Magické útvary

Školiteľ: doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.

Richard Bíró, 3INF

Magické útvary

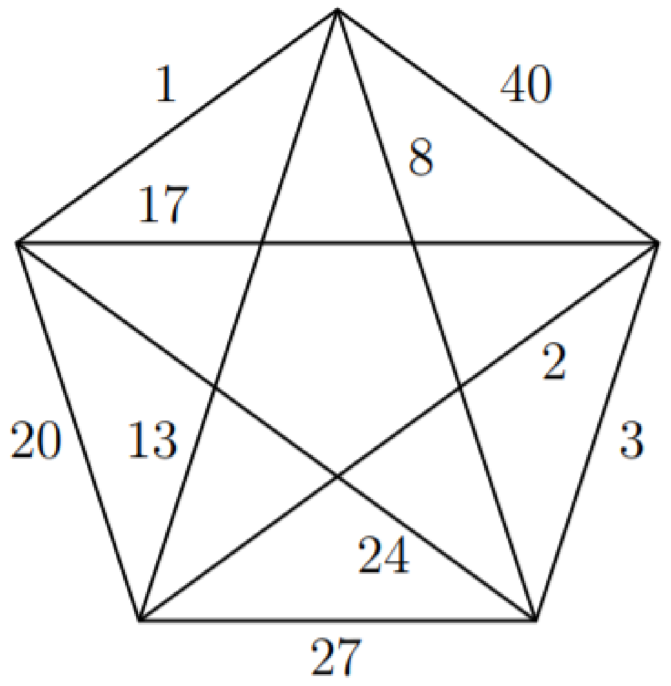
Magický štvorec

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Magický obdĺžnik

1	7	6	4
8	2	3	5

Magický graf



Magické štvorce

- Matice veľkosti n x n, ktorých prvkami sú rôzne kladné celé čísla, pričom **súčet** v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je **rovnaký**

4	3	8
9	5	1
2	7	6

- Ak sú prvkami čísla od **1** do $\boldsymbol{n^2}$, nazývame ich **supermagickými**

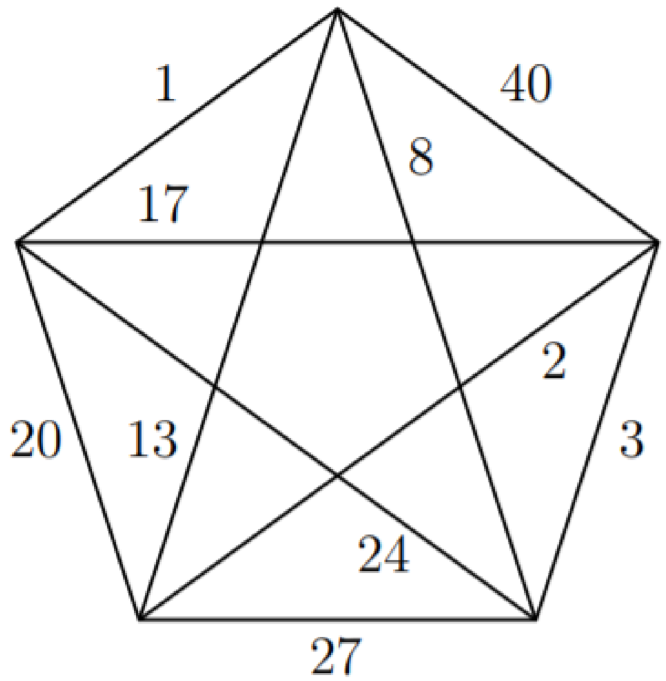
Magické obdĺžniky

- Matice veľkosti m x n ($m \neq n$), ktorých prvkami sú rôzne kladné celé čísla, pričom **súčet** v každom **riadku** je rovnaký a aj **súčet** v každom **stĺpci** je rovnaký

1	7	6	4
8	2	3	5

Magické grafy

- Neorientované grafy s **ohodnotenými hranami**, pričom **súčty hodnôt hrán** incidentných s jednotlivými vrcholmi sú rovnaké



Multiplikatívne útvary

- Útvary, pri ktorých neskúmame magické súčty, ale **súčiny**
- **Multiplikatívny štvorec** veľkosti 3x3:

Multiplicative			=4096
8	256	2	=4096
4	16	64	=4096
128	1	32	=4096
=4096	=4096	=4096	=4096

Bimagické útvary

- **Magické** útvary, pre ktoré ak každý prvok **umocníme na druhú**, dostaneme opäť **magický** útvar
- **Bimagický štvorec** veľkosti 6x6:

6x6 magic square...						=408		*...squared*						=36826
17	36	55	124	62	114	=408		17^2	36^2	55^2	124^2	62^2	114^2	=36826
58	40	129	50	111	20	=408		58^2	40^2	129^2	50^2	111^2	20^2	=36826
108	135	34	44	38	49	=408	>>>	108^2	135^2	34^2	44^2	38^2	49^2	=36826
87	98	92	102	1	28	=408		87^2	98^2	92^2	102^2	1^2	28^2	=36826
116	25	86	7	96	78	=408		116^2	25^2	86^2	7^2	96^2	78^2	=36826
22	74	12	81	100	119	=408		22^2	74^2	12^2	81^2	100^2	119^2	=36826
=408	=408	=408	=408	=408	=408	=408		=36826	=36826	=36826	=36826	=36826	=36826	=36826

Multiplikatívne magické útvary

- Útvary, ktoré majú **multiplikatívnu** aj **magickú** vlastnosť
- **Multiplikatívny magický štvorec** veľkosti 7x7:

126	66	50	90	48	1	84
20	70	16	54	189	110	6
100	2	22	98	36	72	135
96	60	81	4	10	49	165
3	63	30	176	120	45	28
99	180	14	25	7	108	32
21	24	252	18	55	80	15

Ciele práce

1. Spraviť prehľad v oblasti **klasických magických útvarov**
2. Formulovať podobné problémy pre **diskrétne štruktúry** (napr. grafy)
3. Vybrať si niekoľko otvorených problémov a **implementovať algoritmy** na hľadanie ich riešení
4. Vysloviť **hypotézy**, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti

Implementácia algoritmov

- **Python 3.8**
- Dôvody:
  - Jednoduchá implementácia
  - Neobmedzené číselné premenné
  - Podpora knižnice *networkx* pre prácu s grafmi (funkcia *read_graph6*)

Známe otvorené problémy

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

- Existuje **iný** magický štvorec veľkosti 3x3, ktorého **aspoň 7 prvkov** sú druhé mocniny kladných celých čísel?

Magický štvorec so 6 druhými mocninami

- Nech x je kladné celé číslo
- $x_1 = 8x^8 - 49x^6 + 6x^4 – 16x^2 + 2$
- $x_2 = 8x^8 - x^6 + 30x^4 – 40x^2 + 2$
- $x_3 = 8x^8 - 25x^6 + 18x^4 – 28x^2 + 2$

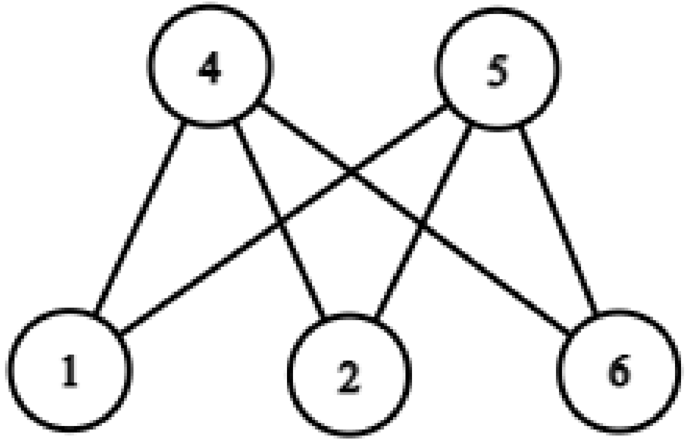
$(2x^5 + 4x^3 - 7x)^2$	$x_1(x^2 - 2)$	$(5x^4 - 2x^2 + 2)^2$
$(x^4 + 8x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 2x^3 + 5x)^2$	$x_2(x^2 - 2)$
$x_3(x^2 - 2)$	$(7x^4 - 4x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 8x^3 - x)^2$

Nové otvorené problémy

- **Bimagické grafy**
  - Vrcholovo bimagické grafy
  - Hranovo bimagické grafy
- **Multiplikatívne magické grafy**
  - Vrcholovo multiplikatívne magické grafy
  - Hranovo multiplikatívne magické grafy
- **Bimagické obdĺžniky**
- **Multiplikatívne magické obdĺžniky**

Vrcholovo bimagické grafy

- Grafy, ktorých **vrcholy** sa dajú **ohodnotiť** rôznymi kladnými celými číslami tak, aby bol **súčet** aj **súčet druhých mocnín** hodnôt susedov rovnaký



Vrcholovo bimagické grafy

- **Stromy** nie sú vrcholovo bimagické
- Jediný **kubický** vrcholovo bimagický graf je $K_{3,3}$
- Každý **kompletný bipartitný graf** $K_{i,j}$ pre $2 \le i \le j$, $(i, j) \ne (2, 2)$ je vrcholovo bimagický
- **(Nutná podmienka)** Pre ľubovoľné dva vrcholy *u*,*v* platí, že ak *x* je počet susedov *u*, ktorí nie sú susedmi *v* a *y* je počet susedov *v*, ktorí nie sú susedmi *u*, potom

$$x = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$x, y \ne 1$$

$$(x, y) \ne (2, 2)$$

Vrcholovo bimagické grafy

- Prehľadali sme všetky súvislé grafy s nanajvýš **9 vrcholmi**
- **Nutnú podmienku** spĺňali:

$K_{2,3}$ $K_{2,4}$ $K_{2,5}$ $K_{2,6}$ $K_{2,7}$

$K_{3,3}$ $K_{3,4}$ $K_{3,5}$ $K_{3,6}$

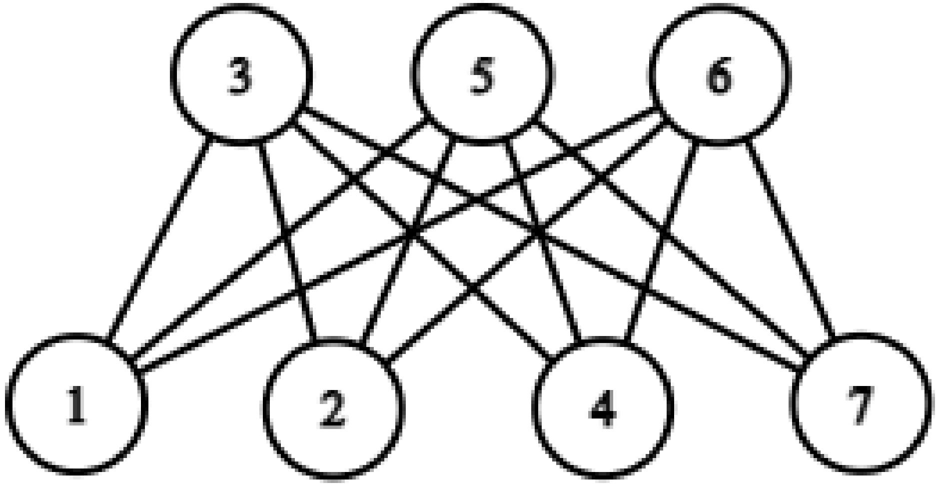
$K_{4,4}$ $K_{4,5}$

$K_{2,3,3}$ $K_{2,3,4}$ $K_{3,3,3}$

- Ku **všetkým** sme našli vyhovujúce ohodnotenie
- **Hypotéza:** každý vrcholovo bimagický graf je kompletný multipartitný

Vrcholovo superbimagické grafy

- **Vrcholovo bimagické** grafy s *n* vrcholmi, ktorých vrcholy sú ohodnotené číslami **1** až ***n***



Vrcholovo superbimagické grafy

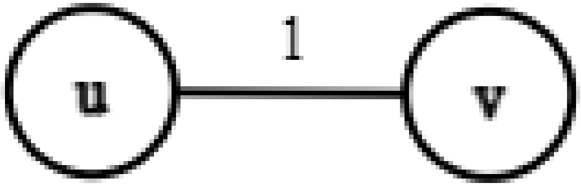
- **Vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf** na n vrcholoch existuje **práve vtedy**, keď $\boldsymbol{n = 4k}$ alebo $\boldsymbol{n = 4k - 1}$ pre $k \geq 2$
- Dôkaz ($\Rightarrow$):
  - Sporom, nech by taký graf existoval pre $\boldsymbol{n = 4k + 1}$ alebo $\boldsymbol{n = 4k + 2}$, $k \geq 0$
  - Vieme množinu $\boldsymbol{\{1, \ldots, n\}}$ rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny **s rovnakým súčtom**?
  - Množina má súčet $\boldsymbol{n(n+1)/2}$ $\rightarrow$ podmnožiny by mali súčet $\boldsymbol{n(n+1)/4}$
  - Pre $\boldsymbol{n = 4k + 1}$ alebo $\boldsymbol{n = 4k + 2}$ však výraz $\boldsymbol{n(n+1)/4}$ nie je celé číslo, čo je **spor**

Vrcholovo superbimagické grafy

- **Vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf** na n vrcholoch existuje **práve vtedy**, keď $\boldsymbol{n = 4k}$ alebo $\boldsymbol{n = 4k - 1}$ pre $k \geq 2$
- Dôkaz ($\Leftarrow$):
  - $\boldsymbol{n = 4k} \vee \boldsymbol{n = 4k - 1}$ pre $k \geq 2 \rightarrow \boldsymbol{n = 8l - 1} \vee \boldsymbol{n = 8l} \vee \boldsymbol{n = 8l + 3} \vee \boldsymbol{n = 8l + 4}$ pre $l \geq 1$
  - Matematickou indukciou vzhľadom na l
  - Pre $l = 1$ tvrdenie platí (hrubá sila)
  - Uvažujme ohodnotenie pre $\boldsymbol{n = 8l}$. Skonštruujeme hodnotenie pre $\boldsymbol{n = 8(l + 1)}$:
    - Do jednej partície pridáme prvky $\boldsymbol{8l + 1}$, $\boldsymbol{8l + 4}$, $\boldsymbol{8l + 6}$, $\boldsymbol{8l + 7}$
    - Do druhej partície pridáme prvky $\boldsymbol{8l + 2}$, $\boldsymbol{8l + 3}$, $\boldsymbol{8l + 5}$, $\boldsymbol{8l + 8}$
  - Prípady $\boldsymbol{n = 8l - 1}$, $\boldsymbol{n = 8l + 3}$, $\boldsymbol{n = 8l + 4}$ sa dokážu analogicky

Hranovo bimagické grafy

- Grafy, ktorých **hrany** sa dajú **ohodnotiť** rôznymi kladnými celými číslami tak, aby bol **súčet** aj **súčet druhých mocnín** hodnôt hrán incidentných s ľubovoľným vrcholom rovnaký

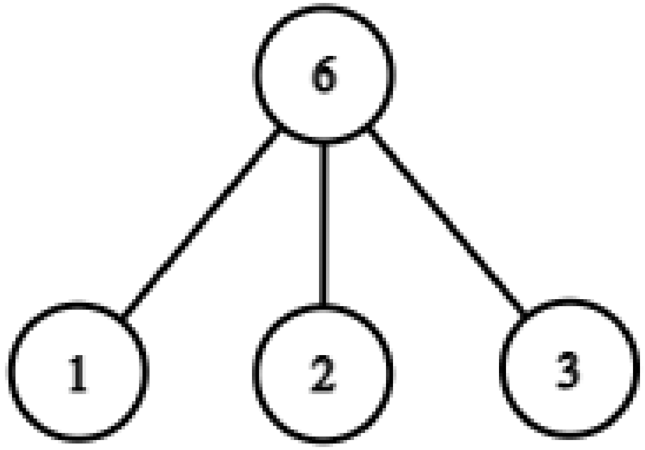


Hranovo bimagické grafy

- **Minimálny stupeň** vrchola je **3**
- Pre dva **susedné** vrcholy platí, že **aspoň jeden** z nich je stupňa aspoň **4**
- Ak $\boldsymbol{x}$ je **číslo nezávislosti** hranovo bimagického grafu G, tak G má aspoň $\boldsymbol{2V(G) - x/2}$ hrán
- Existuje hranovo bimagický graf, ktorý nie je **kompletný bipartitný**
- **Hypotéza:** každý hranovo bimagický graf je **kompletný bipartitný** alebo **kompletný bipartitný bez jednej hrany**

Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

- Grafy, ktorých **vrcholy** sa dajú **ohodnotiť** rôznymi kladnými celými číslami tak, aby bol **súčet** aj **súčin** hodnôt susedov rovnaký



Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

- Jediný vrcholovo multiplikatívny magický **strom** je $K_{1,3}$
- Jediný **kubický** vrcholovo multiplikatívny magický graf je $K_{3,3}$
- Každý **kompletný bipartitný** graf $K_{i,j}$ pre $2 \leq i \leq j$, $(i, j) \neq (2, 2)$ je vrcholovo multiplikatívny magický
- Neexistuje vrcholovo multiplikatívny **supermagický** graf

Ďalšie nové otvorené problémy

- Hranovo multiplikatívne magické grafy
- Bimagické obdĺžniky
- Multiplikatívne magické obdĺžniky

Ciele práce

1. Spraviť prehľad v oblasti **klasických magických útvarov**
2. Formulovať podobné problémy pre **diskrétne štruktúry** (napr. grafy)
3. Vybrať si niekoľko otvorených problémov a **implementovať algoritmy** na hľadanie ich riešení
4. Vysloviť **hypotézy**, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti

Všetky ciele práce boli splnené.

Zdroje obrázkov

- http://multimagie.com/
- https://csacademy.com/

Ďakujem za pozornosť

Zhrnutie posudkov

- 8 drobných chýb v dôkazoch
- 6 drobných chýb v zneniach tvrdení a dôkazov
- 3 iné drobné chyby
- 1 chybný dôkaz

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Ako by bolo treba pozmeniť Definíciu 1.10, aby Veta 1.11 bola formálne správne bez potreby zmeny jej znenia?
- **Odpoveď:** Definícia 1.10: Magický graf je neorientovaný graf, pre ktorý existuje také hranové ohodnotenie, že súčty hrán incidentných s jednotlivými vrcholmi sú rovnaké.

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Viete preformulovať znenie Dôsledku 2.4 tak, aby bolo jasné, čo vraví aj bez čítania dôkazu?

- **Odpoveď:** Dôsledok 2.4: Nech

a	b	c
d	e	f
g	h	i

je magický štvorec.

Potom platia nasledovné vzťahy:

i. $f + h = 2a$

ii. $d + h = 2c$

iii. $b + f = 2g$

iv. $b + d = 2i$

Otázky a odpovede

- **Otázka:** „Budeme predpokladať, že bimagický štvorec má magický súčet rovný prostrednému prvku“ treba doplniť na „bimagický štvorec s potenciálne zápornými prvkami“. Magický štvorec s touto vlastnosťou totiž neexistuje. Prečo?
- **Odpoveď:** Pretože potom by musel byť súčet prvkov na diagonále okrem prostredného rovný nule, čo je spor s tým, že prvkom musia byť priradené kladné čísla.

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Viete správne preformulovať Lemu 3.1 tak, aby naozaj obsahovala sústavy rovníc?
- **Odpoveď:** Lema 3.1: Nech n je kladné celé číslo.
  1. Nasledovná sústava rovníc s premennými $a_1, \dots, a_n, b$ nemá riešenie v obore kladných celých čísel, v ktorom sú $a_1, \dots, a_n, b$ navzájom rôzne:

     [prvá sústava rovníc]
  2. Nasledovná sústava rovníc s premennými $a_1, \dots, a_n, b$ má jediné riešenie v obore kladných celých čísel, v ktorom sú $a_1, \dots, a_n, b$ navzájom rôzne, a to $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b = 6$:

     [druhá sústava rovníc]

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Viete opraviť citáciu o kompletných bipartitných grafoch na strane 4 tak, aby bola správne?
- **Odpoveď:** Opravená citácia: Ku každému supermagickému štvorcu veľkosti $n \times n$ existuje ekvivalentný supermagický graf $K_{n,n}$
- Jediný problém opačnej konštrukcie: súčty na diagonálach štvorca
- Dôsledok: bipartitné regulárne magické grafy sú ekvivalentné semimagickým štvorcom

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Viete opraviť znenie Lemy 2.6, aby obsahovalo tvrdenie, ktoré uvedený dôkaz naozaj dokazuje? Prípadne viete opraviť dôkaz tak, aby naozaj dokazoval Lemu 2.6?
- **Odpoveď:** Opravené znenie lemy:

Lema 2.6: Nech a, b, c sú kladné celé čísla, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = 2c^2$. Potom existujú u, v, $w \in \mathbb{N}$ také, že:

$$a = w\frac{u^2+2uv-v^2}{u+v} \qquad b = w\frac{-u^2+2uv+v^2}{u+v} \qquad c = w\frac{u^2+v^2}{u+v}$$

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Viete opraviť znenie Lemy 2.6, aby obsahovalo tvrdenie, ktoré uvedený dôkaz naozaj dokazuje? Prípadne viete opraviť dôkaz tak, aby naozaj dokazoval Lemu 2.6?
- Alternatívny dôkaz pôvodného znenia Lemy 2.6:
  - Všetky celočíselné riešenia rovnice $A^2 + B^2 = C^2$ majú parametrické vyjadrenie $A = (k^2 - l^2)m$, $B = 2klm$, $C = (k^2 + l^2)m$, kde $k, l, m \in \mathbb{Z}$.
  - Ak $A^2 + B^2 = C^2$, potom $(B + A)^2 + (B - A)^2 = 2C^2$
  - Substitúciou $a = B + A$, $b = B - A$, $c = C$, $u = k$, $v = l$, $w = m$ a dosadením dostaneme hľadanú parametrizáciu pre $a^2 + b^2 = 2c^2$

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Ako vyplývajú rovnosti $p^2 + s^2 = q^2 + r^2 = 2t^2$ z Lemy 2.6?
- **Odpoveď:** Z Lemy 2.6 vyplýva, že pre $u, v \in \mathbb{N}$ platí vzťah

$$(u^2 + 2uv - v^2)^2 + (- u^2 + 2uv + v^2)^2 = 2(u^2 + v^2)^2 \qquad (*)$$

$$p^2 + s^2 = (u_1^2 + v_1^2)^2 (u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)^2 + (u_1^2 + v_1^2)^2 (- u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)^2$$

$$= (u_1^2 + v_1^2)^2 [(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)^2 + (- u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)^2] =$$

$$= (u_1^2 + v_1^2)^2 \cdot 2(u_2^2 + v_2^2)^2 \qquad \text{vyplýva z } (*)$$

$$q^2 + r^2 = [(u_1^2 + 2u_1v_1 – v_1^2)^2 + (- u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)^2] (u_2^2 + v_2^2)^2 =$$

$$= 2(u_1^2 + v_1^2)^2 (u_2^2 + v_2^2)^2 \qquad \text{vyplýva z } (*)$$

$$2t^2 = 2(u_1^2 + v_1^2)^2 (u_2^2 + v_2^2)^2$$

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Ak sa správne upraví znenie Lemy 2.6, bude dôkaz Vety 2.10 správny? Ak nie, viete upraviť dôkaz tak, aby bol správny?
- **Odpoveď:** Nie, pretože na konci dôkazu dostaneme rovnosť:

$$w_2^2\, u_2 v_2(u_2^2 - v_2^2)/(u_2 + v_2) = w^2\, uv(u^2 - v^2)/(u + v)$$

Nemôžeme predpokladať, že $u_2 + v_2 = u + v$

- Lemu 2.6 dokážeme spomínaným alternatívnym spôsobom
- Dôkaz Vety 2.10 bude potom správny

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Prečo transformácia magického štvorca na iný uvedená v dôkaze Vety 2.10 zachováva magickosť?
- **Odpoveď:**

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$\longrightarrow$ Dôsledok 2.3

a	$2e-h$	c
d	e	$2e-d$
$2e-c$	h	i

$\longrightarrow$

$2c = d + h$	$a + c = e + h$	$a + d = h + i$
$a + d = c + e$		$c + i = d + e$
$a + d = h + i$	$c + e = h + i$	$2c = d + h$

diagonály: $2e = a + i$

c	a	$(d+i)/2$
i	$(c+e)/2$	h
$(a+h)/2$	d	e

$\longrightarrow$

$a + d = h + i$	$c + i = d + e$	$a + c = e + h$
$a + c = e + h$	$a + d = h + i$	$a + d = h + i$
$c + i = d + e$	$a + c = e + h$	$a + d = h + i$

diagonály: $c + e = (a + d + h + i)/2$

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Uvedený dôkaz Vety 3.7 a Vety 3.33 nezafunguje. Viete dané tvrdenie dokázať inak? Platí tvrdenie vôbec?
- **Odpoveď:** Dodatočne sme prišli na to, že dôkaz oboch viet je chybný.
- Veta 3.33 neplatí - kontrapríkladom je napríklad graf $K_{1,3}$, ktorý je vrcholovo multiplikatívny magický, ale akýkoľvek menší graf nie je.
- Domnievame sa, že ani Veta 3.7 neplatí. Kontrapríklad nájsť nevieme, lebo všetky nájdené vrcholovo bimagické grafy sú bezmostové.

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Viete doplniť alebo opraviť indukciu v dôkaze Vety 3.10 a Vety 3.36, aby dokazovala uvedené tvrdenie?
- **Odpoveď:** Indukciu doplníme nasledovne: Ak $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický, tak to platí aj pre $K_{i+2,j+3}$, aj pre $K_{i+3,j+2}$ ak $i < j$.

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Ako vieme, že v dôkaze Vety 3.18 je množina hrán $\{a_1, \dots , a_n\}$ neprázdna?
- **Odpoveď:** Daná množina môže byť prázdna, ale v takom prípade bude mať vrchol *w* stupeň 1.
- Keďže v grafe sú aspoň tri vrcholy *u*, *v*, w, tak na základe vety 3.17 odvodíme, že graf nie je hranovo bimagický.

Otázky a odpovede

- **Otázka:** Ako v dôkaze Vety 3.25 vieme, že existuje hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením?
- **Odpoveď: Semimagické štvorce** veľkosti n x n sú ekvivalentné kompletným bipartitným regulárnym **magickým** grafom.
- Analogicky: **Semibimagické** štvorce veľkosti n x n sú ekvivalentné kompletným bipartitným regulárnym **hranovo bimagickým** grafom.
- Sú známe semibimagické štvorce pre $n \geq 4$, čiže $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

Otázky a odpovede

- Príklad pre **semibimagický** štvorec veľkosti 4x4:

1	35	46	61	=143		1^2	35^2	46^2	61^2	=7063
37	71	13	22	=143		37^2	71^2	13^2	22^2	=7063
43	26	67	7	=143	>>>	43^2	26^2	67^2	7^2	=7063
62	11	17	53	=143		62^2	11^2	17^2	53^2	=7063
=143	=143	=143	=143			=7063	=7063	=7063	=7063	

- Ekvivalentný hranovo bimagický graf $K_{4,4}$