

Dodatočná informácia a triedy jazykov

prof. RNDr. Branislav Rován, PhD
Jozef Martiš

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

2018

- Skúmanie dodatočnej informácie z hľadiska zjednodušenia výpočtu
- Vlastnosti triedy jazykov určenou dodatočnou informáciou

Úvod do problematiky

Problém → Riešiteľ → Riešenie

Úvod do problematiky

Problém

→ Riešiteľ

→ Riešenie

Dodatočná
informácia

↓

Regulárne
jazyky

↓

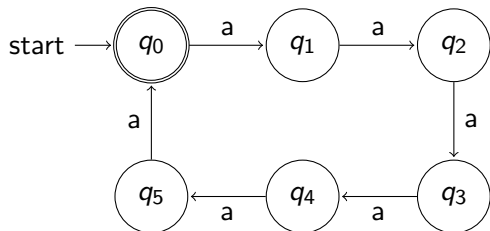
Zjednodušený
automat

↓

Akceptačný výpočet
zjednodušeného determi-
nistického automatu

- P. Gaži and B. Rován. Assisted problem solving and decompositions of finite automata. *SOFSEM 2008. LNCS, vol. 4910, Springer, Heidelberg, 2008*
- P. Labath and B. Rován. Simplifying DPDA using supplementary information. *LATA 2011. LNCS, vol 6638. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.*
- Š. Sádovský. Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave, 2017

Príklad dodatočnej informácie

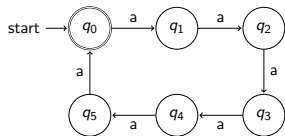


$$L = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Príklad dodatočnej informácie

Informácia o vstupnom slove

Problém:



Informácia:

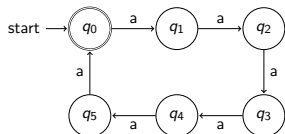
"Slovo na vstupe je párnej dĺžky"

$$L = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Príklad dodatočnej informácie

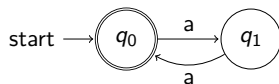
Informácia ako jazyk akceptovaný automatom

Problém:



$$L = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Informácia:

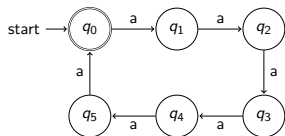


$$L_{adv} = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

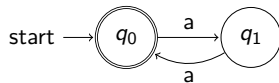
Príklad dodatočnej informácie

Zjednodušenie výpočtu

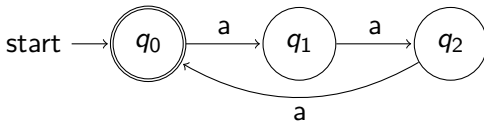
Problém:



Informácia:



Zjednodušený automat (výpočet):



Dodatočná informácia

Definícia dodatočnej informácie

Definition

Pre DKA A a jazyk L_{adv} definujeme *jazyk akceptovaný automatom A s dodatočnou informáciou (advice)* takto:

$$L(A \mid L_{adv}) = L(A) \cap L_{adv}.$$

Dodatočná informácia

Definícia dodatočnej informácie

Problém	Informácia	Zjednodušený problém
$\{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$	$\{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$	$\{a^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
L	L_{adv}	L_{new}

$$L = L_{adv} \cap L_{new}$$

Definícia

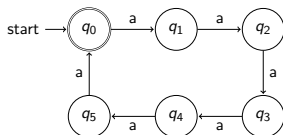
Jazyk L_{adv} je užitočná dodatočná informácia pre jazyk L , ak $sc(L_{adv}) < sc(L)$ a existuje DKA A_{new} taký, že

- $L = L(A_{new} \mid L_{adv})$
- $\#_s(A_{new}) < sc(L)$.

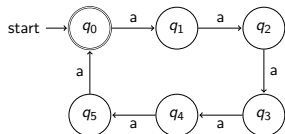
Dodatočná informácia

Zjednodušenie výpočtu

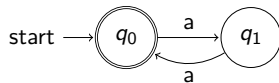
Problém:



Dodatočná informácia:



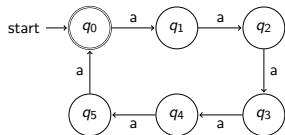
Užitočná dodatočná informácia:



Dodatočná informácia

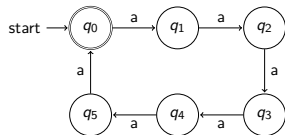
Zjednodušenie výpočtu

Problém:



?

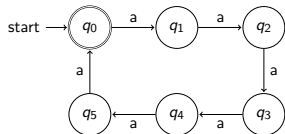
Dodatočná informácia



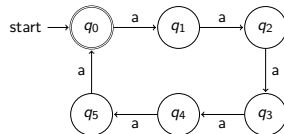
Dodatočná informácia

Zjednodušenie výpočtu

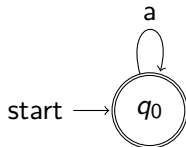
Problém:



Dodatočná informácia



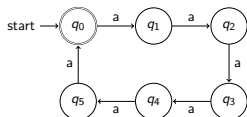
Zjednodušený problém:



Dodatočná informácia

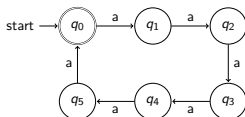
Zjednodušenie výpočtu

Problém:



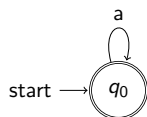
$$L = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Dodatočná informácia



$$L_{adv} = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Zjednodušený problém:



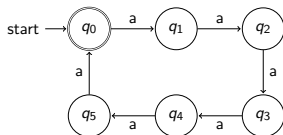
$$L_{new} = a^*$$

$$L = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap a^*$$

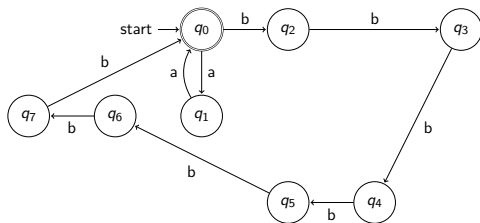
Dodatočná informácia

Zjednodušenie výpočtu

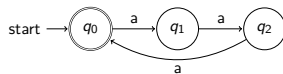
Problém:



Dodatočná informácia:



Užitočná dodatočná informácia:



Triedy definované dodatočnou informáciou

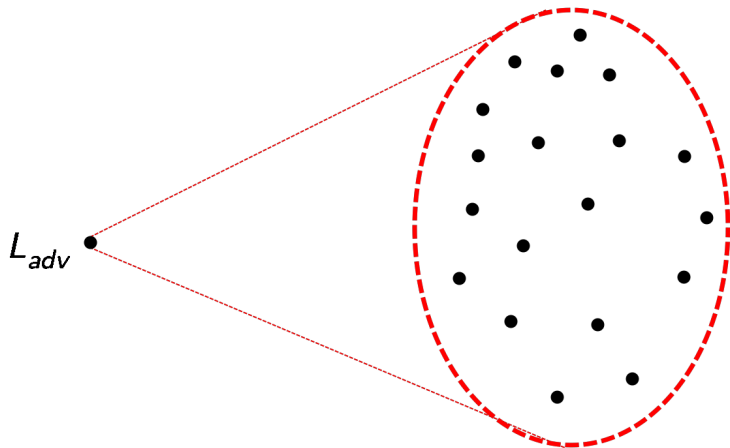
Definícia triedy jazykov pomocou užitočnej dodatočnej informácie

Definition

Nech L_{adv} je jazyk, potom $\mathcal{L}(L_{adv})$ je trieda jazykov definovaná takto: $\mathcal{L}(L_{adv}) = \{L \mid L_{adv} \text{ je užitočná dodatočná informácia pre } L\}$.

Triedy definované dodatočnou informáciou

Definícia triedy jazykov pomocou užitočnej dodatočnej informácie



Triedy definované dodatočnou informáciou

Príklad

$$L_{adv} = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{L}(L_{adv}) = \{\{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}, \{a^{14k} \mid k \in \mathbb{N}\}, \{a^{18k} \mid k \in \mathbb{N}\}, \dots\}$$

Zjednodušené problémy:

$$\{a^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}, \{a^{7k} \mid k \in \mathbb{N}\}, \{a^{9k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Uzavretosť na zretáženie

Kontrapríklad

$$\blacksquare L_{adv} = \{a^{3m}, b^{3n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\blacksquare L_1 = \{a^{6m}, b^{12n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\blacksquare L_2 = \{a^{12m}, b^{6n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

$$L_1 \bullet L_2 = L_{12} = \{a^{6i} a^{12j}, a^{6i} b^{6j}, b^{12i} a^{12j}, b^{12i} b^{6j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

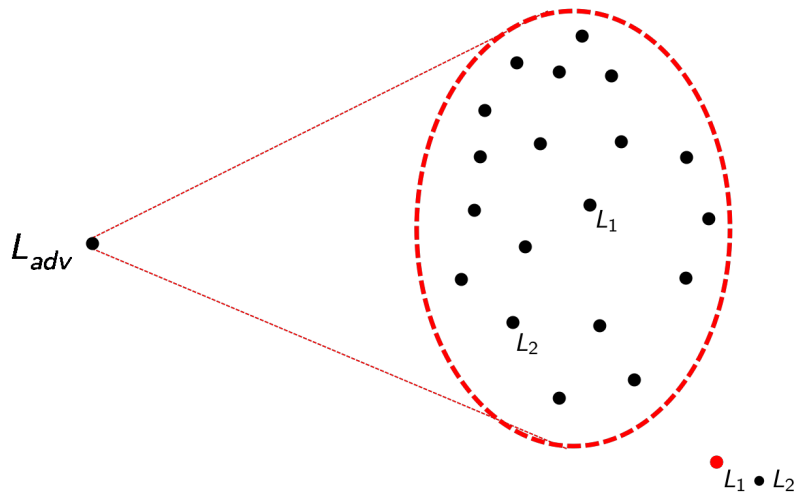
$$w = a^6 b^{12}$$

$$w \in L_{12} \wedge w \notin L_{adv}$$

$$\nexists L_{new} : L(A_{new} \mid L_{adv}) = L(A_{new}) \cap L_{adv} = L_{12}$$

Uzavretosť na zretáženie

Kontrapríklad



Uzavretosť na zjednotenie

Kontrapríklad

- $L_{adv} = (\{a\} \cup \{b^j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\})^*$

- $L_1 = (\{a^i \mid i \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{b^j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\})^*$

- $L_2 = (\{a^i \mid i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{b^j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\})^*$

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}(L_{adv})$$

$$L_1 \cup L_2 = L_3 = (\{a\} \cup \{b^j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\})^*$$

$$sc(L_3) = sc(L_{adv}) \quad (\dots \dots L_3 = L_{adv})$$

L_{adv} pre L_3 už nie je užitočná.

Výsledky

Uzavretosti $\mathcal{L}(L_{adv})$

Operácia	Symbol	Uzavretosť
Zreťazenie	.	Nie
Iterácia	*	Nie
Reverz	R	Nie
Komplement	\bar{C}	Nie
Disjoint union	\amalg	Áno
Prienik	\cap	Nie
Zjednotenie	\cup	Nie
Homomorfizmus	h	Nie
Inverzný homomorfizmus	h^{-1}	Nie

Veta

Existují jazyky L_{adv}^a, L_{adv}^b také, že
 $L_{adv}^a \subseteq L_{adv}^b$ a $\mathcal{L}(L_{adv}^a) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv}^b)$.

Veta

Existují jazyky L_{adv_1}, L_{adv_2} také, že
 $L_{adv_1} \not\subseteq L_{adv_2}$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Veta

Existují jazyky L_{adv}^a, L_{adv}^b také, že
 $L_{adv}^a \subseteq L_{adv}^b$ a $\mathcal{L}(L_{adv}^a) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv}^b)$.

- $L_{adv}^a = \{a^{4k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
- $L_{adv}^b = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Majme $L = \{a^{14k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

$L \in \mathcal{L}(L_{adv}^b)$
 $L \notin \mathcal{L}(L_{adv}^a)$

Veta

Existují jazyky L_{adv_1} , L_{adv_2} také, že $L_{adv_1} \not\subseteq L_{adv_2}$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

- $L_{adv_1} = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
- $L_{adv_2} = \{a^{4k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

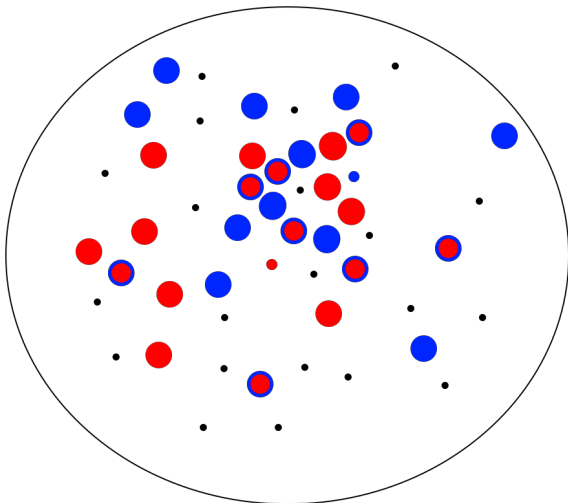
Majme $L = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

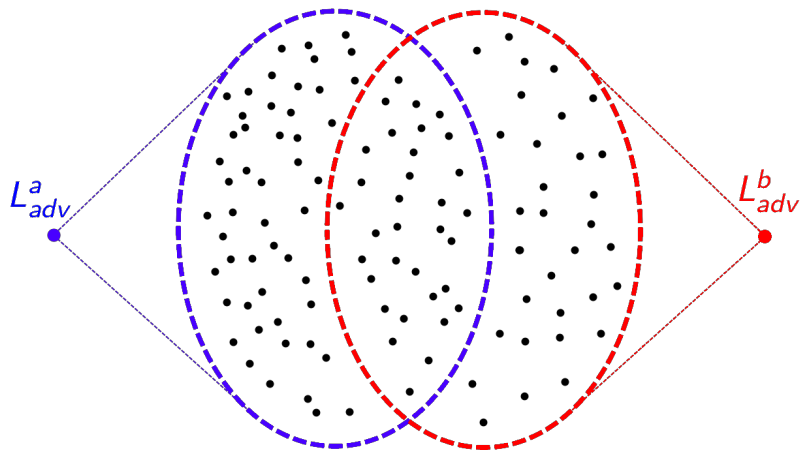
$L \in \mathcal{L}(L_{adv_1})$

$L \notin \mathcal{L}(L_{adv_2})$

$$\mathcal{L}(L_{adv}^a)$$

$$\mathcal{L}(L_{adv}^b)$$





$$\mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2) \quad \dots ? \quad \dots \quad \mathcal{L}(L_1 \cap L_2)$$

Veta

Existujú jazyky L_1 a L_2 z \mathcal{R} také, že

$$\mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2) \not\subseteq \mathcal{L}(L_1 \cap L_2).$$

Veta

Nech L_1 a L_2 sú jazyky z \mathcal{R} . Potom

$$\mathcal{L}(L_1 \cap L_2) \subseteq \mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2).$$

Veta

Existujú jazyky L_1 a L_2 z \mathcal{R} také, že

$$\mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2) \not\subseteq \mathcal{L}(L_1 \cap L_2).$$

- $L_1 = \{bbc^{6k} \mid k \geq 1\} \cup a^*$

- $L_2 = \{bbd^{10k} \mid k \geq 1\} \cup a^*$

$$L_3 = L_1 \cap L_2 = a^*$$

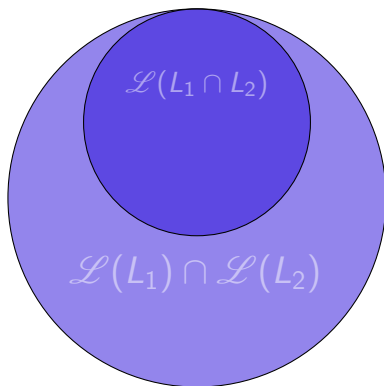
Veta

Nech L_1 a L_2 sú jazyky z \mathcal{R} . Potom

$$\mathcal{L}(L_1 \cap L_2) \subseteq \mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2).$$

$$L \in \mathcal{L}(L_1 \cap L_2)$$

$$L \subseteq L_1 \cap L_2 \Rightarrow L \subseteq L_1 \wedge L \subseteq L_2$$



Obr.: Vzťah $\mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2)$ s triedou $\mathcal{L}(L_1 \cap L_2)$

Veta

Existujú jazyky L_1 a L_2 z \mathcal{R} také, že

$$\mathcal{L}(L_1) \cup \mathcal{L}(L_2) \not\subseteq \mathcal{L}(L_1 \cup L_2).$$

Veta

Existujú jazyky L_1 a L_2 z \mathcal{R} také, že

$$\mathcal{L}(L_1 \cup L_2) \not\subseteq \mathcal{L}(L_1) \cup \mathcal{L}(L_2).$$

Uzavretosť na zjednotenie

Kontrapríklad

Veta

Existujú jazyky L_1 a L_2 z \mathcal{R} také, že

$$\mathcal{L}(L_1) \cup \mathcal{L}(L_2) \not\subseteq \mathcal{L}(L_1 \cup L_2).$$

- $L_1 = (\{a^i \mid i \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{b^j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\})^*$
- $L_2 = (\{a^i \mid i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{b^j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\})^*$

$$L_1 \cup L_2 = L_3 = (\{a\} \cup \{b^j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\})^*$$

Ďakujem za pozornosť

- V ďalších častiach tejto práce budeme tiež namiesto automatu A_{new} používať priamo jazyk L_{new} , ktorý tento automat akceptuje.
- O informácii L_{adv} povieme, že je nepravdivá vtedy, keď vlastnosť L_{adv} nemá žiadne slovo z jazyka, ktorého akceptovanie chceme zjednodušiť.

$$L_{adv} = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

- $\{a^{9k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_{adv} = \{a^{18k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
- $\{a^{1k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_{adv} = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

$$\dots h(L) = L' = \{a^{12k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Veta

Nech L_1 a L_2 sú jazyky z \mathcal{R} . Potom

$$\mathcal{L}(L_1 \cap L_2) \subseteq \mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2).$$

Nech ... , $\mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2) \neq \emptyset$

$$\mathcal{L}(L_1) \cap \mathcal{L}(L_2) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}(L_1) \neq \emptyset \wedge \mathcal{L}(L_2) \neq \emptyset$$

"Vstupné slovo je párnej dĺžky"

L_{adv} - vlastnosť, má ju dané slovo na vstupe (nemusíme jej platnosť teda overovať ako v pôvodnom automate)

Vyjadrenie

$$L \stackrel{?}{\in} \mathcal{L}(L_{adv}^b)$$

- $L_{adv}^b = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
- $L = \{a^{14k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

$$L \stackrel{?}{\in} \mathcal{L}(L_{adv}^b)$$

$$\exists L_{new} : sc(L_{new}) < sc(L) \wedge L_{new} \cap L_{adv}^b = L$$

$$L_{new} = \{a^{7k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Diskusia

Podchytenie správania L_{adv}

$$L_{adv} = \{a^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$L_1 = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$L_2 = \{a^{12k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$L_1 \cap L_2 = \{a^{12k} \mid k \in \mathbb{N}\} \dots L_{new_1} = \{a^{4k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$L_1 \cup L_2 = \{a^{6k} \mid k \in \mathbb{N}\} \dots L_{new_1} = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Diskusia

Podchytenie správania L_{adv}

$$L_{adv} = \{a^{mk} \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{ pričom } m \in \mathbb{N}$$

$$L = \{a^{qk} \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ pričom } q \in \mathbb{N}$$

$q = m \cdot n, n \in \mathbb{N} \wedge \gcd(m, n) = 1 \Rightarrow$ vieme výpočet L zjednodušiť

Príklad:

Nech $m = 3$ a $q = 18$ $L_{adv} = \{a^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, pričom $m \in \mathbb{N}$,

$$L = \{a^{27k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$L_{new} = \{a^9 \mid k \in \mathbb{N}\}$ nie je jazyk s požadovanými vlastnosťami.

$$L_{adv} \cap L_{new} = \{a^9 \mid k \in \mathbb{N}\} \neq L$$