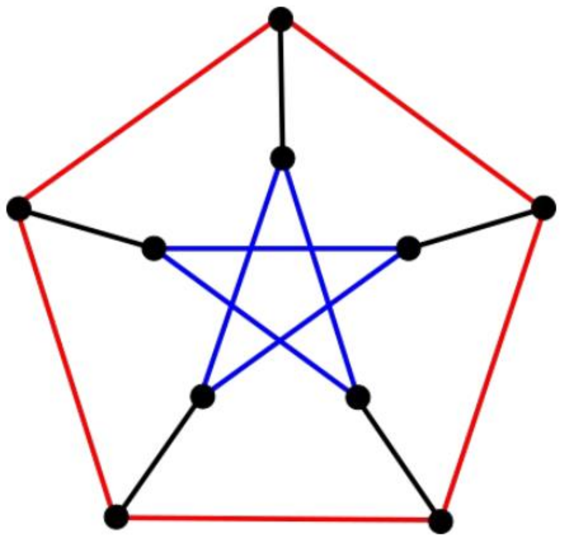
5-Cykly a ich zhluky v involučných snarkoch

Meno: Radoslav Smaržík

Školiteľ: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

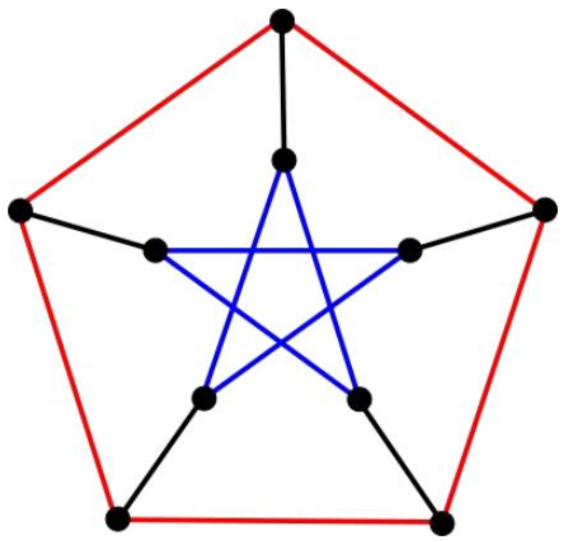
Snarky

- **Snark** je súvislý kubický graf, ktorý nemá hranové 3-zafarbenie
- Petersenov graf je najmenší netriviálny snark
- Snarky sú významná trieda kubických grafov
- Snarky súvisia s viacerými ťažkými problémami v teórii grafov – hypotéza o dvojitom pokrytí, veta o štyroch farbách
- Rozhodnúť, či kubický graf je snark je NP-úplný problém



Permutačné snarky

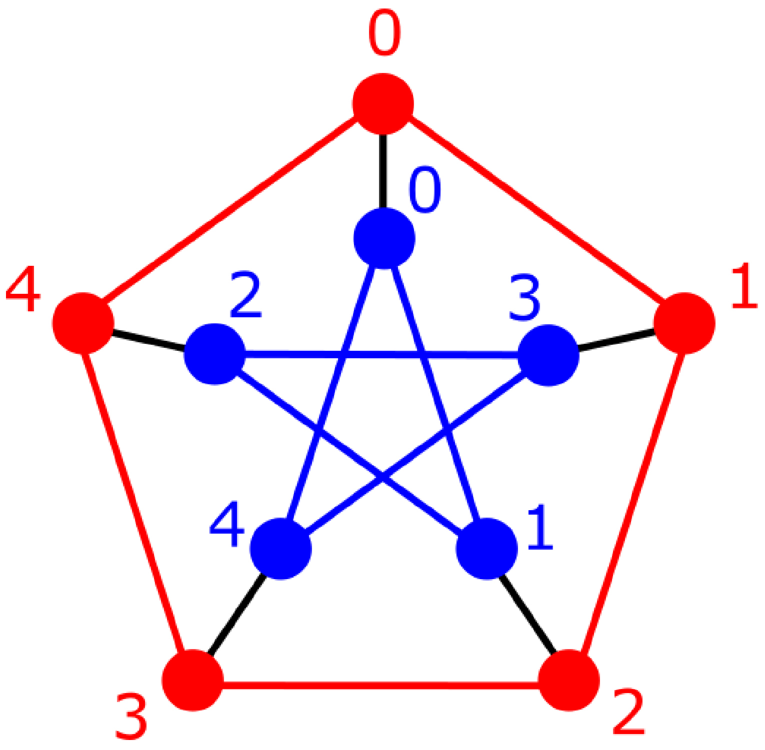
- **Permutačný snark** je snark, ktorý obsahuje 2-faktor pozostávajúci z dvoch bezchordových cyklov
- Petersenov graf je permutačný snark
- Doteraz skonštruované permutačné snarky majú obvod 5
- Permutačný snark vieme reprezentovať **bicyklickou** a **permutačnou reprezentáciou**



Permutačná reprezentácia

- **Permutačná reprezentácia** permutačného snarku rádu 2n je **permutácia** na n-prvkovej množine
- Permutačná reprezentácia vychádza zo zvoleného 2-faktora
- Permutačnú reprezentáciu zapisujeme ako súčin disjunktných cyklov – cyklický zápis permutácie
- Permutačný snark môže mať viacero permutačných reprezentácií
- Postup na získanie permutačnej reprezentácie:
  1. Zvolíme ľubovoľnú bicyklickú reprezentáciu
  2. Vrcholy v cykloch očíslujeme od 0 po n-1
  3. Vytvoríme permutáciu, ktorá každému číslu vrcholu priradí číslo jeho suseda z druhého cyklu

Permutačná reprezentácia

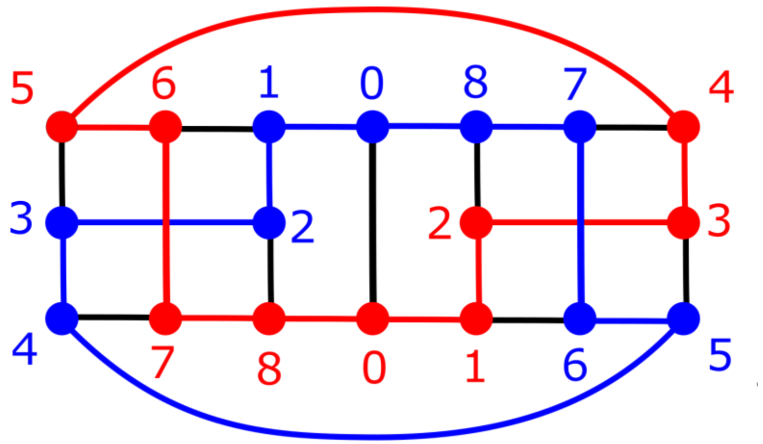


$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p = (0)(1\ 3\ 4\ 2)$$

Involučné snarky

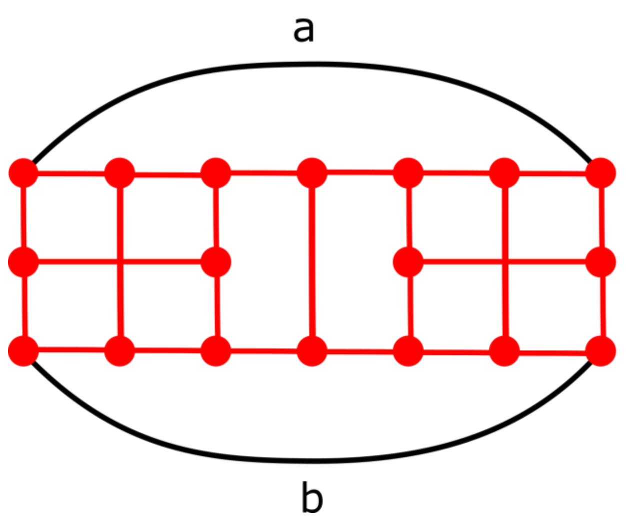
- **Involúcia** je permutácia, ktorej cyklický zápis tvoria len cykly dĺžky ≤ 2
- **Involučný snark** je permutačný snark, pre ktorý existuje aspoň jedna jeho permutačná reprezentácia, ktorá je involúcia
- Involučné snarky majú dobrú a pevnú štruktúru
- V literatúre ešte neboli skúmané
- Najmenší netriviálny involučný snark je snark Blanuša 1



(0)(1 6)(2 8)(3 5)(4 7)

Klastre (zhluky)

- **Klaster 5-cyklov** je maximálny súvislý podgraf, ktorého každá hrana patrí do nejakého 5-cyklu
- Klastre 5-cyklov sa využívajú pri skúmaní štruktúry snarkov
- **Snark s kompletným klastrom** je snark, ktorého všetky vrcholy ležia v jednom klastri 5-cyklov
- **Mimoklastrová hrana** je hrana, ktorá sa nenachádza v žiadnom klastri
- Medzi snarky s kompletným klastrom patrí Petersenov graf, snark Blanuša 1,...



Motivácia

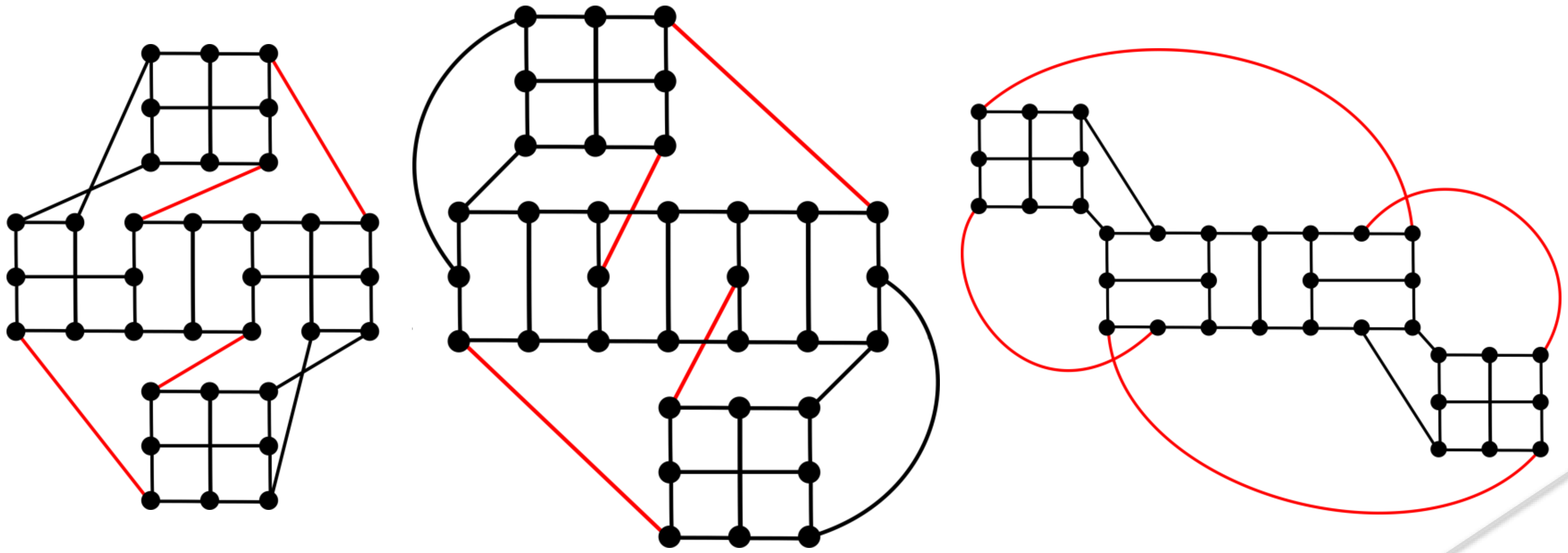
- Porozumieť štruktúre involučných snarkov
- Súvis s Petersenovým grafom
  - Petersenov graf je snark s kompletným klastrom
  - Snarky s kompletným klastrom sa zatiaľ vlastnosťami najviac približujú k Petersenovmu grafu

Ciele práce

- Skúmanie štruktúry involučných snarkov a klastrov v nich
- Nájdenie a skonštruovanie nových involučných snarkov so špeciálnymi vlastnosťami
- Nájdenie nekonečných rodín involučných snarkov s danými vlastnosťami

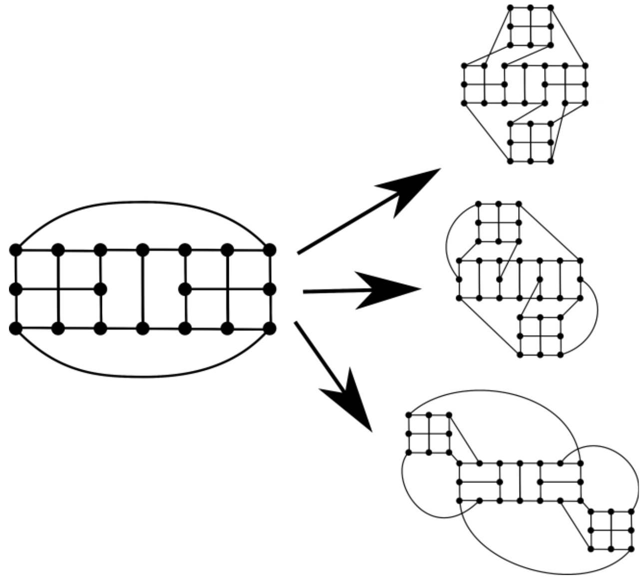
Involučné snarky rádu 34

- Existuje hypotéza, že každý involučný snark má rád $n \equiv 2 \pmod{16}$
- Existuje iba jeden involučný snark rádu 18 – Blanuša 1
- Existuje 45 involučných snarkov rádu 34
- Blanuša 1 je najmenší involučný snark s kompletným klastrom
- Zistili sme, že existujú 3 involučné snarky rádu 34 s kompletným klastrom
- Analyzovali sme štruktúru týchto snarkov



Konštrukcia

- Vytváranie nových snarkov - 4-súčin
- Konštrukcie na rozširovanie involučných snarkov
- Hľadali sme spôsob ako snark Blanuša 1 rozšíriť na aspoň jeden involučný snark s kompletným klastrom rádu 34
- Podarilo sa nám nájsť postup, ako snark Blanuša 1 rozšíriť na ľubovoľný z 3 snarkov
- Postup sme zovšeobecnili
- Skonštruovali sme involučné snarky s kompletným klastrom rádu 50, 66, ...

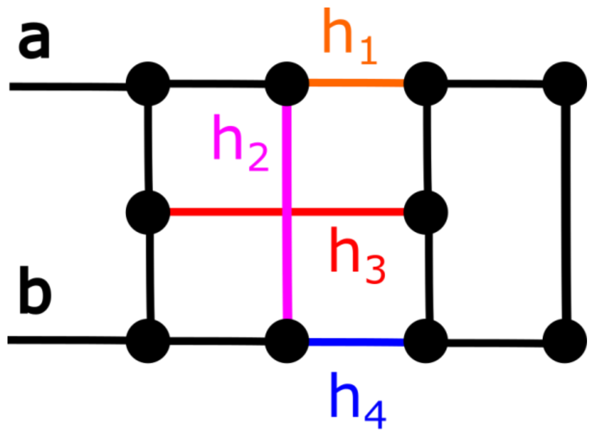


Nekonečná rodina

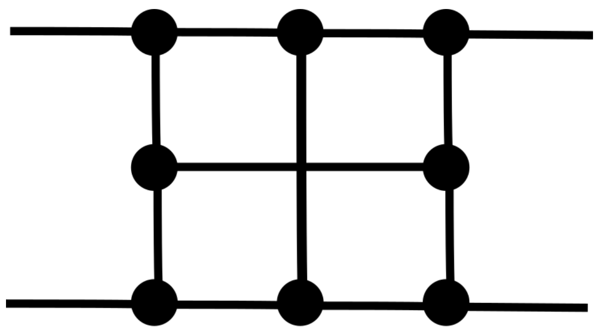
- Našli sme nekonečnú rodinu involučných snarkov s kompletným klastrom
- Štartovacím grafom našej rodiny je snark Blanuša 1
- Objavená nekonečná rodina sa zdá byť exponenciálna
- Korektnosť našej konštrukcie aj našej objavenej nekonečnej triedy sme dokázali indukciou
- Jadro indukčného kroku spočíva v overení všetkých vlastností

Konštrukcia - postup

- Vstupom je involučný snark s kompletným klastrom s požadovanými vlastnosťami
- Vstupný snark musí obsahovať 2 kópie podgrafu z obrázka 1
- Vo vstupnom snarku nájdeme 2 dvojice hrán
- Existuje 6 možnosti ako použiť konštrukciu
- Petersenov dipól



Obrázok 1



Obrázok 2

Pokračovanie v práci

- Overenie toho, že objavená nekonečná trieda je exponenciálna
- Zistenie ďalších spoločných vlastností grafov z objavenej rodiny
- Hľadanie ďalších involučných snarkov s kompletným klastrom
- Skúmanie permutačných reprezentácií involučných snarkov
- Skúmanie, ktoré hrany môžu byť pevné body
- Skúmanie permutačných snarkov s kompletným klastrom
- Nájdenie ďalších nekonečných rodín

Ďakujem za pozornosť

Radoslav Smaržík

Vyjadrenie k posudku

- Snažil som sa o to, aby dôkaz bol korektný
- Formálne nedostatky vyplývajú z toho, že to bol prvý matematický text, ktorý som písal
- Skutočnosť, že disjunktné permutácie komutujú je známa vec a my sme iba ukázali názorný príklad
- Ciele sa určujú všeobecnejšie
- Keby bol väčší priestor, dala sa urobiť analýza involučných snarkov rádu 34
- Podrobnejšie analýzy involučných snarkov rádu 34 sa objavia pri ďalšom skúmaní (diplomová práca)

Vyjadrenie k posudku

Otázka 1:

Vami zostrojené snarky obsahujú dva Petersenovské klastre 5-cyklov (permutačné dipóly, taktiež nazývané ako heterochromatické 4-póly). Skúmali ste, či obsahujú aj nejaké ďalšie Petersenovské klastre? Mám namysli tie snarky Vašej rodiny, čo majú rád aspoň 50, keďže menšie ste v práci skúmali.

Odpoveď:

Nie, zatiaľ sme to neskúmali. Ale v budúcnosti, okrem iného, plánujeme skúmať podklastre kompletných klastrov.

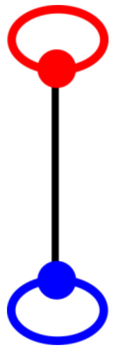
Vyjadrenie k posudku

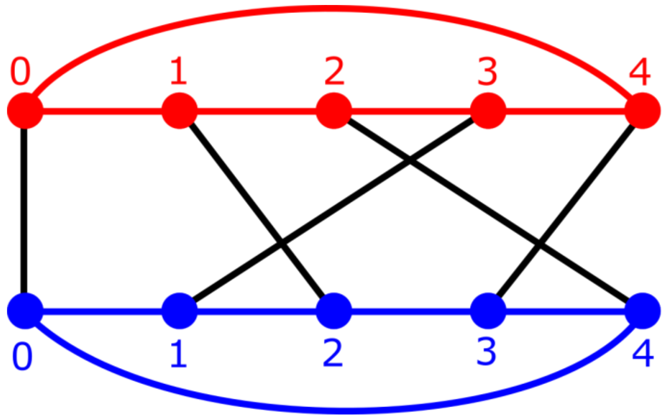
Otázka 2:

Vedeli by ste načrtnúť dôkaz toho, že snarky vznikajúce Konštrukciou 1 a 2 sú involučné?

Odpoveď:

- Zjednodušený argument konštrukcie 2 uvedieme na činke a Petersenovom grafe
- Involúcia vyplýva z toho, že používame dve kópie rovnakého grafu a toho, že grafy vkladáme na miesta, ktoré sú rovnako vzdialené od pevného bodu
- Vytvorenie snarku nám zabezpečuje to, že využívame 4-súčin
- Dve kópie, ktoré sa používajú, musia byť navzájom zrkadlovo preklopené

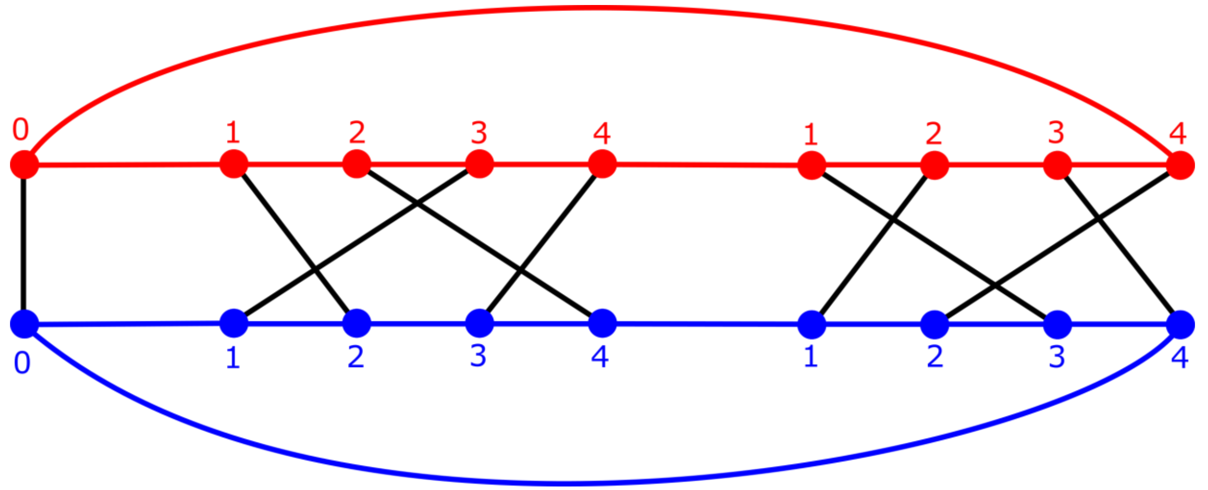




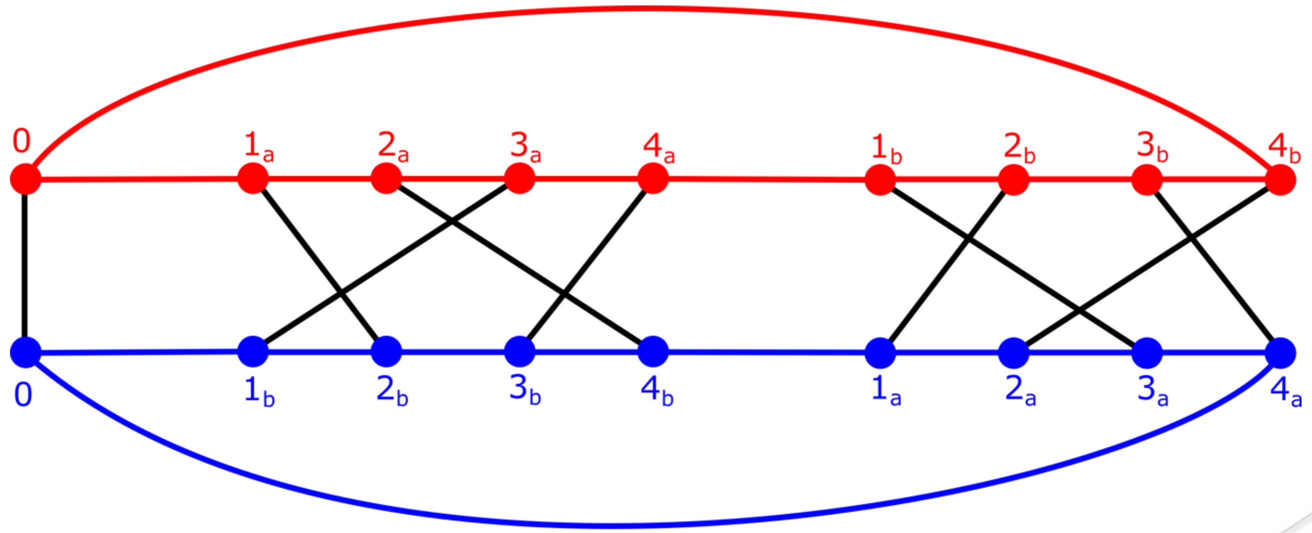
(0)(1 2 4 3)

Vyjadrenie k posudku

$p(x) = y$

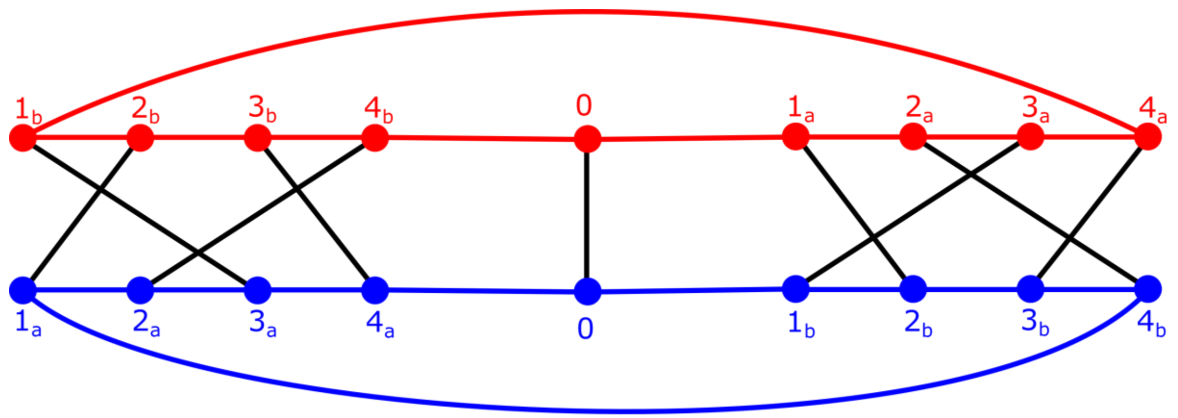


$p'(x_a)=y_b$
$p'(y_b)=x_a$

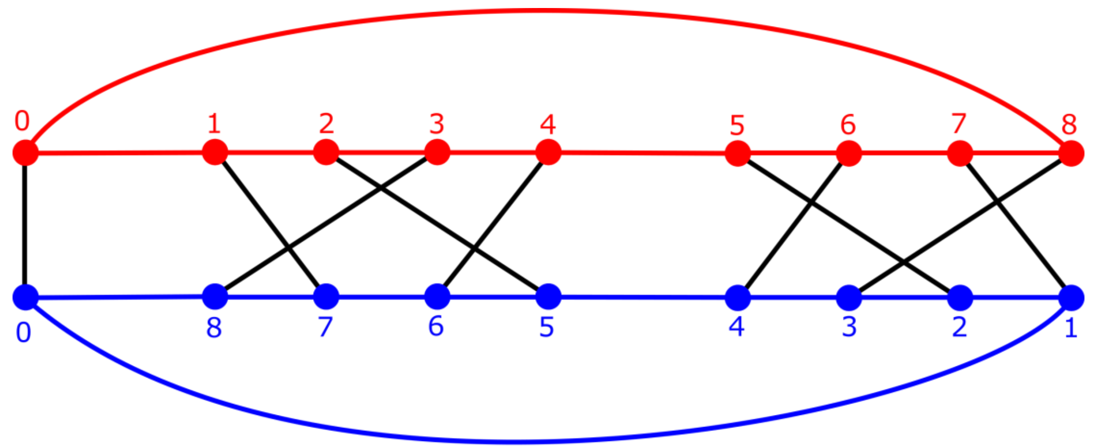


$(0)(1_a\ 2_b)(2_a 4_b)(3_a 1_b)(4_a 3_b)$

Vyjadrenie k posudku



$(0)(1_a\ 2_b)(2_a 4_b)(3_a 1_b)(4_a 3_b)$



(0)(1 7)(2 5)(3 8)(4 6)