



FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
KATEDRA INFORMATIKY

Decyklačné množiny na Cayleyho grafoch

Diplomová práca

Martin Zíka
autor

doc. RNDr. Rastislav Královič, PhD.
školiťel

BRATISLAVA

APRÍL 2008

Abstrakt

ZÍKA, Martin: Decyklačné množiny na Cayleyho grafoch. [Diplomová práca] / Martin Zíka. - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra informatiky. - Školiteľ: doc. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2008, 32 s.

V grafe $G = (V, E)$ je množina V' decyklačnou množinou práve vtedy, ak je graf indukovaný množinou vrcholov $V - V'$ acyklický. Problém nájdenia minimálnej decyklačnej množiny je vo všeobecnosti NP-ťažký. Boli však publikované polynomiálne algoritmy na jej nájdenie v špeciálnych triedach grafov, alebo veľmi blízke ohraničenia. V tejto práci navrhujeme postup, ktorý určí hornú hranicu mohutnosti decyklačnej množiny pre pancake grafy. Vyčíslime hodnoty získané týmto postupom a porovnáme ich s výsledkami, ktoré dostaneme pomocou greedy algoritmu.

Kľúčové slová: minimálna decyklačná množina, Cayleyho graf, Pancake graf.

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry, elektronických zdrojov a s odbornou pomocou diplomového vedúceho.

Bratislava, Apríl 2008

Martin Zíka

Pod'akovanie

Ďakujem touto cestou vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Rastislavovi Kráľovičovi, PhD. za odbodné vedenie diplomovej práce, za jeho cenné rady a pripomienky.

Obsah

1	Úvod a motivácia	5
2	Definície a vlastnosti grafov	7
3	Známe výsledky na Q_n, S_n a P_n grafoch	12
3.1	Regulárne grafy - dolná hranica	12
3.2	Hyperkocka - horná hranica	13
3.3	Star - horná hranica	13
3.4	Experimenty	15
4	Pancake - horná hranica	17
4.1	Nezávislé množiny	18
4.2	Vhodný výber nezávislej množiny	20
4.2.1	Jednoduchý postup	20
4.2.2	1. postup výberu $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$	21
4.2.3	2. postup výberu $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$	24
4.3	Zhrnutie $\nabla(P_n)$	26
5	Záver	29

Kapitola 1

Úvod a motivácia

Definícia 1.1 *Majme jednoduchý graf $G = (V, E)$ bez slučiek a násobných hrán. Množinu vrcholov $V' \subseteq V$ nazveme decyklačnou, ak indukovaný podgraf na množine vrcholov $V \setminus V'$ bude acyklický. Ak $|V'|$ je najmenšia zo všetkých možných, tak V' nazveme minimálnou decyklačnou množinou grafu G a $|V'|$ budeme označovať $\nabla(G)$.*

Problém nájdenia minimálnej decyklačnej množiny vo všeobecnom grafe je NP-ťažký [8]. Doposiaľ známy najlepší aproximačný algoritmus pre tento problém má aproximačný pomer 2 [3]. Existujú polynomiálne algoritmy pre špeciálne triedy grafov, ako sú konvexné bipartitné grafy [13], cocomparability grafy [13], permutačné grafy [12], cyklicky reducibilné grafy [18] a trivalentné cayleyho grafy [17]. Pre niektoré iné triedy, napríklad mriežky [5, 15], torusy [15], butterflies [5], hyperkocky [16] a star grafy [19], bola určená horná a dolná hranica mohutnosti tejto množiny.

Minimálne decyklačné množiny sú objektom štúdia z rôznych dôvodov. Azda najznámejším je ich využitie pri typickej úlohe operačného systému rozdeľovať zdroje a pritom predchádzať deadlockom. Tento problém môže byť vyriešený nájdením minimálnej decyklačnej množiny na grafe závislostí. Graf závislostí budeme

konštruovať nasledovne. Vrcholy budú reprezentovať procesory a hrana (u, v) bude znázorňovať požiadavku procesora u na zdroje alokované procesorom v . Ak tento graf obsahuje cyklus, tak sa vyskytol deadlock. Tento deadlock môže byť ošetrený presunutím minimálneho počtu procesorov do stavu čakateľov na zdroje, teda nájdením minimálnej decyklačnej množiny. Zvyšný graf je acyklický a systém je bez deadlocku [18].

My sa budeme zaoberať špeciálnymi triedami grafov, ktoré spadajú do skupiny Cayleyho grafov. Ukážeme si dosiahnuté výsledky v tejto oblasti a postupy, ktoré k nim viedli, pre hyperkocky a star grafy. Vzhľadom na zložitosť spojenú s nájdením blízkyh hraníc pre tieto grafy, ako napríklad v [16], kde autor vyžíva výsledky z teórie kódovania o binárnych kódoch maximálnej dĺžky, nepredpokladáme, že bude riešenie tejto otázky pre pancake grafy triviálne. Navrhujeme niekoľko postupov na konštruovanie decyklačnej množiny na pancake grafoch. Budeme pri týchto postupoch uvažovať vlastnosti pancake grafov, ktoré vyplývajú z ich štruktúry. Konkrétne sa budeme používať rozklad množiny vrcholov na množiny V_1, V_2, \dots, V_n , kde každá množina V_i obsahuje vrcholy, ktoré majú na i -tej pozícii číslo 1. Vyčíslíme hodnoty získané týmito postupmi a porovnáme ich s výsledkami, ktoré dostaneme pomocou greedy algoritmu.

Kapitola 2

Definície a vlastnosti grafov

Definícia 2.1 *Majme konečnú grupu \mathcal{G} a \mathcal{S} množinu jej generátorov. Cayleyho graf $G = CG(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ môžeme definovať nasledovne. Vrcholy budú prislúchať prvkom grupy \mathcal{G} a hrany budú korešpondovať akciám generátorov. Vrcholy $u, v \in V$ budú spojené hranou práve vtedy, ak existuje generátor $g \in \mathcal{S}$ taký, že $ug = v$. Ak je množina generátorov \mathcal{S} uzavretá na inverzné prvky, potom je graf neorientovaný.*

Poznámka: Každá konečná grupa \mathcal{G} je izomorfná s nejakou grupou permutácií. Preto sa budeme ďalej vyjadrovať pomocou termínov permutácia, i -ty prvok permutácie, inverzná permutácia a pod.

Definícia 2.2 *Graf $G = (V, E)$ je vrcholovo symetrický, ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$, existuje automorfizmus grafu G , ktorý zobrazuje u na v .*

Veta 2.3 *Každý Cayleyho graf je vrcholovo symetrický.*

V dôkaze využijeme inverznú permutáciu k permutácii a a použijeme transformáciu grupy G , ktorá zobrazuje ľubovoľnú permutáciu x na $ba^{-1}x$. Ešte treba overiť, že transformácia zachováva hrany medzi vrcholmi. Ak boli permutácie x a y spojené hranou, teda platilo $\exists g, xg = y$, tak budú aj permutácie $ba^{-1}x$ a

$ba^{-1}y$ spojené hranou.¹ Presný dôkaz a niektoré ďalšie vlastnosti, ktoré platia pre Cayleyho grafy, sú spomenuté v [1].

Definícia 2.4 *Definujme n -rozmernú hyperkocku $Q_n = CG(S_{2n}, \{(2i-1, 2i) | 1 \leq i \leq n\})$ ako neorientovaný Cayleyho graf. Vrcholy budeme označovať permutáciami $2n$ čísel $(1 \dots 2n)$ a hrana medzi dvoma vrcholmi bude práve vtedy, ak dostaneme jednu permutáciu výmenou $(2i-1)$ -vého prvku permutácie s $2i$ -tym. Formálnejšie povedané, nech $a, b \in V$, ak pomocou generátora $\exists g \in \mathcal{S}$ dostávame $ag = b$, tak medzi vrcholmi a, b je v grafe Q_n hrana. Generátory pre Q_n budú transpozície prvkov $(2i-1, 2i), \forall (1 \leq i \leq n)$.*

Poznámka: Častejšie sa stretávame s definíciou Q_n pomocou binárnych vektorov. Vrcholy označíme binárnymi číslami dĺžky n a hrana je medzi dvoma z nich práve vtedy, ak sú odlišné len v jednom bite.

Vezmime namiesto permutácie binárne číslo, ktoré vyjadruje vzťah medzi $(2i-1)$ -vým prvkom permutácie a $2i$ -tym nasledovne. Ak $(2i-1)$ -vý prvok permutácie je menší ako $2i$ -ty $\forall (1 \leq i \leq n)$, tak dajme na pozíciu i nulu, inak jednotku. Takto dostaneme binárny vektor dĺžky n . Ak vezmeme hranu medzi dvoma vrcholmi tvorenú pomocou generátora $(2i-1, 2i)$, tak zmení permutáciu len na pozíciách $(2i-1)$ a $2i$. Vymení tieto prvky. Z binárneho vektora pomocou aplikovania tohto generátora dostaneme vektor, ktorí sa bude líšiť práve na i -tom mieste. Definície sú teda ekvivalentné a preto sa budeme ďalej vyjadrovať pomocou zaužívannej terminológie binárnych vektorov.

Veta 2.5 *Vlastnosti grafu Q_n :*

- a) *je n -regulárny graf*
- b) *má 2^n vrcholov a $n \cdot 2^{n-1}$ hrán*

¹z dôvodu existencie toho istého g

c) je vrcholovo symetrický

d) je bipartitný

Dôkaz: a) Z každého vrchola vychádza práve n hrán, ktoré idú do vrcholov získaných aplikovaním niektorého z n generátorov. Preto je Q_n n -regulárny graf.

b) Triviálny dôsledok.

c) Každý Cayleyho graf je vrcholovo symetrický [1].

d) Uvažujme počet jednotiek v binárnom vektore. Hranou sú spojené vždy vrcholy, ktoré sa líšia práve v jednej jednotke, teda majú inú paritu. Rozdelíme vrcholy podľa parity počtu jednotiek. Graf je bipartitný, lebo neexistuje hrana medzi prvkami jednej z týchto množín.

Definícia 2.6 *Definujme n -rozmerný Star graf S_n ako neorientovaný Cayleyho graf. Vrcholy budeme označovať permutáciami n čísel $(1 \dots n)$ a hrana medzi dvoma vrcholmi bude práve vtedy, ak dostaneme jednu permutáciu výmenou prvého prvku permutácie s i -tým. Formálnejšie povedané, nech $a, b \in V$, ak pomocou generátora $\exists g \in \mathcal{S}$ dostávame $ag = b$, tak medzi vrcholmi a, b je v grafe S_n hrana. Generátory pre S_n budú transpozície prvkov $(1, i), \forall (2 \leq i \leq n)$.*

Veta 2.7 *Vlastnosti grafu S_n :*

a) je $(n - 1)$ -regulárny graf

b) má $n!$ vrcholov a $\frac{n!(n-1)}{2}$ hrán

c) je vrcholovo symetrický

d) je bipartitný

Dôkaz: a) Z každého vrchola vychádza práve $n - 1$ hrán, ktoré idú do vrcholov získaných aplikovaním niektorého z $n - 1$ generátorov. Preto je S_n $(n - 1)$ -regulárny graf.

b) Triviálny dôsledok.

c) Každý Cayleyho graf je vrcholovo symetrický [1].

d) Vychádzame z toho, že každá permutácia sa dá rozdeliť na transpozície, t.j. cykly dĺžky dva. Z počtu transpozícií určíme paritu permutácie. Vieme, že z vrchola v sa dostaneme do vrchola u pomocou vynásobenia jednou transpozíciou. Teda zmeníme paritu permutácie. Každá hrana mení paritu permutácie, čiže hrany sú vždy len medzi párnymi a nepárnymi permutáciami, čím dostávame rozdelenie podľa parity permutácie vrchola. Máme teda dve množiny vrcholov, ktoré sú rovnako veľké $\frac{n!}{2}$ a vieme, že neexistuje hrana v grafe S_n , ktorá by spájala dva vrcholy z tej istej množiny.

Definícia 2.8 Pre n -rozmerný Pancake graf P_n bude definícia podobná ako pre Star graf. P_n sa bude líšiť od S_n iba množinou hrán. Hrana medzi dvoma vrcholmi bude práve vtedy, ak dostaneme jednu permutáciu výmenou prvých i prvkov, $[12 \dots (i - 1)i(i + 1) \dots n]$ dostávame permutáciu $[i(i - 1) \dots 21(i + 1) \dots n]$.

Poznámka: Napríklad výmenou 5 prvkov v permutácii $[3154276]$ dostávame permutáciu $[2451376]$. Preto sú tieto vrcholy v grafe P_7 susedné.

Veta 2.9 Vlastnosti grafu P_n :

a) má $n!$ vrcholov a $\frac{n! \cdot (n-1)}{2}$ hrán

b) je $(n - 1)$ -regulárny graf

c) je vrcholovo symetrický

d) pre $n > 3$ nie je bipartitný

Dôkaz je podobný ako pre S_n . Snáď len doplníme, že v grafe P_n , kde $n > 3$, existuje cyklus dĺžky 7. Napríklad cyklus, kde používame generátory, ktoré vymieňajú i prvkov, v takomto poradí $i = 2, 3, 4, 3, 4, 2, 4$.

V nasledujúcej kapitole uvedieme doposiaľ dosiahnuté výsledky decyklačných množín na týchto grafových štruktúrach.

Kapitola 3

Známe výsledky na Q_n , S_n a P_n grafoch

3.1 Regulárne grafy - dolná hranica

Veta 3.1 *Majme r -regulárny graf $G = (V, E)$. Pre ľubovoľnú decyklačnú množinu V' , nech $c_{V'} > 0$ je počet komponentov súvislosti acyklického podgrafu $G' = (V \setminus V', E)$ indukovaného množinou vrcholov $V \setminus V'$ a $\delta_{V'}$ počet hrán, ktoré sú tvaru $e = (u, v)$, kde $u, v \in V'$. Potom platí*

$$\nabla(G) = \min_{V'} \frac{|E| - |V| + c_{V'} + \delta_{V'}}{r - 1} \quad (3.1.1)$$

Dôkaz: Vychádzajme z toho, že v grafe G' máme $|V| - |V'| - c$ hrán, pretože je to les s c komponentmi súvislosti. Ďalej $\forall v \in V'$ máme v grafe G maximálne r hrán $e = (u, v)$ takých, že $u \in V \setminus V'$. Ak niektoré dva vrcholy z decyklačnej množiny sú v grafe G susedné, tak musíme odpočítať počet takýchto dvojíc, lebo sme ich započítali 2-krát. Všetkých hrán v grafe G bude

$$|E| \leq |V| - |V'| - c + |V'| \cdot r - \delta$$

Z toho dostávame decyklačnu množinu veľkosti aspoň

$$\nabla(G) = |V'| \geq \frac{|E| - |V| + c + \delta}{r - 1}$$

Konkrétne pre hyperkocky je známa dolná hranica získaný týmto postupom [7]. Pre Q_n je to

$$\nabla(Q_n) \geq 2^{n-1} - \frac{2^{n-1} - 1}{n - 1}$$

Keď uvažujeme Star a Pancake grafy, tak $|V| = n!$, $|E| = \frac{n!(n-1)}{2}$, $r = n - 1$ a pre najhorší možný prípad $c = 1$ a $\delta = 0$. Z toho dostávame mohutnosť decyklačnej množiny aspoň

$$\nabla(S_n) \geq \frac{n!}{2} \cdot \frac{n-3}{n-2} + \frac{1}{n-2}$$

3.2 Hyperkocka - horná hranica

Pre hyperkocky poznáme hornú hranicu, ktorá je blízka dolnej hranici.

Veta 3.2 *Nech $n \geq 2$, v hyperkocke Q_n vieme skonštruovať decyklačnú množinu mohutnosti*

$$\nabla(Q_n) \leq 2^{n-1} - \frac{2^{k-1}}{2(k-1)}$$

Množinu konštruujeme pomocou 4-separovateľnej množiny a vrcholov jednej parity. Podrobnejší dôkaz je v [7]. Presnejšia horná hranica bola publikovaná v [16], avšak nám bude stačiť horeuvedený výsledok.

3.3 Star - horná hranica

Pre decyklačnú množinu Star grafov poznáme hornú hranicu, ktorý nás nabáda k podobnej konštrukcii aj u Pancake grafov, preto ho popíšeme podrobnejšie. Publikovaný bol v [19], ale uvedieme trochu odlišnú konštrukciu, ktorá bude pre nás výhodnejšia. Najprv si zdefinujeme pojem dominujúcej množiny.

Definícia 3.3 *Majme jednoduchý graf $G = (V, E)$ bez slučiek a násobných hrán. Množinu vrcholov $D \subseteq V$ nazveme dominujúcou, ak $\forall e \in E, e = (u, v), u \in D$ alebo $v \in D$. Množina vrcholov D je perfektná dominujúca množina, ak je dominujúca a navyše platí, že $\nexists e = (u, v) \in E$ taká, že $u \in D$ a zároveň $v \in D$. Inak povedané, graf indukovaný na perfektnej dominujúcej množine neobsahuje žiadne hrany.*

Vychádzame z dekompozície množiny vrcholov V na množiny V_1, V_2, \dots, V_n . Každá množina V_i obsahuje vrcholy, ktoré majú na i -tej pozícii číslo 1. Takto dostávame perfektnú dominujúcu množinu V_1 a $n - 1$ kópií Star grafov stupňa $n - 1$, ktoré budú indukovanými grafmi na množinách V_2, \dots, V_n .

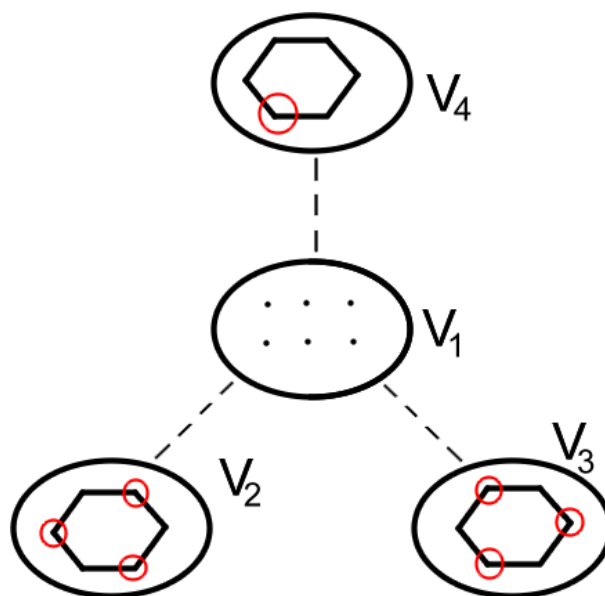
Keď zvolíme v grafe indukovanom vrcholmi V_n decyklačnú množinu a k nej pridáme polovicu vhodne zvolených vrcholov z množín V_2, \dots, V_{n-1} , tak dostávame graf bez cyklov. Jednoduchým zdôvodnením je, že graf S_n je bipartitný, a keď zvolíme množinu vrcholov rovnakej parity z V_2, \dots, V_{n-1} dostávame izolované vrcholy. Tieto vrcholy sa spoja s vrcholmi z množiny V_1 , čím vzniknú stromy. Vieme, že každý takýto strom môže byť spojený s vrcholmi z množiny V_n práve jednou hranou. Preto ich pripojíme najviac jednou hranou k decyklovanému grafu na V_n , takže dostávame acyklický graf. Takto sme zostrojili decyklačnú množinu pre S_4 na obrázku 3.1. Vyjadríme teraz tento postup v číslach.

Decyklačná množina grafu S_n sa skladá z decyklačnej množiny grafu S_{n-1} a z polovice vrcholov $n - 2$ kópií grafov S_{n-1} .

$$\nabla(S_n) \leq \nabla(S_{n-1}) + \frac{(n-1)! \cdot (n-2)}{2}$$

alebo ako je výsledok publikovaný v [19]

$$\nabla(S_n) \leq \frac{1}{2} \left(n! - (n-1)! - (n-2)! - \dots - 2! \right) - 1$$

Obr. 3.1: Výber decyklačnej množiny pre S_4

3.4 Experimenty

Zatiaľ nebola publikovaná žiadna horná hranica pre decyklačnú množinu Pancake grafov. Zaujímalo nás, či sa reálne hodnoty blížia k dolnej hranici ako u Star grafov. Vychádzajúc z konštrukcie dolnej hranice vieme, že vrcholy, ktoré vyberáme do decyklačnej množiny, by nemali byť susedné. Takto sa nám podarí vo vzorci 3.1.1 minimalizovať počet hrán medzi vrcholmi decyklačnej množiny $\delta_{V'}$.

Preto sme vyskúšali spustiť jednoduchý greedy algoritmus, ktorý funguje nasledovne. Vyberie niektorý z vrcholov s najväčším stupňom a následne ho odstráni. Tieto kroky opakuje toľkokrát, koľko chceme vybrať vrcholov do decyklačnej množiny. Následne prehľadávaním do hĺbky otestuje, či je graf na ostatných vrcholoch acyklický. Pomocou tohto algoritmu sme dosiahli mohutnosti decyklačných množín prekvapujúco blízke dolnej hranici. Presné čísla sú uvedené v tabuľke 3.1.

Len pre porovnanie sme spustili tento algoritmus na Star grafe a dostali sme

n	4	5	6	7	8
greedy pre P_n	7	41	297	2 441	21 550
greedy pre S_n	7	41	300	2 455	21 580
dolná hranica	7	41	271	2 017	16 801

Tabuľka 3.1: výsledky greedy algoritmu

v rovnakom čase porovnateľné hodnoty.¹ Z toho vieme povedať, že pre väčšie n je tento algoritmus pomerne neefektívny. I napriek tomu sme dosiahli čísla, rovné dolnej hranici pre P_4 a P_5 , teda najlepšie možné ako pre Pancake, tak aj pre Star graf. Keď sa lepšie pozrieme na decyklačné množiny pre P_6 a P_7 získané týmto algoritmom, vidíme, že neobsahujú ani polovicu zo všetkých vrcholov. Aj tieto výsledky nás nabádajú k bližšiemu preskúmaniu hornej hranice mohutnosti decyklačnej množiny na Pancake grafoch.

¹nachádzajú sa tiež v tabuľke 3.1

Kapitola 4

Pancake - horná hranica

V tejto kapitole sa budeme zaoberať konštrukciou decyklačnej množiny na Pancake grafoch. Preformulujeme najprv problém nájdenia minimálnej decyklačnej množiny na duálny problém konštrukcie acyklického podgrafu maximálneho vzhľadom na počet vrcholov. Tento pohľad nám zjednoduší prácu a v závere kapitoly iba prepočítame výsledky na mohutnosť decyklačnej množiny. Ďalej tu budeme uvádzať rôzne postupy pri konštrukcii acyklického podgrafu. Budeme porovnávať teoretické výsledky s výsledkami pri reálnom spustení týchto algoritmov.

Definícia 4.1 *Majme jednoduchý graf $G = (V, E)$ bez slučiek a násobných hrán. Ak je množina vrcholov $V' \subseteq V$ decyklačnou množinou na grafe G , tak indukovaný graf na množine vrcholov $V \setminus V'$ bude acyklický. Označíme si ho \bar{G} . Ak $|V'|$ je najmenšia zo všetkých možných, tak \bar{G} nazveme maximálnym acyklickým podgrafom grafu G . Dohodnime sa, že $|\bar{G}| = |V| - |V'|$ budeme označovať počet vrcholov grafu \bar{G} .*

Vidíme, že doplnok k decyklačnej množine je počet vrcholov acyklického podgrafu a naopak. Preto nebude zložité previesť mohutnosť jednej množiny na druhú. Budeme však môcť prehľadnejšie porovnávať výsledky jednotlivých postupov.

Ešte predtým, ako sa pustíme do samotnej konštrukcie, preformulujme dolnú hranicu decyklačnej množiny pre Pancake grafy na hornú hranicu pre acyklický podgraf.

$$\begin{aligned} |V'| &\geq \frac{n!}{2} \cdot \frac{n-3}{n-2} + \frac{1}{n-2} \\ |V| - |V'| &\leq n! - \frac{n!}{2} \cdot \frac{n-3}{n-2} - \frac{1}{n-2} \\ |V| - |V'| &\leq \frac{n!}{2} \cdot \frac{n-1}{n-2} - \frac{1}{n-2} \\ |\bar{P}_n| &\leq \frac{n!}{2} + \frac{(n-1)!}{2} + (n-2)! + (n-3)! - \frac{1}{n-2} \end{aligned}$$

Pri konštrukcii acyklického podgrafu budeme vychádzať z konštrukcie, ktorú sme použili pre Star graf. O Star grafe sme vedeli, že je bipartitný a ako množinu izolovaných vrcholov sme zobrali jednu partíciu. Aby sme tento postup mohli zopakovať na Pancake grafe, budeme sa zaoberať výberom množiny izolovaných vrcholov. Vieme, že Pancake graf nie je bipartitný, preto si definujeme pojem nezávislej množiny a uvedieme príklady konštrukcie nezávislých množín na Pancake grafoch a niektorých ich častiach.

4.1 Nezávislé množiny

Definícia 4.2 *Nezávislá množina je podmnožina množiny vrcholov grafu $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$ taká, že $\forall v \in V', \forall e \in E$ platí, ak $e = (u, v)$, potom $u \notin V'$. Je to množina nesusedných vrcholov v grafe G . Nás bude zaujímať maximálna takáto množina vzhľadom na počet vrcholov. Ďalej v texte budeme používať označenie $IS(G) = |V'|$.*

Uvažujme greedy algoritmus, ktorý funguje nasledovne. Vyberie v grafe vrchol s najmenším stupňom a ten pridá do nezávislej množiny. Následne ho odstráni z grafu a taktiež všetkých jeho susedov. Tieto kroky opakuje pokiaľ nie je graf

prázdný. O nezávislej množine získanej týmto postupom môžeme vysloviť nasledujúcu vetu, ktorá je dôsledkom Turanovej vety.

Veta 4.3 *Každý graf G s N vrcholmi a M hranami obsahuje nezávislú množinu veľkosti*

$$IS(G) \geq \frac{N^2}{2M + N}$$

Pozrime sa na veľkosť nezávislej množiny získanej pomocou tohto algoritmu v Pancake grafe. Vrcholov je $N = n!$ a hrán $M = \frac{N \cdot (n-1)}{2}$. Dostávame teda

$$IS(P_n) \geq \frac{N^2}{2M + N} = \frac{N}{n-1+1} = (n-1)! \quad (4.1.1)$$

Inak povedané, pri každom výbere vrchola do nezávislej množiny odoberieme z grafu najviac n vrcholov. Toto môžeme zopakovať najviac $(n-1)!$ -krát, kým odoberieme všetky vrcholy.

Pozrime sa bližšie na nezávislú množinu Pancake grafu P_n . Rozoberme si podrobnejšie prvé tri kroky. Vieme, že v grafe $P_n, \forall n > 2$ existuje cyklus dĺžky 6. Povedzme, že chceme odobrať 3 vrcholy z cyklu dĺžky 6. Ako prvý odoberáme ľubovoľný vrchol s $n-1$ susedmi. Druhý krok bude odobranie vhodne zvoleného suseda už odobraného vrchola, teda odoberáme len $n-1$ vrcholov. V treťom kroku dostávame jeden vrchol stupňa $n-3$, ktorý nám zostal v tomto cykle.

Zhrňme si tento postup. Odobrali sme $n + n - 1 + n - 2 = 3(n-1)$ vrcholov. Ak necháme ďalej pokračovať greedy algoritmus, vždy odoberie najviac $n-1$ vrcholov, lebo bude vyberať susedov už odobraných vrcholov. Takto dostaneme nezávislú množinu mohutnosti

$$IS(P_n) \geq \frac{n!}{n-1} = n \cdot (n-2)! \quad (4.1.2)$$

Niektoré konkrétne hodnoty sme pre porovnanie rôznych prístupov zobrazili v tabuľke 4.1. Vo treťom stĺpci sú výsledky získané spustením greedy algoritmu.

n	vzorec 4.1.1	vzorec 4.1.2	greedy alg.
3	2	3	3
4	6	8	10
5	24	30	46
7	720	840	1 630
9	40 320	45 360	99 277
15	87 178 291 200	93 405 312 000	N/A

Tabuľka 4.1: počet vrcholov v nezávislej množine grafu P_n

4.2 Vhodný výber nezávislej množiny

Vráťme sa teraz ku konštrukcii acyklického podgrafu. Uvažujme rozdelenie množiny vrcholov V na V_1, V_2, \dots, V_n ako v prípade Star grafu. Aj v Pancake grafe je V_1 perfektnou dominujúcou množinou a graf indukovaný množinou vrcholov V_n je Pancake graf stupňa $n - 1$. Vezmime acyklický podgraf skonštruovaný na grafe indukovanom množinou V_n . Pridajme k nemu množinu vrcholov V_1 a nezávislú množinu vrcholov na grafe indukovanom vrcholmi z V_2, \dots, V_{n-1} . Ukážeme si tri postupy pre výber tejto nezávislej množiny, ktorými dosiahneme pomerne dobré výsledky. Tak ako v prípade Star grafu aj teraz dostávame acyklický graf.

4.2.1 Jednoduchý postup

Spravme najprv úplne triviálnu úvahu. Nezávislú množinu vrcholov na grafe indukovanom vrcholmi z V_2, \dots, V_{n-1} môžeme získať pomocou greedy algoritmu, ktorý sme uviedli v časti 4.1. Môžeme dokonca pre $n > 3$ uvažovať cyklus dĺžky 6, čím dostávame lepšie ohraničenie. Konkrétne pre podgraf indukovaný množinou vrcholov $\bigcup_{i=2}^{n-1} V_i$ je stupeň každého vrchola $n - 1$ a počet všetkých vrcholov je

$(n-1)! \cdot (n-2)$. Dostávame teda

$$IS(V_2, \dots, V_{n-1}) \geq \frac{(n-1)! \cdot (n-2)}{n-1-1} = (n-1)!$$

a vyjadríme triviálne dolné ohraničenie pre acyklický podgraf grafu P_n . Ešte musíme doplniť začiatok rekurzie $|\bar{P}_3| = 5$, lebo sme uvažovali $n > 3$.

$$\begin{aligned} |\bar{P}_n| &\geq |\bar{P}_{n-1}| + (n-1)! + (n-1)! \\ &= 5 + 2 \cdot \sum_{i=3}^{n-1} i! \\ &\asymp 2 \cdot (n-1)! + 2 \cdot (n-2)! + o((n-2)!) \end{aligned}$$

4.2.2 1. postup výberu $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$

Pozrime sa bližšie na štruktúru grafu P_n pre $n > 3$. Vrcholy budeme vyberať do nezávislej množiny pomocou vlastností špecifických pre Pancake grafy. Zatiaľ sme uvažovali iba existenciu cyklu dĺžky 6. Pozrime sa teraz lepšie na štruktúru grafu indukovaného množinou vrcholov V_{n-1} . Graf sa skladá z $n-1$ komponentov, ktoré sú kópie grafov P_{n-2} pre $n > 3$. Ak by sme sa pozreli na ostatné množiny V_i , našli by sme podobné vlastnosti. Vo všeobecnosti môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 4.4 *Ak $n > 4$ a $\lceil \frac{n}{2} \rceil < i < n$, tak sa graf indukovaný množinou vrcholov V_i skladá z $\frac{(n-1)!}{(i-1)!}$ komponentov súvislosti, ktoré majú štruktúru ako graf P_{i-1} . Ďalej môžeme povedať, že graf indukovaný na $\bigcup_i V_i$ je rovnaký, ako zjednotenie grafov indukovaných na jednotlivých množinách V_i .*

Neformálne povedané, množina vrcholov $\bigcup_i V_i, \lceil \frac{n}{2} \rceil < i < n$ indukuje graf, ktorý má komponenty malé Pancake grafy P_{i-1} . Druhá časť vety hovorí o tom, že neexistujú hrany medzi množinami vrcholov V_i . Využijeme štruktúru Pancake grafu a budeme konštruovať nezávislú množinu pre Pancake grafy indukívne.

Dôkaz: Pozrime sa na ľubovoľnú permutáciu z množiny V_i . Tá bude mať na i -tom mieste prvok 1. Pomocou ľubovoľného generátora, ktorý nám vymení menej ako i prvkov v permutácii, dostávame permutáciu taktiež z V_i . Použitím generátora, ktorý vymieňa i a viac prvkov, dostaneme permutáciu z množiny V_j , kde $j \neq i$. Predpokladali sme $i > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, aby sme pri otčení prvých $(2i - 1)$ prvkov nedostali permutáciu z tej istej množiny V_i . Ak teda použijeme ľubovoľný generátor na permutáciu z V_i , kde $i > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, dostávame buď permutáciu z V_i , alebo permutáciu, kde prvok 1 bude na mieste menšom ako $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Použitím $i - 2$ generátorov, ktoré otáčajú len prvých $i - 1$ prvkov, dostávame Pancake graf stupňa $i - 1$. Vzhľadom na to, že vrcholov v každej množine V_i je $(n - 1)!$, tak dostávame $\frac{(n-1)!}{(i-1)!}$ komponentov súvislosti, ktoré majú štruktúru ako graf P_{i-1} .

Dôkaz druhej časti je jednoduchý. Predpokladali sme $i > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, preto neexistuje žiaden generátor, ktorým dostaneme permutáciu z množiny V_j , kde $j \neq i$ a zároveň $j > \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Teraz vieme, že graf indukovaný na množine vrcholov $\bigcup_i V_i$, kde $\lceil \frac{n}{2} \rceil < i < n$, sa skladá z malých Pancake grafov. Ak na každom vyberieme nezávislú množinu, tak dostávame nezávislú množinu na celom grafe P_n .

$$\begin{aligned} IS(V_2, \dots, V_{n-1}) &\geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n-1} IS(P_{i-1}) \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \\ &= (n-1)! \cdot \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}^{n-2} \frac{IS(P_i)}{i!} \end{aligned}$$

Tento postup je však veľmi nevýhodný pre grafy P_n , kde n je nepárne. Do nezávislej množiny nezahrnieme žiaden vrchol z V_i , kde $i = \frac{n+1}{2}$, ktorej nevychádzajú hrany do žiadnej z množín $V_j, j > i$. Ak sa pozrieme na štruktúru grafu indukovaného na množine V_i , vidíme, že sa skladá z grafov P_{i-1} , ktoré majú medzi sebou

nejaké hrany. Tieto hrany sú tvorené generátorom permutujúcim všetky prvky. Každá kópia má $(i - 1)!$ susedných kópií, lebo z každého vrchola vychádza hrana do inej kópie. Vytvoríme graf G_k , v ktorom zoberieme za vrcholy všetky kópie grafov P_{i-1} a hrana bude medzi dvoma vrcholmi práve vtedy, ak bola v pôvodnom grafe hrana medzi niektorými vrcholmi týchto kópií. Tento graf bude bipartitný. Ukážeme na príklade prečo.

Zoberme si $n = 7$ a rozdelme čísla $2 \dots 7$ na dve rovnako veľké skupiny. Bez ujmy na všeobecnosti zoberme napríklad skupiny 235 a 467. Permutácie, ktoré majú jednu skupinu čísel v permutácii pred číslom 1, budú tvoriť kópie grafov P_3 . Z nich budú vychádzať hrany do kópií grafov P_3 , ktoré budú mať pred číslom 1 v permutácii druhú skupinu čísel. Všetky tieto kópie budú tvoriť jeden súvislý komponent grafu indukovaného na množine vrcholov V_i . Takýchto komponentov tam bude viac. Podstatné je, že ak pre každý takýto komponent vytvoríme graf G_k , tak tento graf bude bipartitný. Jeho partície budú tvoriť permutácie s rovnakou množinou prvkov, ktoré sa nachádzajú v permutácii pred číslom 1.

Ak budeme vyberať nezávislé množiny vždy len v tých kópiách grafov, ktoré sú v rovnakej partícii, nemôže sa nám stať, že by sme vybrali susedné vrcholy. K nezávislej množine vieme teda pridať ešte polovicu vrcholov z tých, ktoré by sme získali, keby neboli komponenty pospájané. Pribudne nám teda v nezávislej množine grafu P_n , ak n je nepárne, člen $\frac{IS(P_i)}{2 \cdot (i-1)!}$, kde $i = \frac{n+1}{2}$.

Zostrojíme tabuľku 4.2 s hodnotami mohutností nezávislých množín pre takýto spôsob, pričom dosadíme za $IS(P_i)$ hodnoty z tabuľky 4.1.

Vyjadriť ešte asymptoticky, aký veľký bude acyklický podgraf ak použijeme $IS(P_i) \geq n \cdot (n - 2)!$

n	nezavislá množina $IS(P_i)$ podľa		
	vzorca 4.1.1	vzorca 4.1.2	greedy alg.
4	3	3	3
5	14	18	18
6	70	100	110
7	444	600	750
9	25 584	31 584	50 584
11	2 342 880	2 756 160	5 175 610
15	57 424 792 320	64 210 648 320	N/A

Tabuľka 4.2: hodnoty $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$ získané prvým postupom

$$\begin{aligned}
|\bar{P}_n| &\geq |\bar{P}_{n-1}| + (n-1)! + (n-1)! \cdot \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}^{n-2} \frac{1}{i-1} \\
&\asymp (n-1)! + o((n-1)!)
\end{aligned}$$

4.2.3 2. postup výberu $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$

Pozrime sa na iný postup, akým môžeme vyberať vrcholy do nezávislej množiny. Uvažujme všetky permutácie, ktoré majú jeden konkrétny prvok v permutácii vždy pred prvkom 1. Označme si tento prvok X . Budú to permutácie tvaru $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$, kde $X = a_j, 1 \leq j < i < n$. Dve takéto permutácie budú susedné len vtedy, keď sú v tej istej množine V_i a nachádzajú sa v tej istej kópii grafu P_{i-1} . Vyplýva to z toho, že ak chceme, aby zostal prvok X na pozícii menšej ako i , tak môžeme použiť len tie generátory, ktoré vymieňajú menej ako i prvkov. Tiež môžeme povedať, že v oboch permutáciách sú postupnosti prvkov a_{i+1}, \dots, a_n rovnaké.

Vyberme preto z každej množiny V_i vrcholy tvaru $(a_1, \dots, a_{i-2}, X, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$,

kde X je náš pevne zvolený prvok. Teraz vidíme, že týchto vrcholov je toľko, koľko je komponentov súvislosti, z ktorých budeme vyberať nezávislú množinu. To je v grafe indukovanom množinou V_i presne $(n-2)!/(i-2)!$. Ak vyberieme v každom z týchto komponentov nezávislú množinu a sčítame $\forall i, 1 < i < n$, dostávame nezávislú množinu na $\bigcup_{i=2}^{n-1} V_i$

$$\begin{aligned} IS(V_2, \dots, V_{n-1}) &\geq \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(i-2)!} \cdot IS(P_{i-1}) \\ &= (n-2)! \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \frac{IS(P_i)}{(i-1)!} \end{aligned}$$

Znova dosadíme hodnoty z tabuľky 4.1 a vytvoríme tabuľku 4.3.

n	nezávislá množina $IS(P_i)$ podľa		
	vzorca 4.1.1	vzorca 4.1.2	greedy alg.
4	3	4	4
5	18	21	21
6	96	116	124
7	600	730	845
9	35 280	42 588	57 400
11	3 265 920	3 889 296	5 879 637
15	80 951 270 400	94 048 007 040	N/A

Tabuľka 4.3: hodnoty $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$ získané druhým postupom

A aj pre tento postup vyjadríme asymptoticky, aký veľký bude acyklický podgraf, ak použijeme $IS(P_i) \geq n \cdot (n-2)!$

$$\begin{aligned}
|\bar{P}_n| &\geq |\bar{P}_{n-1}| + (n-1)! + (n-2)! \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \frac{IS(P_i)}{(i-1)!} \\
&= |\bar{P}_{n-1}| + (n-1)! + (n-2)! \cdot \left(1 + \sum_{i=2}^{n-2} \frac{i \cdot (i-2)!}{(i-1)!} \right) \\
&= |\bar{P}_{n-1}| + (n-1)! + (n-2)! \cdot \left(1 + \sum_{i=2}^{n-2} \left(1 + \frac{1}{i-1} \right) \right) \\
&= |\bar{P}_{n-1}| + (n-1)! + (n-2)! \cdot \left(n-2 + \sum_{i=2}^{n-2} \frac{1}{i-1} \right) \\
&= |\bar{P}_{n-1}| + (n-1)! + (n-1)! + (n-2)! \cdot \sum_{i=2}^{n-3} \frac{1}{i} \\
&\asymp 2 \cdot (n-1)! + (1 + H_{n-3}) \cdot (n-2)! + o((n-2)!) \\
&\asymp 2 \cdot (n-1)! + (1 + \ln(n-3) + \gamma) \cdot (n-2)! + o((n-2)!)
\end{aligned}$$

V poslednom kroku sme dosadili za harmonické číslo H_{n-3} známy výsledok z asymptotickej analýzy [9].

4.3 Zhrnutie $\nabla(P_n)$

Zhrňme na záver tejto kapitoly všetky postupy a porovnajme výsledky, ktoré sme uviedli vyššie. Do tabuľky 4.4 prepíšeme hodnoty získané všetkými postupmi a doplníme ju ešte o hodnoty, ktoré sme dostali po spustení greedy algoritmu opísaného v časti 4.1 na celú množinu $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$.

Na presné vyjadrenie decyklačnej množiny si zvolíme druhý postup s hodnotou $IS(P_n) \geq n \cdot (n-2)!$, aj keď pri porovnaní s ostatnými výsledkami vidíme, že ani zďaleka nedosahuje hranicu greedy algoritmu.

n	trivialne	prvý postup vzorec 4.1.2	druhý postup		greedy
			vzorec 4.1.2	greedy	
4	6	3	4	4	6
5	24	18	21	21	30
6	120	100	116	124	190
7	720	600	730	845	1 247
9	40 320	31 584	42 588	57 400	81 406
11	3 628 800	2 756 160	3 889 296	5 879 637	
15	87 178 291 200	64 210 648 320	94 048 007 040	N/A	

Tabuľka 4.4: porovnanie hodnôt $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$ pre rôzne postupy

$$\begin{aligned}
\nabla(P_n) &\leq \nabla(P_{n-1}) + (n-1)! \cdot (n-2) - \left((n-1)! + (n-2)! \cdot \sum_{i=2}^{n-3} \frac{1}{i} \right) \\
&= \nabla(P_{n-1}) + (n-1)! \cdot (n-3) - (n-2)! \cdot \sum_{i=2}^{n-3} \frac{1}{i} \\
&\asymp n! - 2 \cdot (n-1)! - (1 + \ln(n-3) + \gamma) \cdot (n-2)! - o((n-2)!)
\end{aligned}$$

Uvedieme ešte jednu tabuľku pre ujasnenie rozdielov, ktoré dostaneme pri použití rôznych postupov. V tabuľke 4.5 uvedieme dolnú hranicu, náš výsledok pre hornú hranicu, výsledky získané greedy algoritmom pre výber nezávislej množiny na grafe indukovanom množinou vrcholov $IS(V_2, \dots, V_{n-1})$ a v poslednom stĺpci výsledky z tabuľky 3.1 získané greedy algoritmom pre výber decyklačnej množiny.

n	dolná hranica	horná hranica	greedy pre IS	greedy pre ∇P_n
4	7	9	7	7
5	41	60	49	41
6	271	424	339	297
7	2 017	3 294	2 692	2 441
9	155 521	267 942	224 289	N/A
11	17 740 801	31 554 102	N/A	N/A

Tabuľka 4.5: porovnanie hodnôt ∇P_n pre rôzne postupy

Kapitola 5

Záver

Pri Star grafoch a Hyperkockách je dolná hranica mohutnosti decyklačnej množiny blízka hornej. Ak sa pokúsime vyjadriť tieto hodnoty asymptoticky, zisťujeme, že obe hranice sú o niečo menšie ako polovica vrcholov daného grafu. To samozrejme vyplýva z bipartitnosti grafov oboch tried grafov.

Dolná hranica decyklačnej množiny pre Pancake grafy má taktiež menší počet vrcholov ako je polovica a navyše sme ju dosiahli v grafoch P_4 a P_5 , i keď nie sú bipartitné. Preto sme sa rozhodli pre skúmanie tejto oblasti. Z výsledkov získaných spustením greedy algoritmu pre hľadanie decyklačnej množiny sme očakávali veľkosť množiny asymptoticky blížiacu sa polovici vrcholov.

Ukazuje sa, že postup, ktorý sme použili na konštrukciu decyklačnej množiny, môže byť ešte zlepšený v prípade upresnenia počtu vrcholov, ktoré spadajú do nezávislej množiny grafu indukovaného na množine $\bigcup_{i=2}^{n-1} V_i$. Na druhej strane, ak dosadíme do našej konštrukcie výsledky, ktoré sme dosiahli spustením greedy algoritmu pre nájdenie nezávislej množiny, vidíme, že stále nedosahujeme hornú hranicu menšiu ako polovica všetkých vrcholov.

Literatúra

- [1] S. B. Akers, B. Krishnamurthy: *A Group theoretic model for symmetric interconnection networks*. IEEE Transactions on Computers, Vol. 38, 555-566, 1989.
- [2] S. B. Akers, D. Harel, B. Krishnamurthy: *The star graph: An attractive alternative to the n -cube*. Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, St. Charles, Illinois, 393-400, 1987.
- [3] V. Bafna, P. Berman, T. Fujito: *A 2-approximation algorithm for the undirected feedback vertex set problem*. SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 12, 289-297, 1999.
- [4] L. W. Bienenke, R. C. Vandell: *Decycling Graphs*. J. Graph Theory 25, 57-77, 1997.
- [5] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, P. Kanellopoulos: *New Bounds on the Size of the Minimum Feedback Vertex Set in Meshes and Butterflies*. Information Processing Letters, Vol. 83, 275-280, 2002.
- [6] G. Fertin, E. Godard, A. Raspanz: *Minimum feedback vertex set and acyclic coloring*. Information Processing Letters, Vol. 84, 131-131, 2002.
- [7] R. Focardi, F. L. Luccio, D. Peleg: *Feedback vertex set in hypercubes*. Information Processing Letters 76, 1-5, 2000.

- [8] M. R. Garey, D. S. Johnson: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. Freeman, San Francisco, CA, 1979.
- [9] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete mathematics: a foundation for computer science*. Addison-Wesley Longman Publishing Co.,Inc., Boston, MA, USA, 1989.
- [10] M. S. Chang, Ch. H. Lin, Ch. M. Lee: *New upper bounds on feedback vertex numbers in butterflies*. Information Processing Letters, Vol. 90, 279-285, 2004.
- [11] R. Kráľovič, P. Ružička: *Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks*. Information Processing Letters, Vol. 86, 191-196, 2003.
- [12] Y. D. Liang: *On the feedback vertex set in permutation graphs*. Information Processing Letters, Vol. 52, 123-129, 1994.
- [13] Y. D. Liang, M. S. Chang: *Minimum Feedback Vertex Set in Cocomparability and Convex Bipartite Graphs*. Acta Informatica, Vol. 34, 337-346, 1997.
- [14] F. L. Luccio: *Almost Exact Minimum Feedback Vertex Set in Meshes and Butterflies*. Information Processing Letters, Vol. 66, 59-64, 1998.
- [15] F. L. Luccio, J. F. Sibeyn: *Feedback vertex sets in mesh-based networks*. Theoretical Computer Science, Vol. 383, 86-101, 2007.
- [16] D. A. Pike: *Decycling hypercubes*. Graphs and Combinatorics 19, 547-550, 2003.
- [17] Y. Suzuki, K. Kaneko: *Minimum Feedback Node Sets in Trivalent Cayley Graphs*. IEICE Trans. Information and Systems, Vol. E86-D, 1634-1636, 2003.
- [18] C. Wang, E. L. Lloyd, M. L. Sofra: *Feedback Vertex Sets and Cyclically Reducible Graphs*. Journal of the ACM, Vol. 32, 296-313, 1985.

- [19] F. H. Wang, Y. L. Wang, J. M. Chang: *Feedback Vertex Sets in Star Graphs*.
Information Processing Letters, Vol. 89, 203-208, 2004.