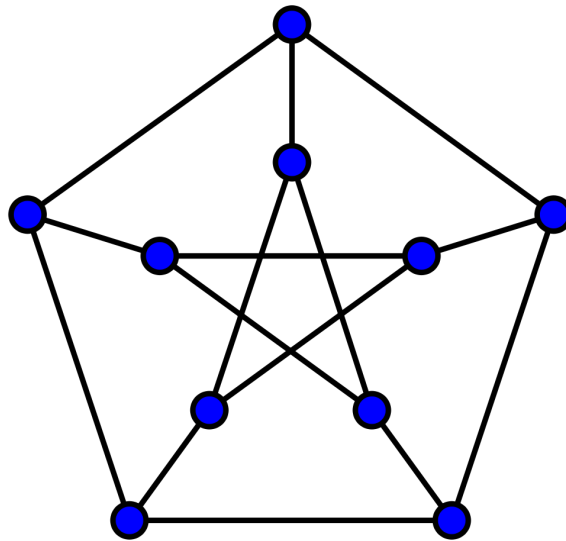
Na koniec tejto časti si ešte popíšeme a ukážeme, aké významné snarky boli skonštruované.



Obr. 2.2: Graf činka

2.2.1 Graf činka

Činka je graf, ktorý obsahuje dva vrcholy, ktoré sú spojené jednou hranou. Navyše z každého vrcholu v činke vychádza slučka. Graf činka je počtom vrcholov najmenší snark a zároveň aj najmenší permutačný snark. Činka je triviálny snark. Tento graf je znázornený na obrázku 2.2.

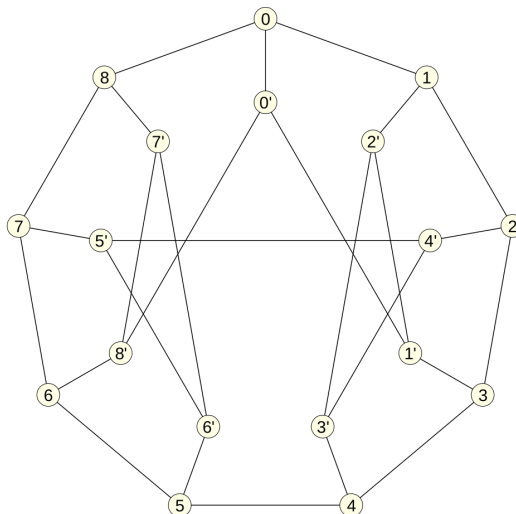


Obr. 2.3: Petersenov graf [23]

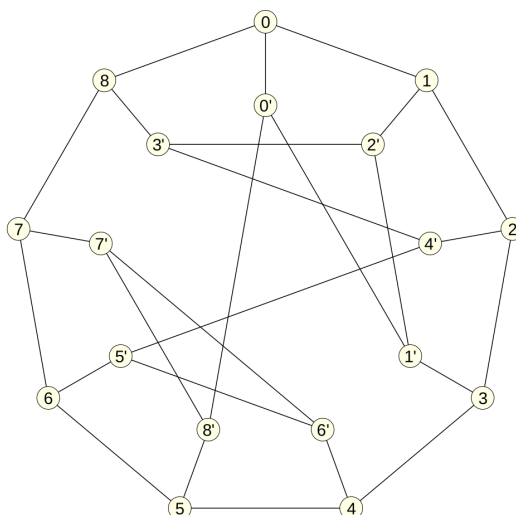
2.2.2 Petersenov graf

Prvý objavený a zároveň najznámejší snark je *Petersenov graf*. Petersenov graf obsahuje 10 vrcholov a 15 hrán. Keďže jeho cyklická súvislosť ≥ 4 a obvod je ≥ 5 , tak sa jedná o netriviálny snark. Petersenov graf je najmenší netriviálny permutačný snark. Petersenov graf nesie meno po dánskom matematikovi Júliusovi Petersenovi, ktorý ho v roku 1898 zostrojil. Prvýkrát bol však spomenutý už v roku 1886. Vtedy ho spomenul

matematik Bray Kempe [12]. V teórii grafov patrí medzi najvýznamnejšie grafy a častokrát sa používa ako príklad ku rôznym problémom v tejto oblasti. Petersenov graf je zobrazený na obrázku 2.3.



Obr. 2.4: Prvý Blanušov snark

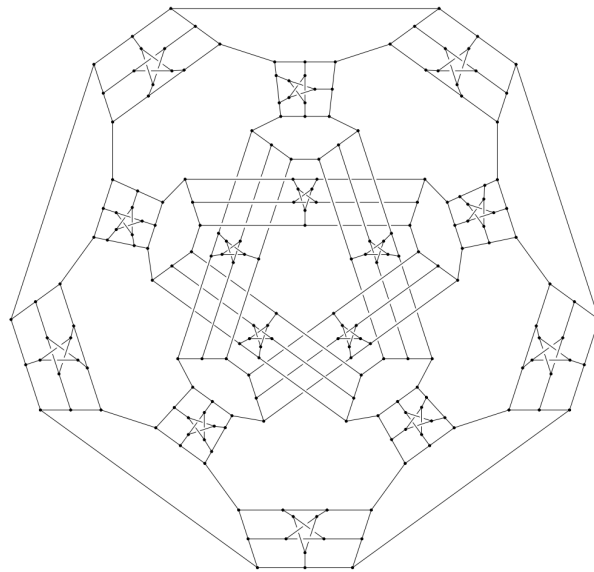


Obr. 2.5: Druhý Blanušov snark

2.2.3 Blanušove snarky

Prvý Blanušov snark je snark, ktorý bol objavený v roku 1946 juhoslovanským matematikom Danilom Blanušom [1]. Existuje aj *druhý Blanušov snark*, o ktorom sa však v práci [1] nepíše. Pôvod druhého Blanušovho snarku je nejasný. Prvý a druhý Blanušov snark vystupujú pod spoločným označením *Blanušove snarky*. Oba tieto snarky majú 18 vrcholov a 27 hrán. V literatúre ich môžeme nájsť aj pod názvami snark *Blanuša 1*, respektíve snark *Blanuša 2*. Hneď po Petersenovom grafe sú svojim počtom vrcholov najmenšie netriviálne snarky. Obe snarky sú permutačné snarky. Prvý z Blanušových snarkov sa nachádza na obrázku 2.4 a druhý na obrázku 2.5.

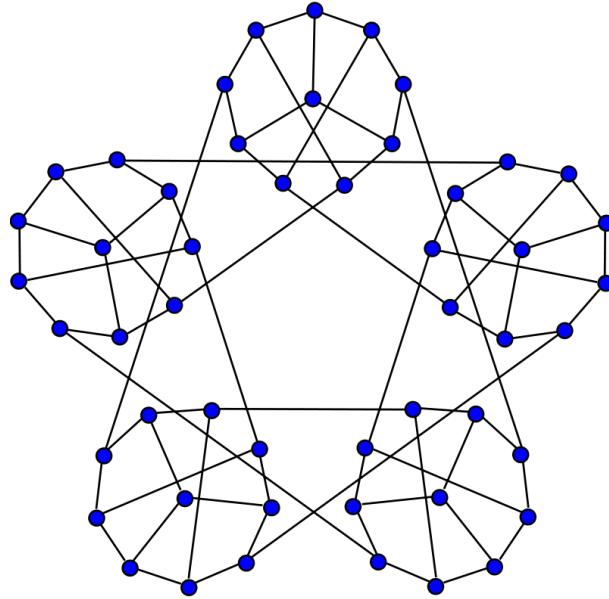
Je nutné uviesť, že v značení Blanušových snarkov je pomerne zmätok. Internetové stránky, ako napríklad Wikipédia [20] majú prehodené označenie Blanušových snarkov, čo je samozrejme chyba. Tiež sa na Wikipédii môžeme dočítať, že v roku 1946 Blanuša objavil dva snarky rádu 18. To je tiež chyba, pretože ako sme už spomínali, tak vo svojej práci [1] Blanuša spomína iba jeden snark rádu 18, a to prvý Blanušov snark. O pôvode Blanušových snarkov sa píše v článku [15].



Obr. 2.6: Descartes snark [21]

2.2.4 Descartesov snark

Descartesov snark bol objavený v roku 1948. Jeho objaviteľom je W. T. Tutte. Snark obsahuje 210 vrcholov a 315 hrán. Descartesov snark môžeme vidieť na obrázku 2.6.



Obr. 2.7: Szekeres snark [22]

2.2.5 Szekeresov snark

Szekeresov snark bol jeden z prvých objavených snarkov. Je pomenovaný po svojom objaviteľovi Georgovi Szekeresovi. Jedná sa o snark, ktorý obsahuje 50 vrcholov a 75 hrán. Szekeresov snark je permutačný snark. Szekeresov snark sa nachádza na obrázku 2.7.

Kapitola 3

Permutačné snarky

V tejto kapitole sa bližšie oboznámime so špeciálnou skupinou snarkov, a to s *permutačnými snarkami* a s jej podtriedou *involučnými snarkami*. Definíciu permutačného snarku máme uvedenú v kapitole 2. Povieme si, akými dvoma spôsobmi môžeme permutačný snark reprezentovať. Na konci kapitoly si uvedieme jednoduchú metódu *4-súčinu* na vytváranie nových snarkov a aj dve špeciálne konštrukcie, ktoré 4-súčin využívajú na vytváranie involučných snarkov.

3.1 Permutačný snark

Na základe definície 40 z kapitoly 2 je permutačným snarkom taký snark, ktorého 2-faktor tvoria dva bezchordové cykly. Ekvivalentne môžeme povedať, že permutačný snark je snark, ktorý je tvorený dvoma disjunktnými cyklami rovnakej dĺžky, medzi ktorými je perfektné párenie.

Každý permutačný snark okrem činky je snark, ktorý ma cyklickú súvislosť najmenej 4 a obvod aspoň 5 [14]. Čo znamená, že okrem činky je každý permutačný snark zároveň aj netriviálny snark. Ďalej pre každý permutačný snark platí, že počet vrcholov, ktoré obsahuje je dvojnásobok nejakého nepárneho čísla [14].

Pre každý permutačný snark G platí, že musí byť rádu $n \equiv 2 \pmod{4}$. Nie je ťažké si uvedomiť, že ak by to tak nebolo, tak jeho 2-faktor by sa skladal z dvoch párných cyklov. Každý z týchto cyklov by sme hranovo ofarbili pomocou dvoch farieb a hrany mimo cyklov, teda *priečky*, by sme ofarbili treťou farbou. Tým by sme snark G hranovo ofarbili pomocou troch farieb, čo je spor s tým, že G je permutačný snark.

Aj keď platí, že každý permutačný snark je rádu $n \equiv 2 \pmod{4}$, tak zatiaľ sa počítačom podarilo objaviť iba permutačné snarky rádu $n \equiv 2 \pmod{8}$. Pričom na druhej strane žiaden permutačný snark rádu $n \equiv 6 \pmod{8}$ ešte objavený nebol. To nám kladie prirodzenú otázku či vôbec permutačný snark rádu $n \equiv 6 \pmod{8}$ existuje. Na túto otázku ešte nemáme odpoveď, ale predpokladá sa skôr to, že takýto

permutačný snark neexistuje.

3.1.1 Reprezentácie permutačného snarku

Pri permutačných snarkoch nás budú zaujímať dva spôsoby, ako permutačný snark reprezentovať. Tieto dva spôsoby reprezentácie permutačného snarku sú *bicyklická reprezentácia* a *permutačná reprezentácia*.

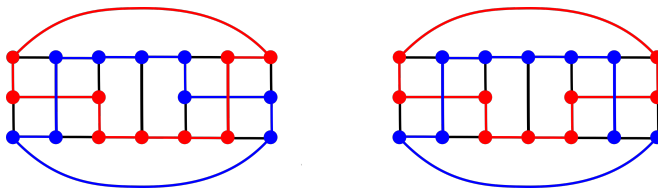
Ako prvú si predstavíme bicyklickú reprezentáciu permutačného snarku. Pri bicyklickej reprezentácii permutačného snarku sa využívajú bezchordové (indukované) cykly, ktoré v permutačnom snarku tvoria 2-faktor. V definícii 41 si presne povieme, čo je bicyklická reprezentácia permutačného snarku.

Definícia 41. Nech G je permutačný snark. To znamená, že v ňom existuje 2-faktor F skladajúci sa z dvoch indukovaných kružníc C_1 a C_2 rovnakej dĺžky. Dvojicu $\{C_1, C_2\}$ nazývame *bicyklická reprezentácia* snarku G .

Treba si uvedomiť, že bicyklická reprezentácia nie je snarkom G určená jednoznačne. Napríklad Petersenov graf má 12 5-cyklov. Ľubovoľný z týchto 5-cyklov sa dá jednoznačne rozšíriť do bicyklickej reprezentácie jednoznačne určeným komplementárnym 5-cykлом. Preto počet bicyklických reprezentácií Petersenovho grafu je 6. Teraz si ešte povieme, čo znamená, že dve bicyklické reprezentácie snarku G sú izomorfné.

Definícia 42. Hovoríme, že dve bicyklické reprezentácie $\{C_1, C_2\}$ a $\{D_1, D_2\}$ snarku G sú izomorfné, ak existuje automorfizmus α grafu G taký, že $\alpha(\{C_1, C_2\}) = \{D_1, D_2\}$. To znamená, že existuje $i \in \{1, 2\}$ také, že $\alpha(C_1) = D_i$ a $\alpha(C_2) = D_{3-i}$.

Ako sme už spomínali Petersenov graf má 6 bicyklických reprezentácií. Všetky bicyklické reprezentácie Petersenovho grafu sú izomorfné. Môže sa však stať aj to, že permutačný snark má viacero neizomorfných bicyklických reprezentácií. Snark Blanuša 1 napríklad nemá všetky bicyklické reprezentácie izomorfné. Na obrázku 3.1 sú nakreslené dve neizomorfné bicyklické reprezentácie snarku Blanuša 1.



Obr. 3.1: Dve neizomorfné bicyklické reprezentácie snarku Blanuša 1

Ďalší spôsob, ako reprezentovať permutačný snark sa nazýva *permutačná reprezentácia*. Vďaka permutačnej reprezentácii môžeme permutačný snark G reprezentovať pomocou *permutácie*. Pri procese získavania permutačnej reprezentácie musíme v

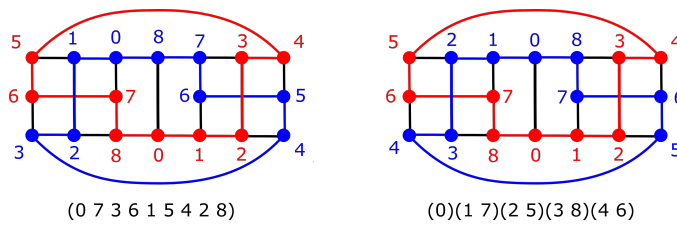
snarku G vrcholy očíslovať. Teraz si konkrétne povieme, ako takéto očíslovanie vrcholov prebieha, a ako sa následne získava permutácia, ktorá je permutačnou reprezentáciou permutačného snarku G .

Definícia 43. Nech graf G je permutačný snark s $2n$ vrcholmi. Nech $\{C_1, C_2\}$ je nejaká bicykliká reprezentácia snarku G . V permutačnom cykle C_1 vyberieme ľubovoľný vrchol v_1 . Počnúc vrcholom v_1 všetkým vrcholom z cyklu C_1 priradíme čísla $0, 1, \dots, n - 1$ tak, ako idú v cykle C_1 v zvolenej orientácii. Následne v permutačnom cykle C_2 vyberieme ľubovoľný vrchol v_2 . Počnúc vrcholom v_2 všetkým vrcholom z cyklu C_2 tiež priradíme čísla $0, 1, \dots, n - 1$ tak, ako idú v cykle C_2 v zvolenej orientácii. Permutačná reprezentácia snarku G je potom permutácia φ , ktorá číslu každého vrcholu v z cyklu C_1 priradí číslo jeho suseda z cyklu C_2 .

Permutačná reprezentácia grafu G s $2n$ vrcholmi je permutácia φ na množine $M = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Vďaka permutácii φ , ktorá je permutačnou reprezentáciou snarku G , vieme snark G jednoznačne zrekonštruovať. Keďže permutačná reprezentácia snarku je permutácia, tak permutačnú reprezentáciu vieme zapísať ako súčin disjunktných cyklov. Permutačnú reprezentáciu snarku G budeme vždy zapisovať ako súčin disjunktných cyklov. Z cyklického zápisu permutačnej reprezentácie sa dajú zistiť rôzne vlastnosti permutačného snarku, napríklad či je daný snark involučný, o čom si povieme neskôr. Proces rozkladu permutácie na súčin disjunktných cyklov je bližšie opísaný v kapitole 1. Každý permutačný snark má aj takú permutačnú reprezentáciu, ktorá obsahuje pevný bod. Pevný bod v permutačnom snarku je reprezentovaný nejakou priečkou, ktorá spája vrcholy z cyklov C_1 a C_2 , ktorým bolo priradené rovnaké číslo.

Z definície 43 vyplýva, že permutačná reprezentácia permutačného snarku G je odvodená z nejakej bicyklickej reprezentácie snarku G . To znamená, že ak by sme použili inú bicyklikú reprezentáciu snarku G , tak by sme mohli dostať úplne inú permutačnú reprezentáciu. Permutačnú reprezentáciu snarku tiež silno ovplyvňuje akým spôsobom očísľujeme vrcholy z permutačných cyklov C_1 a C_2 . Z toho dostávame záver, že jeden permutačný snark môže mať viacero veľmi odlišných permutačných reprezentácií, pričom akú permutačnú reprezentáciu získame je silno spojené s tým, akú bicyklikú reprezentáciu snarku použijeme. Napríklad snark Blanuša 1 môžeme reprezentovať permutačnou reprezentáciou $(0\ 7\ 3\ 6\ 1\ 5\ 4\ 2\ 8)$, ale aj permutačnou reprezentáciou $(0)(1\ 6)(2\ 8)(3\ 5)(4\ 7)$, pričom tieto dve permutačné reprezentácie nie sú jediné. V príklade so snarkom Blanuša 1 vidíme, že dve uvedené permutačné reprezentácie sú úplne odlišné, pretože jedna sa skladá z jedného cyklu a druhá až z piatich cyklov. Dokonca vidíme, že permutácia $(0)(1\ 6)(2\ 8)(3\ 5)(4\ 7)$ je involúcia, čo o druhej spomínanej permutačnej reprezentácii snarku Blanuša 1 neplatí. Tieto dve odlišné permutačné reprezentácie, ktoré sú vytvorené z rovnakej bicyklickej reprezentácie snarku Blanuša 1 sú zakreslené

na obrázku 3.2.



Obr. 3.2: Dve rôzne permutačné reprezentácie snarku Blanuša 1

3.2 Involučné snarky

V tejto časti predstavíme špeciálnu podtriedu permutačných snarkov, ktorým sa v tejto bakalárskej práci venujeme. Ide o podtriedu permutačných snarkov s názvom *involučné snarky*. V odbornej literatúre involučné snarky ešte neboli publikované a bakalárska práca vychádza z nepublikovaného rukopisu [13] s názvom *Involution snarks*, na ktorom pracujú Kráľovič, Mačajová a Škoviera. To či permutačný snark G je aj involučný snark dokážeme zistiť na základe jeho permutačnej reprezentácie. Konkrétne na to, aby sme o permutačnom snarku mohli povedať, že je involučný, potrebujeme nájsť takú permutačnú reprezentáciu snarku G , ktorá je *involučná*.

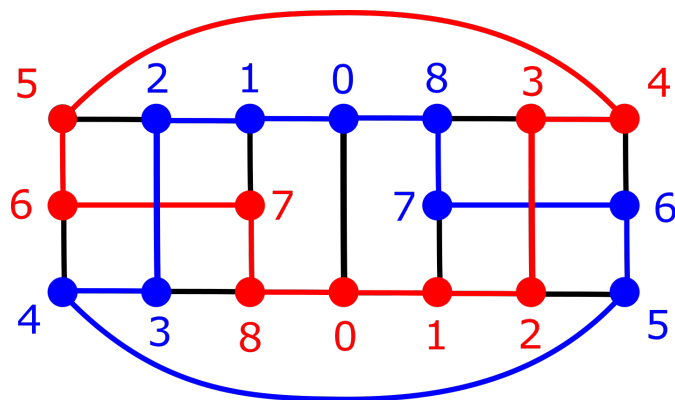
Definícia 44. Permutačná reprezentácia φ permutačného snarku G je *involučná reprezentácia*, ak permutácia φ je involúcia.

Ako overiť, či permutácia φ je involúcia je popísané v kapitole 1.

Definícia 45. Permutačný snark G je *involučný snark*, ak existuje aspoň jedna taká permutačná reprezentácia snarku G , ktorá je involučná reprezentácia.

Na základe definícií, ktoré sme uviedli, proces overenia toho, či permutačný snark G je involučný snark spočíva v tom, že nájdeme nejakú jeho involučnú reprezentáciu. Ako sme spomínali v časti o permutačnej reprezentácii permutačného snarku, tak permutačný snark môže mať viacero rôznych permutačných reprezentácií, ktoré sa môžu odlišovať počtom cyklov permutácie aj tým, aké dĺžky jednotlivé cykly majú. Z toho vyplýva, že niektoré z permutačných reprezentácií grafu G môžu byť involučné a niektoré nie. Nie je ťažké si uvedomiť, že na to, aby sme permutačný snark G vyhlásili za involučný snark nám stačí, ak nájdeme jednu permutačnú reprezentáciu, ktorá je zároveň involučná reprezentácia. Naopak na to, aby sme mohli prehlásiť, že permutačný snark G nie je involučný je potreba overiť všetky jeho permutačné reprezentácie a o všetkých zistiť, že nespĺňajú podmienku involúcie.

Involučné snarky tvoria zaujímavú triedu permutačných snarkov, ktorá ešte nebola veľmi preskúmaná. Medzi involučné snarky patrí napríklad snark Blanuša 1. Snark

Obr. 3.3: Blauša 1 s involučnou reprezentáciou $(0)(1\ 7)(2\ 5)(3\ 8)(4\ 6)$

Blauša 1 aj s jeho vyznačenou involučnou reprezentáciou môžeme vidieť na obrázku 3.3. Je zaujímavé, že druhý Blaušov snark už involučný nie je, aj keď si je so snarkom Blauša 1 vo veľa iných vlastnostiach podobný.

Z toho, aké involučné snarky boli zatiaľ skonštruované sa predpokladá, že involučné snarky existujú iba pre $n \equiv 2 \pmod{16}$. Graf činka je najmenší triviálny involučný snark. Najmenší netriviálny involučný snark je už spomínaný snark Blauša 1, ktorý obsahuje 18 vrcholov.

3.3 Konštrukcia permutačných snarkov

Existuje niekoľko rôznych spôsobov, ako z už vytvorených snarkov skonštruovať nové snarky. Jedna z takýchto metód sa nazýva *4-súčin* alebo po anglicky *dot product*. Metóda 4-súčinu sa dá upraviť tak, aby sme z permutačných snarkov vytvárali nové permutačné snarky. V tejto časti si predstavíme metódu 4-súčinu a aj jej upravenú verziu používanú pre permutačné snarky.

3.3.1 Metóda 4-súčinu

Túto metódu na konštrukciu nových snarkov v roku 1975 predstavil vo svojom diele [11] matematik Rufus Isaacs. Vďaka tejto metóde Isaacs vytvoril nekonečnú triedu snarkov s názvom Blauša-Descartes-Szekeres snarky.

Definícia 46. Majme dva snarky G a H , pričom môže platiť, že G a H sú rovnaké snarky. Zo snarku G vyberieme dve ľubovoľné nesusedné hrany $e_1 = a_1b_1$ a $e_2 = a_2b_2$. Zo snarku H vyberieme ľubovoľnú hranu $f = uv$. V snarku H nech vrchol u susedí s vrcholmi a'_1 , b'_1 a v . A nech vrchol v susedí s vrcholmi a'_2 , b'_2 a u . Z grafu G odstránime hrany e_1 a e_2 a z grafu H odstránime vrcholy u a v . Spojením vrcholov a_1 s a'_1 , b_1 s b'_1 , a_2 s a'_2 , b_2 s b'_2 vznikne nový snark I .

Fakt, že snark I vznikol zo snarkov G a H pomocou 4-súčinu budeme zapisovať $I = G.H$. Skonstruovanie nového snarku závisí od toho, aké hrany e_1 , e_2 a f sme vybrali. Pre prípady, že chceme zvýrazniť, ktoré hrany sme využili, môžeme použiť značenie $I = G[e_1, e_2].[f]H$.

Metóda 4-súčinu pre permutačné snarky

Metóda 4-súčinu pre permutačné snarky narozdiel od všeobecnej metódy 4-súčinu vyžaduje, aby oba snarky, na ktoré 4-súčin použijeme boli permutačné snarky. Ďalší rozdiel je v tom, že na to, aby sme 4-súčinom získali permutačný snark musia vybrané hrany z pôvodných grafov spĺňať určité podmienky. Aké podmienky musia spĺňať je špecifikované v definícii 47.

Definícia 47. Nech G a H sú dva permutačné snarky, pričom môže platiť, že G a H sú rovnaké permutačné snarky. Nech $\{C_1, C_2\}$ je permutačný 2-faktor snarku G a nech $\{D_1, D_2\}$ je permutačný 2-faktor snarku H . Skonstruujme snark $I = G[e_1, e_2].[f]H$ použitím 4-súčinu z definície 46 pričom nech hrany e_1 , e_2 sú z odlišných permutačných cyklov permutačného 2-faktora $\{C_1, C_2\}$ a hrana f je v snarku H priečka medzi permutačnými cyklami D_1 , D_2 . Takto vytvorený snark I je permutačný snark.

Teraz si odôvodníme skutočnosť, že pri výbere hrán e_1 , e_2 , f , ktoré sme uviedli v definícii 47 vznikne naozaj permutačný snark.

Keďže hrana $f = uv$ je priečka, tak vrcholy u a v sú z rôznych permutačných cyklov. Bez ujmy na všeobecnosti nech $u \in D_1$ a $v \in D_2$. Pre susedné vrcholy a'_1 a b'_1 vrcholu u , teda tiež platí, že $a'_1, b'_1 \in D_1$. Pre susedné vrcholy a'_2 a b'_2 vrcholu v naopak platí, že $a'_2, b'_2 \in D_2$. Pozrime sa na situáciu v grafe G . Z definície 47 vieme, že hrany $e_1 = a_1b_1$ a $e_2 = a_2b_2$ sú z rôznych permutačných cyklov. Bez ujmy na všeobecnosti nech $e_1 \in C_1$ a $e_2 \in C_2$. Z toho dostávame, že vrcholy $a_1, b_1 \in C_1$ a vrcholy $a_2, b_2 \in C_2$. Použitím 4-súčinu, ako je popísané v definícii 46 najprv odstránime hrany e_1 , e_2 a vrcholy u , v . Následne vytvoríme nové hrany $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $a_2a'_2$, $b_2b'_2$. Teraz si stačí uvedomiť, že novovzniknuté hrany $a_1a'_1$, $b_1b'_1$ spôsobia prepojenie permutačných cyklov C_1 a D_1 . Podobne, hrany $a_2a'_2$, $b_2b'_2$ spôsobia prepojenie permutačných cyklov C_2 a D_2 . Tým v snarku $I = G[e_1, e_2].[f]H$ vzniknú dva permutačné cykly, ktoré vytvárajú permutačný 2-faktor. A teda snark I je permutačný snark.

3.4 Vytváranie involučných snarkov

Jedným z našich cieľov je vytvárať involučné snarky. Preto si v tejto časti predstavíme dva postupy, ako involučný snark rozšíriť na väčší involučný snark. Tieto konštrukcie pochádzajú z ešte nepublikovaného rukopisu [13], na ktorom pracujú Kráľovič, Mačajová a Škoviera. V oboch týchto konštrukciách sa využíva 4-súčin pre permutačné

snarky, ktorý sme v tejto kapitole už spomínali. V definíciách týchto konštrukcií sa využívajú pojmy ako *dipól* a *zodpovedajúce hrany*. Teraz zavedieme všetky potrebné pojmy, ktoré používame v konštrukciách.

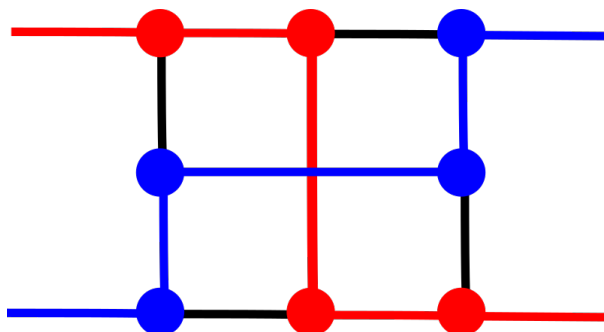
Definícia 48. *Visiaca hrana* je hrana, ktorá má iba na jednom svojom konci vrchol. Na druhom konci tejto hrany sa žiaden vrchol nenachádza. Spojením dvoch visiacych hrán vznikne hrana, ktorá spojí vrcholy incidentné s visiacyimi hranami. Hranu, ktorá spája dva vrcholy, môžeme prerezaním rozdeliť na dve visiace hrany.

Pozor – visiaca hrana nie je rovnaký pojem ako slučka, pretože slučka má na oboch koncoch vrchol, aj keď rovnaký vrchol.

Definícia 49. Nech graf G je permutačný snark. Z grafu G odstránime pevný bod tak, že odstránime dva vrcholy, ktoré pevný bod v grafe G vytvárajú a hranu, ktorá sa medzi týmito vrcholmi nachádza. Zo susedov odstránených vrcholov necháme vychádzať visiace hrany. Takýto graf nazývame *permutačný dipól* D . Ak je snark G navyše involučný snark, tak takýto dipól voláme *involučný dipól*. Z dipólu D vždy vychádzajú 4 visiace hrany. Tieto hrany rozdelíme do dvoch *konektorov* tak, že v jednom konektore budú spolu visiace hrany, ktoré boli incidentné s rovnakým odstráneným vrcholom. Tým získame dva konektory, v ktorých budú po dve visiace hrany. V každom konektore sa nachádzajú visiace hrany, ktoré ležia v spoločnom permutačnom cykle. Každý permutačný dipól má dva konektory, z ktorých každý obsahuje dve visiace hrany.

Pri vytváraní involučných snarkov sme využívali jeden konkrétny dipól, a to Petersenov dipól.

Definícia 50. *Petersenov dipól* je permutačný dipól, ktorý vznikne z Petersenovho grafu.



Obr. 3.4: Petersenov dipól s vyznačenými permutačnými cyklami

Petersenov graf je veľmi symetrický graf. To vedie k tomu, že odstránením ľubovoľného pevného bodu z Petersenovho grafu vždy vznikne štruktúrou rovnaký permutačný

dipól, pretože je jedno, ktorú dvojicu susedných vrcholov by sme odstránili. Tým pádom Petersenov dipól je určený jednoznačne, až na izomorfizmu. Na obrázku 3.4 je znázornený Petersenov dipól s vyznačením permutačných cyklov. Petersenov dipól, ako jediný permutačný dipól obsahuje 8 vrcholov.

Definícia 51. Nech graf G je involučný snark s involučnou reprezentáciou φ . Nech sa v grafe G nachádzajú hrany $e = uv$ a $e' = u'v'$, pričom hrany e a e' ležia v rôznych permutačných cykloch. Hovoríme, že hrana e zodpovedá hrane e' pri involučnej reprezentácii φ , ak v involučnej reprezentácii φ je vrcholom u a u' priradené číslo i a vrcholom v a v' je priradené číslo j .

Tým, že vrchol u má rovnaké priradené číslo, ako vrchol u' myslíme, že pri procese očíslovania, ktorý je potrebný pre získanie involučnej reprezentácie snarku G , tieto dva vrcholy boli očíslované rovnakým číslom z množiny $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Presný proces priradovania čísel vrcholom snarku je popísaný v definícii 43.

V konštrukciách, ktoré sa v tejto bakalárskej práci nachádzajú často spomíname vloženie dipólu medzi zodpovedajúce hrany. Preto si teraz presne povieme, čo vložením dipólu medzi zodpovedajúce hrany myslíme. Vždy, keď v texte použijeme pojem vloženie dipólu medzi zodpovedajúce hrany, tak tým budeme mať na mysli tento postup.

Vloženie dipólu medzi zodpovedajúce hrany

Vloženie dipólu D medzi zodpovedajúce hrany e a e' je proces, pri ktorom hrany e a e' prerežeme a rozdelíme na visiace hrany. Visiace hrany, ktoré tvorili hranu e priradíme do jedného konektora a visiace hrany, ktoré vznikli z hrany e' priradíme do druhého konektora. V jednom konektore sa nachádzajú visiace hrany, ktoré sú zo spoločného permutačného cyklu. Následne zoberieme dipól D aj s jeho dvomi konektormi a ľubovoľný konektor z dipólu D spojíme s ľubovoľným konektorom, ktorý sme vytvorili vďaka hranám e a e' . Potom zoberieme zvyšný konektor z dipólu D a zvyšný konektor, ktorý sme získali vďaka hranám e a e' a aj tie spojíme.

Spojením konektorov A a B máme na mysli to, že zoberieme jednu visiacu hranu z konektora A a tu spojíme s nejakou visiacou hranou z konektora B , následne zoberieme druhú visiacu hranu z konektora A a tú spojíme so zvyšnou visiacou hranou z konektora B . Spojením dvoch visiacich hrán vznikne normálna hrana, ktorá prepojí vrcholy, ktoré boli na koncoch visiacich hrán.

Takýmto prepojením konektorov dochádza k tomu, že sa permutačné cykly z grafu G spoja s permutačnými cyklami z dipólu D a vzniknú dva väčšie permutačné cykly.

Teraz si predstavíme už spomínané dve konštrukcie na vytváranie involučných snarkov. Tu je dobré si povedať, že v ďalšom texte sa na tieto konštrukcie budeme odkazovať

ako na *konštrukcia 1*, respektíve *konštrukcia 2*.

Definícia 52 (Konštrukcia 1). Nech G je involučný snark, ktorý obsahuje hrany e a e' také, že hrana e zodpovedá hrane e' . Nech D je involučný dipól. Vložením dipólu D medzi hrany e a e' vznikne involučný snark G' . Tento postup budeme ďalej označovať ako *konštrukcia 1*.

Definícia 53 (Konštrukcia 2). Nech G je involučný snark, ktorý obsahuje hrany e_1 , e'_1 , e_2 , e'_2 také, že hrana e_1 zodpovedá hrane e'_1 a hrana e_2 zodpovedá hrane e'_2 . Pričom môže platiť aj $e_1 = e_2$, $e'_1 = e'_2$. Nech D_1 a D_2 sú dve kópie toho istého permutačného dipólu. Vložením dipólu D_1 medzi hrany e_1 a e'_2 a vložením dipólu D_2 medzi hrany e_2 a e'_1 vznikne nový involučný snark G' . Dipóly D_1 a D_2 si v grafe G' navzájom zodpovedajú. Tento postup budeme ďalej označovať ako *konštrukcia 2*.

Nie je ťažké si uvedomiť, že konštrukcia 1 a konštrukcia 2 z definícií 52, respektíve 53 využívajú metódu permutačného 4-súčinu. Konštrukcia 1 z definície 52 využíva 4-súčin tak, že z dvoch involučných snarkov vytvorí nový involučný snark. V konštrukcii 2 z definície 53 je dvakrát použitý 4-súčin na involučný snark, pričom pri prvom použití 4-súčinu nemusí vzniknúť involučný snark, ale pri druhom použití 4-súčinu vznikne involučný snark. V konštrukcii 2 tým, že hovoríme, že si zodpovedajú vložené dipóly máme na mysli to, že si zodpovedajú hrany, ktoré ležia v dipóloch a nie sú to priečky. Snark Blanuša 1 vzniká z grafu činka a Petersenových dipólov použitím konštrukcie 2.

Kapitola 4

Klastre

V tejto kapitole zavedieme pojem klaster, ktorý sa využíva pri skúmaní štruktúry snarkov a predstavíme dva hlavné druhy klastrov, ktoré má zmysel skúmať pri permutačných snarkoch. Nakoniec ešte zavedieme pojem kompletný klaster.

4.1 Klaster 5-cyklov

Pri skúmaní štruktúry grafov sa často využívajú informácie o tom, aké podgrafy dané grafy obsahujú. Rôzne vlastnosti grafu vyplývajú z toho, aké cykly sa v danom grafe nachádzajú. Všetky permutačné snarky, ktoré boli doteraz skonštruované majú obvod 5. To znamená, že najmenší cyklus, aký sa v doteraz skonštruovaných permutačných snarkoch nachádza je cyklus dĺžky 5. Preto má veľký význam pri skúmaní štruktúry permutačných a involučných snarkov skúmať podgrafy, ktoré sú tvorené z cyklov dĺžky 5.

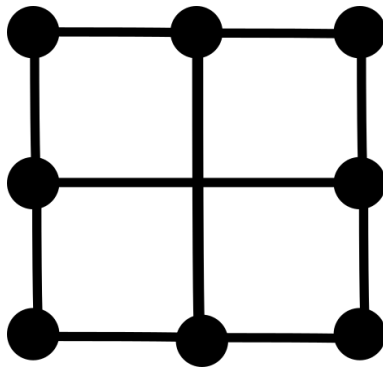
Definícia 54. Nech G je graf. *Klaster 5-cyklov* je maximálny súvislý podgraf G' grafu G taký, že každá hrana grafu G' patrí do nejakého 5-cyklu v grafe G . Pod pojmom 5-cyklus máme na mysli cyklus dĺžky 5. Graf G môže mať viacero rôznych klastrov. Dva rôzne klastre grafu G sú disjunktné, a teda neobsahujú ani spoločnú hranu, ani vrchol. V literatúre sa niekedy namiesto označenia klaster, využíva označenie *zhluk*.

V tejto bakalárskej práci sa venujeme iba klastrom 5-cyklov, preto namiesto označenia klaster 5-cyklov môžeme použiť zjednodušene iba *klaster*.

Pri permutačných a involučných snarkoch má zmysel klastre deliť na dve základné skupiny. Jedna z týchto skupín sa nazýva *petersenovské klastre*. Druhá skupina nesie pomenovanie *nepetersenovské klastre*.

4.1.1 Petersenovské klastre

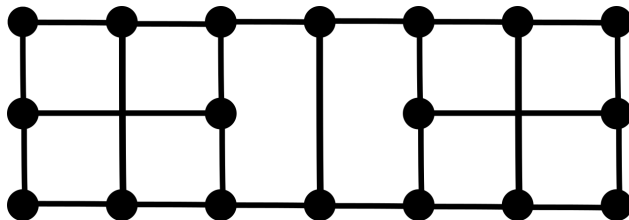
Petersenovské klastre alebo *klastre petersenovho grafu* sú také klastre, ktoré sa ako podgraf vyskytujú v Petersenovom grafe. Petersenov graf slúži ako dobré rozdelenie pre klastre 5-cyklov, pretože celý Petersenov graf sa skladá z 5-cyklov. Petersenovské klastre sú významné, pretože sa veľmi často nachádzajú v rôznych snarkoch. Preto je potrebné ich študovať. Existuje deväť klastrov, ktoré patria do skupiny petersenovských klastrov. Každý z týchto klastrov má svoje špecifické meno. Medzi petersenovské klastre patria klastre isochróm, heterochróm-1, heterochróm-2 a iné. Na obrázku 4.1 môžeme vidieť petersenovský klaster isochróm. Všetky petersenovské klastre sú popísané v diplomovej práci [16], kde je dokázané, že iné petersenovské klastre neexistujú.



Obr. 4.1: Petersenovský klaster isochróm

4.1.2 Nepetersenovské klastre

Druhá veľká skupina klastrov sú *nepetersenovské klastre*. Tu patria tie klastre, ktoré sa v Petersenovom grafe nevyskytujú ako podgraf. Nepetersenovské klastre sa v snarkoch vyskytujú menej často ako petersenovské klastre. Niektoré snarky obsahujú iba nepetersenovské klastre. Napríklad involučný snark Blanuša 1 obsahuje iba jeden klaster, a to nepetersenovský klaster s 18 vrcholmi, tento klaster môžeme vidieť na obrázku 4.2.



Obr. 4.2: Nepetersenovský klaster s 18 vrcholmi

Ako sme už spomínali, Blanuša 1 obsahuje nepetersenovský klaster s 18 vrcholmi. Samotný involučný snark Blanuša 1 tiež obsahuje 18 vrcholov, čo znamená, že všetky vrcholy, ktoré obsahuje sú v jednom klastri. S tým prichádza zaujímavá otázka, či ešte

existujú nejaké involučné snarky, ktoré tiež majú všetky vrcholy v jednom klastri. Prípadne, či existuje nejaký spôsob, ako donekonečna takéto snarky vytvárať. Pre potreby skúmania takýchto snarkov teraz zavedieme nový pojem *kompletný klastri*.

Definícia 55. Nech G je graf, pre ktorý platí, že všetky vrcholy z grafu G sa nachádzajú v jednom klastri 5-cyklov. Graf G potom voláme *graf s kompletným klastrom*. Ak je navyše graf G involučný snark, tak G môžeme označovať ako *involučný snark s kompletným klastrom*.

To, že všetky vrcholy grafu G patria do jedného klastra 5-cyklov, ale nutne neznamená, že do jedného klastra patria aj všetky hrany. Napríklad graf Blanuša 1 je involučný snark s kompletným klastrom, ale dve hrany v tomto grafe sa v klastri nenachádzajú. Hranu, ktorá nepatrí do žiadneho klastra, budeme označovať *mimoklastrová hrana*.

Kapitola 5

Involučné snarky s kompletným klastrom

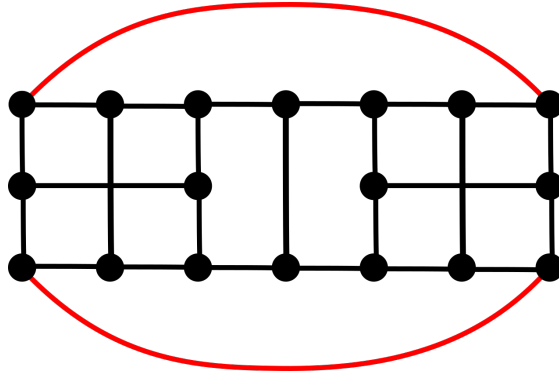
Naša bakalárska práca je zameraná na skúmanie štruktúry involučných snarkov s kompletným klastrom a na konštruovanie takýchto snarkov. V tejto kapitole najprv predstavíme program, ktorý sme pri bakalárskej práci využívali. Potom si povieme, aké involučné snarky sme skúmali. V ďalšej časti predstavíme aké involučné snarky sa nám podarilo vytvoriť a ako sme tieto snarky vytvorili. Ako ďalšie predstavíme nami objavenú konštrukciu na vytváranie involučných snarkov s kompletným klastrom. Nakoniec predstavíme nekonečnú rodinu involučných snarkov s kompletným klastrom, ktorá vychádza zo snarku Blanuša 1.

5.1 Program na overovanie vlastností snarkov

Pri štúdiu štruktúry involučných snarkov a klastrov v nich sme častokrát vytvárali nové snarky. Na overovanie, či nami vytvorené snarky spĺňajú všetky potrebné vlastnosti sme využívali program z diplomovej práce Rastislava Simeunoviča [16]. Táto diplomová práca sa venovala permutačným snarkom a jedným z jej výsledkov bol už spomínaný program. Program sa venuje overovaniu vlastností snarkov. Na vstupe program očakáva súbor so snarkami v požadovanom formáte. Výstupom tohto programu je súbor, v ktorom sú pre jednotlivé snarky zo vstupu vypísané ich vlastnosti. Medzi vlastnosti napríklad patrí to, či je snark permutačný, poprípade, či je involučný a aké všetky klastre obsahuje. Vďaka tomuto programu sme ľahko overovali, či nami skonštruované snarky, ktoré sme počas práce vytvárali, boli involučné snarky. Program nám tiež pomáhal s identifikáciou toho, aké klastre sa v nami skonštruovaných snarkoch nachádzajú.

5.2 Malé involučné snarky s kompletným klastrom

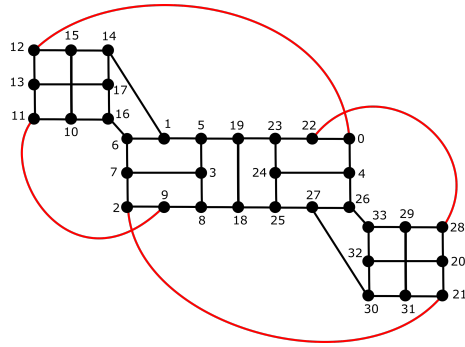
Najmenší zo všetkých netriviálnych involučných snarkov je snark *Blanuša 1*. Tento snark obsahuje 18 vrcholov a všetky jeho vrcholy ležia v jednom klastri. Preto je Blanuša 1 najmenší involučný snark s kompletným klastrom. Žiaden iný involučný snark s 18 vrcholmi neexistuje. Blanuša 1 obsahuje dve mimoklastrové hrany. Snark Blanuša 1 s vyznačenými mimoklastrovými hranami je zakreslený na obrázku 5.1.



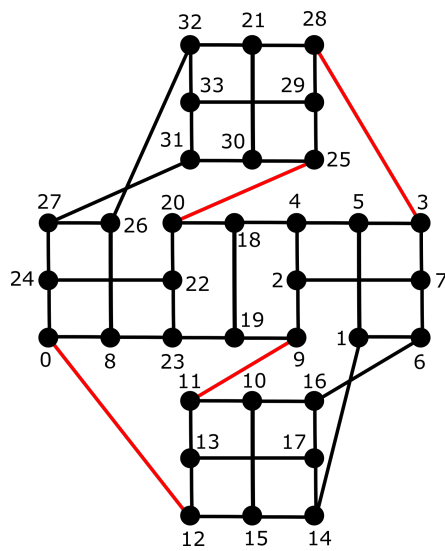
Obr. 5.1: Blanuša 1

V kapitole 3, v časti o involučných snarkoch sme si spomínali, že všetko nasvedčuje tomu, že involučné snarky existujú iba pre $n \equiv 2 \pmod{16}$. Táto hypotéza sa potvrdzuje aj v tomto prípade, pretože ďalšie involučné snarky sa našli až na 34 vrcholoch.

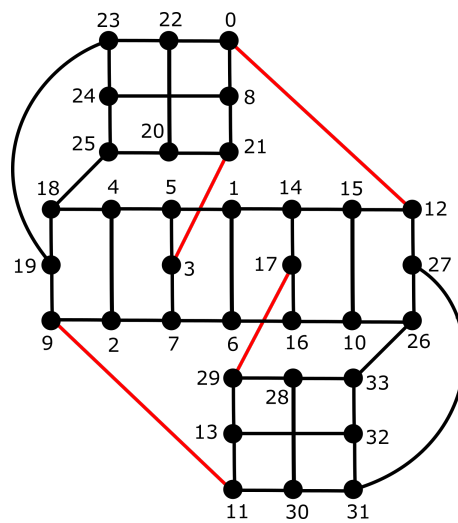
V článku [4] boli okrem iného skonštruované všetky permutačné snarky do 36 vrcholov. Medzi permutačnými snarkami do rádu 36 sa našlo 45 involučných snarkov rádu 34. K tejto bakalárskej práci je priložený súbor INVOL_34.ALL. V súbore INVOL_34.ALL sa nachádzajú všetky involučné snarky rádu 34. K bakalárskej práci je priložený aj výsledkový súbor INVOL_34_results.ALL, ktorý sme získali použitím programu z diplomovej práce [16], pričom na vstupe sme použili súbor s grafmi INVOL_34.ALL. V súbore INVOL_34_results.ALL sú výsledky o involučných snarkoch rádu 34. My sme zistili, že medzi 45 involučnými snarkami rádu 34 existujú 3 také, ktoré sú involučné snarky s kompletným klastrom. V súbore INVOL_34.ALL sú tieto tri snarky druhý, šiesty a siedmy graf. Skúmaním týchto troch snarkov sme zistili, že všetky tieto snarky obsahujú 4 mimoklastrové hrany, a že ich štruktúra je do značnej miery podobná. Všetky tri involučné snarky s kompletným klastrom rádu 34 sa nám podarilo analyzovať a zakresliť. Na obrázkoch 5.2, 5.3 a 5.4 môžeme vidieť, ako vyzerajú všetky tri involučné snarky s kompletným klastrom rádu 34. Označenie vrcholov grafov z obrázkov 5.2, 5.3 a 5.4 sa zhoduje s označením vrcholov v súbore INVOL_34.ALL. Červenou farbou sú v obrázkoch 5.2, 5.3 a 5.4 vyznačené všetky mimoklastrové hrany.



Obr. 5.2: Druhý graf v súbore INVOL_34.ALL



Obr. 5.3: Šiesty graf v súbore INVOL_34.ALL



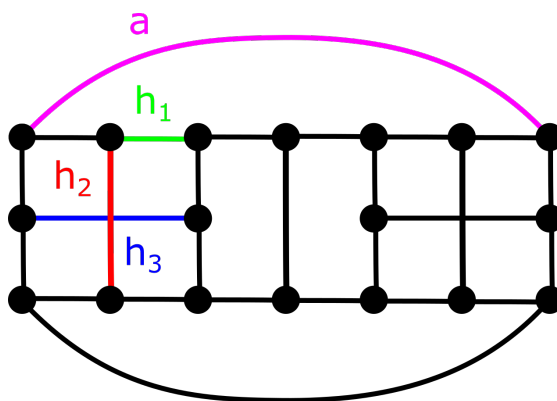
Obr. 5.4: Siedmy graf v súbore INVOL_34.ALL

5.3 Rozšírenie snarku Blanuša 1

Jedným z našich cieľov bolo vytvorenie involučného snarku s kompletným klastrom rádu viac ako 34. Predpokladali sme, že snark Blanuša 1 a involučné snarky s kompletným klastrom rádu 34 majú medzi sebou nejakú spojitosť a že existuje spôsob, ako snark Blanuša 1 rozšíriť na aspoň jeden z týchto snarkov. Plánovali sme, že ak by sme našli postup, ako zo snarku Blanuša 1 vytvoriť aspoň jeden zo spomínaných troch snarkov, tak by sme mohli tento postup zopakovať, poprípade upraviť a vytvoriť tak väčší involučný snark s kompletným klastrom. Pri hľadaní spôsobu, ako snark Blanuša 1 rozšíriť na nejaký väčší involučný snark sme vychádzali z konštrukcií 1 a 2 popísaných v definíciách 52 a 53.

Ak by sme snark Blanuša 1 chceli rozšíriť na snark rádu 34 pomocou konštrukcie 1 z definície 52, tak by sme potrebovali involučný dipól rádu 16. Jediný involučný dipól rádu 16, je dipól vytvorený zo snarku Blanuša 1. Skúšali sme, teda na rozšírenie snarku Blanuša 1 použiť involučný dipól rádu 16. V tomto prípade sme, ale boli neúspešní a nepodarilo sa nám nájsť spôsob, ako vhodne použiť konštrukciu 1.

Ako ďalšie sme teda skúsili nájsť spôsob, ako snark Blanuša 1 rozšíriť na involučný snark s kompletným klastrom rádu 34 pomocou konštrukcie 2 z definície 53. V tomto prípade sme potrebovali dve kópie permutačného dipólu rádu 8. Jediný takýto permutačný dipól je Petersenov dipól. Skúmaním spojivosti Petersenovho dipólu a involučných snarkov s kompletným klastrom do rádu 34 sme prišli na spôsob ako využiť konštrukciu 2 tak, aby sme snark Blanuša 1 rozšírili na ľubovoľný z troch involučných snarkov s kompletným klastrom rádu 34. Z týchto pozorovaní vznikla nasledujúca veta.



Obr. 5.5: Blanuša 1

Veta 1. Nech G je snark Blanuša 1. Nech e_1 je mimoklastrová hrana a z obrázka 5.5 a nech hrana e'_2 je ľubovoľná z hrán h_1, h_2, h_3 , ktoré sú vyznačené na obrázku 5.5. K hranám e_1 a e'_2 zoberme zodpovedajúce hrany e'_1 a e_2 . Nech P_1 a P_2 sú dve kópie

Petersenovho dipólu. Vložením P_1 medzi hrany e_1, e'_2 a P_2 medzi hrany e'_1, e_2 vznikne involučný snark s kompletným klastrom rádu 34.

Na základe toho, akú hranu vo vete 1 vyberieme za hranu e'_2 , tak dostaneme rôzny z troch involučných snarkov s kompletným klastrom rádu 34.

Prišli sme na to, ako snark Blanuša 1 rozšíriť na ľubovoľný z involučných snarkov s kompletným klastrom rádu 34. Tento postup sme zopakovali a tým sa nám podarilo vytvoriť involučné snarky s kompletným klastrom rádu 50, 66 a 82. Tento postup sme zovšeobecni na konštrukciu \mathcal{K} , ktorú si predstavíme v ďalšej časti tejto kapitoly.

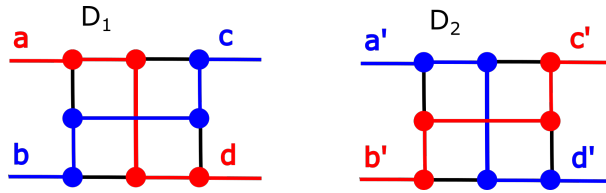
5.4 Nekonečná rodina

V tejto časti si predstavíme nami objavenú konštrukciu, ktorá z involučného snarku s kompletným klastrom vytvorí väčší involučný snark s kompletným klastrom. S využitím tejto konštrukcie predstavíme vo vete 2 nekonečnú rodinu involučných snarkov s kompletným klastrom, ktorú sa nám podarilo objaviť.

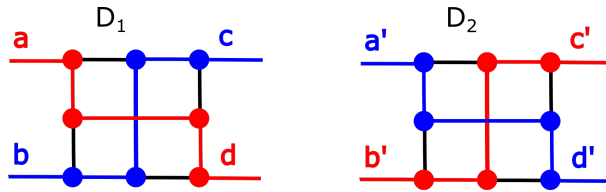
Konštrukcia \mathcal{K}

Nech G je involučný snark rádu $16k + 2$ s kompletným klastrom spĺňajúci nasledujúce podmienky:

- (K1) Snark G má dve involučné reprezentácie φ_1 a φ_2 .
- (K2) Snark G obsahuje ako podgrafy dva Petersenovské dipóly D_1 a D_2 , ktoré si navzájom zodpovedajú pri oboch involučných reprezentáciách φ_1 a φ_2 .
- (K3) Dipól D_1 je so zvyškom grafu spojený pomocou dvoch mimoklastrových hrán a, b a dvoch klastrových hrán c, d , pričom hrany c a d susedia s rovnakou hranou x .
- (K4) Dipól D_2 je so zvyškom grafu spojený pomocou dvoch mimoklastrových hrán a', b' a dvoch klastrových hrán c', d' , pričom hrany c' a d' susedia s rovnakou hranou y .
- (K5) V involučných reprezentáciách φ_1 a φ_2 si postupne zodpovedajú dvojice hrán a a a' , b a b' , c a c' , d a d' .
- (K6) V involučnej reprezentácii φ_1 prechádzajú permutačné cykly dipólmi D_1, D_2 a hranami vychádzajúcimi z dipólov ako na obrázku 5.6.
- (K7) V involučnej reprezentácii φ_2 prechádzajú permutačné cykly dipólmi D_1, D_2 a hranami vychádzajúcimi z dipólov ako na obrázku 5.7.



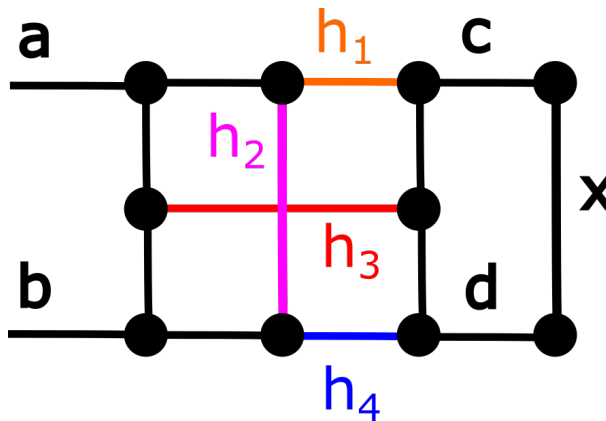
Obr. 5.6: Permutačné cykly prechádzajúce dipólmi, variant 1



Obr. 5.7: Permutačné cykly prechádzajúce dipólmi, variant 2

Zo snarku G teraz vytvoríme snark G^+ takto:

Za hranu e_1 zvolíme ľubovoľnú mimoklastrovú hranu susediacu s dipólom D_1 . Za hranu e_1 , teda môžeme zvoliť jednu z hrán a alebo b . Ak za hranu e_1 zvolíme hranu a , tak za hranu e'_2 zvolíme ľubovoľnú z hrán $h_1, h_2, h_3 \in D_1$ z obrázka 5.8. Ak za hranu e_1 zvolíme hranu b , tak za hranu e'_2 zvolíme ľubovoľnú z hrán $h_2, h_3, h_4 \in D_1$ z obrázka 5.8. Vďaka tomu existuje šesť možností pre výber hrán e_1 a e'_2 .

Obr. 5.8: Petersenov dipól D_1 s vyznačenými hranami h_1, h_2, h_3, h_4

K hranám e_1 a e'_2 nájdeme zodpovedajúce hrany e'_1 a e_2 pri takej involučnej reprezentácii φ_i , $i \in \{1, 2\}$, že hrany e_1 a e'_2 sú z rôznych permutačných cyklov. Vďaka podmienkam (K6) a (K7) máme zabezpečené, že taká involučná reprezentácia φ_i existuje pre hocijakú zvolenú možnosť hrán e_1 a e'_2 . Medzi hrany e_1 a e'_2 vložíme nový Petersenov dipól P_1 a medzi hrany e'_1 a e_2 vložíme nový Petersenov dipól P_2 . Tým vznikne involučný snark s kompletným klastrom G^+ .

Konštrukciu \mathcal{K} môžeme na každý vhodný snark použiť šiestimi rôznymi spôsobmi, podľa toho akú dvojicu hrán e_1, e'_2 zvolíme. Ak konštrukciu \mathcal{K} použijeme na snark

Blanuša 1 všetkými šiestimi spôsobmi, tak zo šiestich vzniknutých snarkov budú iba tri neizomorfné. To je spôsobené tým, že hrana a v snarku Blanuša 1 zodpovedá hrane b . Napríklad použitím konštrukcie \mathcal{K} na šiesty graf zo súboru INVOL_34.ALL všetkými šiestimi spôsobmi získame šesť neizomorfných involučných snarkov s kompletným klastrom rádu 50. V ďalšej časti textu si predstavíme nami objavenú nekonečnú rodinu \mathcal{R} involučných snarkov s kompletným klastrom, ktorá využíva konštrukciu \mathcal{K} . Do tejto rodiny patrí snark Blanuša 1 a aj všetky tri involučné snarky s kompletným klastrom rádu 34. Nekonečná rodina \mathcal{R} sa javí, že narastá exponenciálne. Dôkaz takéhoto tvrdenia by však presahoval rozsah tejto bakalárskej práce.

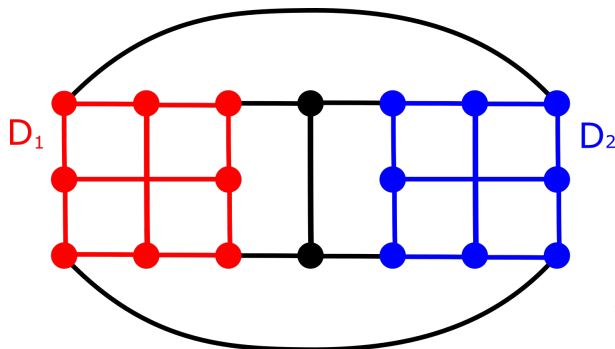
Veta 2. Existuje nekonečná rodina \mathcal{R} involučných snarkov s kompletným klastrom rádu $16k + 2$, kde $k \geq 1$. Každý snark z rodiny \mathcal{R} obsahuje $2k$ mimoklastrových hrán. Najmenší prvok rodiny \mathcal{R} je Blanuša 1. Každý väčší snark $G^+ \in \mathcal{R}$ vzniká z menšieho člena rodiny \mathcal{R} konštrukciou \mathcal{K} .

Dôkaz

Korektnosť vety 2 dokážeme indukciou.

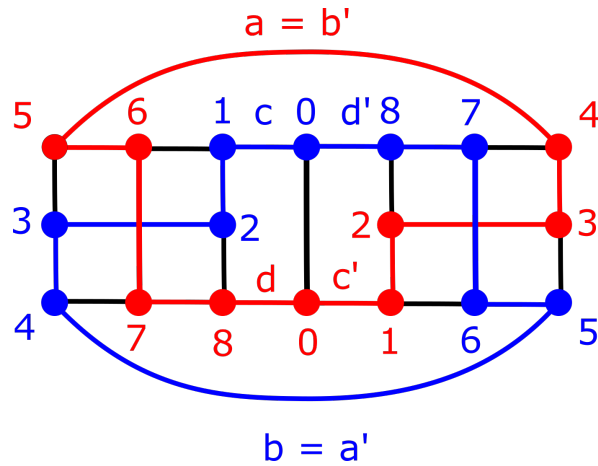
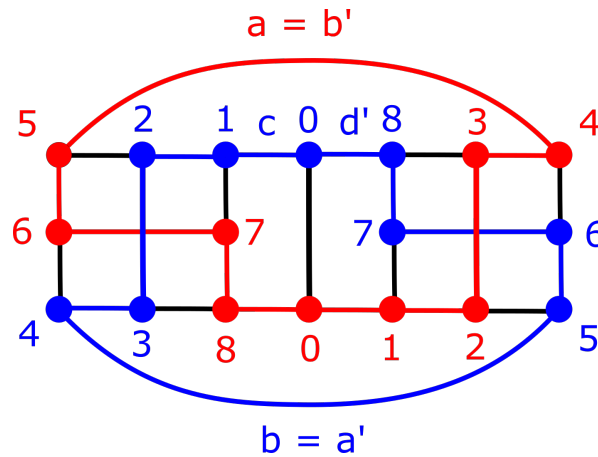
Báza

V báze overíme, či štartovací graf spĺňa všetky potrebné požiadavky. Štartovacím grafom je najmenší graf z rodiny \mathcal{R} , a teda snark Blanuša 1. Blanuša 1 je involučný snark s kompletným klastrom rádu 18, ktorý obsahuje 2 mimoklastrové hrany, a teda pre snark Blanuša 1 platí $k = 1$. Tým sme overili, že snark Blanuša 1 spĺňa prvú z podmienok. Teraz musíme overiť, či snark Blanuša 1 môže byť použitý v konštrukcii \mathcal{K} . Preto postupne overíme, či graf Blanuša 1 spĺňa všetky podmienky (K1) až (K7) z konštrukcie \mathcal{K} .



Obr. 5.9: Blanuša 1 s vyznačenými dipólmi

Z obrázka 5.9 vidíme, že Blanuša 1 obsahuje 2 kópie Petersenovho dipólu D_1 a D_2 . Na obrázkoch 5.10 a 5.11 máme znázornené dve involučné reprezentácie φ_1, φ_2 snarku

Obr. 5.10: Involučná reprezentácia snarku Blanuša 1 $(0)(1\ 6)(2\ 8)(3\ 5)(4\ 7)$ Obr. 5.11: Involučná reprezentácia snarku Blanuša 1 $(0)(1\ 7)(2\ 5)(3\ 8)(4\ 6)$

Blanuša 1, a teda Blanuša 1 spĺňa podmienku (K1). Na základe obrázkov 5.10 a 5.11 vidíme, že dipóly D_1 a D_2 si navzájom zodpovedajú pri involučnej reprezentácii φ_1 aj φ_2 . To znamená, že Blanuša 1 spĺňa aj podmienku (K2). Tiež vidíme, že oba dipóly D_1 a D_2 sú so zvyškom grafu spojené pomocou dvoch mimoklastrových hrán a dvoch klastrových hrán, ktoré susedia s jednou spoločnou hranou, takže spĺňajú podmienku (K3) a (K4). Z obrázkov 5.10 a 5.11 tiež ľahko vidno, že hrany a , a' , b , b' , c , c' , d , d' spĺňajú podmienku (K5), pretože si v oboch involučných reprezentáciách zodpovedajú tak, ako je žiadané v podmienke (K5). Involučná reprezentácia z obrázka 5.10 zabezpečuje splnenie podmienky (K6) a involučná reprezentácia, ktorá je na obrázku 5.11, zas zabezpečuje splnenie podmienky (K7).

Ukázali sme, že graf Blanuša 1 je involučný snark s kompletným klastrom rádu 18, ktorý obsahuje 2 mimoklastrové hrany. Tiež sme ukázali, že Blanuša 1 spĺňa všetky podmienky (K1) až (K7) z konštrukcie \mathcal{K} . Tým sme dokázali, že báza indukcie je splnená.

Indukčný krok

Teraz ukážeme, že ak máme graf G z rodiny \mathcal{R} , tak aj graf G^+ , ktorý z grafu G vznikne pomocou konštrukcie \mathcal{K} bude patriť do rodiny \mathcal{R} . To ukážeme tak, že overíme všetky vlastnosti, ktoré by mal graf G^+ spĺňať.

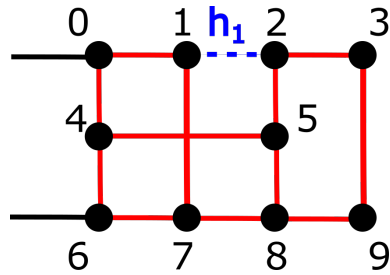
Ako prvé overíme, či graf G^+ je involučný snark. Z indukčného predpokladu vieme, že graf G je involučný snark. Graf G^+ vznikol z grafu G pomocou konštrukcie \mathcal{K} tak, že sme za hrany e_1 a e'_2 vybrali jednu zo šiestich možností. Bez ohľadu na to, ktorá možnosť pre výber hrán e_1 a e'_2 bola použitá ukážeme, že vždy výsledný graf G^+ je involučný snark. Z indukčného predpokladu na základe podmienok (K6) a (K7) vieme, že nech bola zvolená hociktorá z možností pre výber hrán e_1 a e'_2 , tak vždy existuje involučná reprezentácia φ_i , $i \in \{1, 2\}$ snarku G taká, že hrany e_1 a e'_2 sú v rôznych permutačných cykloch. Vďaka tomu, že máme zabezpečené, že hrany e_1 a e'_2 sú z rôznych permutačných cyklov, tak sa na vytváranie grafu G^+ z grafu G využíva konštrukcia 2 z definície 53. Konštrukcia 2 je konštrukcia, ktorá z involučného snarku vytvorí väčší involučný snark. Snark G^+ je involučný snark.

Ako ďalšie overíme, či snark G^+ obsahuje kompletný klaster. Dôkaz toho, že graf G^+ obsahuje kompletný klaster rozdelíme na dve časti. V prvej časti ukážeme, že ak z grafu G odstránime hrany e_1, e'_1, e_2, e'_2 , tak naďalej všetky vrcholy z grafu budú v jednom klastri. V druhej časti ukážeme, že ak do grafu G vložíme Petersenove dipóly postupom z konštrukcie \mathcal{K} , tak v grafe G^+ vzniknú 5-cykly, ktoré prepoja klastre vložených dipólov a klaster pôvodného grafu G .

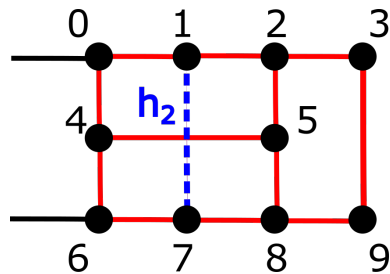
Ako prvé ukážeme, že graf $G - \{e_1, e'_2, e'_1, e_2\}$ obsahuje kompletný klaster. V konštrukcii \mathcal{K} za hranu e_1 vždy volíme nejakú mimoklastrovú hranu, čo znamená, že hrana e_1 sa nenachádza v žiadnom 5-cykle. Odstránením mimoklastrovej hrany e_1 z grafu G teda nenarušíme žiaden 5-cyklus, a preto nie je možné, aby odstránenie hrany e_1 spôsobilo rozpadnutie kompletného klastra v grafe G . Hrana e'_1 , ktorá zodpovedá hrane e_1 , je tiež mimoklastrová hrana. A preto ani odstránenie hrany e'_1 z grafu G nespôsobí rozpadnutie kompletného klastra. Tým sme dokázali, že graf $G - \{e_1, e'_1\}$ je graf s kompletným klastrom.

Teraz sa pozrieme na to, čo sa stane, keď z grafu G odstránime hranu e'_2 . Podľa konštrukcie \mathcal{K} hrana e'_2 je vždy nejaká hrana z hrán $h_1, h_2, h_3, h_4 \in D_1$, ktoré sú vyznačené na obrázku 5.8. Hrany h_1, h_2, h_3, h_4 už nie sú mimoklastrové hrany, a teda ich odstránením z grafu G dôjde k tomu, že nejaké 5-cykly v grafe zaniknú. My však ukážeme, že aj keď niektoré 5-cykly zaniknú, tak aj tak graf bude obsahovať kompletný klaster. To ukážeme pre každú hranu h_1, h_2, h_3, h_4 samostatne.

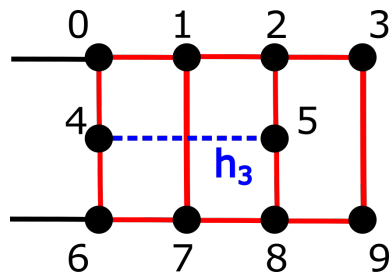
Ako prvé sa pozrime na to, čo sa stane, keď z grafu G odstránime hranu h_1 . Z obrázka 5.12 vidíme, že odstránením hrany h_1 zaniknú 5-cykly $c_1 = (1, 2, 5, 8, 7)$ a $c_2 = (0, 1, 2, 5, 4)$. V grafe G , ale naďalej zostanú 5-cykly $k_1 = (0, 1, 7, 6, 4)$, $k_2 = (4, 5, 8, 7, 6)$

Obr. 5.12: Odstránenie hrany h_1

a $k_3 = (2, 3, 9, 8, 5)$. Cykly k_1 , k_2 a k_3 zabezpečujú, že všetky vrcholy, ktoré boli v cykloch c_1 a c_2 sa aj po odstránení hrany h_1 nachádzajú v nejakom 5-cykle. Navyše cykly k_1, k_2, k_3 sú medzi sebou prepojené, a tým zabezpečujú, že po odstránení hrany h_1 nedošlo k rozpadnutiu kompletneho klastra v grafe $G - \{h_1\}$.

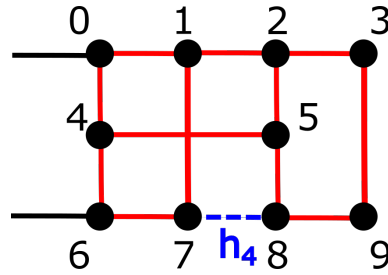
Obr. 5.13: Odstránenie hrany h_2

Ako ďalšie rozoberieme prípad, že z grafu G odstránime hranu h_2 . Tento prípad je znázornený na obrázku 5.13. Odstránením hrany h_2 zaniknú dva 5-cykly, a to cyklus $c_1 = (0, 1, 7, 6, 4)$ a cyklus $c_2 = (1, 2, 5, 8, 7)$. Cykly $k_1 = (0, 1, 2, 5, 4)$, $k_2 = (4, 5, 8, 7, 6)$ pokrývajú všetky vrcholy z rozpadnutých 5-cyklov c_1 a c_2 . Vďaka tomu ani v tomto prípade nedochádza k tomu, žeby sa nejaký vrchol v grafe G dostal mimo klastra. Navyše cykly k_1 a k_2 sú prepojené medzi sebou a aj so zvyškom klastra, a teda ani odstránenie hrany h_2 nespôsobí rozpadnutie kompletneho klastra.

Obr. 5.14: Odstránenie hrany h_3

Ako tretiu skontrolujeme hranu h_3 . Odstránenie hrany h_3 je znázornené na obrázku 5.14. Odstránením hrany h_3 z grafu G sa rozpadnú 5-cykly $c_1 = (0, 1, 2, 5, 4)$ a $c_2 = (4, 5, 8, 7, 6)$. Cykly $k_1 = (0, 1, 7, 6, 4)$ a $k_2 = (1, 2, 5, 8, 7)$ zabezpečujú, aby všetky

vrcholy zo zaniknutých 5-cyklov c_1 a c_2 boli aj naďalej v nejakom 5-cykle. Po odstránení hrany h_3 sa zachová kompletný klaster.



Obr. 5.15: Odstránenie hrany h_4

Ako posledné si rozoberieme odstránenie hrany h_4 z grafu G . Tento prípad je znázornený na obrázku 5.15. Odstránenie hrany h_4 spôsobí rozpadnutie cyklov $c_1 = (1, 2, 5, 8, 7)$ a $c_2 = (4, 5, 8, 7, 6)$. Vďaka 5-cyklovi $k_1 = (0, 1, 7, 6, 4)$, $k_2 = (0, 1, 2, 5, 4)$ a $k_3 = (2, 3, 9, 8, 5)$ sa v grafe $G - \{h_4\}$ zachová kompletný klaster.

Tým sme ukázali, že nech je hranou e'_2 hociktorá z hrán h_1, h_2, h_3, h_4 , tak odstránením hrany e'_2 z grafu G sa nerozpadne kompletný klaster. Preto aj graf $G - \{e'_2\}$ je graf s kompletným klastrom. Keďže hrana e_2 je zodpovedajúca hrana k hrane e'_2 , tak pri odstránení hrany e_2 dôjdeme k rovnakému záveru. Na základe toho vieme, že aj graf $G - \{e_2\}$ je graf s kompletným klastrom. Ostáva otázka, či sa môže niečo pokaziť, ak z grafu G naraz odstránime hranu e'_2 aj hranu e_2 . Teraz si uvedieme dôvod, prečo odstránenie oboch hrán e'_2 a e_2 je v poriadku a nenaruša to kompletnosť klastra.

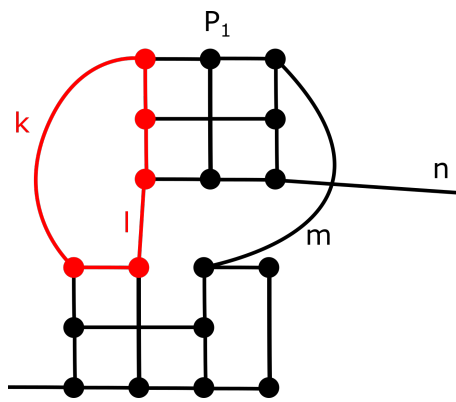
Nech sa odstránením hrany e'_2 z grafu G rozpadnú 5-cykly c_1 a c_2 . Nech 5-cykly $k_1, \dots, k_i, i \in \{2, 3\}$ sú 5-cykly, ktoré zabezpečujú, že vrcholy z rozpadnutých cyklov c_1 a c_2 sú naďalej v nejakom 5-cykle. Problém môže nastať len vtedy, keď sa hrana e_2 , ktorú tiež odstraňujeme, nachádza v nejakom z cyklov k_1, \dots, k_i . Takáto situácia pri hranách h_2 a h_3 môže nastať iba v prípade, že by Petersenove dipóly D_1 a D_2 z grafu G mali spoločné hrany. To však nemôže nastať, pretože od dipólov D_1 a D_2 vyžadujeme, aby si navzájom zodpovedali. Pri hranách h_1, h_4 táto situácia môže nastať aj vtedy, keď Petersenove dipóly spolu susedia pomocou dvoch klastrových hrán. To je však vylúčené, pretože vyžadujeme, aby klastrové hrany, ktoré z dipólov vychádzajú, mali medzi sebou práve jednu hranu. Z grafu G , teda môžeme naraz odstrániť hrany e'_2 a e_2 a všetky vrcholy ostanú v kompletnom klastri.

Tým sme ukázali, že graf $G - \{e_1, e'_2, e'_1, e_2\}$ obsahuje kompletný klaster, bez ohľadu na to, akú možnosť pre výber hrán e_1 a e'_2 použijeme.

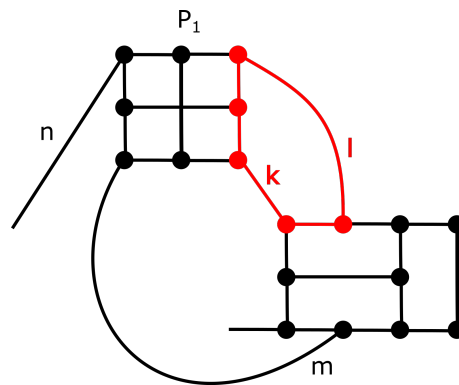
Teraz je pred nami druhá časť dokazovania kompletného klastra grafu G^+ . Už sme si dokázali, že graf $G - \{e_1, e'_2, e'_1, e_2\}$ obsahuje kompletný klaster. O Petersenovom dipóle vieme, že obsahuje kompletný klaster a žiadnu mimoklastrovú hranu. Ukážeme,

že ak zoberieme hocijakú zo šiestich možností pre výber hrán e_1 a e'_2 z konštrukcie \mathcal{K} a medzi tieto hrany vložíme Petersenov dipól P_1 , tak vznikne 5-cyklus, ktorý prepojí klaster dipólu P_1 s klastrom z grafu $G - \{e_1, e'_2, e'_1, e_2\}$.

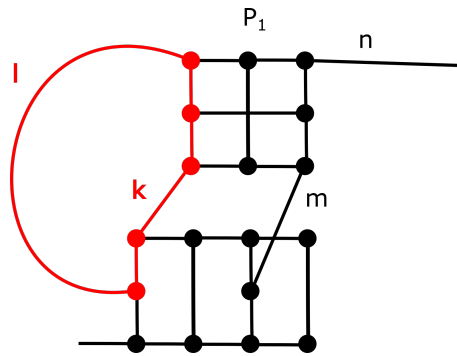
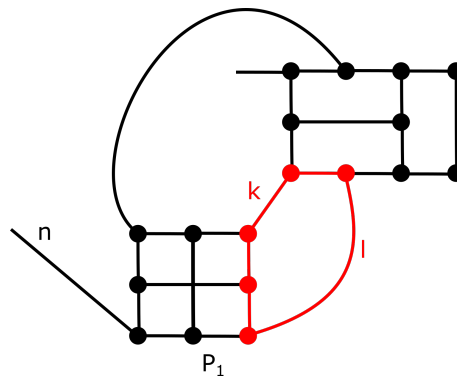
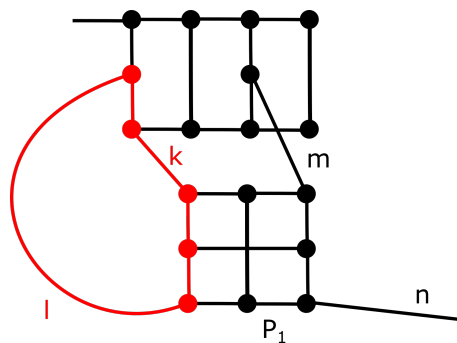
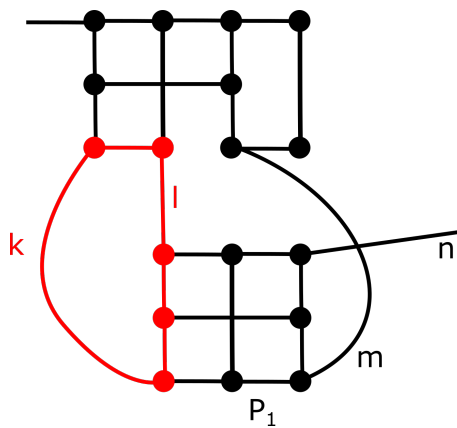
Na obrázkoch 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 sú zakreslené všetky varianty pre výber hrán e_1 a e'_2 , medzi ktoré vkladáme nový Petersenov dipól P_1 . Červenou farbou je vo všetkých prípadoch znázornený 5-cyklus, ktorý spája klaster grafu $G - \{e_1, e'_2, e'_1, e_2\}$ s klastrom Petersenovho dipólu P_1 . Tým sme ukázali, že nech zoberieme ľubovoľnú možnosť pre výber hrán e_1 a e_2 , tak vždy vložением Petersenovho dipólu P_1 medzi tieto hrany vznikne graf, ktorý bude obsahovať kompletný klaster. Rovnakým spôsobom vznikne kompletný klaster, keď medzi hrany e'_1 a e_2 vložíme Petersenov dipól P_2 . Tým sme ukázali, že graf G^+ je graf s kompletným klastrom.



Obr. 5.16: Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = a$, $e'_2 = h_1$



Obr. 5.17: Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = a$, $e'_2 = h_2$

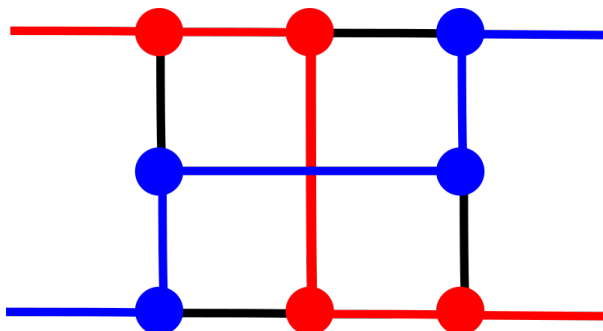
Obr. 5.18: Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = a$, $e'_2 = h_3$ Obr. 5.19: Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = b$, $e'_2 = h_2$ Obr. 5.20: Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = b$, $e'_2 = h_3$ Obr. 5.21: Vloženie dipólu P_1 , pre $e_1 = b$, $e'_2 = h_4$

Ako ďalšie overíme, koľko vrcholov graf G^+ obsahuje. Z indukčného predpokladu vieme, že graf G obsahuje $16k+2$ vrcholov, pre nejaké $k \geq 1$. Graf G^+ vznikol z grafu G použitím konštrukcie \mathcal{K} . Konštrukcia \mathcal{K} z grafu G neodstraňuje žiaden vrchol, naopak pridáva dva Petersenove dipóly, pričom každý Petersenov dipól obsahuje 8 vrcholov. Z toho dostávame, že graf G^+ obsahuje $16(k+1)+2$ vrcholov.

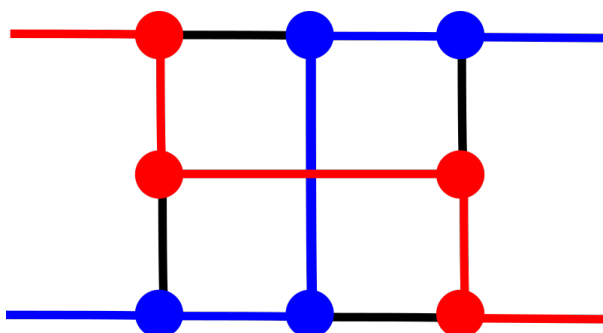
Teraz overíme, koľko mimoklastrových hrán sa nachádza v grafe G^+ . Podľa indukčného predpokladu graf G obsahuje $2k$ mimoklastrových hrán, pre nejaké $k \geq 1$. Na vytvorenie grafu G^+ z grafu G bola použitá konštrukcia \mathcal{K} . Pri konštrukcii \mathcal{K} dochádza k tomu, že sa z grafu G odstránia dve mimoklastrové hrany e_1 a e'_1 . To znamená, že graf $G - \{e_1, e'_1, e_2\}$ obsahuje $2k - 2$ mimoklastrových hrán. V pridávaných Petersenových dipóloch sa žiadne mimoklastrové hrany nenachádzajú. Nové mimoklastrové hrany môžu teda byť len hrany, ktoré spájajú pridané Petersenove dipóly s grafom $G - \{e_1, e'_1, e_2\}$. Na obrázkoch 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 sú hrany, ktoré spájajú pridaný Petersenov dipól P_1 so zvyškom grafu G^+ označené k, l, m, n . Z týchto obrázkov vidíme, že nech použijeme hocikakú z možností pre výber hrán e_1 a e'_1 , tak vždy dve hrany k a l sú súčasťou 5-cyklu, ktorý prepája klastre. Hrany k a l teda nie sú mimoklastrové. Dôvod, prečo hrany k a l sú súčasťou 5-cyklu je, že hrany k a l sú jediná dvojica z hrán k, l, m, n , pre ktorú platí, že susedia v grafe s rovnakou hranou x . Vďaka tomu sa vytvára 5-cyklus, do ktorého patria dve krajné hrany z novopridaného Petersenovho dipólu P_1 a hrany k, x a l . Pre hrany m a n takýto 5-cyklus neexistuje. To znamená, že hrany m a n nie sú v žiadnom 5-cykle, a teda hrany m, n sú mimoklastrové hrany. Z toho dostávame, že pri napájaní dipólu P_1 vzniknú 2 mimoklastrové hrany. To isté platí pri napájaní dipólu P_2 . Graf G^+ , teda obsahuje $2k - 2 + 4$, čiže $2(k+1)$ mimoklastrových hrán.

Nakoniec potrebujeme overiť, či graf G^+ spĺňa všetky podmienky (K1) až (K7) z konštrukcie \mathcal{K} .

Ako prvé sa pozrime na splnenie podmienky (K1). Už sme si povedali, že graf G^+ vznikol z grafu G s využitím konštrukcie 2 z definície 53. Konštrukcia 2 prepojí permutačné cykly z grafu G s permutačnými cyklami Petersenových dipólov P_1 a P_2 . Pri vkladaní Petersenovho dipólu máme dve možnosti, aký Petersenov dipól vzhľadom na permutačné cykly vložíme. Na obrázku 5.22 je zobrazený prvý spôsob a na obrázku 5.23 je zobrazený druhý spôsob. Nám nič nebráni, aby sme využili ľubovoľný z týchto spôsobov. Môžeme, teda použiť obidva spôsoby, pričom v oboch prípadoch získame rovnaký graf G^+ . Tieto dva prípady budú rozdielne iba v tom, ako budú vloženými dipólmi prechádzať permutačné cykly. Tým sme ukázali, že graf G^+ spĺňa podmienku (K1), pretože vieme nájsť jeho dve involučné reprezentácie. Navyše, ak pre vkladanie dipólov využijeme prechod permutačných cyklov z obrázka 5.22, tak získame involučnú reprezentáciu vyhovujúcu podmienke (K6). Keď použijem variant z obrázka 5.23, tak získame involučnú reprezentáciu, ktorá spĺňa podmienku (K7).



Obr. 5.22: Prechod permutačných cyklov cez Petersenov dipól, variant 1



Obr. 5.23: Prechod permutačných cyklov cez Petersenov dipól, variant 2

Graf G^+ spĺňa podmienky (K2) a (K5), pretože pri vkladaní dipólov P_1 a P_2 do grafu G sa využila konštrukcia 2, ktorá zabezpečuje, že vložené dipóly a hrany vychádzajúce z nich si budú navzájom zodpovedať.

Podmienky (K3) a (K4) vyplývajú z toho, čo sme si povedali o hranách k , l , m a n vychádzajúcich z dipólu P_1 v časti dôkazu o mimoklastrových hranách. Hrany k a l sú klastrové a nachádza sa medzi nimi práve jedna hrana x . Naopak hrany m a n vychádzajúce z dipólu D_1 sú mimoklastrové. Rovnaká situácia nastane aj pri hranách, ktoré spájajú dipól P_2 so zvyškom grafu. Tým sme ukázali, že graf G^+ spĺňa všetky vlastnosti (K1) až (K7).

Dokázali sme, že graf G^+ patrí do nami zadefinovanej nekonečnej rodiny grafov \mathcal{R} .

Záver

V našej bakalárskej práci sme sa venovali involučným snarkom s kompletným klastrom. Ako prvé sme si zdefinovali všetky potrebné pojmy, ktoré sú spojené s problematikou snarkov. Následne sme v krátkosti zhrnuli históriu snarkov a predstavili najznámejšie doteraz skonštruované snarky. V kapitole 3 sme čitateľa oboznámili s dvomi základnými spôsobmi reprezentácie permutačných snarkov. Vďaka permutačnej reprezentácii sme ukázali, ako permutačný snark rádu $2n$ súvisí s permutáciou na n -prvkovej množine. S využitím permutačnej reprezentácie sme zaviedli pojem involučný snark.

Ďalej sme rozoberali, čo sú klastre 5-cyklov a aké klastre má zmysel pri permutačných snarkoch skúmať. Pre naše potreby sme zaviedli pojem kompletný klastor.

V práci sme si predstavili aj základné konštrukcie na rozširovanie snarku na väčší snark. Na základe týchto konštrukcií sme hľadali spôsob, ako rozšíriť involučný snark s kompletným klastrom na väčší involučný snark s kompletným klastrom.

Podarilo sa nám nájsť tri involučné snarky s kompletným klastrom rádu 34 a analyzovať ich štruktúru. Ďalej sa nám podarilo nájsť spôsob, ako snark Blanuša 1 rozšíriť na ľubovoľný z týchto snarkov. Zovšeobecnením spôsobu na rozšírenie snarku Blanuša 1 sme vytvorili konštrukciu \mathcal{K} , ktorá slúži na vytváranie involučných snarkov s kompletným klastrom.

Hlavným cieľom bakalárskej práce bolo vytvoriť nekonečnú rodinu involučných snarkov s kompletným klastrom. Tento cieľ sme splnili a v práci sme presne popísali nekonečnú rodinu involučných snarkov s kompletným klastrom \mathcal{R} . To, že konštrukcia \mathcal{K} a rodina grafov \mathcal{R} sú korektné sme dokázali pomocou matematickej indukcie.

Literatúra

- [1] D. Blanuša, Problem četiriju boja, *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II*, 1:31–42, 1946.
- [2] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, volume 184. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] G. Brinkmann, K. Coolsaet, J. Goedgebeur, H. Mélot, House of Graphs: a database of interesting graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 161(1-2):311-314, 2013.
- [4] G. Brinkmann, J. Goedgebeur, J. Hägglund, K. Markström. Generation and properties of snarks. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 103(4):468–488, 2013.
- [5] A. Cavicchioli, T. E. Murgolo, B. Ruini, F. Spaggiari. Special classes of snarks. *Acta Applicandae Mathematica*, 76(1):57–88, 2003.
- [6] G. Chartrand, F. Harary, Planar permutation graphs. In *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*, volume 3, pages 433–438, 1967.
- [7] B. Descartes, Network-colourings. *The Mathematical Gazette*, 32(299):67–69, 1948.
- [8] J. Hägglund, A. Hoffmann-Ostenhof, Construction of permutation snarks. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 122:55–67, 2017.
- [9] D. A. Holton, J. Sheehan, *The Petersen Graph*, volume 7. Cambridge University Press, 1993.
- [10] I. Holyer, The np-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on computing*, 10(4):718–720, 1981.
- [11] R. Isaacs, Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, 82(3):221–239, 1975.
- [12] A. B. Kempe, I. a memoir on the theory of mathematical form. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (177):1–70, 1886.
- [13] R. Kráľovič, E. Mačajová, M. Škoviera, Involution snarks, nepublikovaný rukopis.

- [14] E. Máčajová, M. Škoviera, Permutation snarks of order $2 \pmod{8}$. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 88(3):929–934, 2019.
- [15] A. Orbanic, T. Pisanski, M. Randic, B. Servatius, Blanuša double. *Mathematical Communications*, 9:91–103, 08 2004.
- [16] R. Simeunovič, Analýza štruktúry snarkov, diplomová práca, 2019.
- [17] G. Szekeres, Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8(3):367–387, 1973.
- [18] P. G. Tait, Remarks on the colouring of maps. In *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, volume 10, pages 501–503, 1880.
- [19] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, volume 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- [20] Wikipedia contributors. Snark (graph theory) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. [Online; accessed 11-May-2021].
- [21] Wikipedia contributors. Descartes snark — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 1-March-2021].
- [22] Wikipedia contributors. Szekeres snark — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 1-March-2021].
- [23] Wikipedia contributors. Petersen graph — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. [Online; accessed 1-March-2021].
- [24] C.-Q. Zhang, *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*, volume 205. CRC Press, 1997.

Príloha

V elektronickej prílohe priloženej k práci sa nachádzajú súbory INVOL_34.ALL a INVOL_34_results.ALL. V súbore INVOL_34.ALL sa nachádzajú všetky involučné snarky rádu 34. V súbore INVOL_34_results.ALL sa nachádzajú výsledky o všetkých involučných snarkoch rádu 34.