

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITY KOMENSKÉHO  
BRATISLAVA**

---



**Bipartizujúce párenia v kubických grafoch**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

AUTOR: JURAJ ZEMIANEK

VEDÚCI DIPLOMOVEJ PRÁCE: PROF. RNDR. MARTIN ŠKOVIERA, PHD.

BRATISLAVA, MÁJ 2009

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**  
**KATEDRA INFORMATIKY**

---



**Bipartizujúce párenia v kubických grafoch**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

ŠTUDIJNÝ ODBOR: 9.2.1 INFORMATIKA

AUTOR: JURAJ ZEMIANEK

VEDÚCI DIPLOMOVEJ PRÁCE: PROF. RNDR. MARTIN ŠKOVIERA, PHD.

BRATISLAVA, MÁJ 2009

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, máj 2009

---

Juraj Zemianek

Ďakujem môjmu diplomovému vedúcemu Prof. RNDr. Martinovi Škovierovi PhD. za výber zaujímavej témy, za cenné rady a pripomienky pri vypracovávaní tejto diplomovej práce. Chcel by som sa tiež poďakovať mojej rodine za podporu počas štúdia.

# Abstrakt

Bipartizujúce párenia v kubických grafoch sú jedným z prístupov, ako nájsť v grafe dvojité pokrytie cyklami a nikde nulový 5-tok. K tomu je potrebné nájsť k grafu dominujúcu kružnicu a k nej dve dizjunktné bipartizujúce párenia. Fleischner (2002) vyslovil hypotézu, že pre každý snark a jeho dominujúcu kružnicu sa dá takáto dvojica párení nájsť. Hoffmann-Ostenhof (2007) hypotézu vyvrátil a vznikla nová, ktorá je slabším tvrdením predošlej.

V diplomovej práci sa podrobne zaoberáme bipartizujúcimi páreniami. Podrobne analyzujeme definíciu a ilustrujeme ju na príklade. Ďalej ukážeme, ako nájsť v grafe nikde nulový 5-tok a dvojité pokrytie cyklami, keď poznáme dominujúcu kružnicu a k nej dve dizjunktné bipartizujúce párenia. V experimentálnej časti preskúmame pomocou programu, do akej miery platí pôvodná hypotéza o nájdení dvoch bipartizujúcich párení na potenciálnych kontrapríkladoch (snarkoch) do 30 vrcholov a aká veľká je sila zmenenej hypotézy.

*Kľúčové slová:* Bipartizujúce párenie, Dominujúca kružnica, Snark, Dominating Cycle Conjecture, Sabidussi Compatibility Conjecture, Cycle Double Cover Conjecture, Bipartizing Matchings Conjecture, Nowhere-zero 5-flow Conjecture.

# Obsah

1. Úvod.....	8
1.1.Základné pojmy.....	9
1.2.Dominujúca kružnica .....	9
1.3.Toky .....	9
1.4.Rozklad a pokrytie grafu.....	9
1.5.Homeomorfizmus grafov.....	10
2. Bipartizujúce párenie.....	11
2.1.Definícia bipartizujúceho párenia .....	11
2.2.Kubické grafy s dominujúcou kružnicou .....	12
2.3. Súvis medzi kubickými a eulerovskými grafmi .....	14
3. Súvis s tokmi v kubických grafoch .....	19
3.1.Základné pozorovania a postupy.....	19
3.1.1. Taitovo farbenie a rozklad grafu na 2-faktory .....	19
3.1.2. Rozdelenie na dve dizjunktné bipartizujúce párenia.....	20
3.1.3. Rozklad homeomorfných grafov na 2-faktory .....	22
3.1.4. Veta o nikde nulovom 6-toku.....	23
3.2.Dominujúca kružnica ako hamiltonovská.....	23
3.2.1. Kubický graf je bipartitný .....	23
3.2.2. Kubický graf nie je bipartitný .....	24
3.3.Dominujúca kružnica ako nehamiltonovská.....	28
3.3.1. Homeomorfný kubický graf nie je bipartitný.....	28
3.3.2. Homeomorfný kubický graf je bipartitný .....	34
4. Súvis s hypotézou dvojitého pokrytia cyklami .....	36
4.1.Hypotéza dvojitého pokrytia cyklami .....	36
4.2.Dve dizjunktné bipartizujúce párenia a 5-CDC .....	37
4.2.1. Popis triedy kubických grafov pre 5-CDC.....	37
4.2.2. Nájdenie 5-dvojitého pokrytia cyklami .....	37
4.2.3. Poznámka k originálnemu článku .....	39
4.3.Súvis so Sabidussiho hypotézou kompatibility.....	39
4.4.Ukážka na konkrétnom príklade.....	40
5. Hypotézy o bipartizujúcich páreniach .....	45
5.1.Pôvodná Hypotéza o bipartizujúcich páreniach.....	45
5.2.Zmenená Hypotéza o bipartizujúcich páreniach.....	46
6. Experimentálna časť .....	47
6.1.Cieľ experimentu .....	47
6.2.Popis vstupných dát .....	47
6.3.Popis výstupných dát .....	48
6.4.Algoritmus na overenie zmenenej BMC.....	49
6.5.Algoritmus na nájdenie dominujúcej kružnice.....	49

6.5.1. Algoritmus do šírky .....	49
6.5.2. Výnimočné hrany pre 1 vidlu .....	51
6.5.3. Výnimočné hrany pre 2 vidly .....	51
6.5.4. Výnimočné hrany pre 3 vidly .....	53
6.5.5. Iteratívne vyhľadávanie dominujúcich kružníc .....	55
6.6. Algoritmus na nájdenie 2DBP .....	55
6.7. Popis programu na nájdenie dominujúcej kružnice .....	57
6.8. Popis programu na nájdenie 2DBP .....	59
6.9. Časové a pamäťové zložitosti algoritmov .....	62
6.9.1. Zložitosť pri hľadaní dominujúcej kružnice .....	62
6.9.2. Zložitosť pri hľadaní 2DBP .....	63
6.10. Realizácia a výsledky experimentu .....	64
6.10.1. Grafy s 18 vrcholmi.....	65
6.10.2. Grafy s 20 vrcholmi.....	65
6.10.3. Grafy s 22 vrcholmi.....	66
6.10.4. Grafy s 24 vrcholmi.....	67
6.10.5. Grafy s 26 vrcholmi.....	68
6.10.6. Grafy s 28 vrcholmi.....	68
6.10.7. Grafy s 30 vrcholmi.....	70
6.10.8. Zhrnutie výsledkov .....	72
Záver .....	73
Literatúra .....	74

# Kapitola 1

## Úvod

Hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami hovorí, že v každom bezmostovom grafe existuje taký systém kružníc, že každá hrana je obsiahnutá v práve dvoch kružniciach zo systému. Hypotéza sa objavila na prelome 60./70.-tych rokov 20. storočia a dnes sa považuje za jeden z najdôležitejších otvorených problémov v teórii grafov. Skúmali sa viaceré prístupy k problému. Je známe, že na riešenie tohto problému postačuje uvažovať snarky – súvislé kubické grafy s chromatickým indexom 4. Jeden z možných prístupov riešenia problému dvojitého pokrytia cyklami je cez bipartizujúce párenia v kubických grafoch [4]. Ukázalo sa, že ak sa pre daný kubický graf nájde dominujúca kružnica taká, že nájdeme potom dve dizjunktné bipartizujúce párenia, vieme nájsť dvojité pokrytie cyklami daného grafu. Navyše sme potom schopní riešiť aj problém nájdenia nikde nulového 5-toku v tomto grafe.

Kvôli tomuto je dosť veľká motivácia nájsť dvojicu dizjunktných bipartizujúcich párení v kubických grafoch. Postačuje uvažovať snarky. Predpokladom je, že každý snark má dominujúcu kružnicu. O tom hovorí jedna hypotéza (Hypotéza o dominujúcej kružnici [4]), budeme predpokladať, že platí. Herbert Fleischner [4] vyslovil hypotézu, že každý snark so svojou dominujúcou kružnicou má dve dizjunktné bipartizujúce párenia (Hypotéza o bipartizujúcich páreniach [4]). Ak by táto hypotéza platila, bol by prístup riešenia problému dvojitého pokrytia cyklami cez bipartizujúce párenia správny. Arthur Hoffmann-Ostenhof [6] uviedol kontrapríklad ku Fleischnerovej hypotéze. Uviedol snark s konkrétnou dominujúcou kružnicou a dokázal, že tam dve dizjunktné bipartizujúce párenia nie sú [6]. Zároveň však našiel v tomto istom grafe inú dominujúcu kružnicu, pre ktorú sa už našla dvojica dizjunktných bipartizujúcich párení. Preto vznikla nová hypotéza, ktorá je slabším tvrdením Hypotézy o bipartizujúcich páreniach. Hovorí sa v nej, že každý kubický graf, ktorý je snarkom, má aspoň jednu dominujúcu kružnicu takú, že tento graf má dve dizjunktné bipartizujúce párenia. Táto hypotéza je otvorená, nenašiel sa jej dôkaz a nebola zatiaľ ani vyvrátená.

V diplomovej práci sa zaoberáme bipartizujúcimi páreniami v kubických grafoch a ich aplikáciami. V experimentálnej časti skúmame platnosť pôvodnej a zmenenej Fleischnerovej hypotézy na vybraných snarkoch pomocou počítačového programu.

V prvej kapitole je uvedená terminológia z teórie grafov, ktorú budeme v práci používať. V druhej kapitole je uvedená definícia bipartizujúceho párenia a je tu aj popísaný súvis bipartizujúcich párení s eulerovskými grafmi. V tretej kapitole je popísaný súvis bipartizujúcich párení s nikde nulovým 5-tokom v grafe. Vo štvrtej kapitole je popísaný súvis bipartizujúcich párení s problémom dvojitého pokrytia cyklami. V piatej kapitole je uvedené znenie Fleischnerovej hypotézy a kontrapríklad k nej. Zároveň je tam presné znenie zmenenej Fleischnerovej hypotézy. V šiestej kapitole je podrobne popísaná experimentálna časť práce. Je tam popis vstupných údajov, výstupných údajov, algoritmov použitých v práci, popis programov, ich časová a pamäťová zložitosť, ako aj popis výsledkov experimentu.

Súčasťou obsahu je aj CD priložené k práci. Obsahuje zdrojové kódy všetkých programov, ktoré sa v experimente používali, ako aj všetky výstupy z programov. Konkrétne názvy adresárov a súborov na CD sú uvedené v príslušných častiach šiestej kapitoly.



## 1.1 Základné pojmy

V práci predpokladáme základné znalosti Teórie grafov v rozsahu úvodnej kapitoly knihy od Reinharda Diestela [3] a niektoré ďalšie základné pojmy z tejto knihy. Základným rozdielom je skutočnosť, že pripúšťame aj násobné hrany a slučky. Dôležitými pojmami, ktoré si zadefinujeme, sú pojmy dominujúca kružnica, toky, rozklad a pokrytie grafu, ako aj homeomorfizmus grafov.

## 1.2 Dominujúca kružnica

**Definícia 1.2.1** *Dominujúca kružnica grafu  $G$*  je taká kružnica v grafe  $G$ , že pre každú hranu grafu  $G$  platí, že buď je na dominujúcej kružnici, alebo aspoň jeden z jej vrcholov leží na dominujúcej kružnici.

**Poznámka 1.2.1** Každá hamiltonovská kružnica grafu  $G$  je zároveň aj dominujúcou kružnicou grafu  $G$ . Opačná implikácia neplatí, dominujúca kružnica grafu  $G$  môže byť zároveň aj hamiltonovskou kružnicou grafu  $G$ , ale nemusí.

## 1.3 Toky

**Definícia 1.3.1** [2] Nech  $G$  je orientovaný graf. *Tok* v grafe  $G$  nazývame také ohodnotenie hrán reálnymi číslami  $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , ktoré pre každý vrchol  $v$  spĺňa *Kirchhoffov zákon*, ktorý je daný rovnosťou 
$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e).$$

Inými slovami, pre každý vrchol  $v$  grafu  $G$  platí, že súčet ohodnotení hrán, ktoré do neho vchádzajú, sa rovná súčtu ohodnotení hrán, ktoré z neho vychádzajú.

**Definícia 1.3.2** *Tok od zdroja  $k$  spotrebiču* spĺňa vlastnosti toku v grafe z definície 1.3.1 s rozdielom, že pre dva vrcholy neplatí Kirchhoffov zákon. Pre jeden vrchol platí, že všetky jeho hrany sú orientované smerom od neho, takýto vrchol sa nazýva *zdroj* a pre ďalší jeden vrchol platí, že všetky jeho hrany sú orientované smerom doňho, takýto vrchol sa nazýva *spotrebič*, alebo *ústie*.

**Definícia 1.3.3**  *$k$ -tok grafu  $G$*  nazývame taký tok grafu  $G$ , že všetky jeho hrany sú ohodnotené nezápornými celými číslami od 0 do  $k-1$ .

**Definícia 1.3.4** *Nikde nulový  $k$ -tok grafu  $G$*  nazývame taký tok grafu  $G$ , že všetky jeho hrany sú ohodnotené kladnými celými číslami od 1 do  $k-1$ .

## 1.4 Rozklad a pokrytie grafu

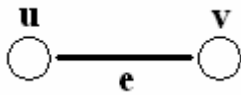
**Definícia 1.4.1** *Rozklad grafu  $G$*  na podgrafy  $G_1, G_2, \dots, G_n$  je taký systém podgrafov grafu  $G$ , že platí  $\forall i, j; i \neq j : E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$  a  $\bigcup_{i=1}^n E(G_i) = E(G)$ .

**Definícia 1.4.2** Pokrytie grafu  $G$  podgrafmi  $G_1, G_2, \dots, G_n$  je taký systém podgrafov grafu  $G$ , že platí  $\bigcup_{i=1}^n E(G_i) = E(G)$ .

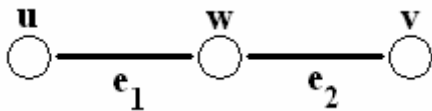
## 1.5 Homeomorfizmus grafov

**Definícia 1.5.1** Subdivízia hrany  $e$  s koncovými bodmi  $u, v$  je rozdelenie hrany na dve časti ( $e_1, e_2$ ) prostredníctvom prídania nového vrchola  $w$ . Susedom vrchola  $u$  sa stane nový vrchol  $w$  a bude ich spájať hrana  $e_1$ , susedom vrchola  $v$  sa stane vrchol  $w$  a bude ich spájať hrana  $e_2$ .

**Obrázok 1.5.1** Hrana  $e = uv$



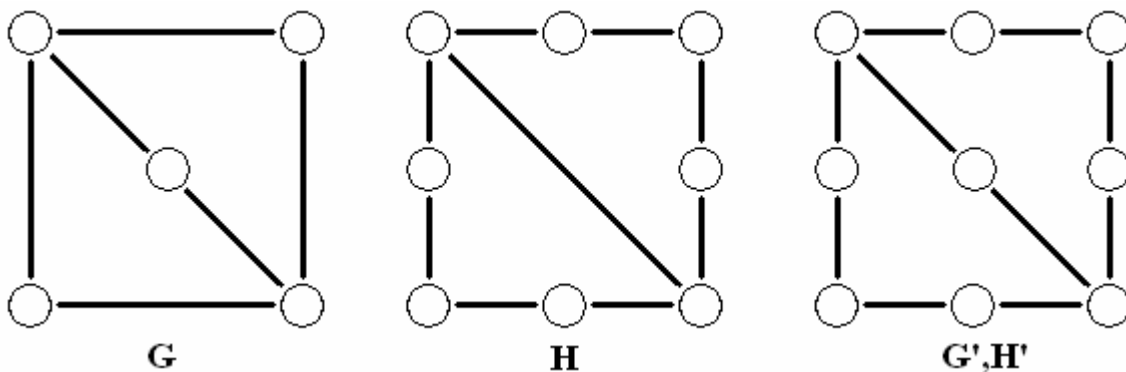
**Obrázok 1.5.2** Subdivízia hrany  $e$ ;  $e_1 = uw$  a  $e_2 = wv$



**Definícia 1.5.2** Subdivízia grafu  $G$  je graf  $G'$ , ktorý vznikne subdivíziou hrán v grafe  $G$ .

**Definícia 1.5.3** Dva grafy  $G$  a  $G'$  sú *homeomorfné*, ak existuje izomorfizmus nejakej subdivízie grafu  $G$  a nejakej subdivízie grafu  $G'$ .

**Obrázok 1.5.3** Ukážka homeomorfizmu grafov  $G$  a  $H$ :



$G'$  je subdivízia grafu  $G$ , tento graf vznikol subdivíziou hornej, dolnej, pravej a ľavej hrany,  $H'$  je subdivízia grafu  $H$ , tento graf vznikol subdivíziou uhlopriečnej hrany. Grafy  $G'$  a  $H'$  sú izomorfne (pretože sú rovnaké) a teda pôvodné grafy  $G$  a  $H$  sú homeomorfné.

# Kapitola 2

## Bipartizujúce párenia

### 2.1 Definícia bipartizujúceho párenia

**Definícia 2.1.1** [4] Ak má kubický graf  $G_3$  dominujúcu kružnicu  $C$ , potom párenie  $M$  nazývame bipartizujúcim, ak platí, že  $M \cap E(C) = \emptyset$ ,  $M$  pokrýva všetky vrcholy z rozdielu  $V(G_3) - V(C)$  a graf  $G_3 - M$  je homeomorfný s bipartitným kubickým grafom.

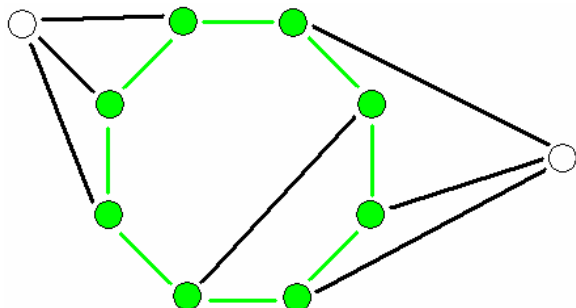
Teda ak má kubický graf dominujúcu kružnicu  $C$ , potom párenie  $M$ , ktoré má vlastnosti

1. žiadna hrana v párení neleží na dominujúcej kružnici  $C$
2.  $M$  pokrýva všetky vrcholy, ktoré sú v grafe, ale nie sú na dominujúcej kružnici  $C$
3. graf  $G_3 - M$ , ktorý vznikne odstránením hrán v  $M$  z grafu  $G_3$ , je homeomorfný s bipartitným kubickým grafom

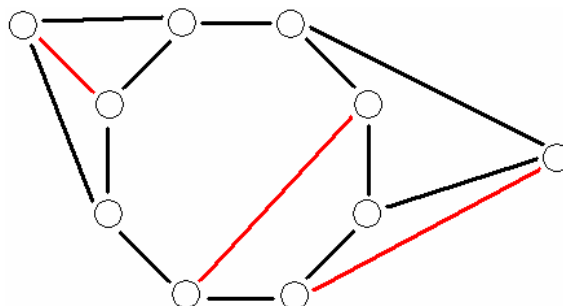
je bipartizujúce párenie. Dominujúcu kružnicu sme zadefinovali v podkapitole 1.2.

#### Príklad 2.1.1

Obrázok 2.1.1

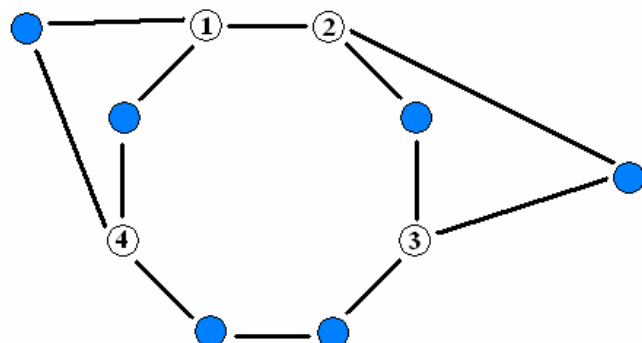


Obrázok 2.1.2

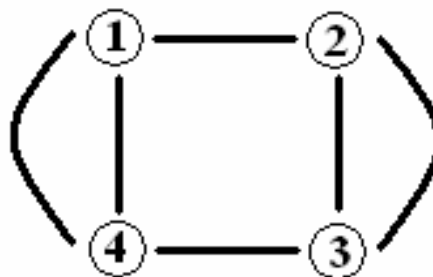


Na obrázku 2.1.1 je kubický graf  $G_3$  s dominujúcou kružnicou  $C$ . Pre jednoduchosť nie sú vrcholy ani hrany označené. Dominujúca kružnica  $C$  je tu označená na zeleno. Na obrázku 2.1.2 je označené červenou farbou párenie  $M$ . Ukážeme, že je bipartizujúce. Prvá z podmienok párenia  $M$ , teda že žiadna hrana z  $M$  neleží na dominujúcej kružnici  $C$ , je splnená. Splnená je aj druhá podmienka, lebo  $M$  pokrýva obidva vrcholy, ktoré neležia na dominujúcej kružnici  $C$ . Otázne je, či je splnená aj tretia podmienka. Že je splnená aj tá, je vysvetlené pomocou ďalších dvoch obrázkov.

Obrázok 2.1.3



Obrázok 2.1.4

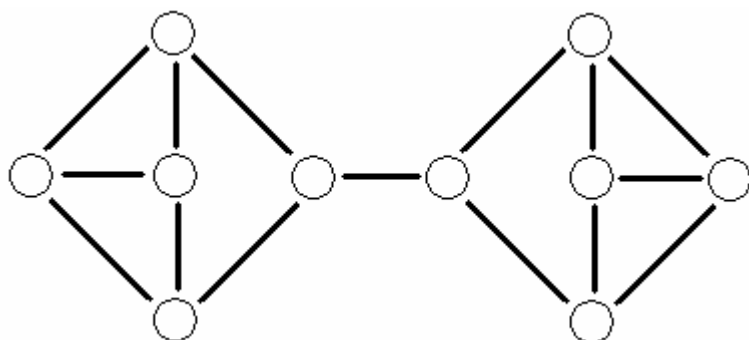


Na obrázku 2.1.3 je graf  $G_3 - M$ . Po odstránení hrán ostali vrcholy, ktoré sú stupňa 2 a sú označené modrou farbou. Zvyšné vrcholy sú označené číslom. Vrcholy stupňa dva porušujú vlastnosť kubického grafu kvôli svojmu stupňu. Preto tieto vrcholy odstránime pomocou operácie opačnej k subdivízii hrany. Keď odstránime všetky vrcholy, dostávame graf na obrázku 2.1.4. Tento graf je kubický a je aj bipartitný (prvá partícia sú vrcholy 1 a 3, druhá partícia sú vrcholy 2 a 4). Z toho vyplýva, je splnená aj tretia podmienka, pretože subdivíziou bipartitného kubického grafu na obrázku 2.1.4 dostaneme graf na obrázku 2.1.3, ktorý je izomorfný s  $G_3 - M$  (pretože je totožný). A keďže sú splnené všetky tri podmienky, je párenie vyznačené na obrázku 2.1.2 bipartizujúce.

## 2.2 Kubické grafy s dominujúcou kružnicou

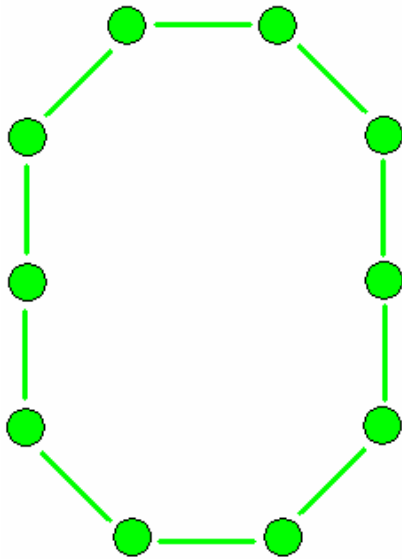
V definícii bipartizujúceho párenia požadujeme, aby mal kubický graf  $G_3$  dominujúcu kružnicu  $C$ . Na obrázku 2.1.1 je príklad kubického grafu, ktorý má dominujúcu kružnicu.

Obrázok 2.2.1



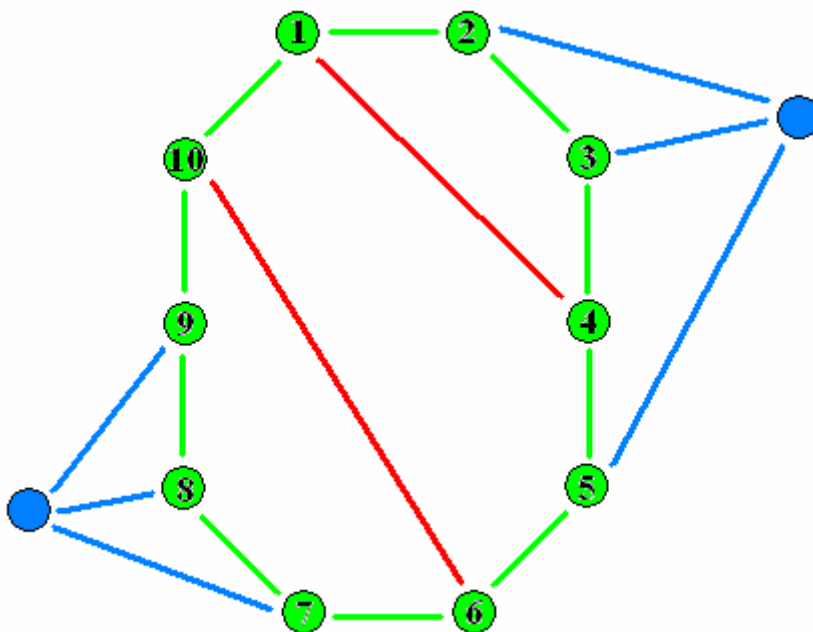
Na obrázku 2.2.1 je zasa príklad kubického grafu  $G_3$ , ktorý dominujúcu kružnicu  $C$  nemá. Je to tak z dôvodu, že má most. Podmienka existencie dominujúcej kružnice  $C$  v značnej miere určuje, ako bude kubický graf  $G_3$  vyzerať. Zostrojme teda kružnicu nejakej dĺžky (obrázok 2.2.2).

Obrázok 2.2.2



Táto kružnica bude dominujúca v kubickom grafe  $G_3$ . Pomocou obrázku 2.2.3 vysvetlíme, ako sa dá doplniť dominujúca kružnica  $C$  na kubický graf  $G_3$ .

Obrázok 2.2.3



Aby mohol byť graf  $G_3$  kubický, každý vrchol musí mať troch susedov. Každý vrchol na kružnici má už dvoch susedov. Zároveň podľa definície 1.3.5 musí byť každá hrana grafu buď na kružnici, alebo musí byť susedná s nejakým vrcholom na kružnici. Takto máme práve dva prístupy, ako zvýšiť stupeň všetkých vrcholov kružnice o jedna:

1. Vytvoríme ďalší vrchol, mimo dominujúcej kružnice  $C$ . Z tohto vrcholu pôjdu tri hrany do troch vrcholov kružnice. Na obrázku 2.2.3 sú tieto vrcholy a ich

hrany označené modrou farbou. Vrcholy 2, 3, 5, 7, 8 a 9 majú takto stupeň 3. Takéto útvary (vrchol mimo kružnice a tri hrany idúce do vrcholov kružnice) nazývame vidly.

2. Spojíme dva vrcholy dominujúcej kružnice  $C$  hranou. Na obrázku 2.2.3 sú tieto hrany označené červenou farbou. Vrcholy 1, 4, 6 a 10 majú takto stupeň 3. Podľa definície 1.3.4 sa tieto hrany nazývajú chordy.

Dospeli sme teda k záveru, že ak má kubický graf  $G_3$  dominujúcu kružnicu  $C$ , skladá sa z nej samej, z vidiel a chórd. Otázkami, či je možné nájsť v takomto grafe bipartizujúce párenie, a keď áno, či ich nie je viac, sa budeme zaoberať v ďalšom texte.

## 2.3 Súvis medzi kubickými a eulerovskými grafmi

**Hypotéza 2.3.1** (Sabidussiho hypotéza kompatibility [4]) *Nech  $G$  je súvislý eulerovský graf s  $\delta(G) > 2$  a eulerovský ťah  $T$  grafu  $G$ . Potom  $S$  je cyklový rozklad grafu  $G$  taký, že pre ľubovoľné dve po sebe idúce hrany z  $T$  platí, že patria do rozdielnych prvkov  $S$ . Hovoríme, že cyklový rozklad  $S$  je kompatibilný s  $T$ .*

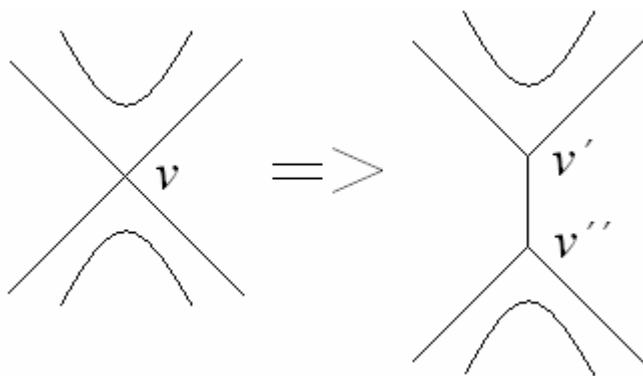
Ak pre eulerovský graf  $G$  platí, že  $4 \leq \Delta(G) \leq 6$  a navyše podľa hypotézy 2.3.1 platí, že  $\delta(G) > 2$ , potom ide o eulerovské grafy, ktorých vrcholy majú len stupne 4 alebo 6 a takéto grafy sú úzko spojené s kubickými grafmi  $G_3$ , ktoré majú dominujúcu kružnicu  $C$ . Totiž, ak  $T$  je eulerovský ťah, potom je možné eulerovský graf  $G$  s eulerovským ťahom  $T$  pretransformovať na práve jeden kubický graf  $G_3$ , ktorého dominujúcou kružnicou  $C$  bude eulerovský ťah  $T$ . Navyše je možné pomocou bipartizujúcich párení urobiť cyklový rozklad  $S$ . Postup ukážeme v podkapitole 4.3.

**Algoritmus 2.3.1** Transformáciu z  $(G, T)$  na  $(G_3, C)$  vykonáme nasledovne:

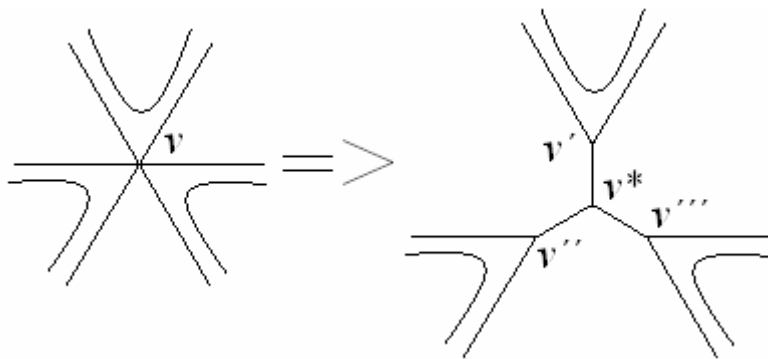
1. Pre každý vrchol vyznačíme, ako ním išiel eulerovský ťah  $T$ . Ak má vrchol stupeň 4, išiel ním práve dvakrát, ak má stupeň 6, išiel ním práve trikrát.
2. Ak má vrchol  $v$  stupeň 4, potom vytvoríme dva nové vrcholy,  $v'$  a  $v''$ , ktoré korešpondujú s vrcholom  $v$  a spojíme ich hranou. Oba tieto vrcholy budú ležať na  $C$ . Vrchol  $v'$  obsahuje jednu z dvojíc hrán, po ktorých ide za sebou ťah  $T$  a vrchol  $v''$  obsahuje druhú z dvojíc hrán, po ktorých ide  $T$ .
3. Ak má vrchol  $v$  stupeň 6, potom vytvoríme štyri nové vrcholy,  $v^*$ ,  $v'$ ,  $v''$  a  $v'''$ , ktoré korešpondujú s vrcholom  $v$ . Hranou spojíme vrcholy  $v'$ ,  $v''$  a  $v'''$  s vrcholom  $v^*$ . Vrchol  $v^*$  nebude ležať na  $C$ , zvyšné tri vrcholy áno. Vrchol  $v'$  obsahuje jednu z dvojíc hrán, po ktorých ide za sebou ťah  $T$ , vrchol  $v''$  obsahuje druhú z dvojíc hrán, po ktorých ide  $T$  a vrchol  $v'''$  obsahuje tretiu z dvojíc hrán.

Výsledkom algoritmu 2.3.1 je kubický graf  $(G_3, C)$ , ktorý vznikol z grafu  $(G, T)$ . Hovoríme, že  $(G_3, C)$  je združený s  $(G, T)$ . Ako získame z takto vytvoreného grafu  $(G_3, C)$  graf  $(G, T)$  je intuitívne jasné, vykonáme len opačné operácie, ktoré sú popísané v druhom a treťom bode algoritmu 2.3.1.

**Obrázok 2.3.1**



**Obrázok 2.3.2**

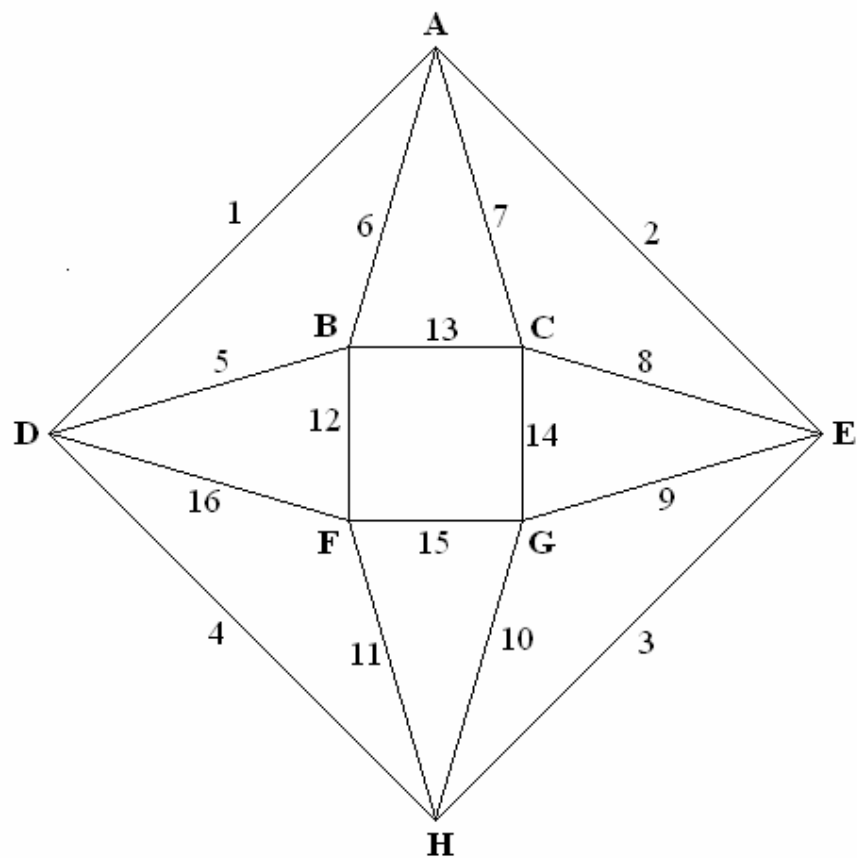


Obrázok 2.3.1 vizualizuje bod 2 algoritmu 2.3.1. Oblúky značia dvojice hrán, po ktorých ide bezprostredne po sebe eulerovský ťah. Obrázok 2.3.2 vizualizuje bod 3 algoritmu 2.3.1. Oblúky značia dvojice hrán, po ktorých ide bezprostredne po sebe eulerovský ťah. Algoritmus 2.3.1 budeme teraz prezentovať prostredníctvom dvoch príkladov. V prvom príklade bude daný eulerovský graf  $(G, T)$ , kde budú mať všetky vrcholy stupeň 4, v druhom príklade bude daný eulerovský graf  $(G, T)$ , kde budú mať všetky vrcholy stupeň 4, až na jeden, ktorý bude mať stupeň 6.

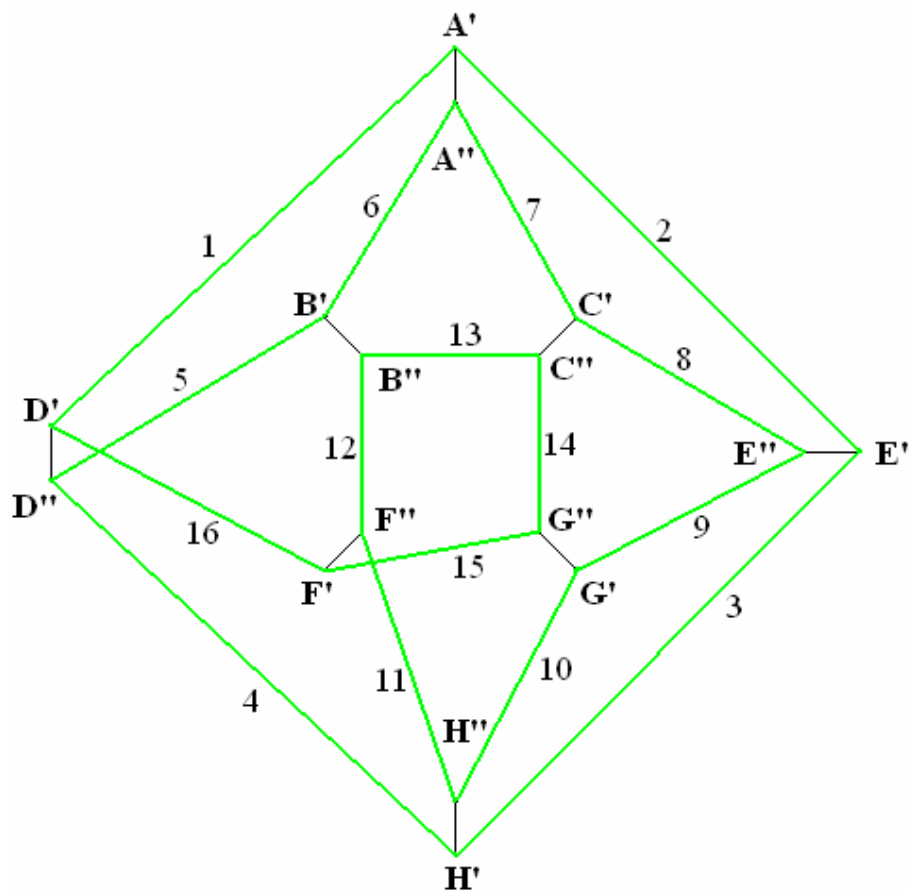
### **Príklad 2.3.1**

Je daný eulerovský graf  $(G, T)$ , v ktorom majú všetky vrcholy stupeň 4. Znázornený je na obrázku 2.3.3. Vrcholy sú označené písmenami A až H, hrany sú označené číslami od 1 do 16. Hrany sú označené v takom poradí, v akom prechádza grafom  $(G, T)$  eulerovský ťah  $T$ . Pod obrázkom 2.3.3 sa nachádza obrázok 2.3.4, kde je znázornený výsledný graf  $(G_3, C)$ , ktorý vznikol z grafu  $(G, T)$ . Popis postupu sa nachádza nižšie.

Obrázok 2.3.3



Obrázok 2.3.4



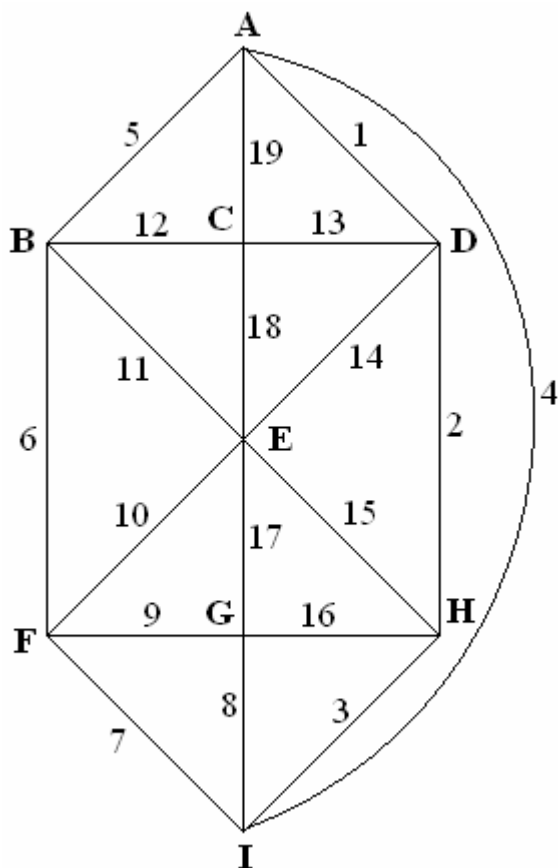


V príklade 2.3.1 majú všetky vrcholy stupeň 4, teda pri zostrojení grafu  $(G_3, C)$  z grafu  $(G, T)$  daných obrázkami 2.3.3 a 2.3.4 sme aplikovali pre každý vrchol druhý krok algoritmu 2.3.1. Vrcholom A idú dve dvojice po sebe idúcich hrán eulerovského ťahu  $T$ , prvá dvojica je 1 a 2, druhá je 6 a 7. Obe dvojice hrán sú po sebe idúce aj v grafe  $(G_3, C)$ , akurát že sú oddelené. V prípade vrchola A prechádza dvojica hrán 1 a 2 vrcholom A', dvojica hrán 6 a 7 vrcholom A''. Vrcholy A' a A'' spája hrana, ktorá oddeľuje obe dvojice po sebe idúcich hrán. Analogické úvahy platia aj o všetkých ostatných vrchoch, len dvojice hrán sú iné. Výsledkom je graf  $(G_3, C)$ , ktorý je kubický a má dominujúcu kružnicu  $C$ , ktorá je tvorená hranami eulerovského ťahu v grafe  $(G, T)$ , na obrázku 2.3.4 je označená zelenou farbou. Takto nám vznikol kubický graf  $G_3$  s dominujúcou kružnicou  $C$ . Hrany, ktoré vznikli aplikáciou algoritmu 2, sú chordami.

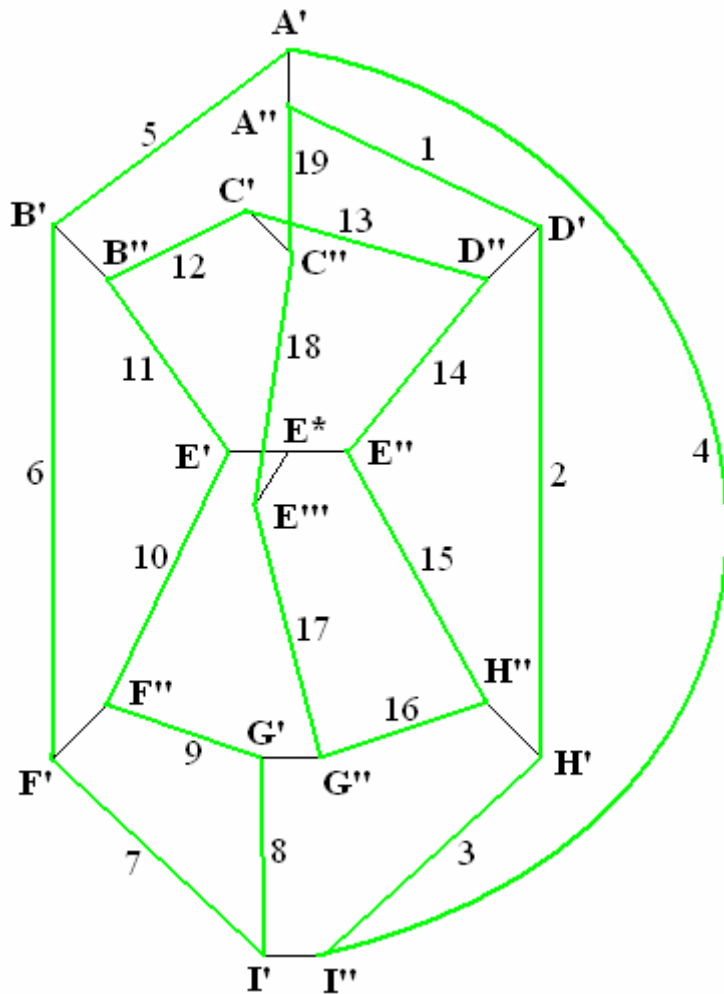
### Príklad 2.3.2

Je daný eulerovský graf  $(G, T)$ , v ktorom majú všetky vrcholy stupeň 4, s výnimkou jedného, ktorý má stupeň 6. Znáznorený je na obrázku 2.3.5. Vrcholy sú označené písmenami A až H, hrany sú označené číslami od 1 do 19. Hrany sú označené v takom poradí, v akom prechádza grafom  $(G, T)$  eulerovský ťah  $T$ . Pod obrázkom 2.3.5 sa nachádza obrázok 2.3.6, kde je znázornený výsledný graf  $(G_3, C)$ , ktorý vznikol z grafu  $(G, T)$ . Popis postupu sa nachádza nižšie.

Obrázok 2.3.5



Obrázok 2.3.6



V príklade 2.3.2 majú všetky vrcholy stupeň 4, s výnimkou jedného, vrchola E, ktorý má stupeň 6. Pri zostrojení grafu  $(G_3, C)$  z grafu  $(G, T)$  daných obrázkami 2.3.5 a 2.3.6 sme aplikovali pre každý vrchol okrem vrchola E druhý krok algoritmu 2.3.1, v prípade vrcholu E sme aplikovali bod 3 tohto algoritmu. Vrcholom A idú dve dvojice po sebe idúcich hrán eulerovského ťahu  $T$ , prvá dvojica je 19 a 1, druhá je 4 a 5. Obe dvojice hrán sú po sebe idúce aj v grafe  $(G_3, C)$ , akurát že sú oddelené. V prípade vrchola A prechádza dvojica hrán 4 a 5 vrcholom  $A'$ , dvojica hrán 19 a 1 vrcholom  $A''$ . Vrcholy  $A'$  a  $A''$  spája hrana, ktorá oddeľuje obe dvojice po sebe idúcich hrán. Analogické úvahy platia aj o všetkých ostatných vrchoch okrem vrcholu E, len dvojice hrán sú iné. Z vrcholu E sa stali podľa bodu 3 algoritmu 2.3.1 štyri vrcholy. Jeden z nich,  $E^*$ , neleží na dominujúcej kružnici  $C$ , tri z nich,  $E'$ ,  $E''$ ,  $E'''$  áno. Vrchol  $E^*$  je spojený s týmito troma vrcholmi hranou. Výsledkom je graf  $(G_3, C)$ , ktorý je kubický a má dominujúcu kružnicu  $C$ , ktorá je tvorená hranami eulerovského ťahu  $T$  v grafe  $(G, T)$ , na obrázku 2.3.6 je označená zelenou farbou. Takto nám vznikol kubický graf  $G_3$  s dominujúcou kružnicou  $C$ . Hrany, ktoré vznikli aplikáciou algoritmu 2, sú chordami. Vrchol  $E^*$  a všetky tri hrany, ktoré z neho vychádzajú, tvoria spolu dohromady vidlu.

# Kapitola 3

## Súvis s tokmi v kubických grafoch

### 3.1 Základné pozorovania a postupy

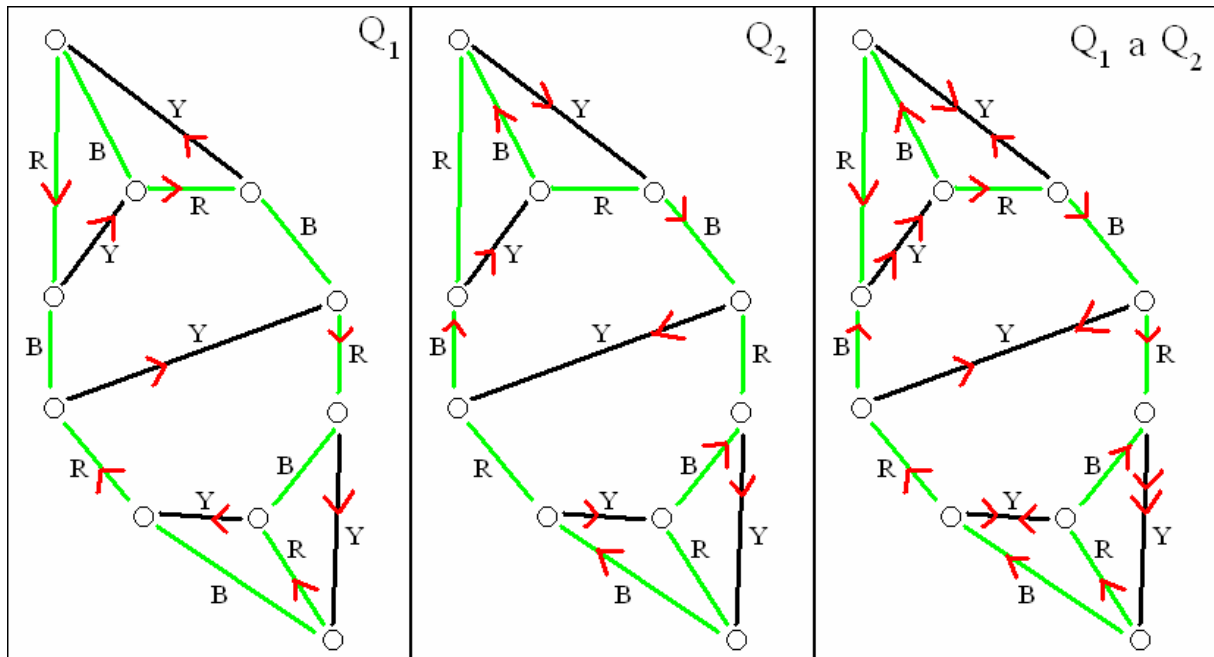
#### 3.1.1 Taitovo farbenie a rozdelenie grafu na 2-faktory

Nech  $H$  je kubický nebipartitný hamiltonovský graf a nech má jeho hamiltonovská kružnica označenie  $C$ . Graf  $H$  ofarbíme pomocou Taitovho farbenia. Taitovo farbenie kubického grafu je ofarbenie hrán grafu tromi farbami takým spôsobom, že všetky tri hrany vychádzajúce z každého vrcholu majú navzájom rôznu farbu. V našom prípade budeme ofarbovať hrany patriace hamiltonovskej kružnici  $C$  striedavo písmenami  $B$  a  $R$ , všetky ostatné hrany budeme ofarbovať písmenom  $Y$ . Rešpektujúc terminológiu dominujúcej kružnice a využívajúc fakt, že hamiltonovská kružnica  $C$  je zároveň aj dominujúcou, písmenom  $Y$  budeme ofarbovať chordy grafu.

Nech  $Q_1$  a  $Q_2$  sú 2-faktory grafu  $H$  (2-faktor je podgraf grafu, ktorý tvorí množinu kružníc tak, že pokrýva každý vrchol grafu). Prvý 2-faktor,  $Q_1$ , definujeme ako množinu orientovaných kružníc daných po sebe idúcimi hranami s farbami  $R$  a  $Y$ . Keďže z každého vrchola vychádza práve jedna hrana s farbou  $R$ ,  $B$  a  $Y$ , potom je postupnosť hrán s farbami  $R$  a  $Y$  jednoznačná. Čo sa týka orientácie každej jednotlivej kružnice faktora  $Q_1$ , je jedno, ako ju zvolíme, platiť musí len to, že každá kružnica je aj cyklicky orientovaná. Druhý 2-faktor,  $Q_2$ , je definovaný analogicky, ako  $Q_1$ . Jediná zmena je v tom, že 2-faktor  $Q_2$  tvoria po sebe idúce hrany s farbami  $B$  a  $Y$ .

Obrázok 3.1.1.1 ilustruje oba 2-faktory jednotlivo, ako aj spolu v jednom obrázku. Graf  $H$  je v obrázku zvolený tak, aby bol kubický, nebipartitný a hamiltonovský, ale nie príliš veľký. Hamiltonovská kružnica  $C$  je označená na zeleno, 2-faktory sú označené červenými šípkami na hranách. Hrany sú označené písmenami  $R$ ,  $B$  a  $Y$ .

Obrázok 3.1.1.1

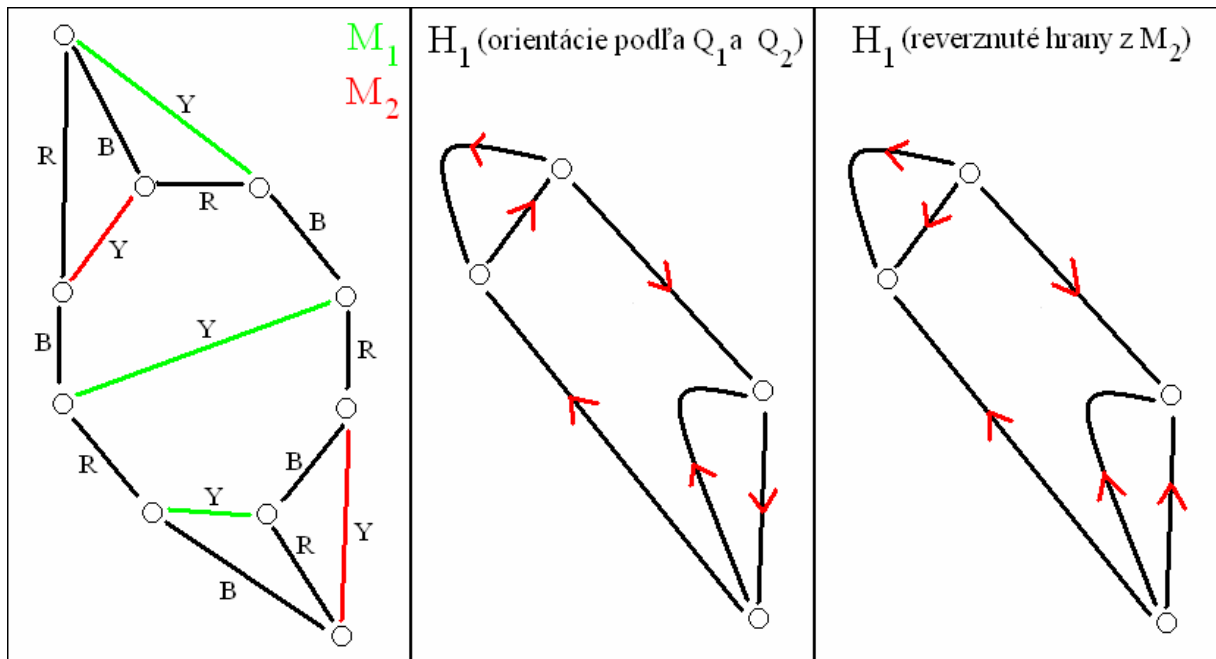


### 3.1.2 Rozdelenie na dve dizjunktné bipartizujúce párenia

Teraz ukážeme, ako je možné pomocou oboch 2-faktorov rozdeliť chordy grafu  $H$  do dvoch neprázdnych bipartizujúcich párení. Uvažujeme párenie  $M_1$ , v ktorom budú všetky tie chordy, ktoré majú v 2-faktoroch  $Q_1$  a  $Q_2$  rôzne orientácie a párenie  $M_2$ , v ktorom budú všetky tie chordy, ktoré majú v 2-faktoroch  $Q_1$  a  $Q_2$  rovnaké orientácie. Že sú množiny hrán  $M_1$  a  $M_2$  dizjunktné, je zrejmé, ostáva ukázať, že obe tvoria bipartizujúce párenie. Zjavne žiadna hrana ľubovoľnej množiny  $M$  neleží na dominujúcej kružnici  $C$ . Keďže je dominujúca kružnica  $C$  zároveň aj hamiltonovská, v grafe  $H$  nie sú žiadne vidly, len chordy, teda obe párenia spĺňajú vlastnosť, že pokrývajú všetky vrcholy grafu, ktoré nie sú v dominujúcej kružnici  $C$  (lebo tam žiadne také vrcholy nie sú). Otázne je teda už len to, či graf homeomorfný s  $H - M_1$ , resp.  $H - M_2$  je bipartitný. Nech  $H_1$  je graf homeomorfný s grafom  $H - M_1$ . V grafe  $H_1$  budeme uvažovať, že hrany sú orientované a rešpektujú orientáciu 2-faktorov  $Q_1$  a  $Q_2$ . Môžeme si to dovoliť preto, lebo všetky hrany, ktoré majú obojakú orientáciu (t.j. rôznu z  $Q_1$  a  $Q_2$ ), sú v množine  $M_1$  a teda sa v grafe  $H - M_1$ , ani v grafe  $H_1$  nenachádzajú. Keď potom v grafe  $H_1$  zmeníme smer hrán, ktoré sú prvkami množiny  $M_2$ , zistíme, že každý vrchol grafu  $H_1$  je buď zdrojom, alebo ústím, teda buď sú z neho všetky hrany orientované v smere od neho, alebo v smere doňho (v reči tokov, buď z vrchola tečie hranami všetko preč, alebo sa všetko doňho vlieva). Z toho potom vyplýva, že graf  $H_1$  je bipartitný, pretože každý sused istého vrchola bude mať v terminológii zdroj – ústie opačnú úlohu (ak je istý vrchol zdroj, jeho sused bude ústie, a naopak).

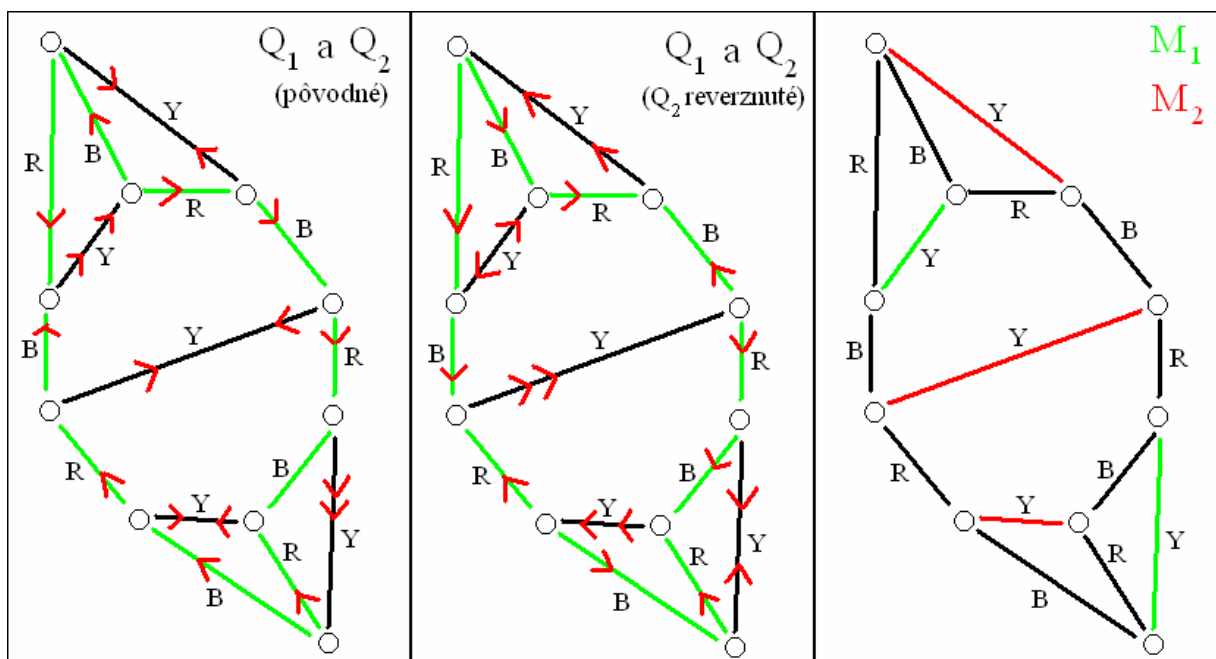
Predošlé myšlienky vizualizuje obrázok 3.1.2.1. V ľavej časti sa nachádza párenie  $M_1$  (zeleno) a  $M_2$  (červeno), v strednej časti sa graf  $H_1$  homeomorfný s grafom  $H - M_1$ , aj s príslušnými orientáciami podľa 2-faktorov  $Q_1$  a  $Q_2$ , napravo sa nachádza graf  $H_1$  s reverzovanými orientáciami hrán, ktoré patria množine  $M_2$ .

Obrázok 3.1.2.1



Ukázali sme, že graf  $H_1$  je bipartitný. Ostáva ukázať, že aj graf  $H_2$  je bipartitný. Vrátime sa k 2-faktoru  $Q_2$  a urobíme v ňom zmenu. A síce, otočíme orientáciu všetkých hrán, ktoré obsahuje 2-faktor  $Q_2$ . Takto sa stane, že množiny hrán  $M_1$  a  $M_2$  si vymenia svoje úlohy (stále platí, že v  $M_1$  sú chordy s rôznymi orientáciami hrán 2-faktorov  $Q_1$  a  $Q_2$ ). Z toho potom vyplýva, že aj graf  $H_2$  je bipartitný a teda množiny  $M_1$  a  $M_2$  sú bipartizujúce párenia. Pre lepšiu predstavivosť je vizualizované zreverzovanie hrán 2-faktora  $Q_2$  a vymenenie si úloh párení  $M_1$  a  $M_2$ . Na obrázku 3.1.2.2 sa nachádza v ľavej časti graf  $H$  s oboma predošlými orientáciami 2-faktorov, v strednej časti sa nachádza graf  $H$  s reverzovanými hranami 2-faktora  $Q_2$  a v ľavej časti sa nachádzajú párenia  $M_1$  a  $M_2$  s vymenenými úlohami.

Obrázok 3.1.2.2

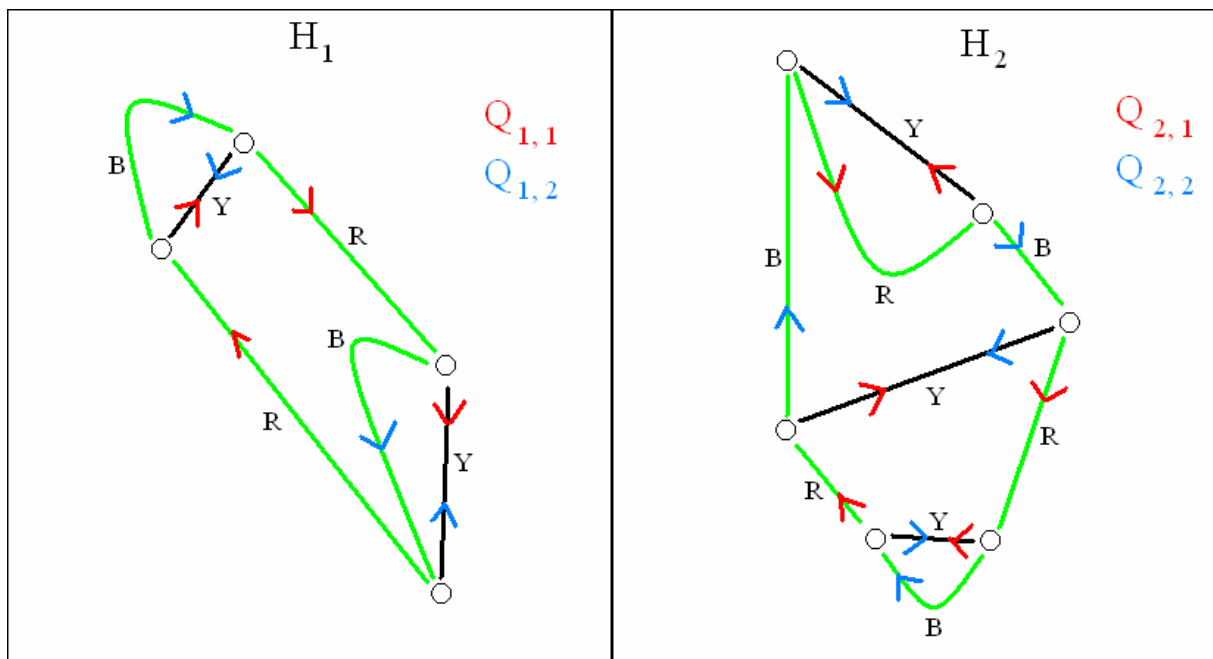


### 3.1.3 Rozdelenie homeomorfných grafov na 2-faktory

V tejto podkapitole ukážeme ďalšie pozorovanie ohľadom 2-faktorov. Poznatky z tohto pozorovania budú dôležité pri tvorbe nikde nulového 6-toku v kubickom grafe. Uvažujme opäť graf  $H$  a 2-faktory  $Q_1$  a  $Q_2$  z podkapitoly 3.1.1, párenia  $M_1, M_2$  a grafy  $H_1$  (graf homeomorfný s  $H - M_1$ ) a  $H_2$  (graf homeomorfný s  $H - M_2$ ) z podkapitoly 3.1.2. Taitovo farbenie spomenuté v podkapitole 3.1.1 je možné aplikovať aj na grafy  $H_1$  a  $H_2$ . Aj tieto grafy majú svoju hamiltonovskú kružnicu, ktorej hrany sú určené hamiltonovskou kružnicou  $C$  grafu  $H$ . Tieto hamiltonovské kružnice nazveme  $C_1$  pre graf  $H_1$  a  $C_2$  pre graf  $H_2$ . Hrany grafu  $H_i$  pre  $i = 1, 2$  sú zafarbené opäť tromi farbami,  $R, B$  a  $Y$ , analogicky ako v prípade farbenia hrán grafu  $H$ . Po Taitovom zafarbení grafu  $H_i$  uvažujeme 2-faktory  $Q_{i,1}$  a  $Q_{i,2}$ . Sú analogické, ako 2-faktory  $Q_1$  a  $Q_2$ , s tým rozdielom, že tieto sú len v grafe  $H_i$ . 2-faktor  $Q_{i,1}$  obsahuje po sebe idúce hrany s farbami  $R, Y$  v grafe  $H_i$  a 2-faktor  $Q_{i,2}$  obsahuje po sebe idúce hrany s farbami  $B, Y$  v grafe  $H_i$ . Všimajme si teraz orientáciu množiny kružníc 2-faktora  $Q_{i,j}$  pre nejakú fixnú hodnotu  $j \in \{1, 2\}$ . Pretože je graf  $H_i$  podľa definície bipartizujúceho párenia bipartitný, potom existuje cyklická orientácia hrán taká, že orientácia hrán v množine  $Q_{i,j} \cap C_i$  určuje cyklickú orientáciu hamiltonovskej kružnice  $C$ . Platí to však aj naopak, ak uvažujeme, že je daná cyklická orientácia kružnice  $C_i$ , tak potom táto orientácia určuje cyklickú orientáciu obidvoch 2-faktorov  $Q_{i,j}$ . Práve tento poznatok o určovaní cyklických orientácií využijeme pri tvorbe nikde nulového 6-toku v kubickom grafe.

Pre ilustráciu sa na obrázku 3.1.3.1 nachádzajú grafy  $H_1$  (vľavo) a  $H_2$  (vpravo). Hrany zafarbené zelenou farbou označujú hamiltonovskú kružnicu  $C_1$ , resp.  $C_2$ , červené šípky na hranách označujú 2-faktor  $Q_{i,1}$  a modré šípky označujú 2-faktor  $Q_{i,2}$  pre  $i = 1, 2$ . Orientácie 2-faktorov nie sú momentálne podstatné, v ilustrácii ale uvažujeme fixovanú cyklickú orientáciu  $C_{i,1}$ , resp.  $C_{i,2}$  po smere hodinových ručičiek.

Obrázok 3.1.3.1



### 3.1.4 Veta o nikde nulovom 6-toku

Postup, ako možno vytvoriť nikde nulový 6-tok v kubickom grafe  $G_3$  s dominujúcou kružnicou  $C$ , je uvedený ako konštruktívny dôkaz vety 10 v článku [5]. Táto veta znie nasledovne:

**Veta 3.1.4.1** (Veta o nikde nulovom 6-toku) *Nech  $G_3$  je kubický graf s dominujúcou kružnicou  $C$ . Potom má nikde nulový 6-tok taký, že*

1. *všetky hrany, ktoré majú označenie presahujúce hodnotu 3, ležia na dominujúcej kružnici  $C$ ,*
2.  *$C$  je cyklicky orientovaná.*

V ďalšom texte sa nachádza konštruktívny dôkaz tejto vety. Ide zároveň o postup, ako je možné skonštruovať nikde nulový 6-tok v kubickom grafe s dominujúcou kružnicou.

## 3.2 Dominujúca kružnica ako hamiltonovská

V prípade, že je dominujúca kružnica  $C$  zároveň aj hamiltonovská, uvažujeme dve možnosti. Buď je graf  $G_3$  bipartitný, alebo nie.

### 3.2.1 Kubický graf je bipartitný

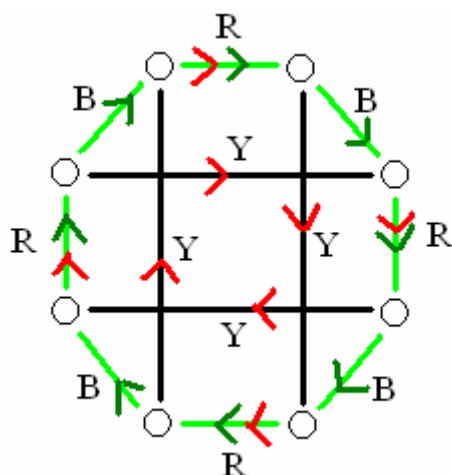
Nech je kubický graf  $G_3$  bipartitný a jeho dominujúca kružnica  $C$  je hamiltonovská. Potom má graf  $G_3$  nikde nulový 3-tok a teda nám postačí dvojaké ohodnotenie hrán – hrany s označením 1 a hrany s označením 2. Pôjde totiž o zloženie dvoch množín cyklov. Prvá množina cyklov bude jednoprvková, a síce dominujúca kružnica  $C$ . Zavedieme jej cyklickú orientáciu, pričom na jej voľbe nezáleží, je len potrebné, aby bola kružnica  $C$  orientovaná. Druhá množina cyklov je 2-faktor  $Q_1$ , popísaný v podkapitole 3.1.1. Tento 2-faktor je však v tomto prípade orientovaný a jeho orientáciu určuje prostredníctvom hrán v množine  $Q_1 \cap C$  orientácia dominujúcej kružnice  $C$ . Orientáciu toku pre jednotlivú hranu udáva orientácia dominujúcej kružnice  $C$ , ak je hrana na nej, alebo orientácia kružnice z  $Q_1$ , ak hrana na kružnici  $C$  nie je (a je teda chordou). Totiž, v tomto prípade má graf len dominujúcu kružnicu  $C$  a chordy, vidlu nemá žiadnu, pretože dominujúca kružnica  $C$  je zároveň aj hamiltonovská. Označenie, resp. hodnotu toku pre danú hranu zistíme podľa počtu patričnosti do množiny cyklov  $C$  a  $Q_1$ . Povedané jednoduchšie, na začiatku je každá hrana ohodnotená ako 0 a ak tá hrana patrí  $C$ , potom zvýšime hodnotu o 1 a ak patrí do  $Q_1$ , zvýšime jej hodnotu tiež o 1. Takto sa stane, že  $C$  má kruhovú cirkuláciu s hodnotou toku 1 a aj každý cyklus z  $Q_1$  má tiež kruhovú cirkuláciu s hodnotou toku 1.

Výsledkom je graf, ktorý má orientované hrany tvoriace nikde nulový 3-tok, pričom každá hrana ležiaca v  $Q_1 \cap C$  má hodnotu 2 a inak má hodnotu 1. Tým je splnená podmienka 1 z vety 3.1.4.1. Navyše  $C$  je cyklicky orientovaná, čím je splnená podmienka 2 z vety 3.1.4.1. Keďže nikde nulový 3-tok je aj nikde nulový 6-tok, veta pre túto triedu grafov ( $C$  je hamiltonovská a  $G_3$  je bipartitný) platí. Pre úplnosť dodáme, že ak by sme namiesto  $Q_1$  zvolili

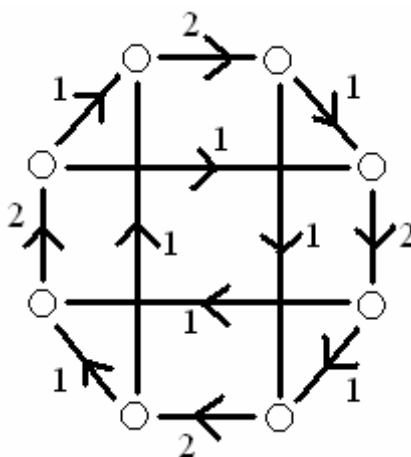
$Q_2$ , tiež by sme dostali nikde nulový 3-tok, rozdiel by bol len ten, že hodnotu 2 by mali hrany z množiny  $Q_2 \cap C$  a hrany z množiny  $Q_1 \cap C$  by mali hodnotu 1.

Pre ilustráciu sú tu dva obrázky. Obrázok 3.2.1.1 znázorňuje graf  $G_3$  (primeranej veľkosti) s dominujúcou kružnicou  $C$ , jej orientáciu (zelená farba), Taitovo farbenie (písmená  $R$ ,  $B$  a  $Y$ ) a orientáciu hrán 2-faktora  $Q_1$  (červená farba). Na obrázku 3.2.1.2 sa nachádza výsledný graf s nikde nulovým 3-tokom, orientáciou hrán a ich označením.

Obrázok 3.2.1.1



Obrázok 3.2.1.2



### 3.2.2 Kubický graf nie je bipartitný

Nech dominujúca kružnica  $C$  grafu  $G_3$  je hamiltonovská, ale nech graf  $G_3$  nie je bipartitný. Potom je možné v tomto grafe nájsť nikde nulový 4-tok. Dominujúcej kružnici  $C$  priradíme cyklickú orientáciu. Nezáleží na smere, musí byť len cyklicky orientovaná. Opäť uvažujeme Taitovo farbenie a 2-faktory  $Q_1$  a  $Q_2$ . Teraz však potrebujeme tieto 2-faktory len na rozdelenie chórd do dvoch dizjunktných bipartizujúcich párení  $M_1$  a  $M_2$ . Tieto párenia sú popísané v podkapitole 3.1.2. Keď sú obe párenia nájsené, vytvoríme graf  $H_1$ , ktorý je homeomorfný s grafom  $G_3 - M_1$  a graf  $H_2$ , ktorý je homeomorfný s grafom  $G_3 - M_2$ . (poznámka: grafy  $H_1$  a  $H_2$  v tejto podkapitole nemajú nič spoločné s grafmi s tým istým označením z predošlých podkapitol). V oboch grafoch  $H_1$ ,  $H_2$  uvažujeme hamiltonovskú kružnicu  $C_1$ ,  $C_2$ , ktorá je určená kružnicou  $C$  grafu  $G_3$ . V ďalšom kroku ofarbíme každý z grafov  $H_1$ ,  $H_2$  Taitovým farbením a uvažujeme potom 2-faktory  $Q_{1,j}$  a  $Q_{2,k}$  (podkapitola 3.1.3) pre fixné hodnoty  $j, k \in \{1, 2\}$ . Všetkým hranám, ktoré sú v týchto dvoch 2-faktoroch (pre každý z grafov  $H_1$ ,  $H_2$  práve jeden) priradíme orientáciu. Orientáciu cyklov v ľubovoľnom z 2-faktorov určuje orientácia dominujúcej kružnice  $C$ . Dostávame sa k tvorbe samotného nikde nulového 4-toku. Na začiatku majú všetky hrany hodnotu 0 a sú bez orientácie. Hrany, ktoré sú na kružnici  $C$ , dostávajú orientáciu podľa orientácie tejto kružnice a ich hodnota toku sa zvýši o 1. Ďalšie zvýšenie hodnoty o 1 dostávajú tie hrany, ktoré v grafe  $G_3$  odpovedajú hranám v 2-faktore  $Q_{1,j}$ . Odpovedajúcimi hranami v  $G_3$  rozumieme tie hrany, ktoré sa, obrazne povedané, zliali (pri operácii opačnej k subdivízií grafu  $G_3 - M_1$ ) do nejakej hrany grafu  $H_1$ . Povedané inak, zvýšenie hodnoty o 1, prípadne príslušnú orientáciu získavajú tie hrany grafu  $G_3$ , ktoré sa pri procese operácie opačnej k subdivízii grafu  $G_3 - M_1$  zobrazili do hrany v  $H_1$  takej, že tá hrana v  $H_1$  patrí 2-faktoru  $Q_{1,j}$ . Pre lepšie pochopenie tohto bodu slúži obrázok 3.2.2.2. Ďalšie zvýšenie hodnoty o 1 je podobné, ako to v predošlom prípade.

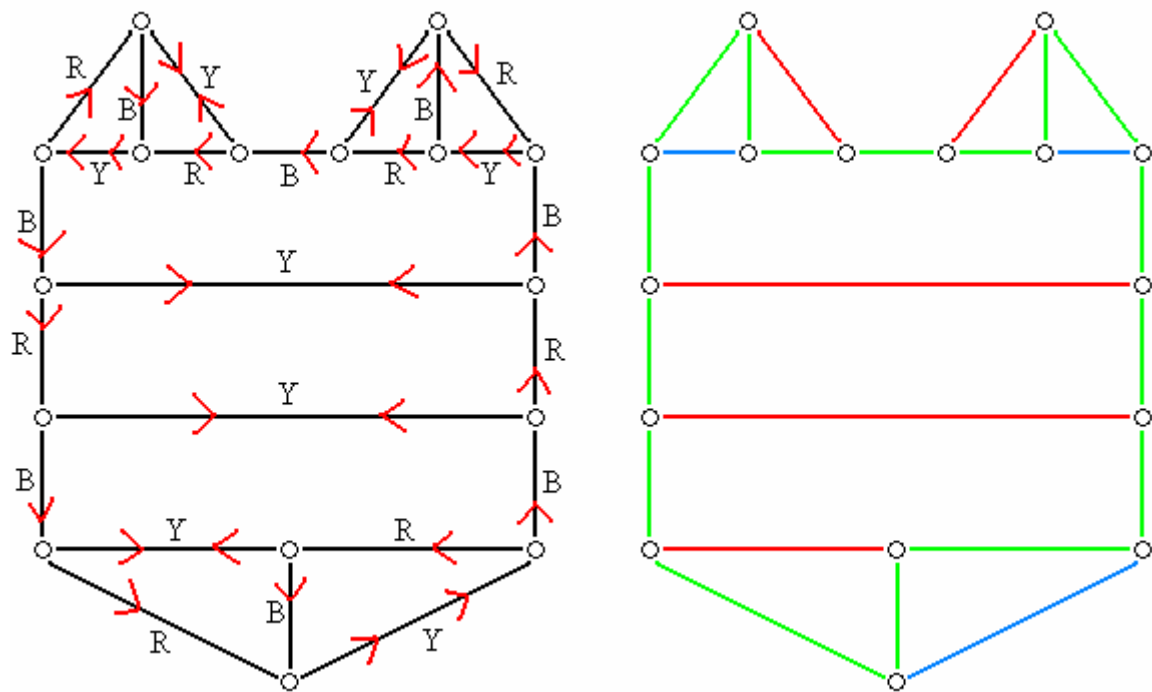


Zvýšenie hodnoty o 1, prípadne aj príslušnú orientáciu, dostávajú tie hrany, ktoré v grafe  $G_3$  odpovedajú hranám v 2-faktore  $Q_{2,k}$ . Pričom pojem „odpovedajúce hrany“ je vysvetlený rovnako, ako v predošlom odstavci, rozdielom je len to, že ide o graf  $H_2$ , ktorý je homeomorfný s  $G_3 - M_2$  a ide o 2-faktor  $Q_{2,k}$ . Pre lepšie pochopenie tohto bodu slúži obrázok 3.2.2.3.

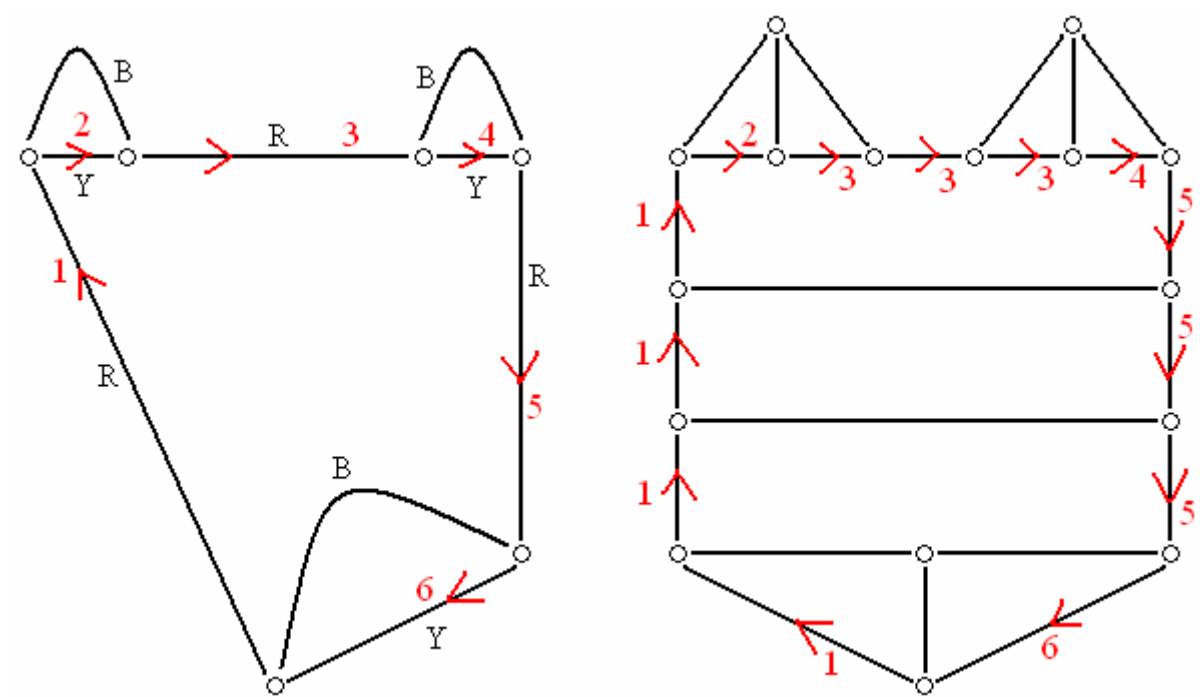
Celkový výsledok je taký, že máme graf  $G_3$  s nikde nulovým 4-tokom. Vznikol spojením troch množín cyklov, kružnice  $C$ , 2-faktora  $Q_{1,j}$  a 2-faktora  $Q_{2,k}$ . Každá hrana v  $G_3$  má označenie hodnoty aspoň 1. Hrany na kružnici  $C$  majú hodnotu aspoň 1 vďaka tomu, že  $C$  je jedným z prvkov kružníc, ktoré tvoria tok. Hrany mimo kružnice sú chordy, ktoré sú buď v  $M_1$ , alebo  $M_2$  a ich hodnota je práve 1. Ak je konkrétna chorda v  $M_1$ , potom jej ohodnotenie veľkosti 1 zabezpečí 2-faktor  $Q_{1,j}$  a ak je v  $M_2$ , potom jej ohodnotenie veľkosti 1 zabezpečí 2-faktor  $Q_{2,k}$ . Z toho celkovo vyplýva, že tok je určite nikde nulový. Že ide celkovo o 4-tok sa ukáže ľahko. Každá hrana má možnosť zvýšiť svoju hodnotu o 1 práve trikrát (ak je na  $C$ , ak patrí  $Q_{1,j}$  alebo ak patrí  $Q_{2,k}$ ). Maximálne možné označenie hrany je takto 3, čiže ide o nikde nulový 4-tok. Pre hrany s označením viac ako 1 platí, že ich orientácie u jednotlivých množín cyklov sú vždy v jednom a tom istom smere, pretože orientácie 2-faktorov  $Q_{1,j}$  a  $Q_{2,k}$  sú určené orientáciou  $C$ . Každá chorda má označenie 1 a len hrana na kružnici  $C$  môže mať vyššie označenie.

Nasledujúce obrázky demonštrujú postup tvorby toku v tomto odstavci na 16 vrcholovom kubickom grafe. Kružnicu orientujeme v smere hodinových ručičiek a bez ujmy na všeobecnosti si vyberáme 2-faktory  $Q_{1,1}$  a  $Q_{2,1}$ . Obrázok 3.2.2.1 zobrazuje v ľavej časti daný graf s Taitovým farbením, ako aj orientáciou hrán 2-faktorov  $Q_1$ ,  $Q_2$  a v pravej časti párenie  $M_1$  (červená farba), párenie  $M_2$  (modrá farba), ako aj dominujúcu kružnicu  $C$  (zelená farba). Obrázok 3.2.2.2 zobrazuje v ľavej časti graf  $H_1$  s Taitovým farbením a orientovaným 2-faktorom  $Q_{1,1}$  (orientácie sú načerveno a každá hrana 2-faktora má priradené práve jedno číslo), v pravej časti graf  $G_3$  s odpovedajúcimi si orientovanými hranami patriacimi faktoru  $Q_{1,1}$  (vyznačené červeno, každá hrana má tiež číslo – podľa toho, ktorá hrana z  $H_1$  jej odpovedá). Obrázok 3.2.2.3 zobrazuje v ľavej časti graf  $H_2$  s Taitovým farbením a orientovaným 2-faktorom  $Q_{2,1}$  (orientácie sú načerveno a každá hrana 2-faktora má priradené práve jedno číslo), v pravej časti graf  $G_3$  s odpovedajúcimi si orientovanými hranami patriacimi faktoru  $Q_{2,1}$  (vyznačené červeno, každá hrana má tiež číslo – podľa toho, ktorá hrana z  $H_2$  jej odpovedá). Obrázok 3.2.2.4 zobrazuje v ľavej časti graf  $G_3$  s orientáciami hrán z  $C$  (zelená farba),  $Q_{1,1}$  (červená farba) a  $Q_{2,1}$  (modrá farba), v pravej časti výsledný graf s orientáciami a ohodnoteniami hrán.

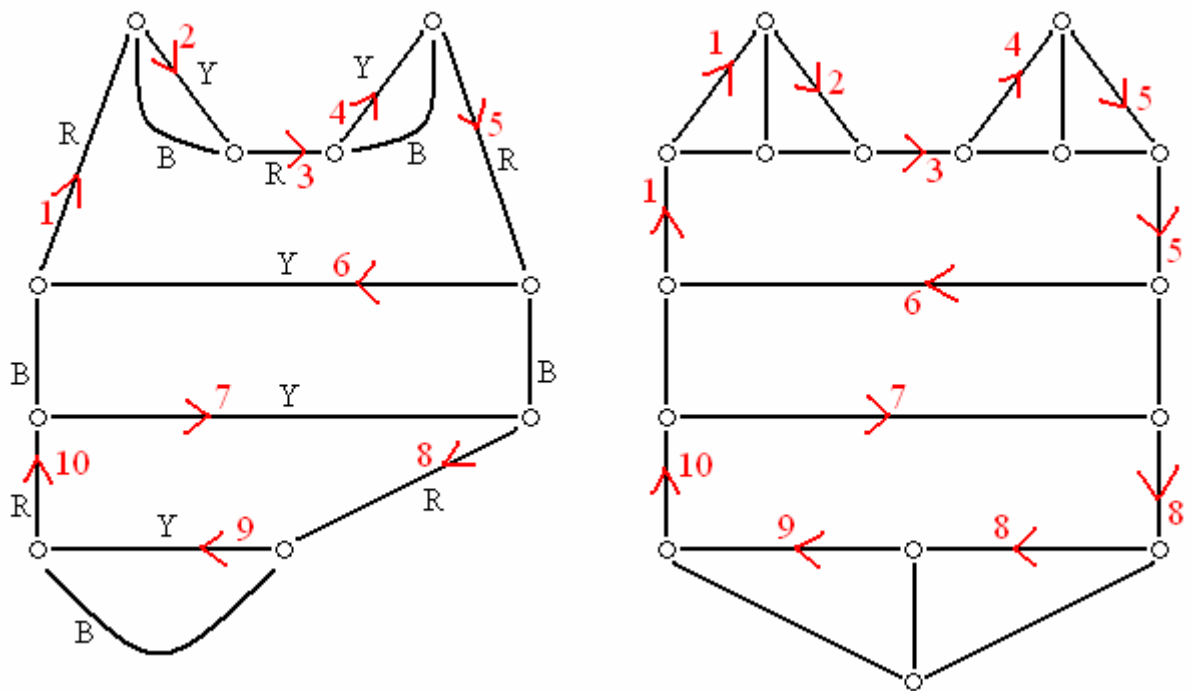
Obrázok 3.2.2.1



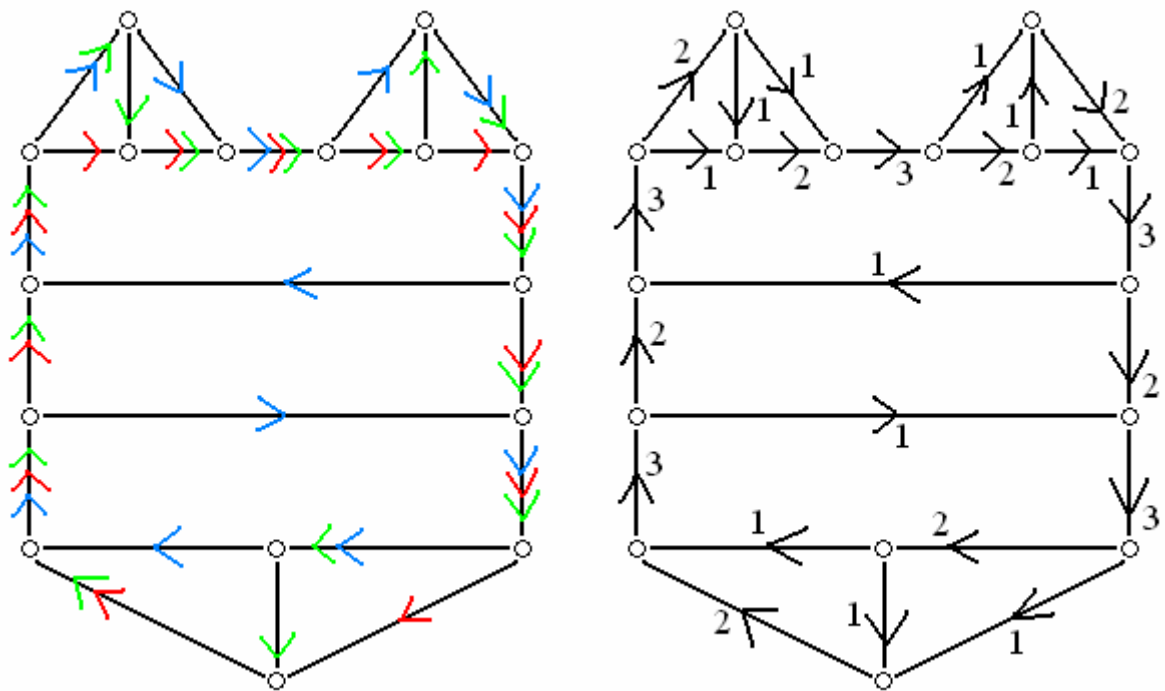
Obrázok 3.2.2.2



Obrázok 3.2.2.3



Obrázok 3.2.2.4



### 3.3 Dominujúca kružnica ako nehamiltonovská

Uvažujeme, že dominujúca kružnica  $C$  nie je hamiltonovská. To znamená, že existujú vrcholy grafu  $G_3$ , ktoré neležia na dominujúcej kružnici  $C$ . Tieto vrcholy sú práve tie, ktoré sú súčasťou nejakej vidly. Našou snahou bude nájsť nikde nulový 6-tok v takomto grafe. Uvažujeme, že kubický graf  $G_3$  má bipartizujúce párenie  $M$ . V ďalšom texte budeme potrebovať aj ďalšie párenie, ktoré budeme označovať  $M'$ . Definované je nasledovne:

**Definícia 3.3.1** Párenie  $M'$  je párenie množiny  $G_3 - E(C)$  také, že graf  $G_3 - M'$  je homeomorfný s hamiltonovským kubickým grafom  $G'_3$  a zároveň platí, že  $M' \cap M = \emptyset$ .

Povedané inak,  $M'$  je párenie, ktoré má podobné vlastnosti, ako bipartizujúce párenie. Rozdiel je v tom, že pokrýva len tie vrcholy, ktoré nie sú na dominujúcej kružnici  $C$ , čiže tam určite nebude patriť žiadna chorda, ale len hrana, ktorá tvorí vidlu. Celkovo to vyzerá tak, že toto párenie obsahuje práve jednu hranu z každej vidly. Pretože navyše aj platí, že  $M' \cap M = \emptyset$ , potom platí, že toto párenie obsahuje práve jednu hranu z dvoch v každej vidle (tretiu hranu vidly obsahuje vždy bipartizujúce párenie  $M$ ). Z tohto vyplýva aj to, že počet všetkých takýchto párení v danom kubickom grafe  $G_3$  je práve  $2^r$ , kde  $r$  je počet vrcholov, ktoré nie sú na dominujúcej kružnici  $C$ . V porovnaní s bipartizujúcim párením je rozdiel ešte ten, že graf, ktorý je homeomorfný s  $G_3 - M'$ , nemusí byť nutne bipartitný. Ale, samozrejme, môže. Faktom je, že ak je graf  $G'_3$  (ktorý je homeomorfný s  $G_3 - M'$ ) bipartitný, potom je párenie  $M'$  bipartizujúce. A naopak, ak je párenie  $M'$  bipartizujúce, potom je graf  $G'_3$  bipartitný. Postup hľadania nikde nulového 6-toku je iný v závislosti od toho, či je graf  $G'_3$  (ktorý je homeomorfný s  $G_3 - M'$ ) bipartitný, alebo nie.

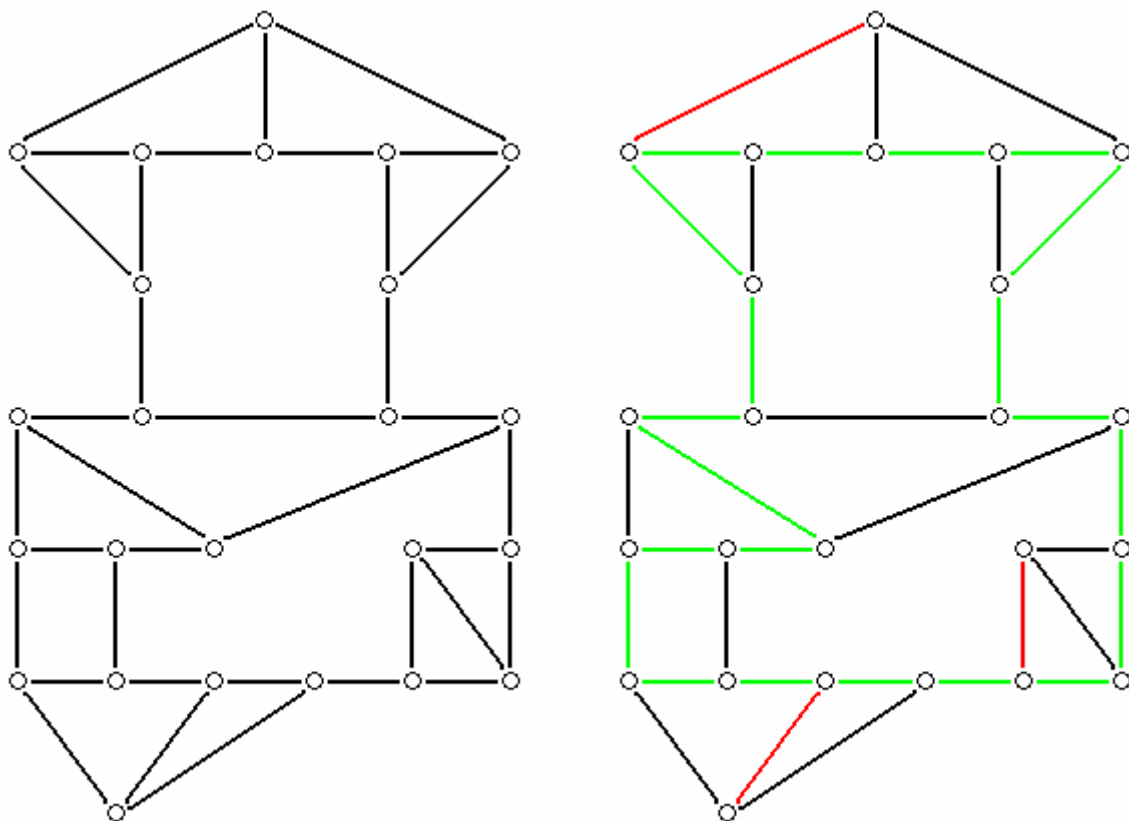
#### 3.3.1 Homeomorfný kubický graf nie je bipartitný

Uvažujeme, že graf  $G'_3$ , homeomorfný s  $G_3 - M'$ , nie je bipartitný. Nikde nulový 6-tok grafu  $G_3$  nájdeme potom tak, že zložíme dva toky. Prvý z nich bude 4-tok, ktorý však bude mať aj neorientované hrany s označením 0. Budeme o ňom hovoriť ako o čiastočnom 4-toku. Pri tvorbe tohto čiastočného toku nám posluží spomenuté párenie  $M'$  a poznatky z podkapitoly 3.2.2. Graf  $G_3$  má dominujúcu kružnicu  $C$ , nie je však hamiltonovská. Ak by bola hamiltonovská, vedeli by sme z podkapitoly 3.2.2 nájsť nikde nulový 4-tok. Problémy nám robia vidly, pretože len tie obsahujú vrcholy, ktoré sa na dominujúcej kružnici  $C$  nenachádzajú. Využijeme vyššie definované párenie  $M'$ , ktoré obsahuje práve jednu hranu z každej vidly. Zostrojíme graf  $G'_3$ , homeomorfný s  $G_3 - M'$ , ktorý nie je podľa predpokladu bipartitný. Graf  $G'_3$  má tiež dominujúcu kružnicu, nazveme ju  $C'$ . Táto kružnica je jednoznačne určená kružnicou  $C$ . Dôležité ale je, že kružnica  $C'$  je zároveň aj hamiltonovskou kružnicou grafu  $G'_3$ . To preto, lebo odstránenie hrán párenia  $M'$  z grafu  $G_3$  zabezpečí, že všetky vidly, ktoré boli v grafe  $G_3$ , už potom v jeho homeomorfnom grafe  $G'_3$  nie sú, z každej vidly sa stanú dva vrcholy a oba sú na kružnici  $C'$ . Takto dostaneme graf  $G'_3$ , ktorému vieme zostrojiť nikde nulový 4-tok. Pôjde však len o nikde nulový 4-tok grafu  $G'_3$ ,

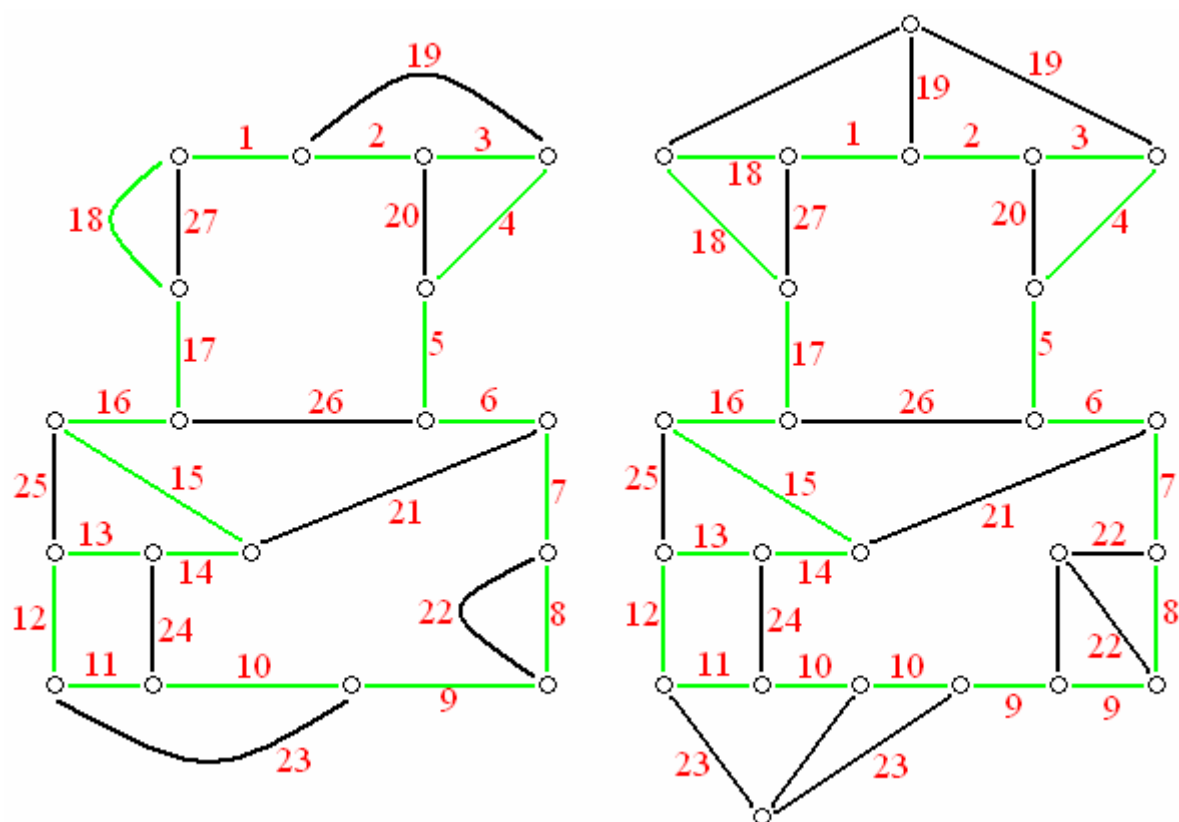
ale nie grafu  $G_3$ . Čo sa týka grafu  $G_3$ , tomu vytvoríme čiastočný 4-tok. Pri procese, keď budeme pomocou operácie opačnej k subdivízií grafu pretvárať graf  $G_3$  na graf  $G'_3$ , si musíme zaznamenať, do ktorých hrán  $G_3$  sa zobrazuje každá z hrán v grafe  $G'_3$ . Potom, keď nájdeme (pomocou podkapitoly 3.2.2) nikde nulový 4-tok grafu  $G'_3$ , prenesieme orientácie a označenia hrán z tohto grafu do grafu  $G_3$ , podľa toho, aké hrany v  $G'_3$  zodpovedajú akým hranám v  $G_3$ .

Vytvorenie čiastočného 4-toku ukážeme teraz na príklade 24 vrcholového kubického grafu, prostredníctvom troch obrázkov. Tvorbu nikde nulového 4-toku grafu  $G'_3$  nebudeme vizualizovať podrobne, podrobne je to ukázané v podkapitole 3.2.2. V tomto prípade ukážeme len výsledok, teda samotný nikde nulový 4-tok. Na obrázku 3.3.1.1 sa nachádza v ľavej časti príklad grafu  $G_3$ , na ktorom ukážeme, ako sa vytvorí čiastočný 4-tok. V pravej časti sa nachádza graf  $G_3$ , kde je označená dominujúca kružnica  $C$  (zelená farba) a párenie  $M'$  (červená farba). Na obrázku 3.3.1.2 sa nachádza v ľavej časti graf  $G'_3$  s vyznačenou dominujúcou kružnicou  $C'$  (zelená farba) a očíslovanými hranami (pre každú hranu práve jedno číslo), v pravej časti graf  $G_3$  s dominujúcou kružnicou  $C$  a očíslovanými hranami – číslo je tu priradené pre každú hranu podľa čísla prislúchajúcej hrany v grafe  $G'_3$ . Na obrázku 3.3.1.3 sa nachádza v ľavej časti nikde nulový 4-tok grafu  $G'_3$  a v pravej časti čiastočný 4-tok grafu  $G_3$ , vytvorený pomocou nikde nulového 4-toku v grafe  $G'_3$ . Pri tvorbe nikde nulového 4-toku grafu  $G'_3$  nie je potrebná len dominujúca kružnica  $C'$ , ale aj jej orientácia. Podobne ako v predošlých príkladoch, budeme uvažovať, že orientácia dominujúcej kružnice  $C'$  je v smere pohybu hodinových ručičiek.

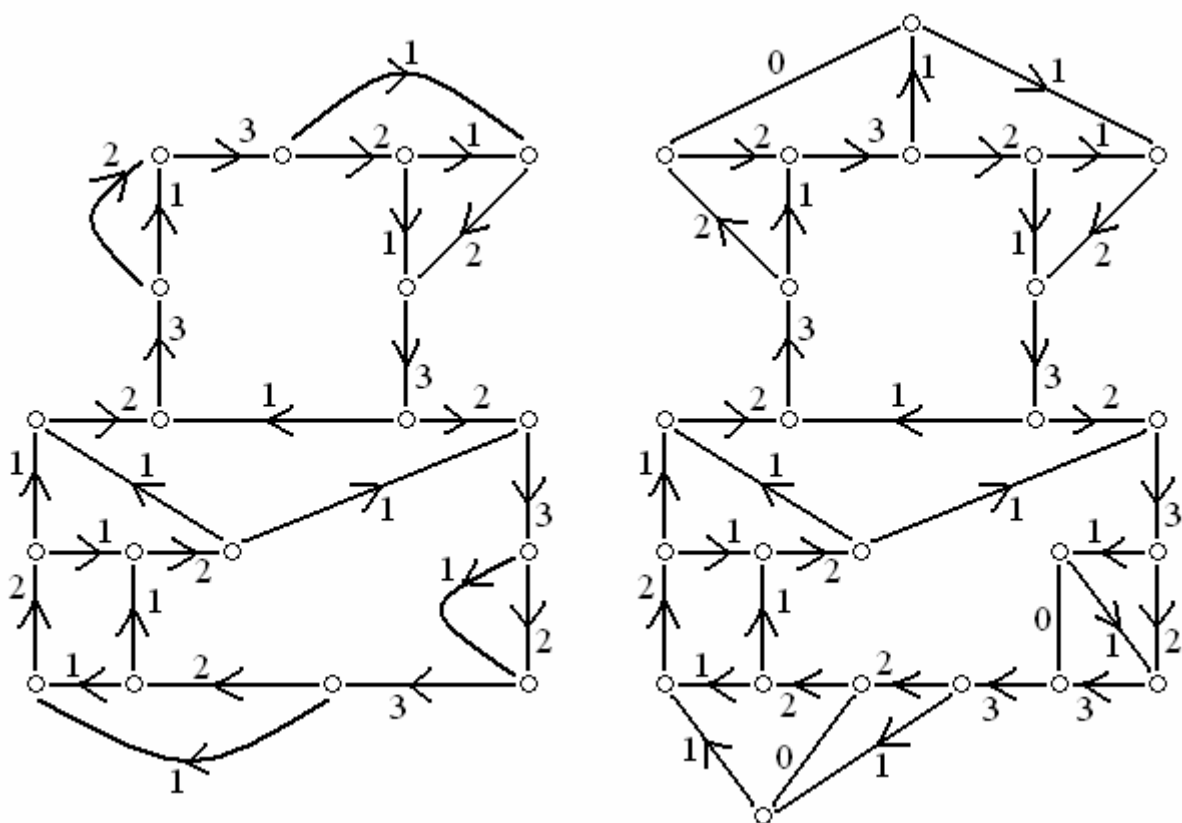
**Obrázok 3.3.1.1**



Obrázok 3.3.1.2



Obrázok 3.3.1.3



Pozrime sa na čiastočný 4-tok grafu  $G_3$ . Výsledok vyzerá celkom dobre, problém však robia hrany, ktoré boli v párení  $M'$ . Tieto sa v homeomorfnom grafe  $G'_3$  nenachádzajú a z toho dôvodu majú v grafe  $G_3$  hodnotu 0 (a teda nemá zatiaľ zmysel uvažovať ich orientáciu). Do čiastočného 4-toku vstúpi druhý tok. Využijeme skutočnosť, že graf  $G_3$  má bipartizujúce párenie  $M$  a platí, že  $M' \cap M = \emptyset$ . V ďalšom texte budeme uvažovať graf, ktorý je homeomorfný k  $G_3 - M$  a nazveme ho  $H$ . Pre prehľadnosť je dobré opäť si označiť hrany homeomorfného grafu práve jedným číslom a hrany grafu  $G_3$  číslami tých hrán v  $H$ , ktoré sú odpovedajúce hranám v homeomorfnom grafe. Tento graf  $H$  má pre nás dôležitú vlastnosť – obsahuje všetky tie hrany, ktoré neobsahuje párenie  $M'$ , práve kvôli tomu, že  $M' \cap M = \emptyset$  a teda po odstránení hrán  $M$  z  $G_3$  tam tieto hrany ostanú. Graf  $H$  je kubický a má dominujúcu kružnicu, určenú podľa dominujúcej kružnice  $C$  grafu  $G_3$ . Táto dominujúca kružnica grafu  $H$  je však aj hamiltonovská a teda je možné mu teda podľa podkapitoly 3.1.1 urobiť Taitovo farbenie a rozložiť ho na 2-faktory  $Q_1$  a  $Q_2$ . Dôležitý bude pre nás práve jeden 2-faktor, je jedno, či si zvolíme  $Q_1$ , alebo  $Q_2$ . Tento 2-faktor bude cyklicky orientovaný a jeho orientáciu bude určovať dominujúca kružnica grafu  $H$  (v obrázkoch budeme opäť uvažovať, že orientácia kružnice je v smere hodinových ručičiek). Spomenutý 2-faktor obsahuje všetky chordy grafu  $H$ . Pretože graf  $H$  vznikol odstránením hrán z  $M$  od  $G_3$ , jeho chordami sú buď chordy grafu  $G_3$ , alebo časti vidiel grafu  $G_3$  (časťou vidly máme na mysli vždy dve hrany každej vidly – tie dve, ktoré nie sú v  $M$ ). Z toho vyplýva, že každá hrana, ktorá bola v  $M'$ , má v 2-faktore ohodnotenie aj orientáciu.

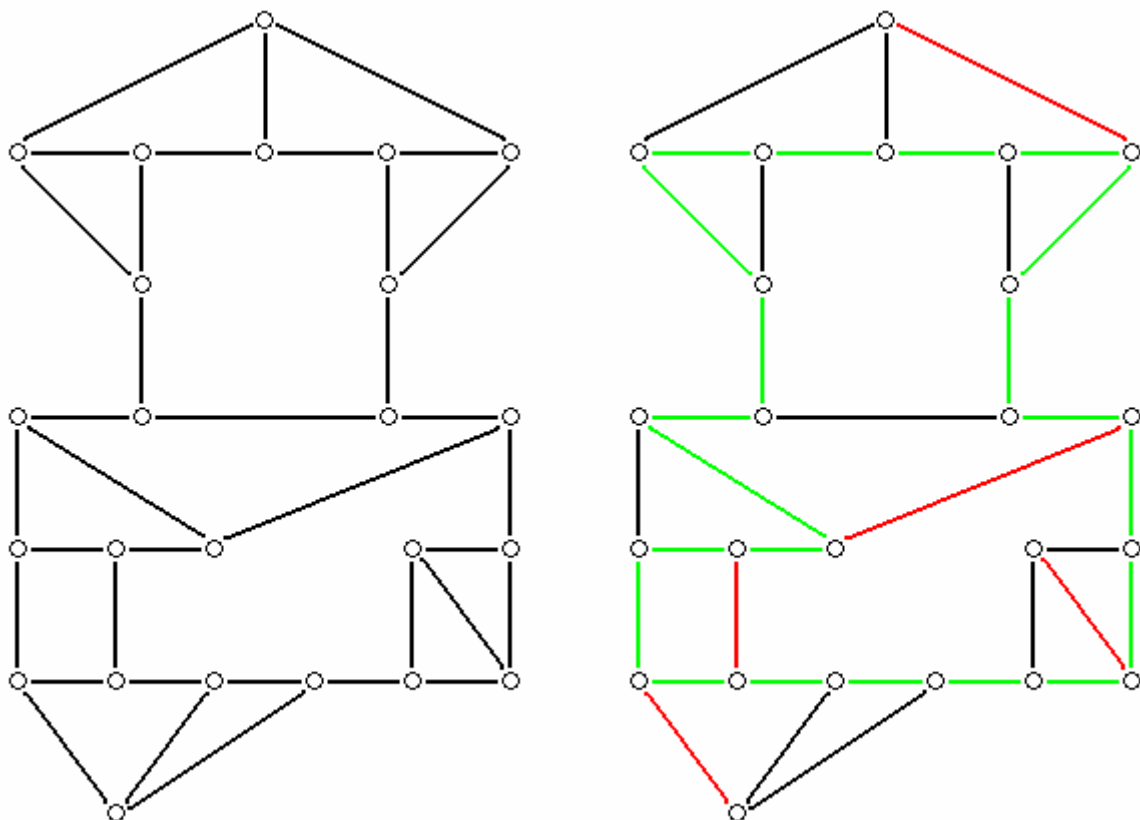
Mohlo by sa zdať, že stačí už len spojiť 2-faktor s čiastočným 4-tokom a bol by to platný výsledok, teda že by vznikol v  $G_3$  nikde nulový tok. Nie je to možné preto, lebo niektoré hrany v čiastočnom 4-toku majú opačnú orientáciu, ako v 2-faktore. Hrany na dominujúcej kružnici sú v poriadku, lebo tie sú v čiastočnom 4-toku všetky, a tie, ktoré sú aj v 2-faktore, sú orientované jedným a tým istým smerom. Hrany, ktoré majú v čiastočnom 4-toku hodnotu 0 a sú bez orientácie, získajú vďaka 2-faktoru aj orientáciu, aj ohodnotenie. Nakoniec ostávajú hrany, ktoré sú chordami grafu  $G'_3$ . Podľa podkapitoly 3.2.2 majú tieto hrany označenie práve 1. Ak by sme uvažovali, že každá kružnica orientovaného 2-faktora má veľkosť toku 1, mohlo by sa stať, že v prípade nerovnakej orientácie hrán v čiastočnom toku a 2-faktore by sa toky zložili do hrany veľkosti 0. Preto uvažujeme, že veľkosť toku v kružniciach 2-faktora je 2. Po tejto úvahe je už možné zložiť navzájom čiastočný 4-tok a 2-faktor. Pretože 2-faktor má tok veľkosti 2, ide o 3-tok a zložením čiastočného 4-toku a tohto 3-toku vzniká nikde nulový 6-tok, čo je našim cieľom.

Zloženie čiastočného 4-toku a 2-faktora je nasledovné: Všetky hrany, ktoré sa nenachádzajú v 2-faktore, získavajú orientáciu a ohodnotenie z čiastočného 4-toku. Pre ostatné hrany platí, že ak majú rovnakú orientáciu v čiastočnom 4-toku, i 2-faktore, potom získavajú orientáciu z 2-faktora, ohodnotenie z čiastočného 4-toku a navyše sa im zvýši ohodnotenie o 2 (to preto, lebo sú to hrany 2-faktora; sú tam zahrnuté aj hrany, ktoré majú v čiastočnom 4-toku ohodnotenie 0). No a pre hrany, ktoré patria do 2-faktora, ale nemajú rovnakú orientáciu, ako v čiastočnom 4-toku, získavajú orientáciu z 2-faktora a ohodnotenie 1. Ide vlastne o zloženie toku veľkosti 1 z čiastočného 4-toku a toku veľkosti 2 z 2-faktora, kvôli tomu je orientácia v smere 2-faktora a veľkosť 1 vyplýva z rozdielu  $2 - 1$ . Výsledkom je nikde nulový 6-tok. Ostáva nám ukázať, že sú splnené oba body vety 3.1.4.1 a že ide skutočne o nikde nulový 6-tok. Vždy uvažujeme cyklickú orientáciu dominujúcej kružnice  $C$ , táto orientácia zasahuje do tvorby čiastočného 4-toku, aj 2-faktora, teda je orientovaná aj v nikde nulovom 6-toku, takže bod 2 vety 3.1.4.1 platí. Čiastočný 4-tok obsahuje hrany s označením 0 až 4. Podľa podkapitoly 3.2.2 sú hrany nikde nulového 4-toku grafu  $G'_3$  označené hodnotami 1, 2 alebo 3, pričom hrany na kružnici  $C'$  sú označené 1, 2 alebo 3 a chordy sú označené ako 1. Pre graf  $G_3$  to znamená, že hrany na  $C$  sú označené ako 1, 2 alebo 3 a zvyšné ako 0 alebo 1.

Keď tam pridáme podľa vyššie uvedeného postupu 2-faktor, hrany tohto faktora sa zvýšia o 2, pričom žiadna hrana neostane nulová. Potom hrany na kružnici  $C$  môžu mať ohodnotenie od 1 do 5 a hrany mimo kružnice  $C$  od 1 do 3. Takto je splnené, že ide o nikde nulový 6-tok a navyše platí bod 1 vety 3.1.4.1, teda že každá hrana s ohodnotením nad 3 leží na kružnici  $C$ .

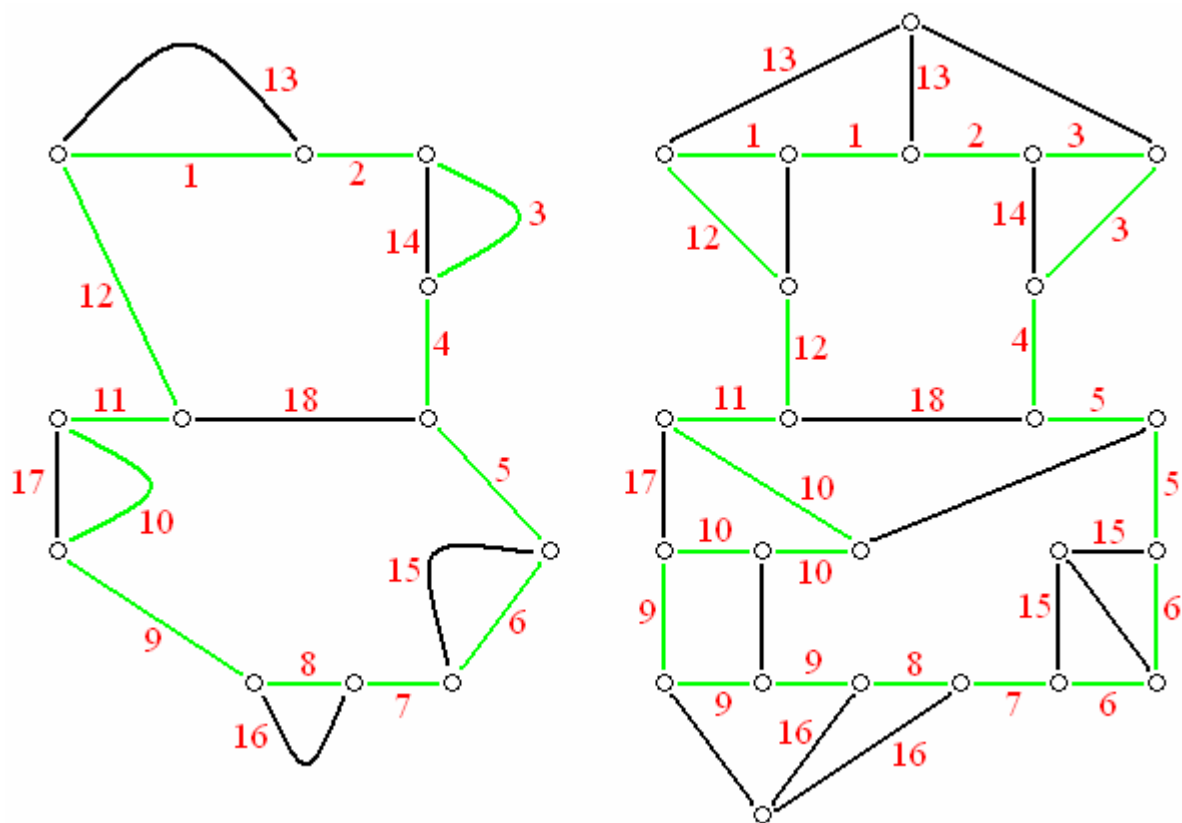
Na ďalších štyroch obrázkoch vizualizujeme bipartizujúce párenie  $M$ , 2-faktor, jeho ohodnotenie, jeho včlenenie do výsledného grafu, ako aj graf s výsledným nikde nulovým 6-tokom. Budeme pokračovať v tom istom grafe, na akom sme hľadali čiastočný 4-tok. Na obrázku 3.3.1.4 sa nachádza v ľavej časti graf  $G_3$ , v pravej časti sa nachádza bipartizujúce párenie  $M$  (označené červenou farbou, dominujúca kružnica  $C$  je na zeleno). Na obrázku 3.3.1.5 sa nachádza v ľavej časti graf  $H$  s vyznačenou dominujúcou kružnicou (zelená farba) a očíslovanými hranami (pre každú hranu práve jedno číslo), v pravej časti graf  $G_3$  s dominujúcou kružnicou  $C$  a očíslovanými hranami – číslo je tu priradené pre každú hranu podľa čísla prislúchajúcej hrany v grafe  $H$ . Na obrázku 3.3.1.6 sa nachádza v ľavej časti graf  $H$  s Taitovým farbením a s 2-faktorom, vybrali sme si  $Q_1$  (daný hranami s označením  $R$  a  $B$ ). Rešpektuje sa pritom orientácia dominujúcej kružnice  $C$  v smere hodinových ručičiek. V pravej časti obrázku sa nachádza tento 2-faktor zobrazený v grafe  $G_3$ , podľa toho, aká hrana v  $H$  patrí akým hranám v  $G_3$ . Na obrázku 3.3.1.7 sa nachádza v ľavej časti graf  $G_3$  s ohodnotenými hranami. Šípky a modré čísla symbolizujú orientáciu a označenia čiastočného 4-toku, červené šípky a čísla zasa orientáciu a označenia 2-faktora  $Q_1$ . V pravej časti sa nachádza potom výsledný nikde nulový 6-tok grafu  $G_3$ .

**Obrázok 3.3.1.4**

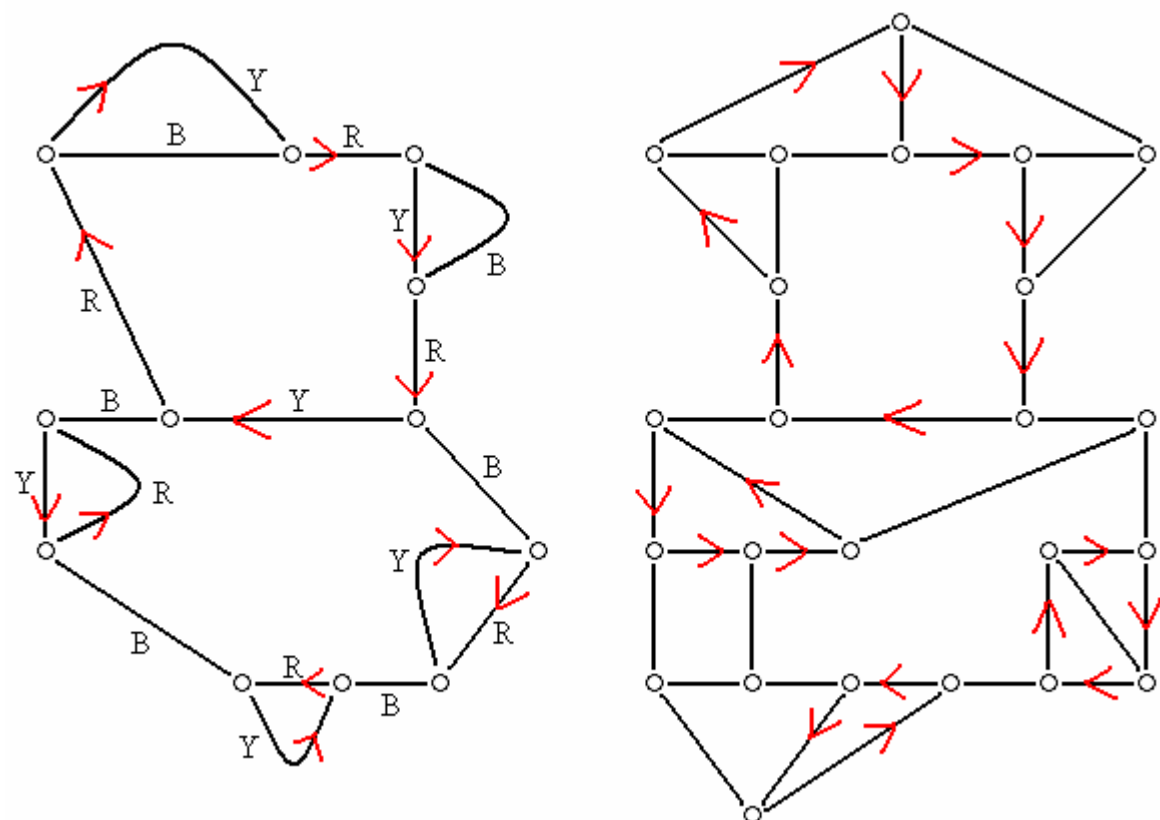




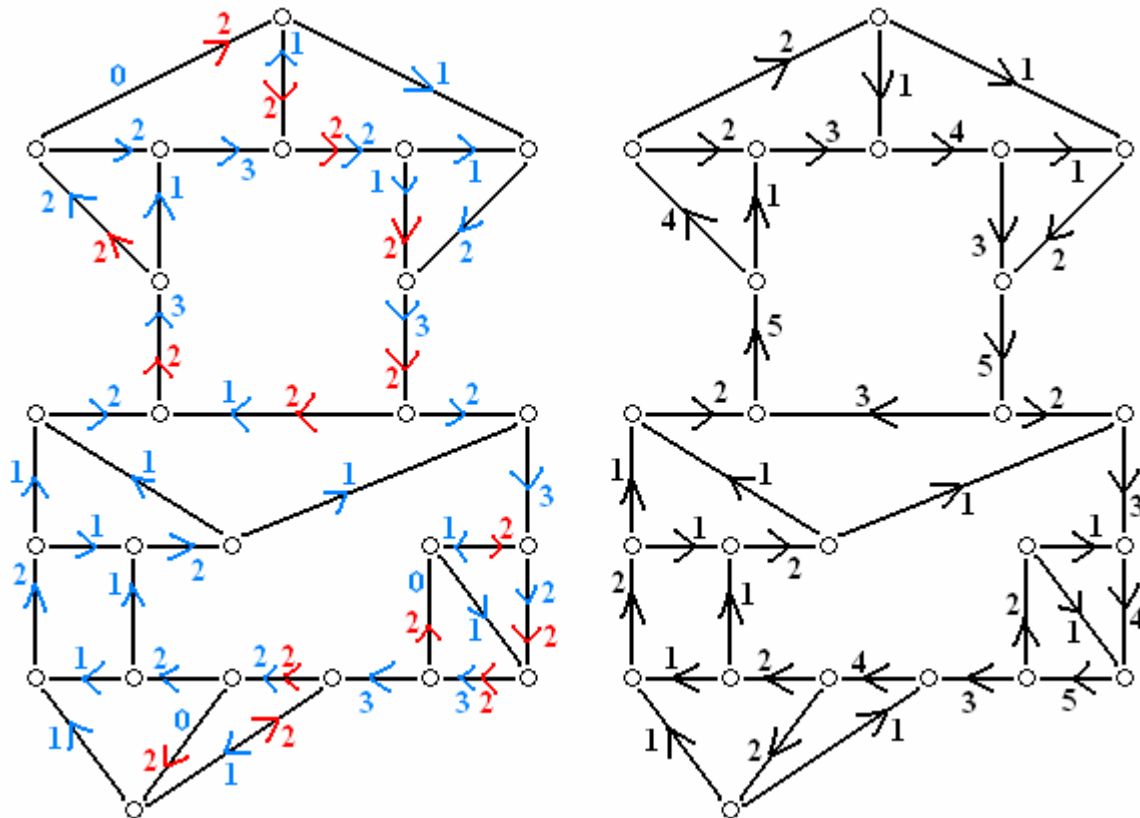
Obrázok 3.3.1.5



Obrázok 3.3.1.6



Obrázok 3.3.1.7



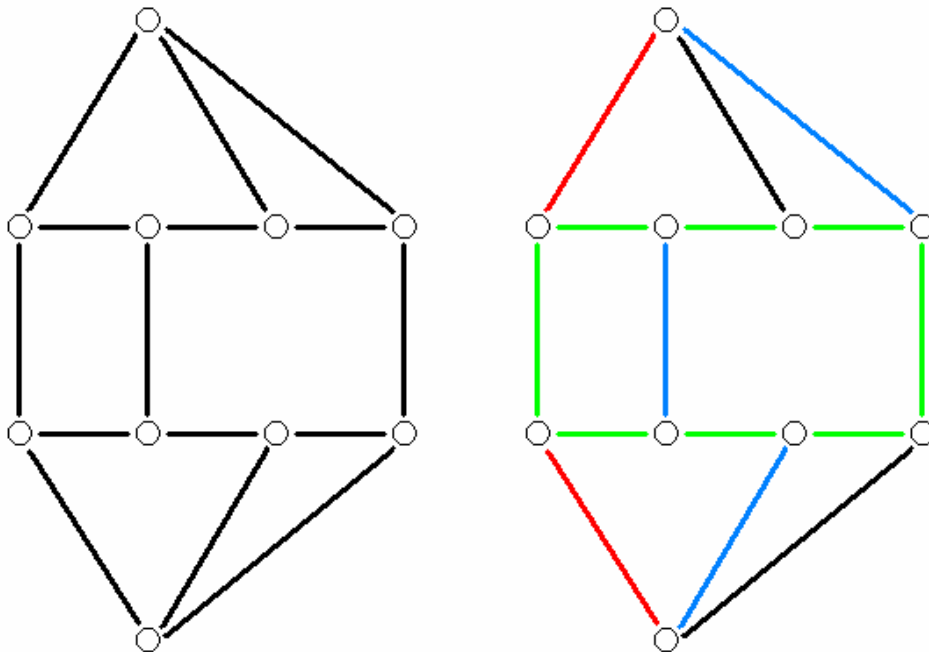
### 3.3.2 Homeomorfný kubický graf je bipartitný

Uvažujeme, že graf  $G'_3$ , homeomorfný s  $G_3 - M'$ , je bipartitný, teda že párenie  $M'$  je bipartizujúce. V tomto prípade postupujeme presne tak isto, ako v prípade, že graf  $G'_3$  nie je bipartitný, až na jednu odlišnosť. Táto odlišnosť je v tom, že grafu  $G'_3$  vytvoríme nikde nulový 3-tok podľa podkapitoly 3.2.1. Ostatný postup je už potom analogický s postupom v podkapitole 3.3.1. Z toho dôvodu už len stručne popíšeme, ako vytvoríme nikde nulový 5-tok grafu  $G_3$ , stručný bude aj obrázkový príklad. V celom postupe uvažujeme cyklickú orientáciu dominujúcej kružnice  $C'$ . Grafu  $G'_3$  vytvoríme podľa podkapitoly 3.2.1 nikde nulový 3-tok, pričom si pri tvorbe grafu  $G'_3$  pamätáme, aká hrana v  $G'_3$  pripadá akým hranám v  $G_3$ . Potom vytvoríme z nikde nulového 3-toku grafu  $G'_3$  čiastočný 3-tok grafu  $G_3$ . Teraz využijeme bipartizujúce párenie  $M$ . Vytvoríme graf  $H$ , homeomorfný s  $G_3 - M$  (opäť si pamätáme, aká hrana v  $H$  prislúcha akým hranám v  $G_3$ ). V ňom urobíme Taitovo farbenie a zvolíme si práve jeden 2-faktor, ktorý zlúčime s nikde nulovým 3-tokom. Podobne aj tu je orientácia hrán 2-faktora určená orientáciou dominujúcej kružnice  $C$  a hodnota toku v hranách je rovná 2. Takto sme dostali poskladaním čiastočného 3-toku grafu  $G_3$  a zvoleného 2-faktora nikde nulový 5-tok. Je tomu tak preto, lebo v čiastočnom 3-toku sú hrany označené ako 0, 1 alebo 2, a keď tam pridáme zvolený 2-faktor, môžu sa hrany zväčšiť o 2, teda potom je označenie hrán od 0 do 4. Navyše vieme, na základe popisu v podkapitole 3.3.1, že každá hrana, ktorá má v čiastočnom 3-toku hodnotu 0, získa vďaka 2-faktoru orientáciu a hodnotu 2,

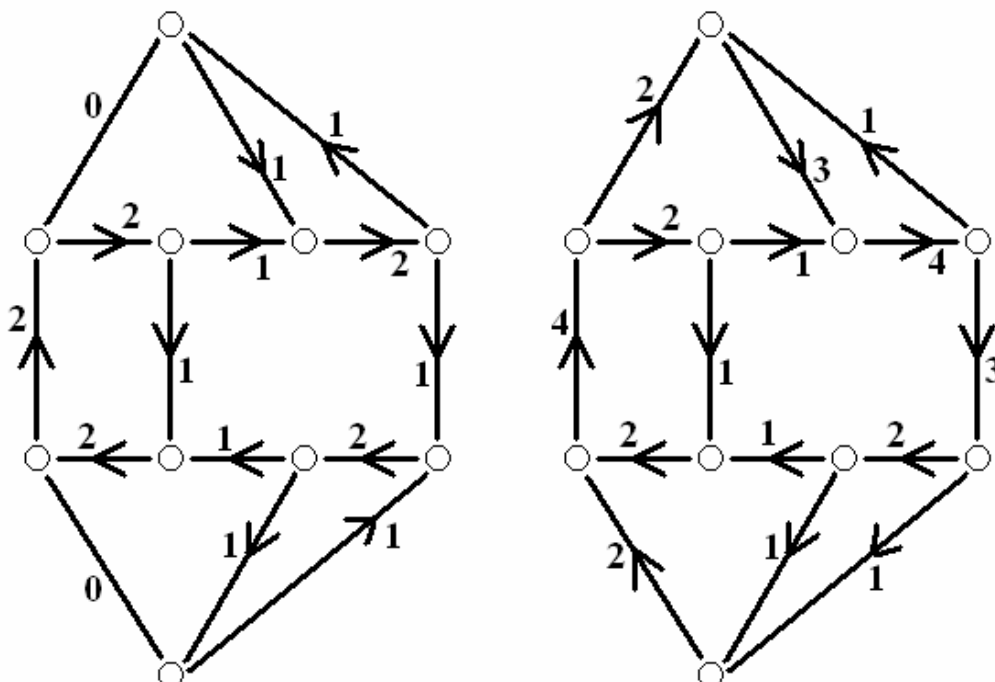
teda tok bude nenulový. Z toho vyplýva, že výsledkom je nikde nulový 5-tok (čo je aj nikde nulový 6-tok, ako sa uvádza vo vete 3.1.4.1). Dominujúca kružnica  $C$  je cyklicky orientovaná a len hrany na tejto kružnici môžu dosiahnuť označenie väčšie ako 3. Z toho vyplýva, že veta 3.1.4.1 platí aj pre tento prípad.

V nasledujúcom príklade ukážeme tvorbu nikde nulového 5-toku na 10 vrcholovom kubickom grafe. Na obrázku 3.3.2.1 sa nachádza v ľavej časti graf  $G_3$ , v pravej časti sa nachádza graf  $G_3$ , kde je označená dominujúca kružnica  $C$  (zelená farba), párenie  $M'$  (červená farba) a párenie  $M$  (modrá farba). Na obrázku 3.3.2.2 sa nachádza v ľavej časti čiastočný 3-tok grafu  $G_3$  a v pravej časti sa nachádza nikde nulový 5-tok grafu  $G_3$ .

Obrázok 3.3.2.1



Obrázok 3.3.2.2



# Kapitola 4

## Súvis s hypotézou dvojitého pokrytia cyklami

### 4.1 Hypotéza dvojitého pokrytia cyklami

**Hypotéza 4.1.1** (Hypotéza dvojitého pokrytia cyklami [4]) *V každom bezmostovom grafe  $G$  existuje množina cyklov  $S$  taká, že každá hrana grafu  $G$  patrí práve dvom prvkom množiny  $S$ . Inými slovami, každá hrana grafu  $G$  je pokrytá práve dvoma cyklami z  $S$ .*

Zaoberáme sa kubickými grafmi, ktoré majú dominujúcu kružnicu. Podľa podkapitoly 2.2 platí, že kubický graf s dominujúcou kružnicou nemá most. Takto platí predpoklad hypotézy 4.1.1 a podľa nej teda existuje spomenutá množina cyklov  $S$ , že každá hrana grafu  $G$  patrí práve dvom prvkom množiny  $S$ . Hlavným predmetom tejto kapitoly bude dôkaz nasledujúcej vety. Dôkaz bude demonštrovaný aj na príklade jedného konkrétneho grafu.

**Veta 4.1.1** [4] *Nech  $G_3$  je kubický graf s dominujúcou kružnicou  $C$ . Ak má graf  $G_3$  dve dizjunktné bipartizujúce párenia, potom má 5-dvojité pokrytie cyklami (5-cycle double cover)  $S_3$  také, že  $C \in S_3$ .*

K vete 4.1.1 je nevyhnutné uviesť dve definície. Ide o pojmy cyklus (cycle) a  $k$ -CDC. Vo všeobecnosti sa pod pojmom cyklus chápe kružnica v grafe. V tejto celej kapitole budeme pod týmto pojmom chápať to, čo je uvedené v nasledujúcej definícii.

**Definícia 4.1.1** Pojem cyklus uvedený vo vete 4.1.1 definujeme ako podgraf grafu  $G$ , ktorý má všetky stupne párne. Je to podobné s eulerovským podgrafom, rozdielom ale je, že tento podgraf nemusí byť súvislý. Inými slovami, cyklus uvedený vo vete 4.1.1 je podgraf grafu  $G$  taký, že každý jeho komponent je eulerovský.

**Definícia 4.1.2**  $k$ -Dvojité pokrytie cyklami  $k$ -CDC ( $k$ -cycle double cover) je množina  $k$  cyklov grafu  $G$  taká, že pre každú hranu grafu  $G$  platí, že je práve v dvoch cykloch z tejto množiny cyklov.

V zmysle definícií 4.1.1 a 4.1.2 sa dá zadanie vety 4.1.1 vysvetliť nasledovne: Máme daný kubický graf  $G_3$  a našou úlohou je nájsť 5 podgrafov takých, že každý vrchol tohto podgrafu má párny stupeň, jeden z podgrafov je dominujúca kružnica  $C$  a pre každú hranu grafu  $G_3$  platí, že patrí práve dvom týmto podgrafom. Dôkaz vety 4.1.1 je popísaný v podkapitole 4.2.2. Ide o konštruktívny dôkaz a výsledkom bude nájdenie spomenutého 5-CDC v kubickom grafe. Výsledkom bude však aj ešte čosi iné. Postupom v dôkaze vety 4.1.1 sa nájde zároveň aj cyklový rozklad v príslušnom eulerovskom grafe  $(G, T)$  taký, že žiadne dve po sebe idúce hrany v eulerovskom ťahu  $T$  nebudú z toho istého cyklu. O tomto hovorí hypotéza 2.3.1 a vysvetlené to bude v podkapitole 4.3.

## 4.2 Dve dizjunktné bipartizujúce párenia a 5-CDC

### 4.2.1 Popis triedy kubických grafov pre 5-CDC

Dôkaz vety 4.1.1 vychádza z eulerovského grafu  $(G, T)$ , z ktorého sa vytvorí graf  $(G_3, C)$ . Oba tieto grafy a spojitosť medzi nimi sú popísané v kapitole 2. Graf  $(G, T)$  je eulerovský graf, ktorý má vrcholy stupňa iba 4 alebo 6. Písmenom  $T$  je označený eulerovský ťah. Graf  $(G_3, C)$  je kubický graf s dominujúcou kružnicou  $C$  a je vytvorený z grafu  $(G, T)$  algoritmom 2.3.1. Hovoríme, že graf  $(G_3, C)$  je združený s grafom  $(G, T)$ . 5-CDC budeme teda robiť a demonštrovať iba na triede tých kubických grafov  $(G_3, C)$ , pre ktoré existuje eulerovský graf  $(G, T)$  taký, že  $(G_3, C)$  je združený s grafom  $(G, T)$ .

### 4.2.2 Nájdenie 5-dvojitého pokrytia cyklami

Začínajúc grafom  $(G, T)$  vytvoríme podľa algoritmu 2.3.1 graf  $(G_3, C)$ , ktorý je združený s týmto grafom. Vytvoríme graf  $G^+$ , ktorý získame z grafu  $G_3$  tak, že zdvojnásobíme tie hrany grafu  $G_3$ , ktoré nepatria dominujúcej kružnici. Pôjde teda o všetky hrany, ktoré sú chordami a vidlami v grafe  $G_3$ . Graf  $G^+$  sa takto stane eulerovským a  $C$  grafu  $G_3$  bude aj jeho dominujúcou kružnicou. Našou úlohou bude zostrojiť dva eulerovské orientované podgrafy  $D_1$  a  $D_2$  grafu  $G^+$ . Po zostrojení  $D_1$  a  $D_2$  budeme uvažovať dva rozklady na cykly. Prvý cyklus bude vytvorený z podgrafu  $D_1 \cap D_2$  a druhý cyklus z podgrafu  $D_1 - D_1 \cap D_2$ . Podgraf  $D_i$  zostrojíme pomocou bipartizujúceho párenia  $M_i$ , kde  $i = 1, 2$ . Najprv vytvoríme graf  $G_3^{(i)}$ , ktorý je homeomorfný s grafom  $G_3 - M_i$ . Graf  $G_3^{(i)}$  je bipartitný, z čoho vyplýva, že má orientovaný podgraf  $D_3^{(i)}$  taký, že susedné hrany dominujúcej a zároveň aj Hamiltonovskej kružnice  $C^{(i)}$  (ktorá korešponduje s dominujúcou kružnicou  $C$  grafu  $G_3$ ) sú orientované striedavo, raz v súhlasnom smere (smerujú obe zo spoločného vrchola) a raz v nesúhlasnom smere (smerujú obe do spoločného vrchola). Je tomu tak preto, lebo kružnica  $C^{(i)}$  má párny počet hrán. Ostatné hrany (neležiace na  $C^{(i)}$ ) grafu  $G_3^{(i)}$  sú tiež v podgrafe  $D_3^{(i)}$ . Pre každú takúto hranu platí, že práve jeden z jej dvoch koncových vrcholov je taký, že doňho smerujú hrany kružnice  $C^{(i)}$  a jeden taký, že hrany kružnice  $C^{(i)}$  smerujú z neho. Orientácia týchto hrán je potom jednoznačne určená – ide z vrchola, do ktorého hrany kružnice  $C^{(i)}$  smerujú, smerom do druhého vrchola. Zjednodušene povedané, idú od zdroja smerom k ústiu.

V ďalšom kroku prevedieme orientáciu hrán podgrafu  $D_3^{(i)}$  na graf  $G^+$ . Vznikne nám tak podgraf grafu  $G^+$  a tento budeme označovať  $D_i$ . Pri prevádzaní je treba dávať pozor na to, že jedna hrana v  $G_3^{(i)}$  môže prislúchať viacerým hranám v  $G^+$ . To závisí od toho, do akej miery sa hrany skrátili pri operácii opačnej k subdivízii hrany, keď sa graf  $G_3$  prevádzal na homeomorfný graf  $G_3^{(i)}$ . Po prevedení je ešte potrebné zabezpečiť orientáciu hrán grafu  $G^+$ , ktoré vznikli zdvojením hrán ležiacich mimo dominujúcej kružnice. Ak ide o hranu, ktorá nebola v bipartizujúcom párení  $M_i$  grafu  $G_3$ , t.j. jedna z dvojice týchto hrán je orientovaná v  $D_i$ , potom druhá z týchto hrán získava orientáciu v rovnakom smere, ako prvá hrana z dvojice. Ak ide o hranu, ktorá bola v bipartizujúcom párení  $M_i$ , t.j. ani jedna z dvojice hrán nemá orientáciu v  $D_i$ , potom tieto hrany získavajú orientáciu v podobe cyklu dĺžky 2, t.j. sú orientované tak, že tvoria cyklus. Takto máme vytvorené oba grafy  $D_1$  a  $D_2$ , ktoré sú podgrafmi grafu  $G^+$ . Ide o orientované eulerovské podgrafy.

V ďalšom kroku uvažujeme dva grafy. Prvý z nich je  $D_{1,2} := \langle A(D_1 \cap D_2) \rangle$  a druhý z nich je  $\bar{D}_1 := \langle A(D_1 - D_{1,2}) \rangle$ . Množina  $A$  je množina orientovaných hrán (arcs). Prienikom grafov  $D_1$  a  $D_2$  sú tie orientované hrany, ktoré patria obom grafom. Rozdielom grafu  $D_1$  a  $D_{1,2}$  sú tie orientované hrany, ktoré sa nachádzajú v  $D_1$ , ale nie v  $D_{1,2}$ . Oba tieto grafy, teda grafy  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$ , sú podgrafy grafu  $G^+$  a sú to cykly. Pozrime sa teraz bližšie, čo platí o grafoch  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$ . Pre každý vrchol  $x$ , ktorý má v grafe  $G^+$  stupeň 6 platí, že každý z grafov  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$  obsahuje práve dve zo štyroch orientovaných hrán, ktoré prislúchajú prieniku  $M_1 \cup M_2$  a  $E_x$ . Je tomu tak preto, lebo ide o vrchol, ktorý mal už v grafe  $(G, T)$  stupeň 6, pri transformácii na graf  $G_3$  sa z neho potom stala vidla grafu  $G_3$  (obrázok 2.3.2). Aj  $M_1$ , aj  $M_2$  obsahuje práve jednu hranu z tejto vidly. No a pretože pri premene grafu  $G_3$  na graf  $G^+$  sa tieto hrany z vidly zdvojnásobili (neležia na dominujúcej kružnici), ide o štyri hrany a to sú práve tie hrany – dve z  $M_1$  a dve z  $M_2$ . Všetky tieto hrany sú samozrejme navzájom rôzne. Zvyšná jedna hrana z vidly v grafe  $G_3$ , resp. dve v grafe  $G^+$  nie sú v ani jednom z párení a z toho dôvodu sa ocitnú obe tieto orientované hrany práve v jednom z grafov  $D_{1,2}$  alebo  $\bar{D}_1$ . Z tohto vyplýva, že ak má vrchol  $x$  stupeň 4 v jednom z grafov  $D_{1,2}$  alebo  $\bar{D}_1$ , potom dve zo štyroch orientovaných hrán susediacich s  $x$  sú paralelné orientované hrany (a síce vo zdvojenej hrane, ktorá nepatrí ani jednému bipartizujúcemu páreniu). Vo všeobecnosti, ak má vrchol  $x$  stupeň 4 v  $D_{1,2}$  ( $\bar{D}_1$ ), potom má stupeň 2 v  $\bar{D}_1$  ( $D_{1,2}$ ) práve vtedy, keď  $x \in V(G^+) - V(C)$ . V prípade, že má vrchol  $x$  stupeň 4 a  $x \in V(C)$ , potom má stupeň 4 práve v jednom z grafov  $D_{1,2}$  alebo  $\bar{D}_1$ . Ak platí, že  $x \in V(C)$  a vrchol  $x$  nie je susedný so 6 stupňovým vrcholom v  $G^+$ , potom má buď stupeň 2 v oboch z grafov  $D_{1,2}$ ,  $\bar{D}_1$  alebo má stupeň 4 práve v jednom z nich a v druhom nemá žiadne zastúpenie. Závisí to od bipartizujúcich párení  $M_1$  a  $M_2$ . V prípade, že  $x \in V(C)$  a nie je susedom 6 stupňového vrchola v  $G^+$ , tak to znamená, že tento vrchol je susedný s chordou v  $G_3$ . Ak jedno z bipartizujúcich párení túto chordu obsahuje, potom nastáva prvý prípad, teda že vrchol  $x$  má stupeň 2 v oboch grafoch  $D_{1,2}$ ,  $\bar{D}_1$ , v opačnom prípade má stupeň 4 práve v jednom z nich a v druhom nie je zastúpené. Pretože platí, že  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , potom z toho vyplýva, že v prípade dvojestupňového vrchola  $x$  v jednom z grafov  $D_{1,2}$ ,  $\bar{D}_1$  patrí nanajvyš jedna orientovaná hrana obsahujúca vrchol  $x$  dominujúcej kružnici  $C$ .

Všetky predošlé úvahy o grafoch  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$  vedú k nasledujúcim výsledkom:

- a)  $D_{1,2}$  ( $\bar{D}_1$ ) je buď množina kružníc, alebo je homeomorfný s 2-diregulárnym digrafom  $D'_{1,2}$  ( $\bar{D}'_1$ ), ktorého každý vrchol je susediaci s párom paralelných orientovaných hrán. Pre úplnosť, 2-diregulárny digraf je graf, ktorý má všetky vrcholy stupňa 4 a do každého vrchola vchádzajú a z každého vrchola vychádzajú práve dve orientované hrany.
- b) Ak  $D_{1,2}$  ( $\bar{D}_1$ ) nie je množina kružníc, potom  $D'_{1,2}$  ( $\bar{D}'_1$ ) je bipartitný graf.
- c) Z a) a b) vyplýva, že každý z grafov  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$  má cyklový rozklad  $S_{1,2}$  a  $\bar{S}_1$  do najviac dvoch paralelných tried. To znamená, že každý z cyklových rozkladov  $S_{1,2}$  a  $\bar{S}_1$  sa dá rozdeliť do dvoch tried úplne dizjunktných cyklov.

Každý z grafov  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$  má teda dva cyklové rozklady. Dôležité je tu práve to, aby v prípade, ak sa v grafe  $D_{1,2}$  alebo  $\bar{D}_1$  nachádzajú obe orientované hrany v nejakej zdvojenej hrane (máme na mysli zdvojenú hranu, ktorá vznikla pri zostrojení grafu  $G^+$  z grafu  $G_3$ ), potom tieto orientované hrany musia patriť rôznym cyklovým rozkladom. Máme dva

podgrafy grafu  $G^+$  a oba majú dva cyklové rozklady. Dovedna máme takto 4 cykly. Upozorňujeme na to, že tieto cykly sú cykly v zmysle definície 4.1.1, konkrétne je každý cyklus zjednotením dizjunktných kružníc. Pojem „dizjunktné kružnice“ chápeme ako kružnice bez prieniku na hranách. Naším cieľom v tejto podkapitole bolo ukázať, že kubický graf  $G_3$  má 5-CDC. Z grafu  $G^+$ , v ktorom máme rozklad na 4 cykly, ho vytvoríme jednoducho: Každú zdvojenú hranu premeníme na jednu hranu. Takto sa stane to, že každá chorda grafu  $G_3$ , ako aj všetky tri hrany každej vidly v  $G_3$  budú patriť práve dvom cyklom. Každá hrana dominujúcej kružnice  $C$  bude prostredníctvom 4 týchto cyklov pokrytá práve raz. Avšak, aj intuitívne, aj podľa vety 4.1.1, piatym cyklom (ktorý je vlastne jednou kružnicou) bude samotná dominujúca kružnica  $C$ . Takto platí to, čo uvádza veta 4.1.1: Každá hrana grafu  $G_3$  je pokrytá práve dvoma rôznymi cyklami, tých cyklov je 5 a jedným z nich je dominujúca kružnica  $C$ .

### 4.2.3 Poznámka k originálnemu článku

V článku [4] sa vyskytuje dôležitá nezrovnalosť v terminológii. Ide o pojem „cycle“. Tento pojem sa v teórii grafov používa v rôznych významoch. Tu sa používa vo význame definície 4.1.1, ale aj vo význame pojmu „kružnica“. Nevhodné je v článku práve to, že sa to zlieva, raz sa tam má na mysli jedno, inokedy druhé a dôkaz na stranách 79 až 81 článku [4] sa kvôli tomu zle chápe.

Viacere tvrdenia sú pri korektnom chápaní slova „cycle“ nepravdivé, ale opraviteľné. Termín „dominating cycle“ tu figuruje vo význame dominujúcej kružnice. V tomto dôkaze by bolo vhodnejšie použiť termín „dominating circuit“. Termín „circuit“ je už jasnejší – ide totiž práve o kružnicu. Termín „circuit“ by bolo vhodné zameniť aj v prípade bodov a) a b) na strane 80 spomínaného článku. Nejedná sa tam totiž o množinu cyklov v zmysle definície 4.1.1, ale o množinu kružníc. Termín „cycle“ totiž prislúcha grafom  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$ . No a napokon v bode c) by bolo vhodnejšie nahradiť posledné slovo tiež termínom „circuit“, nakoľko ide o množinu úplne rôznych kružníc, a nie cyklov.

## 4.3 Súvis so Sabidussiho hypotézou compatibility

Sabidussiho hypotéza compatibility je uvedená ako Hypotéza 2.3.1. Hovorí o tom, že ak je eulerovský graf  $G$  súvislý, platí, že  $\delta(G) > 2$  a  $T$  je eulerovský ťah grafu  $G$ , potom existuje cyklový rozklad  $S$  grafu  $G$  taký, že pre ľubovoľné dve po sebe idúce hrany z  $T$  platí, že patria do rozdielných prvkov  $S$ . Takýto cyklový rozklad označujeme potom ako cyklový rozklad kompatibilný s  $T$ . Dôkaz vety 4.1.1 uvedený v podkapitole 4.2.2 priniesol nielen dvojité pokrytie hrán piatimi cyklami kubického grafu  $G_3$  vytvoreného z grafu  $(G, T)$ , ale aj cyklový rozklad grafu  $(G, T)$  kompatibilný s  $T$ . Čo sa týka grafu  $(G, T)$ , sme obmedzení nerovnosťami  $\delta(G) > 2$  a  $4 \leq \Delta(G) \leq 6$ . Každý vrchol má stupeň 4 alebo 6 a pre túto triedu grafov je možné pomocou bipartizujúcich párení urobiť cyklový rozklad  $S$  kompatibilný s  $T$ .

Postup je rovnaký, ako v prípade hľadania 5-CDC na kubickom grafe vzniknutého z grafu  $(G, T)$ . Rozdielom je, že neuvažujeme v tomto prípade dominujúcu kružnicu ako cyklus (ale iba 4 cykly vzniknuté z grafov  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$ ). Dôležitým rozdielom je aj to, že na konci odstránime v grafe  $G^+$  pokrytom 4 cyklami všetky zdvojené chordy a všetky zdvojené

vidly, ktoré vznikli pri premene grafu  $(G, T)$  na graf  $G_3$  (tie sa potom ešte zdvojili pri premene na graf  $G^+$ ). Vlastne urobíme opačné operácie, ako sú popísané v algoritme 2.3.1 a dostaneme opäť graf  $(G, T)$ . Z konštrukcie dôkazu vety 4.1.1 a skutočnosti, že grafy  $D_{1,2}$  a  $\bar{D}_1$  sa dajú rozdeliť na dve triedy úplne dizjunktných kružníc vyplýva, že žiadne dve po sebe idúce hrany v eulerovskom ťahu nebudú z jedného a toho istého cyklu. Zároveň bude platiť, že každá hrana eulerovského ťahu  $T$  bude pokrytá práve jedným cyklom. Takto je potom hľadaný cyklový rozklad  $S$  zjednotením všetkých štyroch cyklov – dvoch z grafu  $D_{1,2}$  a dvoch z grafu  $\bar{D}_1$ .

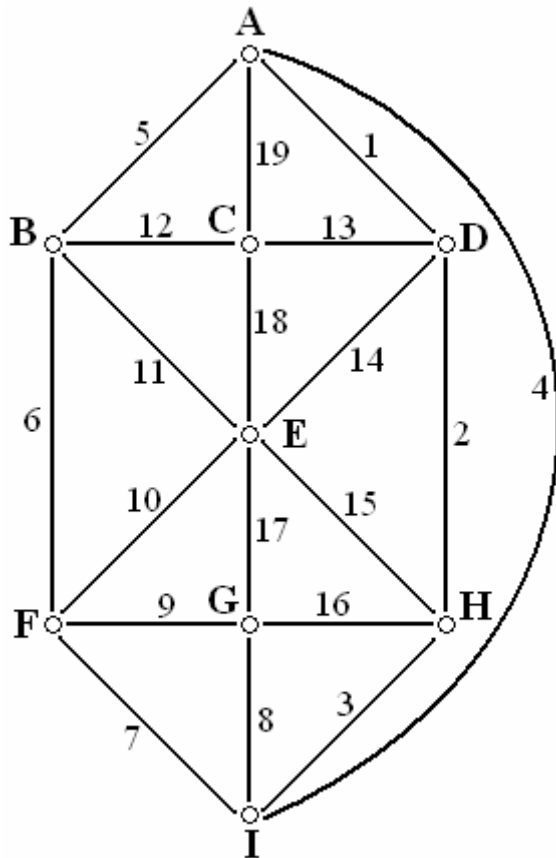
## 4.4 Ukážka na konkrétnom príklade

Dôkaz vety 4.1.1, 5-CDC kubického grafu  $G_3$  a cyklový rozklad  $S$  grafu  $(G, T)$  teraz pre lepšie pochopenie ukážeme na príklade konkrétneho grafu. Pôjde o graf známy z obrázku 2.3.5, resp. 2.3.6, pretože je vhodný na tento účel. Graf  $(G, T)$  je eulerovský s eulerovským ťahom  $T$ , má vrcholy len stupňa 4 alebo 6, nemá príliš veľké množstvo vrcholov a má aj jeden vrchol stupňa 6.

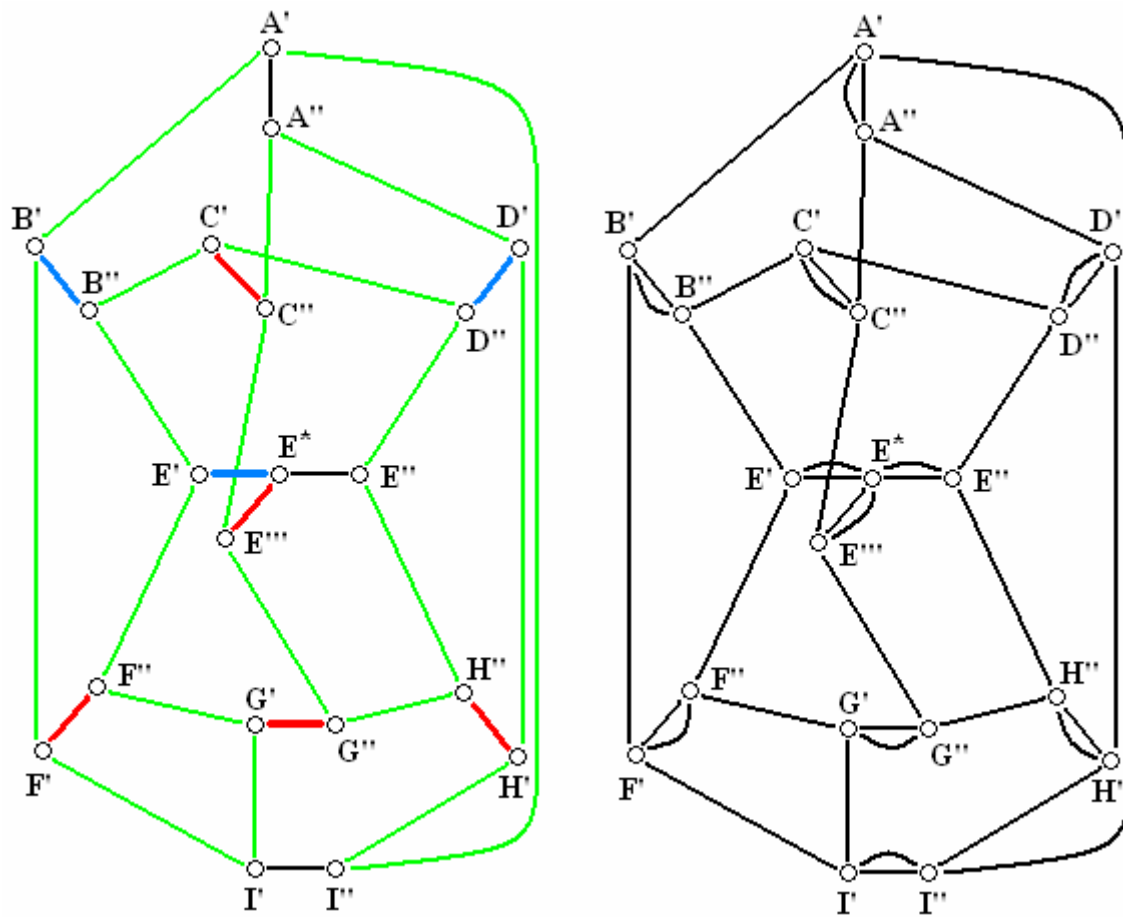
Na obrázku 4.4.1 sa nachádza graf  $(G, T)$  s označením vrcholov a eulerovského ťahu  $T$ . Poradie tohto ťahu určujú čísla pri jednotlivých hranách. Na obrázku 4.4.2 je v ľavej časti graf  $G_3$ . Zelenou farbou je vyznačená dominujúca kružnica  $C$ , červenou je vyznačené bipartizujúce párenie  $M_1$  a modrou farbou bipartizujúce párenie  $M_2$ . V pravej časti tohto obrázku je graf  $G^+$ . Na obrázku 4.4.3 sa v ľavej časti nachádza graf  $G_3^{(1)}$ , ktorý je homeomorfný s grafom  $G_3 - M_1$  spolu s orientovaným podgrafom  $D_3^{(1)}$ . V pravej časti je graf  $G_3^{(2)}$ , ktorý je homeomorfný s grafom  $G_3 - M_2$  spolu s orientovaným podgrafom  $D_3^{(2)}$ . Podgrafy  $D_3^{(1)}$  a  $D_3^{(2)}$  sú naznačené šípkami. Na obrázku 4.4.4 sa v ľavej časti nachádza podgraf  $D_1$ . Je vyznačený šípkami. V pravej časti sa nachádza podgraf  $D_2$ , tiež vyznačený šípkami. Ide o podgrafy grafu  $G^+$ . Na obrázku 4.4.5 sa v ľavej časti nachádza podgraf  $D_{1,2}$ . Je vyznačený šípkami. V pravej časti sa nachádza podgraf  $\bar{D}_1$ , tiež vyznačený šípkami. Ide o podgrafy grafu  $G^+$ . Na obrázku 4.4.6 sa v ľavej časti nachádza podgraf  $D_{1,2}$ , aj s vyznačenými rozkladmi na kružnice. Prvý rozklad podgrafu  $D_{1,2}$  je označený červenou farbou a zahŕňa dve kružnice, prvá z nich je daná bodmi  $B', B'', C', C'', A'', A'$  a druhá z nich je daná bodmi  $F', F'', E', E^*, E'', H'', H', I'', I'$ . Druhý rozklad podgrafu  $D_{1,2}$  je označený zelenou farbou a tvorí ho práve jedna kružnica určená bodmi  $A', I'', I', G', G'', E'', E^*, E'', D'', D', A''$ . V pravej časti obrázku 4.4.6 sa nachádza podgraf  $\bar{D}_1$  aj s vyznačenými rozkladmi na kružnice. Pretože podgraf  $\bar{D}_1$  neobsahuje žiadne paralelné orientované hrany na zdvojených chordách alebo vidlách, má len jeden rozklad a aj ten tvorí práve jedna kružnica určená bodmi  $B', B'', E', E^*, E'', C'', C', D'', D', H', H'', G'', G', F'', F'$ . Kružnica je označená červenou farbou. Na obrázku 4.4.7 sa nachádza v ľavej časti graf  $G_3$  s 5-CDC. V našom príklade postačujú na dvojité pokrytie hrán 4 cykly. Dva cykly sú z podgrafu  $D_{1,2}$ , jeden je z podgrafu  $\bar{D}_1$  a jeden cyklus tvorí dominujúca kružnica  $C$ . Farby, ktorými sú cykly zafarbené, sú zelená (dominujúca kružnica), červená (z  $D_{1,2}$ ), modrá (z  $D_{1,2}$ ) a oranžová (z  $\bar{D}_1$ ). V pravej časti obrázku 4.4.7 sa nachádza graf  $(G, T)$  s cyklovým rozkladom  $S$  kompatibilným s  $T$ . Cyklový rozklad  $S$  tvoria spomínané dva cykly z grafu  $D_{1,2}$  (jeden má dve kružnice – červená farba, druhý jednu kružnicu – zelená farba) a jeden cyklus z grafu  $\bar{D}_1$  (jedna kružnica – modrá farba).



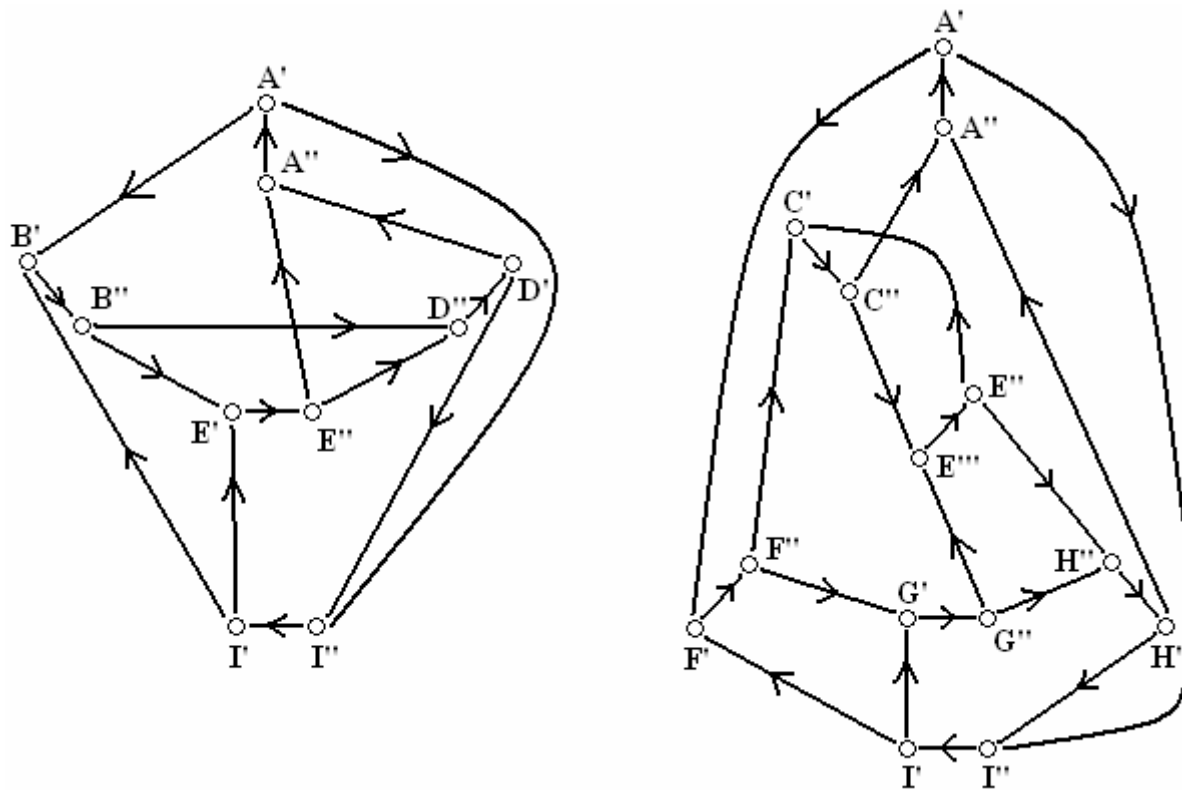
Obrázok 4.4.1



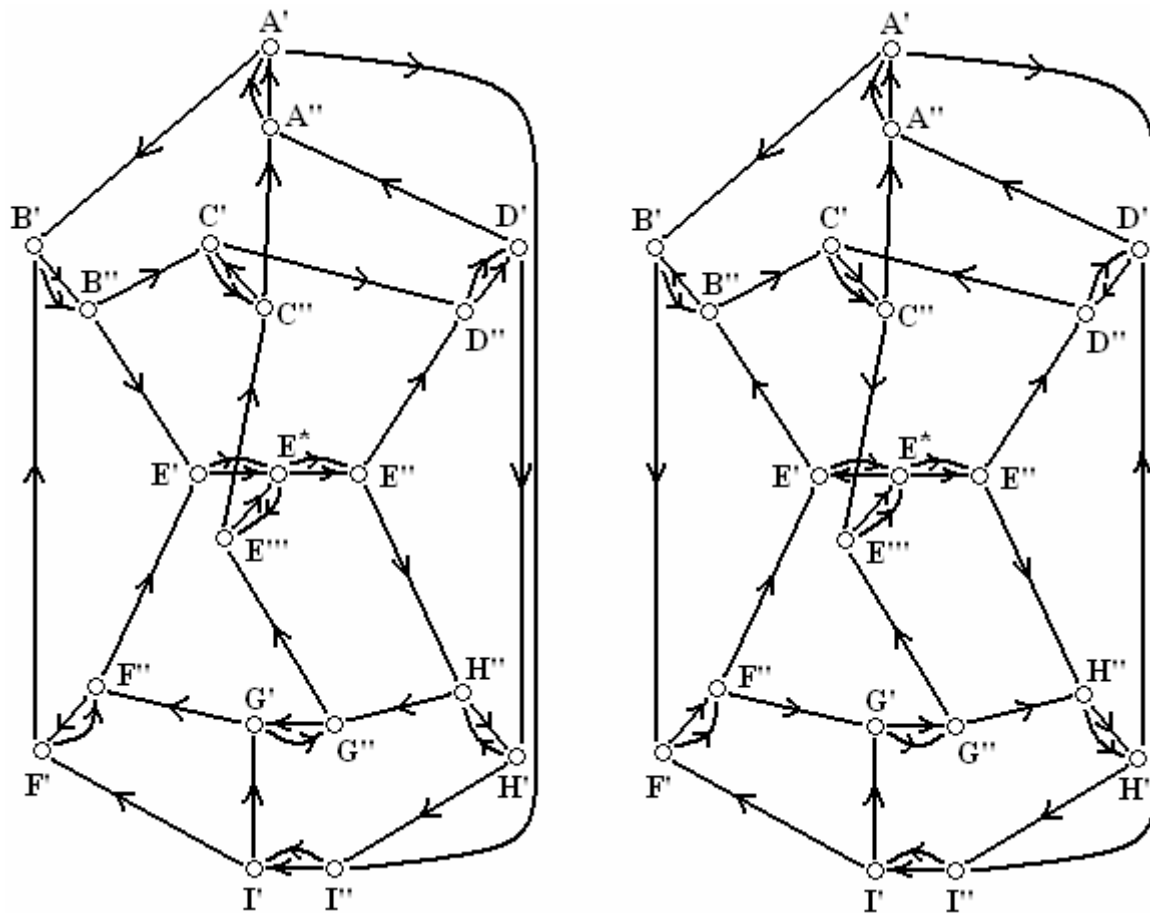
Obrázok 4.4.2



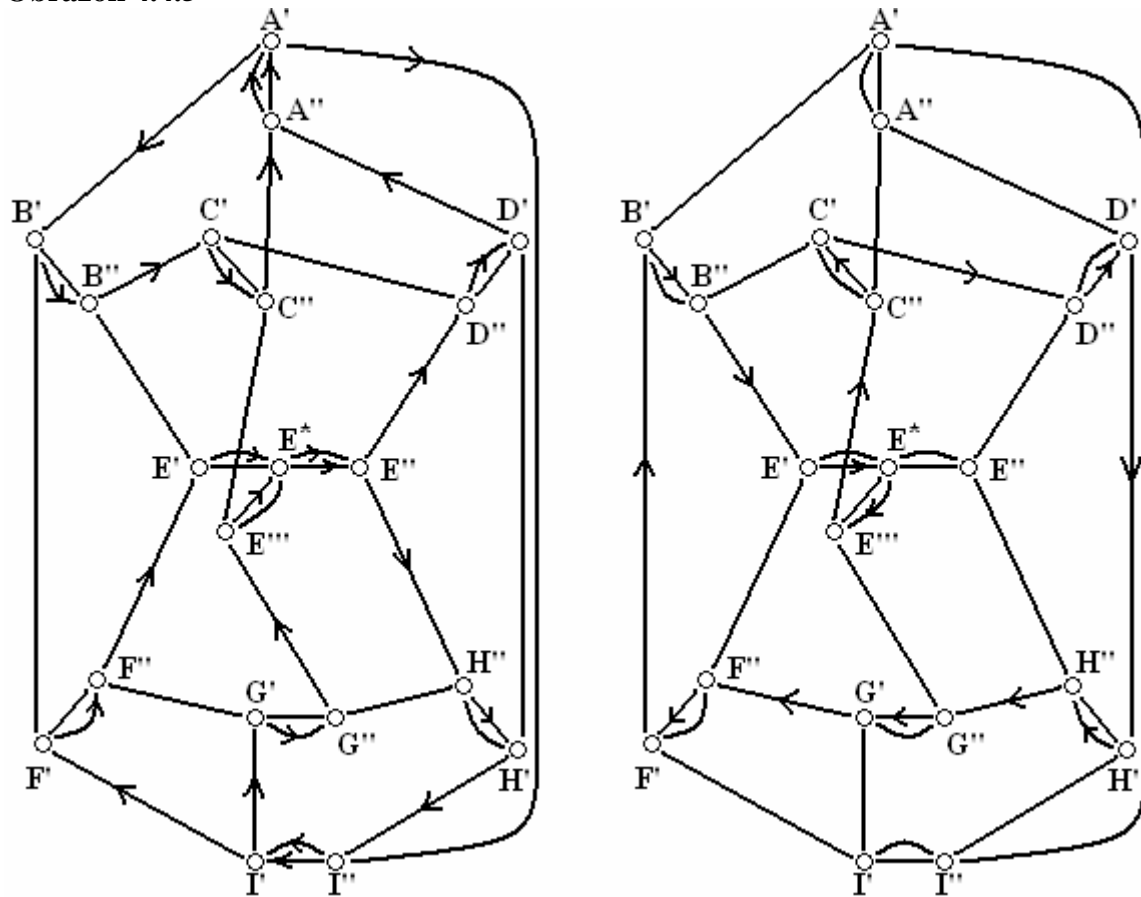
Obrázok 4.4.3



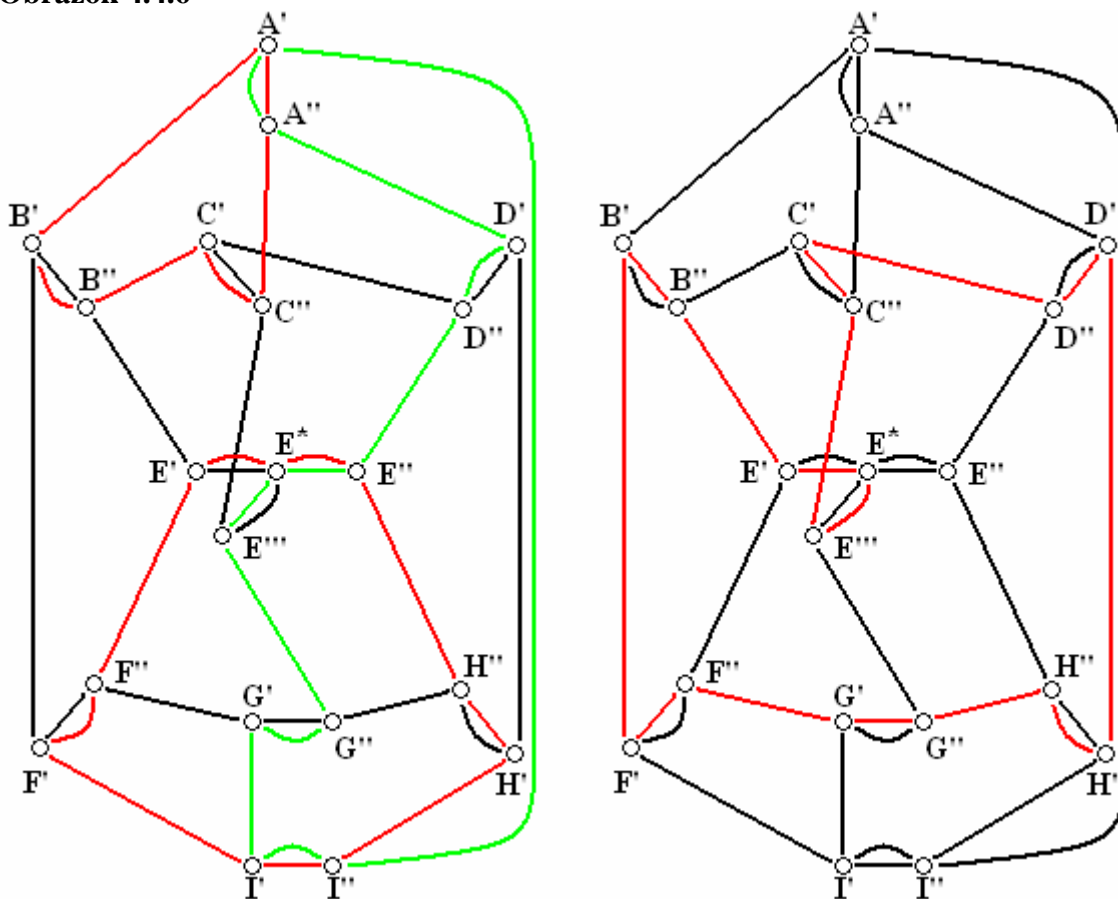
Obrázok 4.4.4



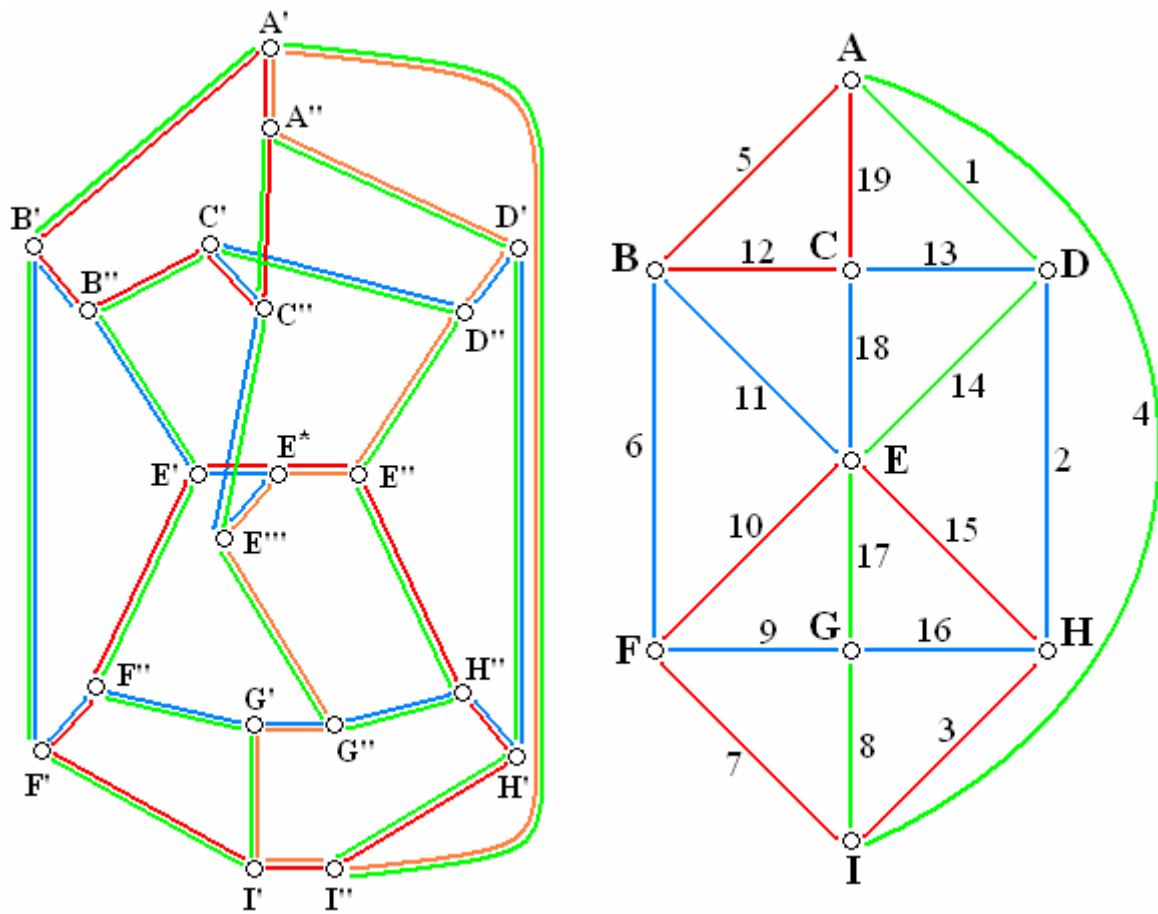
Obrázok 4.4.5



Obrázok 4.4.6



Obrázok 4.4.7



Na obrázku 4.4.7 vidíme výsledok. Graf  $G_3$  je pokrytý nanajvýš piatimi cyklami tak, že každá jeho hrana je pokrytá práve dvoma z týchto cyklov. Graf  $(G, T)$  je pokrytý cyklami tak, že pre ľubovoľné dve po sebe idúce hrany v eulerovskom ťahu  $T$  platí, že sa nachádzajú v rôznych cykloch.

# Kapitola 5

## Hypotézy o bipartizujúcich páreniach

Nájdenie dvoch dizjunktných bipartizujúcich párení má podľa kapitoly 3 a kapitoly 4 určitú motiváciu. Ich nájdenie znamená možnosť urobiť v grafe nikde nulový 5-tok a rozložiť graf na 5-CDC. Osobitné postavenie majú špeciálne kubické grafy – snarky.

**Definícia 5.1** ([3]) *Snark* je súvislý bezmostový kubický graf a jeho chromatický index je 4.

Povedané inak, ide o súvislý bezmostový kubický graf, ktorého hrany nie je možné zafarbiť tromi farbami tak, aby pre každý vrchol potom platilo, že všetky tri hrany, ktoré sú s ním incidentné, majú rôznu farbu.

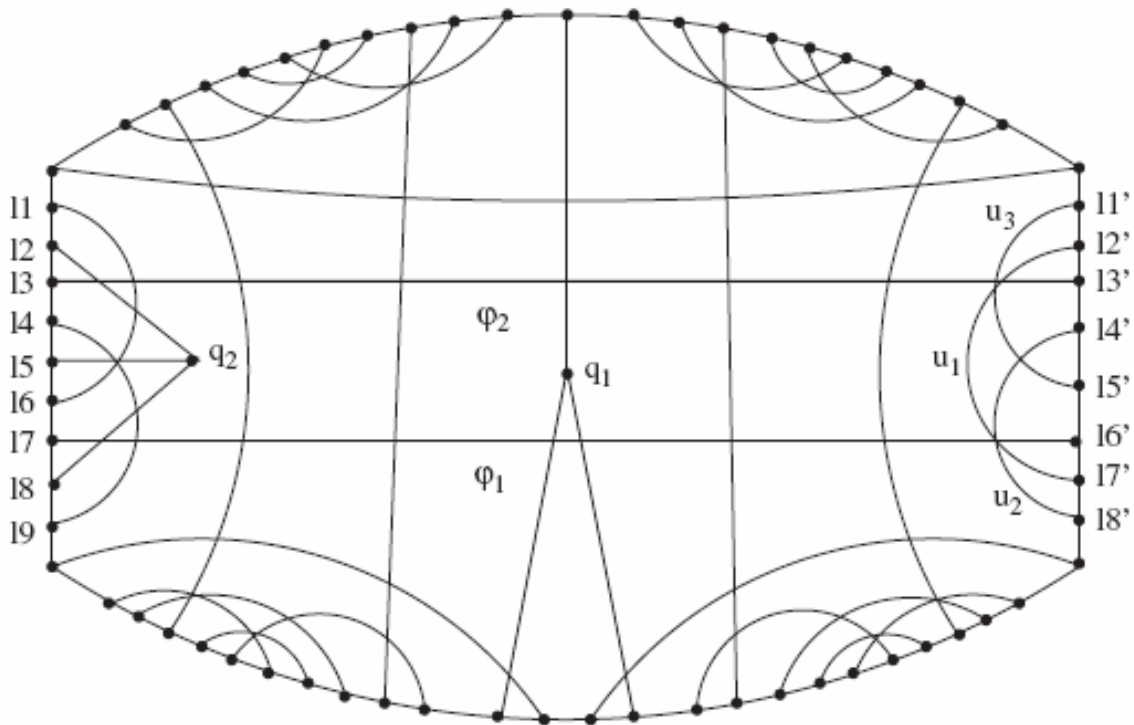
### 5.1 Pôvodná Hypotéza o bipartizujúcich páreniach

**Hypotéza 5.1.1** (Hypotéza o bipartizujúcich páreniach; Bipartizing matchings conjecture [4]) *Ak je graf  $G_3$  snark s dominujúcou kružnicou  $C$ , potom obsahuje dve dizjunktné bipartizujúce párenia.*

Hypotéza 5.1.1 hovorí o tom, že ak si zoberieme ľubovoľný snark, kde nájdeme hocijakú dominujúcu kružnicu, tak vždy bude platiť, že tam vieme nájsť dve dizjunktné bipartizujúce párenia. Táto hypotéza bola vyvrátená v článku [6]. Našiel sa konkrétny kontrapríklad. Teda našiel sa snark, v ktorom sa určila konkrétna dominujúca kružnica takým spôsobom, že nebolo možné nájsť dve dizjunktné bipartizujúce párenia. O kontrapríklade, teda nájdení vhodného snarku a jeho vhodnej dominujúcej kružnice, sa podrobne uvádza v článku [6]. Je tam podrobne popísaná konštrukcia tohto grafu, dôkaz, že neobsahuje dve dizjunktné bipartizujúce párenia a v závere je uvedený aj obrázok zobrazujúci daný snark. Tento snark má 68 vrcholov.

V tejto kapitole uvidíme z konštrukcie kontrapríkladu len obrázok snarku predstavujúceho kontrapríklad ku hypotéze 5.1.1 (článok [6], strana 10). Zvyšok tejto kapitoly sa budeme zaoberať už len zmenenou Hypotézou o bipartizujúcich páreniach.

Obrázok 5.1.1



Na obrázku 5.1.1 sa nachádza kontrapríklad k hypotéze 5.1.1. Dominujúca kružnica je vyznačená nahrubo, resp. ide o kružnicu neobsahujúcu vrcholy  $q_1$  a  $q_2$ .

## 5.2 Zmenená Hypotéza o bipartizujúcich páreniach

**Hypotéza 5.2.1** (Zmenená hypotéza o bipartizujúcich páreniach [6]) *Každý kubický graf  $G_3$ , ktorý je snark, má aspoň jednu dominujúcu kružnicu  $C$  takú, že graf  $(G_3, C)$  má dve dizjunktné bipartizujúce párenia.*

Hypotéza 5.2.1 je o podstatne slabšie tvrdenie, ako hypotéza 5.1.1. Hovorí, že v grafe existuje aspoň jedna dominujúca kružnica taká, že graf má pri výbere tejto kružnice dve dizjunktné bipartizujúce párenia. Pôvodná Bipartizing matchings conjecture hovorila, že spomenuté dve párenia existujú pre každú takúto dominujúcu kružnicu. Experimentálnou časťou práce je napísať program, ktorý túto hypotézu overuje pre nejaké konkrétne grafy. Podrobný popis vstupov, programu, použitých algoritmov, časovej zložitosti, výstupov a výsledkov sa nachádza v ďalšom texte práce.

# Kapitola 6

## Experimentálna časť práce

V nasledujúcej kapitole je popísaná experimentálna časť práce. V skratke ide o testovanie hypotézy 5.2.1 na konkrétnych grafoch pomocou počítačového programu. V ďalšom texte sa nachádza popis vstupných dát a podrobný popis metód a postupov pri tvorbe programu. V ďalšom texte bude pojem „dve dizjunktné bipartizujúce párenia“ dosť frekventovaný, pre prehľadnosť ho budeme označovať skratkou 2DBP.

### 6.1 Cieľ experimentu

Cieľom experimentu je preveriť, do akej miery je pravdivá hypotéza 5.2.1. Je veľmi pravdepodobné, že sa ju nepodarí vyvrátiť, nakoľko ide o slabé tvrdenie. Stačí nájsť totiž pre daný graf ľubovoľnú dominujúcu kružnicu, pre ktorú má graf s touto kružnicou 2DBP. Predpokladom ale je, že sa vyskytnú grafy, ku ktorým sa nájde dominujúca kružnica taká, že sa 2DBP nenájdu (čo by znamenalo, že daný graf je kontrapríkladom k hypotéze 5.1.1). Tieto grafy a ich dominujúce kružnice potom preveríme podrobnejšie – budeme sa snažiť nájsť im iné dominujúce kružnice, ku ktorým sa už potom nájdu 2DBP.

Overovať hypotézu 5.2.1 budeme pomocou programu na istej množne grafov, ktoré budú popísané v podkapitole 6.3. Najprv popíšeme myšlienku algoritmu na overenie hypotézy 5.2.1, myšlienku hľadania dominujúcich kružníc, myšlienku hľadania 2DBP. Potom popíšeme, ako sme tieto myšlienky realizovali pomocou programu.

### 6.2 Popis vstupných dát

Vstupnými dátami sú snarky s cyklickou súvislosťou aspoň 4, obvodom aspoň 5 a počtom vrcholov najviac 30. Tieto zoznamy snarkov sú skonštruované pomocou Brinkmannovho algoritmu z práce [1] a získané od profesora Brinkmanna. Pri tvorbe programu sa vždy predpokladá, že ide práve o tieto vstupy a je napísaný na účel spracovania týchto súborov. Grafy na vstupe majú niekoľko ďalších vlastností, ktoré sa využívajú pri tvorbe programu. Prvou je fakt, že žiaden z grafov nemá hamiltonovskú kružnicu. Ďalším faktom je, že sa v grafe nenachádza žiaden trojuholník ani štvorec, t.j. žiaden graf neobsahuje podgraf  $K_3$ , ani  $G = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\})$ . Vstupnými súborami sú súbory  $sx\_c4.c$ , kde  $x = \{18,20,22,24,26,28,30\}$ . Premenná  $x$  označuje počet vrcholov grafu.

Formát vstupu je nasledovný:

1. riadok: označenie grafu (číslované sú prirodzenými číslami začínajúc číslom 1)
2. riadok: množina prvých susedov každého vrchola –  $i$ -te číslo riadku znamená, že ide o prvého suseda  $i$ -teho vrchola
3. riadok: analógia s druhým riadkom – množina druhých susedov každého vrchola
4. riadok: analógia s druhým riadkom – množina tretích susedov každého vrchola

Pre každú hodnotu premennej  $x$  je počet grafov v súbore iný, pre zvyšujúce sa  $x$  rastie aj počet grafov. Pre 18 ide o 2 grafy, pre 20 ide o 6 grafov, pre 22 ide o 20, pre 24 ide o 38, pre 26 ide o 281, pre 28 ide o 2901 grafov a nakoniec pre 30 vrcholové grafy ide o 28400 grafov.

### 6.3 Popis výstupných dát

Grafy sú popísané prirodzenými číslami od 1 do najvyššie 30, vymenovaním množín susedov. Výstupných dát bude viacero. Ako sa píše v ďalšom texte, program možno rozdeliť na dve väčšie časti: na nájdenie dominujúcej kružnice v grafe, uvažujúc konštantný počet vidiel a na nájdenie 2DBP za predpokladu, že máme na vstupe dominujúcu kružnicu. Z tohto pohľadu budú výstupnými dátami v prvom rade súbory, v ktorých bude k popisu grafu pridaný aj popis dominujúcej kružnice a v druhom rade súbory, v ktorých budú pre každý graf vymenované 2DBP, alebo informácia, že sa takáto dvojica párení nenašla. V prípade dominujúcich kružníc bude dôležitý aj počet vidiel, ktorý bude daný graf mať, preto pre jeden graf bude vždy viac výstupov s nájdenými dominujúcimi kružnicami.

Formát výstupného súboru, ktorý má na výstupe len dominujúcu kružnicu ku danému grafu, bude mať tento formát:

1. riadok: označenie grafu (číslované sú prirodzenými číslami začínajúc číslom 1)
- 2.riadok: počet vrcholov grafu, kvôli zjednodušeniu načítania
3. riadok: množina prvých susedov každého vrchola –  $i$ -te číslo riadku znamená, že ide o prvého suseda  $i$ -teho vrchola
4. riadok: analógia s tretím riadkom – množina druhých susedov každého vrchola
5. riadok: analógia s tretím riadkom – množina tretích susedov každého vrchola
6. riadok: dĺžka dominujúcej kružnice
7. riadok: popis dominujúcej kružnice – postupnosť vrcholov, dva po sebe idúce vrcholy sú vždy susedné a susedný je potom aj prvý s posledným vrcholom

Formát výstupného súboru, ktorý má na výstupe nájdené 2DBP (jeho vstupom je graf s danou dominujúcou kružnicou), ktoré sa našli, je nasledovný:

1. riadok: označenie grafu
2. riadok: nápis „Dominujúca kružnica:“, potom v zátvorke uvedená jej dĺžka a ďalej jej vrcholy, ktorými je určená
3. riadok: nápis „Prve bipartizujúce párenie:“
4. riadok až  $(3 + n)$ -tý riadok: Po riadkoch vymenované prvé bipartizujúce párenie, v každom riadku je jedna hrana,  $n$  je počet hrán tohto párenia
- $(4 + n)$ -tý riadok: nápis „Druhe bipartizujúce párenie:“
- $(5 + n)$ -tý až  $(4 + n + m)$ -tý riadok: Po riadkoch vymenované druhé bipartizujúce párenie, v každom riadku je jedna hrana,  $m$  je počet hrán tohto párenia
- $(5 + n + m)$ -tý riadok: kvôli prehľadnosti prázdny riadok

Formát výstupného súboru, ktorý má na výstupe 2DBP, ktoré sa nenašli, je nasledovný:

1. riadok: označenie grafu
2. riadok: nápis „Dominujúca kružnica:“, potom v zátvorke uvedená jej dĺžka a ďalej jej vrcholy, ktorými je určená
3. riadok: nápis „Pre tento graf a dominujúcu kružnicu sa nenasli žiadne 2DBP.“
4. riadok: kvôli prehľadnosti prázdny riadok

Výstupné dáta môžu mať aj inú podobu. Je pravdepodobné, že sa nájde nejaký kontrapríklad ku hypotéze 5.1.1 a tento graf sa potom bude skúmať ďalej, nakoľko to bude



kandidát na vyvrátenie hypotézy 5.2.1. Z toho potom vyjdú aj ďalšie, dodatočné výstupy. Ich popis bude potom špecifikovaný v príslušnej podkapitole.

## 6.4 Algoritmus na overenie zmenenej BMC

Ku grafu na vstupe potrebujeme najprv nájsť dominujúcu kružnicu. Problém jej hľadania je sám o sebe obtiažny a je vysvetlený podrobne v podkapitole 6.5. Potom, keď máme graf a k nemu danú dominujúcu kružnicu, hľadáme 2DBP. Podrobne je tento postup popísaný v podkapitole 6.6.

## 6.5 Algoritmus na nájdenie dominujúcej kružnice

Ako už bolo spomenuté, hľadať hamiltonovskú kružnicu vo vstupných grafoch netreba, pretože vieme, že ani jeden graf takúto kružnicu nemá. Je preto nutné na začiatku uvažovať, že má graf nejaké vidly, ktoré sa z tohto grafu odstránia (odstráni sa vrchol, ktorý je „cípom“ vidly, ako aj jeho traja susedia), v tomto odstránenom grafe sa nájde hamiltonovská kružnica a nakoniec sa tejto kružnici pridajú odstránené vrcholy (pre každú vidlu tri – „cíp“ vidly sa nepridá, len jeho traja susedia).

Hlavnou myšlienkou algoritmu je prehľadávanie do šírky. Uvažujú sa pritom stavy, ktoré hovoria, do akej miery je čiastočná kružnica už nájdená. Tieto stavy potom pomocou algoritmu do šírky získavajú svojich predchodcov, až po prejdení do jedného z koncových stavov algoritmus končí. V prípade, že už žiaden nový stav nie je určený na spracovanie a neprešlo sa do žiadneho z koncových stavov, algoritmus končí tým, že dominujúca kružnica nájdená nebola. Algoritmus do šírky rešpektuje výnimočné hrany. Ide o hrany, ktoré musí kružnica bezpodmienečne obsahovať. Výnimočné hrany vznikajú pri odstránení vidiel z pôvodného grafu, konkrétne pri odstránení susedov „cípu“ vidly. Pre daný počet vidiel platia iné metódy pre určovanie výnimočných hrán. V jednom prípade je dokonca nutné odstrániť navyše jednu hranu.

Pre lepšie pochopenie si vysvetlíme najprv to, ako pracuje algoritmus do šírky v prípade algoritmu pre hľadanie dominujúcej kružnice na upravenom grafe. To preto, lebo výnimočné hrany sa potom určujú tak, aby ulahodili myšlienke tohto algoritmu. Keďže pre iný počet vidiel platia iné postupy na určenie výnimočných hrán, má každý počet vidiel samotnú podkapitolu. Pre potreby spracovania vstupných súborov postačovali najviac tri vidly. Pre prehľadnosť budeme pôvodný graf označovať písmenom  $G$  a graf, ktorý vznikol odstránením výnimočných hrán z grafu  $G$ , budeme označovať písmenom  $H$ .

### 6.5.1 Algoritmus do šírky

Na vstupe máme graf  $H$ . Úlohou je nájsť hamiltonovskú kružnicu v tomto grafe, pričom musí táto kružnica obsahovať výnimočné hrany. Tieto hrany vznikli pri procese odstránenia vidiel z grafu  $G$ . Dôvod, prečo musia byť tieto hrany v hamiltonovskej kružnici je ten, že ide o hrany, ktoré vznikli tak, že tam bol pôvodne jeden vrchol stupňa dva a stala sa z toho jedna kontrahovaná hrana. Tento vrchol je susedom vrchola, ktorý je v grafe  $G$  „cípom“ vidly. Táto hrana je takto nositeľom tohto vrchola, ktorým musí v grafe  $G$  prechádzať dominujúca

kružnica a teda táto hrana musí byť v hamiltonovskej kružnici grafu  $H$ . Keď sa táto hamiltonovská kružnica nájde, potom sa urobí subdivízia všetkých výnimočných hrán (je potrebné si preto pri evidovaní výnimočných hrán zapamätať aj to, ktoré vrcholy boli kontrahované) a z hamiltonovskej kružnice grafu  $H$  sa stane dominujúca kružnica grafu  $G$ .

Algoritmus do šírky uvažuje  $n \cdot 2^n$  stavov, kde  $n$  je počet vrcholov grafu  $H$ . Tento stav sa dá rozpísať na bitové pole dĺžky  $n$  a na jedno číslo z rozsahu 1 až  $n$ . Čo sa týka bitového poľa, ak je  $i$ -ta zložka tohto poľa nastavená na 0 (false), znamená to, že  $i$ -ty vrchol ešte nebol navštívený. V opačnom prípade ( $i$ -ta zložka je nastavená na 1, resp. true) to znamená, že  $i$ -ty vrchol už bol navštívený. Čo sa týka čísla, ak je jeho hodnota  $i$ , znamená to, že sa v tomto vrchole práve uskutočňuje ďalšie prehľadávanie.

Keď sa nachádzame v určitom stave, vždy vieme dve informácie: Aké vrcholy sú už navštívené a v akom vrchole sa práve nachádzame. Zvolíme si začiatkový vrchol  $z$ . Takto začneme v stave, ktorého všetky zložky bitového poľa sú nastavené na 0, okrem  $z$ -tej zložky, ktorá je nastavená na 1. Číslom v rozsahu  $1..n$  je číslo  $z$ . Koncových stavov bude viac. Budú to všetky tie stavy, kde budú všetky zložky bitového poľa nastavené na 1 a navyše sa budeme nachádzať na nejakom zo susedov štartovného vrchola. Týchto susedov bude v našom prípade najviac 3. Na začiatku je v rade len jeden stav – začiatkový – teda stav, kde sú všetky zložky nastavené na 0, okrem zložky predstavujúcej začiatkový vrchol a číslom je začiatkový vrchol. Evidujeme množinu navštívených stavov. Na začiatku je navštívený práve tento jeden počiatkový stav, všetky ostatné nastavíme ako nenavštívené.

Pre každý prvok radu, do ktorého sa ukladajú stavy určené na spracovanie, vykonáme nasledovné kroky:

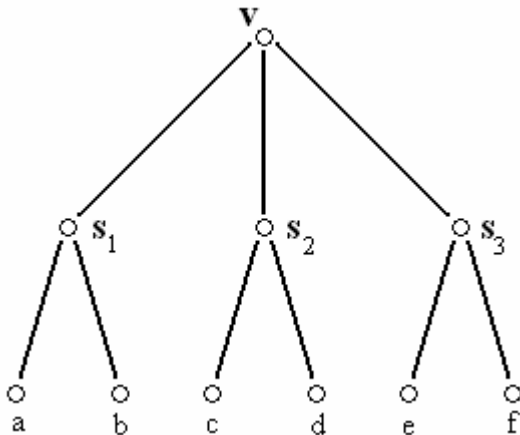
1. Prejdeme všetky výnimočné hrany. Ak sa aspoň jeden koniec tejto hrany rovná vrcholu, na ktorom sa práve nachádzame, všimneme si, aký vrchol je ten na opačnom konci výnimočnej hrany. Nech ide o vrchol  $a$ . Snažíme sa prejsť potom do stavu, kde je okrem dovtedy navštívených vrcholov navštívený aj vrchol  $a$  a navyše sa budeme nachádzať vo vrchole  $a$ . V prípade, že je tento stav už navštívený, nedeje sa nič. V opačnom prípade sa tento nový stav označí ako spracovaný, pridá sa do radu spracovávaných vrcholov, zapamätá sa, že predchodcom tohto nového stavu je aktuálny stav a zaznačí sa, že sa už nemá pokračovať krokom číslo 2.
2. Ak sa vrchol, na ktorom sa nachádzame, nenájde v žiadnom z koncov nijakej výnimočnej hrany, potom sa pozrieme na všetkých susedov aktuálneho vrchola. Snažíme sa potom prejsť do stavu, kde sú dovtedy navštívené všetky vrcholy a okrem nich aj daný sused a číslo sa má rovnať danému susedovi. Ak je už tento stav navštívený, nič sa nedeje, ak nie je, potom ho označíme ako spracovaný, pridáme ho do radu spracovávaných vrcholov a zapamätáme si, že predchodcom tohto nového stavu je aktuálny stav.

Algoritmus končí v prípade, ak sa navštívi jeden z koncových stavov, alebo ak už nie je v rade žiaden ďalší stav na spracovanie. Ak je navštívený jeden z koncových stavov, hamiltonovská kružnica grafu  $H$  sa našla. Ak už nie je v rade žiaden ďalší stav a navyše žiaden z koncových nie je navštívený, kružnica sa nenašla. Pomocou poľa predchodcov stavov sa skonštruuje hamiltonovská kružnica grafu  $H$ . Ide sa od prvého navštíveného koncového stavu a postupne sa prechádza pomocou predchodcov až k počiatkovému stavu. Nakoniec sa prevádza graf  $H$  späť na  $G$ . Pridajú sa vrcholy, ktoré boli kontrahované (susedia „cípov“ vidiel) a vypíše sa na výstupe dominujúca kružnica grafu  $G$ .

## 6.5.2 Výnimočné hrany pre 1 vidlu

Ide o najjednoduchšie evidovanie výnimočných hrán. Práve jeden vrchol je označený spoločne so svojimi tromi susedmi ako vidla. Tento vrchol sa pri transformovaní z grafu  $G$  na graf  $H$  úplne vytratí a jeho traja susedia budú kontrahovaní do výnimočnej hrany. Najlepšie si to vysvetlíme pomocou obrázku.

Obrázok 6.5.2.1



Cíp vidly je označený ako  $v$ , jeho traja susedia ako  $s_1$ ,  $s_2$  a  $s_3$ . Susedia vrchola  $s_1$  sú  $a$ ,  $b$ ; susedia vrchola  $s_2$  sú  $c$ ,  $d$  a vrchola  $s_3$  sú  $e$ ,  $f$ . Je jasné, že iná situácia, ako je na obrázku, nemôže nastať. To preto, lebo vieme, že žiaden z grafov na vstupe nemá podgraf  $K_3$  (t.j. ani jedna z dvojíc susedov vrchola  $v$  nie je spojená hranou) a nemá ani ako podgraf štvorec, teda graf  $G = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\})$  (t.j. ani žiadna dvojica vrcholov  $a$  až  $f$  nie je spojená hranou). Do evidencie výnimočných hrán sa pridajú tri hrany. Prvá je hrana  $a - b$ , kde si pamätáme, že jej prostredným vrcholom je vrchol  $s_1$ . Druhá hrana je  $c - d$ , kde si pamätáme, že jej prostredným vrcholom je vrchol  $s_2$ . Tretia hrana je  $e - f$ , kde si pamätáme, že jej prostredným vrcholom je vrchol  $s_3$ .

Jedna vidla v grafe má svoje výhody i nevýhody. Výhodou je jednoduchá evidencia výnimočných hrán. Nevýhoda je, že z pôvodného grafu  $G$  miznú len 4 vrcholy. Pri menších grafoch (s počtom vrcholov 18, 20, 22) je to v poriadku, pri 24 vrchoch je to stále časovo uspokojivé. Pri 26 vrchoch to už trvá pomerne dlho, pamäťová zložitosť je tu navyše dosť vysoká. Bližšie sa o tom píše vo výsledkoch experimentu. Pri 28 a 30 vrchoch už nie je možné z pamäťových dôvodov hľadať dominujúcu kružnicu len pomocou jednej vidly.

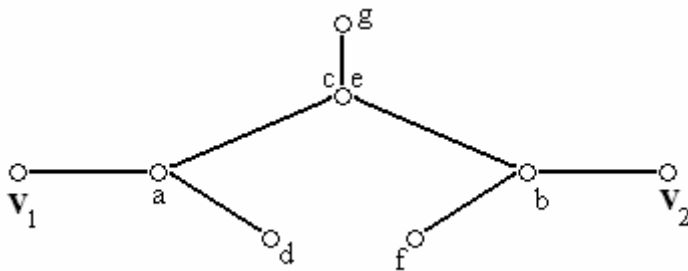
## 6.5.3 Výnimočné hrany pre 2 vidly

Spočiatku sa zdalo evidovanie výnimočných hrán pre dve vidly ako jednoduchá vec. Domnieval som sa, že postačí, ak budú cípy oboch vidiel a ich susedov dizjunktné množiny. Ukázalo sa ale, že nemožno použiť rovnaké postupy, ako pre jednu vidlu, nakoľko susedia susedov prvej i druhej vidly môžu byť tie isté vrcholy.

Riešenie sa nájde prostredníctvom vhodnej vzdialenosti vidiel, alebo ich susedov. K tomu budeme potrebovať zistiť vzdialenosť od každého vrchola ku každému. Hrany sú jednotkové, použijeme na to známy Floyd-Warshallov algoritmus ([2]). Aby sme mohli použiť postup, ako v prípade jednej vidly, potrebovali by sme, aby boli dve vidly od seba vzdialené na dĺžku 5. Len vtedy by boli cípy, susedia, aj susedia susedov oboch vidiel dizjunktné množiny. Takýchto dvojíc vrcholov v grafoch, najmä tých menších, je málo. Pri tejto podmienke našiel algoritmus v prípade dvoch vidiel dominujúcu kružnicu len málokedy. Bolo treba vymyslieť iné stratégie.

Nakoniec som našiel stratégiu pre situáciu, že sú od seba vidly vzdialené na vzdialenosť aspoň 3. Všímame si najprv vzájomnú vzdialenosť susedov cípu jednej vidly a cípu druhej vidly. Ak je táto vzdialenosť aspoň 4, vtedy môžeme pokojne použiť pre tohto suseda postup z podkapitoly 6.5.2, pretože je od druhej vidly príliš ďaleko. Jeho dvaja susedia budú tvoriť výnimočnú hranu a zapamätáme si, že touto hranou prechádzal daný sused. Pre lepšiu predstavivosť, ide o prípad, akým je na obrázku 6.5.2.1 vrchol  $s_1$  a jeho susedia  $a, b$ . V ďalšom kroku si všímame vzájomnú vzdialenosť susedov oboch vidiel. Ak je rovná práve 2, (a teda vzdialenosť vidiel je tým pádom rovná 4), vznikne situácia, aká je zobrazená na obrázku 6.5.3.1.

**Obrázok 6.5.3.1**

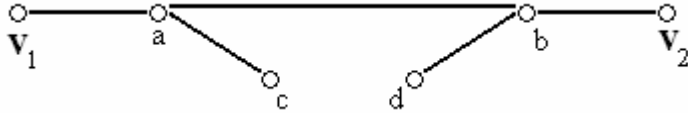


Cíp prvej vidly je označený ako  $v_1$ , jeho sused, ktorého si všímame, je označený ako  $a$ . Cíp druhej vidly je označený ako  $v_2$  a jeho sused, ktorého si všímame, je označený ako  $b$ . Ďalej, susedia vrchola  $a$  sú  $c, d$  a susedia vrchola  $b$  sú  $e, f$ . Pretože vzdialenosť vrcholov  $a$  a  $b$  je 2, tak jeden ich spoločný sused musí byť totožný. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $c$  a  $e$  označujú ten istý vrchol.

Situácia ohľadom výnimočných hrán je nasledovná: Vrchol  $a$  a vrchol  $b$  sa budú kontrahovať. Z toho vyplýva, že výnimočnými hranami budú hrana  $c - d$  (vrchol, ktorý bude na tejto hrane, je bod  $a$ ) a hrana  $e - f$  (vrchol, ktorý bude na tejto hrane, je bod  $b$ ). Takto ale môže nastať jeden problém. Všimnime si vrchol  $c$  a jeho suseda rôzneho od  $a$  a  $b$ , na obrázku označeného ako vrchol  $g$ . Ak by bol algoritmus na vrchole  $g$  a prešiel by do vrchola  $c$ , potom by nutne jedna z výnimočných hrán  $c - d$  a  $e - f$  nebola v hamiltonovskej kružnici grafu  $H$ . Je tomu tak preto, lebo ak by prešiel do vrchola  $c$  z vrcholu  $g$ , potom by musel z neho vyjsť, pričom by zobral so sebou len jednu výnimočnú hranu. Vrátiť by sa už doňho ale nemohol, lebo by bol už navštívený. Takto by sme dostali zlý výsledok. Aby sme tomu zabránili, je nutné odstrániť hranu  $c - g$ . V tomto prípade môže nastať ešte jeden problém. A totiž, ak je vrchol  $d$  susedom  $v_2$ , alebo vrchol  $f$  je susedom  $v_1$ . V tomto prípade nie je možné použiť popísaný postup, lebo vrcholy, ktoré by sa mali stať súčasťou výnimočnej hrany, sa musia kontrahovať. Preto v tomto prípade nerobíme žiaden zásah. Faktom je, že ak by bol napríklad vrchol  $d$  susedom  $v_2$ , potom by boli vrcholy  $a$  a  $d$  susedmi vidiel, vzdialení dĺžkou 1. Toto je ďalší špeciálny prípad, ktorý si rozoberieme.

Uvažujeme teda ďalší prípad, a síce že susedia prvej i druhej vidly majú vzdialenosť 1. Situácia je na obrázku 6.5.3.2.

**Obrázok 6.5.3.2**



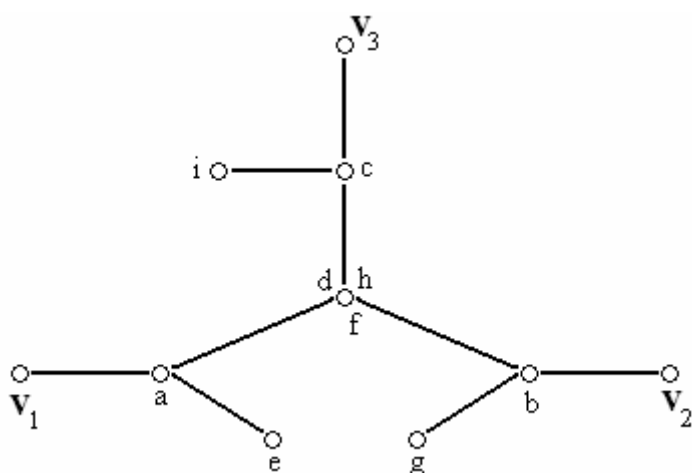
Cíp prvej vidly je označený ako  $v_1$ , jeho sused, ktorého si všímame, je označený ako  $a$ . Cíp druhej vidly je označený ako  $v_2$  a jeho sused, ktorého si všímame, je označený ako  $b$ . Susedmi vrchola  $a$  sú vrcholy  $b$  a  $c$ , susedmi vrchola  $b$  sú vrcholy  $a$  a  $d$ . V tomto prípade je zrejmé, že výnimočná hrana bude len jedna, a síce  $c - d$ . Avšak, bude mať až dva kontrahované vrcholy. Ak pôjde o orientáciu hrany smerom z  $c$  do  $d$ , potom bude prvý vrchol  $a$  a druhý  $b$ , v prípade opačnej orientácie bude prvý vrchol  $b$  a druhý  $a$ . Tu už nenastane problém, že by bol vrchol  $d$  susedom  $v_1$ , alebo vrchol  $c$  susedom  $v_2$ , nakoľko graf neobsahuje štvorec ako svoj podgraf. Týmto sme vyčerpali všetky prípustné možnosti pre dve vidly. Ak by boli totiž na vzdialenosť 2, mali by jedného suseda spoločného. Tento vrchol by prišiel pri odstránení vidly o dvoch svojich susedov, takže by nemohol nijakým spôsobom ležať na kružnici grafu  $G$ . Teda najmenšia vzdialenosť dvoch vidiel, o ktorej má zmysel pre účely algoritmu do šírky uvažovať, je rovná trom.

Nevýhodou pri dvoch vidlách je náročnejšia evidencia výnimočných hrán, ako v prípade jednej vidly. Výhodou je, že z grafu  $G$  ubudne 8 vrcholov. Preto sú grafy s počtom vrcholov od 18 do 24 spracované veľmi rýchlo. Aj v prípade 26 a 28 vrcholov sa nájde kružnica rýchlo. Pri 30 vrchoch je čas nájdenia už horší, ale vyhľadávanie dominujúcich kružníc prostredníctvom dvoch vidiel už v tomto prípade možné je, na rozdiel od jednej vidly.

## 6.5.4 Výnimočné hrany pre 3 vidly

V prípade dvoch vidiel sme sa zamýšľali nad otázkou, ako evidovať výnimočné hrany, keď budú od seba vidly vzdialené na istú vzdialenosť. Dospeli sme k záveru, že je nutná vzdialenosť aspoň 3, vtedy je možné zmysluplne evidovať výnimočné hrany. V prípade troch vidiel nie je však možné, aby boli od seba po dvojiciach vzdialené na vzdialenosť 4, t.j. aby sa vzdialenosť prvej od druhej, prvej od tretej a druhej od tretej vidly rovnala 4. Ukážeme si to prostredníctvom obrázku 6.5.4.1.

Obrázok 6.5.4.1



Na obrázku vidíme, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch vidiel je 4. Problém nastáva práve v prípade, keď sused suseda každej vidly je jeden a ten istý vrchol. V prípade obrázku ide o vrchol  $d$ ,  $h$ , resp.  $f$ . Všetky tri tieto premenné označujú jeden a ten istý vrchol. Vrcholy, ktoré majú byť kontrahované, sú susedia vidiel, teda vrcholy  $a$ ,  $b$ , a  $c$ . Výnimočné hrany musia byť takto tri, a síce hrana  $e - d$  (ňou prechádza vrchol  $a$ ), hrana  $g - f$  (ňou prechádza vrchol  $b$ ) a hrana  $i - h$  (ňou prechádza vrchol  $c$ ). Potom ale vrcholom  $d$  (resp.  $f$ ,  $h$ ) prechádzajú až tri výnimočné hrany. Keďže má ležať na kružnici, môže sa doňho raz vojsť a raz vyjsť. Takže sa zarátajú do kružnice len dve výnimočné hrany a tretia nie. Potom ale jeden z vrcholov  $a$ ,  $b$ , alebo  $c$  nebude môcť byť v kružnici a preto nebude kružnica dominujúcou. (To preto, lebo jedna z hrán  $v_1 - a$ ,  $v_2 - b$ ,  $v_3 - c$  nebude incidentná so žiadnym vrcholom dominujúcej kružnice). Tento prípad je teda nekorektný. Samozrejme, nemusí sa nutne stať, že susedom suseda všetkých troch vidiel naraz bude jeden a ten istý vrchol, ale ak také čosi nastane, nebudú sa môcť evidovať výnimočné hrany a susedia vidiel tam ostanú. Tým však bude mať graf  $H$  takmer rovnaký počet vrcholov, ako graf  $G$  a stráca sa potom výhoda zmenšenia počtu vrcholov. Z toho dôvodu bolo potrebné sa zamyslieť nad inou stratégiou.

Mal som myšlienku, že sa budú uvažovať 3 vidly také, že vzdialenosť prvej a druhej bude aspoň 3, vzdialenosť prvej a tretej bude aspoň 5 a vzdialenosť druhej a tretej bude tiež aspoň 5. Výnimočné hrany sa potom spracujú tak, že prvá s druhou vidlou sa spracujú rovnako, ako v prípade dvoch hrán. Kvôli vzdialenosti aspoň 5 oboch vidiel od tretej vidly je totiž jasné, že tretia vidla nijakým spôsobom nezasiahne do evidencie výnimočných hrán. Výnimočné hrany tretej vidly sa potom spracujú podobne, ako v prípade prvej vidly. Je to možné opäť kvôli dostatočnej vzdialenosti od prvej i druhej vidly. Skúsil som potom spustiť túto stratégiu na grafoch, úspešnosť nájdenia dominujúcej kružnice bola však relatívne nízka. Potom som vymyslel lepšiu stratégiu, kde bola úspešnosť nájdenia dominujúcich kružníc ďaleko vyššia.

Touto stratégiou sú iné vzájomné hodnoty vzdialeností vidiel. Vzdialenosť prvej a druhej vidly nech je aspoň 3. Vzdialenosť druhej a tretej vidly nech je tiež aspoň 3. No a vzdialenosť prvej a tretej vidly nech je aspoň 5. Takto sa stane, že prvá a tretia vidla sú od seba bezpečne vzdialené. Výnimočné hrany sa hľadajú tak, že pre prvú a druhú vidlu použijeme postup evidovania výnimočných hrán z prípadu pre dve vidly a podobne použijeme tento postup evidovania aj v prípade druhej a tretej vidly. Táto stratégia už bola úspešná. Z 2901 grafov s 28 vrcholmi sa našla v prípade všetkých dominujúca kružnica s tromi

vidlami a z 28400 grafov s 30 vrcholmi sa nenašla dominujúca kružnica s tromi vidlami len v prípade jedného grafu. Bližšie sa o tom píše vo výsledkoch experimentu.

Výhodou troch vidiel je dobrá rýchlosť vyhľadávania kružníc aj v prípade grafov s 30 vrcholmi. Môže za to odstránenie až dvanástich vrcholov z pôvodného grafu. Touto metódou by bolo možné hľadať dominujúce kružnice aj na grafoch s počtom vrcholov 32 alebo 34. Nevýhodou je, že na menších grafoch je málo pravdepodobné, že sa nájde dominujúca kružnica s tromi vrcholmi. Napríklad pre 18 a 20 vrcholové grafy sa takáto kružnica nenašla.

### 6.5.5 Iteratívne vyhľadávanie dominujúcich kružníc

Dominujúca kružnica v grafe  $G$  sa nájde tak, že sa vždy určí, aký vrchol, resp. aké vrcholy budú cípy vidiel, odstránením vidiel vznikne graf  $H$ , v ňom sa nájde hamiltonovská kružnica, potom sa do tejto kružnice zarátajú aj susedia cípov vidiel a výsledkom je dominujúca kružnica grafu  $G$ . Pre konkrétnu množinu cípov vidiel sa však hamiltonovská kružnica grafu  $H$  nemusí nájsť. Preto je potrebné urobiť vyhľadávanie všetkých  $n$ -prvkových podmnožín množiny všetkých vrcholov, uvážiť, že to budú cípy vidiel a pre tieto podmnožiny skúsiť, či sa nenájde hamiltonovská kružnica grafu  $H$ . Tak to je urobené aj v programe. Pre praktickejšie využitie je to rozdelené do troch programov. Každý z nich sa týka iného počtu vidiel. Praktické je to preto, lebo nemá zmysel napríklad spúšťať program pre jednu vidlu, keď ide o graf nad 22 vrcholov, alebo pre tri vidly, keď ide o menší graf.

Pre náš experiment postačuje vo väčšine prípadov nájdenie jednej dominujúcej kružnice grafu. Je predpoklad, že sa pre túto dominujúcu kružnicu grafu sa nájdu 2DBP. Program končí, ak nájde prvú dominujúcu kružnicu a vypíše ju. Ak nenájde v prípade všetkých podmnožín vidiel dominujúcu kružnicu, skončí na výstupe s touto informáciou.

Jednoduchou úpravou programu je ale možné skúsiť hľadať dominujúce kružnice pre všetky podmnožiny cípov vidiel. V prípade 1 vidly je to jednoduché, lebo tam nie sú žiadne obmedzenia. Koľko je vrcholov, toľko je aj kandidátov na dominujúce kružnice. Všetky dominujúce kružnice, ktoré sa takto nájdu, sú určite rôzne, pretože vždy neobsahujú jeden vrchol, pričom pre ľubovoľné dve je tento vrchol rôzny. V prípade dvoch vidiel sú už obmedzenia, ich vzdialenosť cípov musí byť aspoň tri. Čím je ale graf väčší, tým je ale takých dvojíc vrcholov viac. Pre každú takúto dvojicu je možnosť, že sa nájde dominujúca kružnica. Celkovo môžeme takto nájsť veľa kružníc, so zvyšovaním počtom vrcholov rastie počet kvadraticky. V prípade troch vidiel je ešte viac obmedzení, vzdialenosť 1. a 2. vidly musí byť aspoň 3, 2. a 3. tiež aspoň 3 a vzdialenosť prvej a tretej aspoň 5. Opäť platí, že čím väčší graf, tým viac kandidátov na nájdenie dominujúcej kružnice. Pri malých grafoch sa tam taká trojica nemusí ale nachádzať. V opačnom prípade je nárast takýchto trojíc vrcholov kubický, takže je možné nájsť dosť veľa dominujúcich kružníc. Vyhľadávanie viacerých dominujúcich kružníc sa nám zide v prípade tých grafov, pre ktoré sa nenájdu 2DBP pre prvú nájdenú dominujúcu kružnicu.

### 6.6 Algoritmus na nájdenie 2DBP

Úlohou je nájsť dve dizjunktné párenia, ktoré majú vlastnosti bipartizujúceho párenia. To znamená, že požadujeme, aby žiadna hrana neležala na dominujúcej kružnici, aby bol každý vrchol neležiaci na dominujúcej kružnici incidentný s nejakou hranou tohto párenia

a aby bol graf, ktorý vznikne odstránením daného párenia z pôvodného grafu, homeomorfný s kubickým grafom, ktorý je bipartitný.

Na úvod si odpovieme na otázku, či môže byť nejaké z tých dvoch bipartizujúcich párení prázdne. Taká situácia by mohla nastať len vtedy, keby bola dominujúca kružnica hamiltonovskou. Grafy na vstupe však hamiltonovskú kružnicu nemajú, teda je jasné, že graf s dominujúcou kružnicou bude mať aspoň jednu vidlu, z čoho vyplýva, že obe párenia budú neprázdne. Hlavná myšlienka začína tým, že nájdeme všetky chordy a vidly. Vytvoríme si ich zoznam.

Chorda je taká hrana, ktorej oba konce ležia na dominujúcej kružnici, ale ona sama tejto kružnici nepatrí. Najprv si zaznačíme, ktoré vrcholy sú na dominujúcej kružnici a aj na akom poradovom mieste. Potom prechádzame všetky hrany grafu a ak sa stane, že oba konce hrany sú na kružnici, potom overíme, či sú susedné. V prípade, ak nie sú susedné, znamená to, že hrana je chordou, pridáme si ju do zoznamu vidiel a chórd a zapamätáme si ju ako chordu. Vidla je množina troch hrán grafu, ktoré sú incidentné s jedným a tým istým vrcholom, ktorý neleží na kružnici. Nájdanie je o niečo jednoduchšie, ako v prípade chordy. Stačí nám nájsť príslušný vrchol a potom všetky tri hrany s ním incidentné tvoria túto vidlu. Pridáme ich do zoznamu a zapamätáme si ich ako vidlu.

Uvažujme, čo platí pre každú chordu a vidlu a ako si ich môžu dve dizjunktné párenia rozdeliť. V prípade chordy platí, že buď nepatrí žiadnemu z párení, alebo patrí len prvému, alebo len druhému z nich. Teda ide práve o tri možnosti. V prípade vidly platia tiež tri možnosti. Tou prvou je, že prvá hrana vidly bude patriť prvému páreniu a druhá hrana vidly druhému. Druhou možnosťou je, že prvá hrana bude patriť prvému páreniu a tretia druhému. Treťou možnosťou je, že druhá hrana vidly bude patriť prvému páreniu a tretia hrana druhému. Toto platí v prípade, že nezáleží na poradí párení, inak by bolo možností 6. Kvôli tomu, že pre všetky chordy sa vždy uvažujú všetky tri možnosti (a viac ich nie je), nám stačí uvažovať len tieto tri prípady pre rozdelenie hrán z vidly do párení. Keďže pre každú chordu a vidlu máme práve tri možnosti, ako ich rozdeliť, pre každé číslo v trojkovej sústave dostaneme dve dizjunktné párenia. Toto číslo bude mať dĺžku  $n$  a bude predstavovať súčet chórd a vidiel v grafe. V závislosti od toho, či pôjde o chordu alebo vidlu a o akú číslicu (0, 1, alebo 2) čísla pôjde, rozdelíme hrany do párení nasledovne:

1. Číslica 0, pôjde o chordu: chorda nepatrí žiadnemu z párení
2. Číslica 0, pôjde o vidlu: 1. hrana do prvého párenia, 2. hrana do druhého
3. Číslica 1, pôjde o chordu: chorda patrí prvému páreniu
4. Číslica 1, pôjde o vidlu: 1. hrana do prvého párenia, 3. hrana do druhého
5. Číslica 2, pôjde o chordu: chorda patrí druhému páreniu
6. Číslica 2, pôjde o vidlu: 2. hrana do prvého párenia, 3. hrana do druhého

Dve dizjunktné párenia, ktoré dostaneme pre každú hodnotu  $n$ -ciferného čísla v trojkovej sústave, spĺňajú zatiaľ len dve vlastnosti bipartizujúceho párenia (žiadna ich hrana neleží na dominujúcej kružnici a každá vidla obsahuje aspoň jednu hrana z týchto párení). Treba overiť tretiu vlastnosť, a síce – keď odstránime prvé párenie z pôvodného grafu, potom je tento graf homeomorfný s kubickým grafom, ktorý je bipartitný a že toto isté platí aj pre graf, z ktorého odstránime druhé párenie. Z pôvodného grafu teda odstránime prvé párenie. Dostaneme graf, ktorého stupne sú len 2 alebo 3. Homeomorfný graf urobíme tak, že dokiaľ sa v grafe nájde vrchol stupňa dva, tento vrchol z grafu vyhodíme a spojíme navzájom jeho susedov. Ide teda o operáciu opačnú k subdivízii hrany. Týmto úkonom sa stratí len vrchol stupňa 2, stupne iných vrcholov sa nezmenia. Treba pri realizácii týchto krokov uvažovať, že sú povolené aj násobné hrany a slučky. Výsledkom bude graf homeomorfný s rozdielom pôvodného grafu a párenia. Nakoniec treba overiť, či je tento upravený graf bipartitný.



Problém môžu robiť slučky, ktoré z grafu vyhodíme. Algoritmus na overenie bipartitnosti je jednoduchý. Začneme v ľubovoľnom vrchole, ktorý zafarbíme jednou farbou (napríklad bielou). Potom jeho susedov zafarbíme druhou farbou (napríklad čiernou) a rekurzívne sa zavoláme pre jeho susedov. Ak po skončení farbenia zistíme, že nejaké dva vrcholy spojené hranou sú zafarbené tou istou farbou, potom graf nie je bipartitný. V opačnom prípade, teda že pre všetky hrany grafu platí, že sú ich dva vrcholy zafarbené inou farbou, potom je graf bipartitný. Ak platí, že oba grafy homeomorfné ku rozdielu pôvodného grafu a prvého párenia, ako aj ku rozdielu pôvodného grafu a druhého párenia, sú bipartitné, potom išlo skutočne o bipartizujúce párenie. Pretože nepožadujeme vyhľadanie všetkých dvojíc 2DBP, po nájdení prvého vypíšeme túto dvojicu párení ako výsledok a algoritmus končí.

## 6.7 Popis programu na nájdenie dominujúcej kružnice

Chronologicky je tento program vytvorený ako druhý v poradí, program, ktorý bol vytvorený ako prvý v poradí, bol program na nájdenie 2DBP. Program na hľadanie dominujúcich kružníc je myslený ako pomocný program, preto sa tu nachádza veľa globálnych polí, premenných a málo funkcií alebo procedúr. Program má názov *dominuj.pas*.

Dôležitým prvkom na popísanie programu je popis reprezentácie stavov v algoritme do šírky. Je výhodné mať jeden stav reprezentovaný v dvoch rôznych podobách. Jednou podobou je samotné celé číslo, druhou podobou je bitové pole (informuje o tom, ktoré vrcholy už boli navštívené) a jedno číslo (číslo vrchola, na ktorom sa nachádzame). Pri algoritme do šírky sú zastúpené dve jednorozmerné polia veľkého rozsahu, pole *visited* a pole *predchodca*. V prípade týchto polí je výhodný tvar jedného samotného čísla. Pole *visited* je bitové pole a zaznamenáva sa v ňom, ktoré stavy už boli algoritmom do šírky vyhodnotené, resp. ktoré už boli navštívené. V poli *predchodca* sa nachádza predchodca každého stavu, v podobe jedného samotného čísla. Podoba bitového poľa a čísla je zasa dobrá pri hľadaní stavov, do ktorých sa má z konkrétneho stavu podľa algoritmu do šírky ísť. Na prevod medzi týmito podobami stavov slúžia funkcia *na\_cislo* a procedúra *na\_pole* (dodávame, že procedúra je funkciou, ktorá nevracia žiadnu hodnotu, môže sa jej ale odovzdať na vstupe parameter s odkazom a doň uložiť výsledok – tak to bude aj v tomto prípade). Funkcia *na\_cislo* dostáva na vstupe bitové pole a číslo vrchola, v ktorom sa nachádzame a vracia tvar jedného samotného čísla. Najprv sa vyhodnotí hodnota bitového poľa ( $i$ -ta zložka znamená hodnotu  $2^{(i-1)}$ , ak je rovná 1, inak znamená hodnotu 0), potom sa táto hodnota vynásobí počtom vrcholov a prirába sa hodnota vrchola, na ktorom sa nachádzame zmenšená o 1. Takto dostaneme číslo z intervalu od 0 do  $n*2^n$ , kde  $n$  je počet vrcholov grafu. Procedúra *na\_pole* dostáva na vstupe číslo (to samotné) a jej ďalšie dva parametre sú s odkazom – slúžia na zaznamenanie výstupu – do nich uloží bitové pole a číslo vrchola. Najprv sa určí hodnota vrchola, na ktorom sa nachádzame a potom sa naplní bitové pole. Postup je presne opačný, ako v prípade behu funkcie *na\_cislo*. Program meria aj čas svojho behu, využíva sa pritom knižnica *dos* a jej funkcia *gettime*. Ide o čas v stotínach sekundy. Pre krajší formát času slúži funkcia *spracuj*, ktorá má na vstupe časovú dĺžku v stotínach sekundy a na výstupe čas vo formáte *hh:mm:ss:cc* (hodiny, minúty, sekundy, stotiny sekundy). Čas behu programu má informatívny charakter a slúži ako informácia pre výsledky experimentu.

Dostávame sa ku popisu samotného tela programu. Pole *mocnina* zaznamenáva mocniny čísla 2 a je potrebné pri behu funkcie *na\_cislo*. Program pracuje s tromi súborami. Ich názvy sa píšú do tela programu. Prvý z nich je výstupný súbor, jeho formát je popísaný v podkapitole 6.3. Zapisujú sa doňho výsledky. Pre každý graf sa buď vypíše dominujúca

kružnica, alebo informácia, že sa kružnica nenašla. Druhý súbor je vstupný. Jeho formát je popísaný v podkapitole 6.2. Tretí súbor je výstupný, slúži ako protokol. Doňho sa vypisujú čísla grafov, pre ktoré sa dominujúca kružnica nenašla, ako aj počet grafov, pre ktoré sa našla a pre ktoré sa nenašla. Vypíše sa tam aj celkový čas behu programu. Premenná *nenajdenych* počíta grafy, ktorým sa nenašla dominujúca kružnica. Premenná *start* zaznamená čas, v ktorom program začína spracovávať vstupný súbor. Nasleduje hlavný cyklus, v ktorom sa vždy načíta graf zo vstupného súboru a hľadá sa jeho dominujúca kružnica. Končí vtedy, keď už nie je na vstupe nič okrem tzv. bielych znakov (medzery, konce riadka). Rešpektujúc formátu vstupu, načíta sa graf. Daný graf sa potom vypíše do výstupného súboru, s výnimkou výpisu dominujúcej kružnice. V prípade dvoch a troch vidiel treba zistiť vzdialenosť od každého vrchola ku každému v grafe  $G$ . Na to slúži Floyd-Warshall algoritmus. Vzájomná vzdialenosť sa eviduje v dvojrozmernom poli *vzdialenost*, *vzdialenost[i, j]* predstavuje vzdialenosť medzi vrcholmi  $i$  a  $j$ . Ďalej sa postupuje podľa toho algoritmu – inicializuje sa matica vzdialeností a prebehnú tri for-cykly. Bitová premenná *naslo\_sa* zaznamenáva, či sa pre aktuálne spracovávaný graf už našla dominujúca kružnica. Ak sa pri iteráciách vrcholov predstavujúcich cípy vidiel zistí, že kružnica bola nájdená, nastaví sa táto premenná na *true* (inicializovaná je na *false*) a ďalšie iterácie už nepokračujú. Vymazanie a vynechanie tejto premennej by malo za následok, že by sa vypísali všetky dominujúce kružnice spracovávaného grafu pre daný počet vidiel. Nasleduje  $n$  for-cyklov, kde  $n$  je počet vidiel, ktoré majú v grafe byť. Pre každý z programov (pre 1, 2, alebo 3 vidly) je tento počet for-cyklov teda iný.

Najprv sa transformuje graf  $G$  (graf na vstupe) na graf  $H$  (graf bez cípov vidiel, ich susedov a s výnimočnými hranami). Graf  $G$  je popísaný týmito premennými: *v\_pocet\_vrcholov* (počet jeho vrcholov), *v\_pocet\_susedov* (pole,  $i$ -ta zložka znamená, koľko susedov má vrchol  $i$ ), *v\_susedia* (dvojrozmerné pole,  $[i, j]$  znamená, aký je  $j$ -ty sused  $i$ -teho vrchola). Graf  $H$  je popísaný týmito premennými: *pocet\_vrcholov* (počet vrcholov grafu  $H$ ), *pocet\_susedov* (pole,  $i$ -ta zložka znamená, koľko susedov má vrchol  $i$ ), *susedia* (dvojrozmerné pole,  $[i, j]$  znamená, aký je  $j$ -ty sused  $i$ -teho vrchola). Pri transformácii grafu  $G$  na  $H$  sú dôležité polia *bude\_v\_novom* a *precisluj*. Bitové pole *bude\_v\_novom* zaznamenáva, či vrchol z grafu  $G$  bude aj v grafe  $H$ . Ide o vrcholy, ktoré nie sú cípmi vidiel, ani ich susedmi. Tie vrcholy, ktoré budú v grafe  $H$ , sa do tohto grafu zaznamenajú. Ďalšie pole je *precisluj*. Graf  $H$  je totiž zatiaľ len kópiou grafu  $G$ , z ktorého sú vyhádzané všetky cípy vidiel a ich susedia. Aby boli vrcholy grafu  $H$  označené spojito (t.j. aby sa nestalo, že napríklad je v grafe  $H$  vrchol 5, vrchol 7, ale vrchol 6 nie, pretože bol cípom vidly), musí nastať prečíslovanie vrcholov. To funguje tak, že  $i$ -ta zložka pola *precisluj* je rovná 0, ak daný vrchol v grafe  $H$  nie je, inak ide o hodnotu počtu vrcholov grafu  $H$ , ktorá je inicializovaná na 0 a počas cyklu sa zvýši o 1 vždy, ak ide o vrchol, ktorý v grafe  $H$  je. Pri dopĺňaní vrcholov nájdenej kružnice sa nám zíde potom aj spätné prečíslovanie, ktoré sa zaznamenáva v poli *precislujinv*.

Ďalej nasleduje evidovanie výnimočných hrán. Ich počet sa zaznamenáva v premennej *pocet\_vynimiek*, prvé vrcholy výnimočnej hrany sú v poli *v1*, druhé vrcholy v poli *v2*. V poli *medzi\_nimi* sa zaznamenáva, aký vrchol, resp. vrcholy sú na výnimočnej hrane. Bližšie popisovať toto evidovanie nebudeme, lebo zodpovedá presne myšlienkam z podkapitol 6.5.2, 6.5.3 a 6.5.4. Podľa nich sa dá vyčítať, čo uvedený kód robí. Táto časť je individuálna v prípade jednej, dvoch a troch vidiel.

Nasleduje algoritmus na hľadanie dominujúcej kružnice v grafe  $H$ . Určia sa konečné stavy (dva budú vždy, tretí v prípade, že za začiatok bude určený vrchol s tromi susedmi v grafe  $H$ ) a uložia sa do premenných *koniec1*, *koniec2* a *koniec3*. Bitové pole *pomocne* je pomocným polom pri určení začiatočného stavu a konečných stavov. Začiatočný stav sa vyberá iným spôsobom pre 1, 2 a 3 vidly – kvôli iným metódam evidovania hrán. V prípade 1 vidly je to prvý vrchol grafu  $H$ , v prípade dvoch vidiel je to vrchol, ktorý nie je vo

výnimočných hranách (v prípade grafov na vstupe taký vždy je), v prípade troch vidiel je to rovnaké, ako v prípade dvoch vidiel. Tam už ale bol prípad, kedy sa taký vrchol nenašiel, v tom prípade sa vyberie za začiatok vrchol, ktorý je vzdialený od tretieho cípu vidly na vzdialenosť dva a od druhého cípu na vzdialenosť aspoň tri. Taký vrchol sa už našiel potom vždy. Metóda prehľadávania do šírky je tu implementovaná cez dva rady. Sú označené ako *q1* a *q2*. Ide o polia čísel – podôb stavov cez samotné číslo. Vždy sa najprv zistí, či vrchol, na ktorom sa nachádzame, nie je na nejakej výnimočnej hrane. Toto zaznamenáva premenná *extra*, nastavená na začiatku na *false*, ak sa nájde výnimočná hrana pre daný vrchol, priradí sa do nej *true*. Prvý rad, tam sú stavy spracovávané v aktuálnej šírke (šírka = počet stavov od počiatočného) a do druhého z nich sa ukladajú stavy v nasledujúcej šírke. Ak sa nájde výnimočná hrana pre daný vrchol, pridá sa do druhého radu opačný stav zodpovedajúci navštívenému vrcholu z druhého konca tejto hrany. Výnimočných hrán pre daný vrchol môže byť aj viac. Ak sa nenájde žiadna, tak sa do druhého radu dostanú stavy zodpovedajúce prechodu do susedov aktuálneho vrchola. Pole *pomocne* je bitové pole aktuálneho vrchola, *hlava* je aktuálny vrchol. Pole *pomocne2* je bitové pole stavu, ktorý sa spolu s nasledujúcim aktuálnym vrcholom zapíše do druhého radu v prípade, že tento stav nie je navštívený. Nakoniec sa obsah pola *q2* priradí do pola *q1*. V prípade, že je navštívený koncový stav, zistí sa, ktorý to je a skonštruuje sa hamiltonovská kružnica grafu *H* pomocou pola *predchodca*. Jej dĺžka sa eviduje v premennej *dlzka\_dom*. V poli *dom\_kruznica* sa ukladá dominujúca kružnica. Číslovanie vrcholov tejto kružnice sa prevedie pomocou pola *precislujinv* späť na číslovanie grafu *G*. Kvôli doplneniu vrcholov, ktoré ležia na výnimočných hranách, sa kružnica predĺži o 1 prvok – jej posledný bude prvým prvkom – to kvôli tomu, keby výnimočná hrana mala konce na konci a začiatku nedoplnenej kružnice. Pre každú výnimočnú hranu sa potom hľadajú jej dva konce, ktoré sú na kružnici po sebe idúce. Tieto sa evidujú v poli *medzi\_nimi*. V prípade, že ide o dva vrcholy, je to riešené tak, že sú reprezentované ako (1. vrchol)\*100 + (2. vrchol). Dá sa to tak reprezentovať preto, lebo maximálny počet vrcholov je menší, ako 100. Pri dopĺňaní do kružnice sa preto prihliada na to, že či je prvok pola *medzi\_nimi* nad 100, ak áno, potom sa spracúva špeciálne. V prípade 1 vidly ide ale vždy len o jeden vrchol, v prípade dvoch alebo troch môže ísť už aj o dva vrcholy na výnimočnej hrane. Dominujúca kružnica sa potom vypíše do výstupného súboru. V prípade, že sa nenašla, vypíše sa do výstupného súboru dĺžka kružnice 0 a do ďalšieho tiež jeden znak „0“, do protokolu číslo grafu. Nakoniec po skončení hlavného cyklu sa vypíše do protokolu, koľko bolo nájdených a nenájdených dominujúcich kružníc pre dané grafy na vstupe, ako aj celkový čas behu programu.

## 6.8 Popis programu na nájdenie 2DBP

Chronologicky je tento program vytvorený ako prvý v poradí, je napísaný prehľadnejšie, než program na vyhľadávanie dominujúcich kružníc, nachádza sa tu viac funkcií a procedúr. Názov programu je *modifBMC.pas*. Pre celý program sa uvažuje maximálny počet vrcholov grafu 100, i keď pre naše účely postačuje 30. Globálnymi premennými sú výstupné textové súbory (*vystup* a *protokol*) a premenné pre označenie spracovávaného grafu (*znacka*), počtu nájdených 2DBP (*najdenych*) a nenájdených 2DBP (*nenajdenych*).

Graf je tu reprezentovaný záznamom. To umožňuje pohodlnú manipuláciu s ním, keď sa zadá ako parameter funkcie, resp. procedúry. Prvkami záznamu *Tgraf* sú nasledovné polia a premenné: *pocet\_vrcholov* (počet vrcholov grafu), *dlzka\_dom* (dĺžka dominujúcej kružnice grafu), *je\_bip* (bitová premenná, hovorí, či je daný graf bipartitný, keď sa robí jeho test na túto vlastnosť), *pocet\_susedov* (jednorozmerné pole, *i*-ta zložka udáva počet susedov vrchola

$i$ ), *susedia* (dvojmerné pole,  $[i, j]$  udáva, aký je  $j$ -ty sused vrchola  $i$ ), *matica* (matica susednosti,  $[i, j]$  udáva, koľkonásobný sused vrchola  $i$  vrchol  $j$  je), *dominujuca* (jednorozmerné pole – zadanie dominujúcej kružnice) a *farba* (jednorozmerné pole, farba vrcholov – využíva sa pri zisťovaní, či je graf bipartitný). Záznamom je reprezentované aj párenie, teda množina hrán. Prvkami záznamu *pareníe* je *pocet\_hran* (počet hrán párenia) a polia  $v1$  a  $v2$  (konce vrcholov hrán párenia). Nakoniec sú tam ešte dva vlastné typy premenných, *pole1* (jednorozmerné pole celočíselných premenných) a *pole2* (jednorozmerné pole bitových premenných).

Prvá z procedúr je *vypísanie*. Má na vstupe graf  $g$  a párenia  $m1$  a  $m2$ . Jej úlohou je podľa formátu popísaného v podkapitole 6.3 vypísať do výstupného súboru dominujúcu kružnicu, prvé a druhé bipartizujúce párenie. Volá sa v prípade, keď sa už v ďalej popísanej procedúre *vyhladávanie* našli 2DBP. Jej telom sú jednoduché príkazy na vypísanie do súboru a jednoduché for-cykly. Nasleduje funkcia *odober\_pareníe*, na vstupe má graf  $g$  a párenie  $m$ , na výstupe graf, ktorý je rozdielom grafu  $g$  a párenia  $m$ . Výsledný graf sa udržiava v premennej  $h$ . Najprv sa do  $h$  priradí množina susedov a *susedia* z grafu  $g$ . Potom sa prechádza hranami párenia a v prípade oboch vrcholov sa odoberie sused, ktorý je druhým koncom hrany párenia. Pracuje sa s reprezentáciou množín susedov pre každý vrchol a editujú sa pri odoberaní párenia tieto množiny. Premenná *pozícia* uvádza pozíciu prvku danej množiny susedov, ktorý sa má z tejto množiny odstrániť. Nakoľko sa graf, ktorý je výstupom tejto funkcie, bude meniť kontrahovaním hrán a ďalej sa bude testovať, či je tento kontrahovaný graf bipartitný, nebolo potrebné grafu na výstupe „odovzdávať“ dominujúcu kružnicu.

Funkcia *homeomorfný* dostáva na vstupe graf  $g$  a vracia graf, ktorý je homeomorfný s grafom  $g$ . Opäť sa pracuje s množinami susedov pre každý vrchol. Prevedenie na maticu susednosti a pracovanie s ňou by bolo možno elegantnejšie, ale zaberalo by to zbytočne veľa času, pretože graf je kubický, t.j. veľmi riedky. Pôvodne napísaná funkcia *homeomorfný* pracovala s maticou susednosti, snahou bolo ale znížiť čas vyhľadávania, preto bola prepísaná do podoby, keď sa pracuje s množinami susedov pre každý vrchol. Algoritmus pracuje na podklade, že treba odstrániť všetky vrcholy stupňa 2 a vzájomne prepojiť ich susedov. Slučky sa do tohto ale nerátajú. Premenná *uprav* signalizuje, je ešte stále možné, že sa v grafe nachádza nejaký vrchol stupňa 2. Každým odstránením vrchola stupňa dva z grafu sa totiž môže vytvoriť iný vrchol stupňa dva. Len v prípade, že sa už taký nenašiel, môžeme prehlásiť, že daný graf je homeomorfný s grafom na vstupe. Pretože niektoré vrcholy z grafu  $g$  zmizli, číslovanie vrcholov nie je spojitá a je potrebné prečíslovanie. Vrcholy, ktoré majú kladný počet susedov, budú aj v prečíslovanom grafe, inak nie. Na prečíslovanie slúži pole *precisluj* a pomocná premenná *cislo*. Výstupným grafom je graf  $h$ . Tento graf pôjde potom na kontrolu, či je bipartitný, preto bude dobré odstrániť násobné hrany. Odstránenie slučiek je potrebné vyslovene. Graf  $h$  sa vytvára z grafu  $g$ . Používa sa pri tom pole *precisluj*, aby bolo číslovanie grafu  $h$  spojitá. V prípade, že má vrchol grafu  $g$  práve 0 susedov, taký v grafe  $h$  nebude. Ak má vrchol grafu  $g$  jedného suseda, bude aj v grafe  $h$ . Ak má dvoch susedov, skontrolujeme, či ide o rôznych susedov. Ak nie, ide o slučku a do vrchola grafu  $h$  ide iba jeden sused, ak sú rôzne, potom idú do vrcholu grafu  $h$  obaja susedia. V prípade, ak má vrchol grafu  $g$  troch susedov, je tu niekoľko možností. Buď sú všetci traja susedia rovnakí – vtedy ide do vrchola grafu  $h$  len jeden z nich. Ak je ďalej jedna z dvojíc susedov rovnaká a tretí je rôzny od nich (počet týchto dvojíc je tri – 1. a 2. sused môžu byť rovnakí, ďalej 1. a 3., alebo 2. a 3.), potom vrchol grafu  $h$  bude mať dvoch susedov – ten jeden rôzny vrchol a jeden z rovnakých. V prípade, že sú všetci traja susedia vrchola grafu  $g$  navzájom rôzni, potom tých istých susedov získa aj vrchol v grafe  $h$ . Čo sa týka označenia vrcholov v kóde,  $a$  predstavuje aktuálny vrchol a jeho nanajvyš traja susedia sú označení premennými  $b$ ,  $c$  a  $d$ .

Procedúra *do\_hlbky* je pomocná procedúra ku funkcií *je\_bipartitny*. Funkcia *je\_bipartitny* má na vstupe graf *g* a na výstupe informáciu, či je tento graf bipartitný. Využívajú sa premenné v zázname grafu. Pole *farba* udržiava informáciu, akou farbou sú ofarbené vrcholy. Na začiatku nie sú ofarbené (to predstavuje číslo -1). Premenná *je\_bip* zaznamenáva, či je graf bipartitný počas behu algoritmu. Na začiatku sa predpokladá, že je. Prvý vrchol sa zafarbí farbou 0 a jeho susedia sa rekurzívne zafarbia opačnou farbou. Takto sa postupne zafarbujú všetky vrcholy. Ak sa počas rekurzívneho behu zistí, že sú dva susedné vrcholy zafarbené tou istou farbou, do premennej *je\_bip* sa priradí *false* a algoritmus končí. Ak sa nenájde dvojica susedov, ktorá je zafarbená rovnakou farbou, algoritmus vracia *true*. Procedúra *do\_hlbky* je štandardnou šablónou algoritmu do hĺbky, s pridanou podmienkou na jej začiatku.

Hlavnou procedúrou programu je procedúra *vyhladavanie*. V podstate ide o naprogramovanie myšlienok z podkapitoly 6.6. Pre každý vrchol sa určí, či je na kružnici a ak je, tak sa určí jeho poloha v kružnici – pole *poloha*. Potom sa vyhládávajú chordy – pre každú hranu grafu sa skontroluje, či jej oba vrcholy ležia na dominujúcej kružnici a či nie sú na nej po sebe idúce. Pomáhame si pritom poľom *poloha*. Ak ide o chordu, pridá sa do zoznamu hrán, ktoré budú v páreniach a zaznačíme ju ako chordu. Ďalej sa vyhládávajú vidly – ak vrchol nie je na dominujúcej kružnici, ide o vidlu. Tri hrany vidly sa pridajú do zoznamu hrán a zaznačí sa, že ide o vidlu. Dvozmerné pole *hrany* slúži na zaznamenávanie hrán, ktoré budú v páreniach. Prvá zložka je poradové číslo hrany. Druhá zložka sú konce hrán. Pri chorde ide o 2 vrcholy – jej konce. Pri vidle ide o 6 vrcholov – pre každú hranu vidly dva konce. Bitové pole *chorda* zaznamenáva, či je *i*-ta hrana chordou, alebo vidlou (*true* = chorda, *false* = vidla). Bitová premenná *najdene* zaznamenáva, či ešte neboli nájdené 2DBP. Na začiatku je nastavená na *false*. Po nájdení prvých 2DBP sa nastaví na *true* a vyhládávanie končí. Počet hrán, ktoré budú páreniam patriť, je označené premennou *n*. Generovanie všetkých *n*-ciferných čísel v trojkovej sústave je zabezpečené cez pole *p*. Ide o jednorozmerné pole. Na začiatku sú nastavené všetky prvky na 0. Týka sa to aj prvku s indexom *n+1*. Do prvého prvku poľa sa priradí -1. Cyklus *while* beží dovtedy, dokiaľ sa 2DBP stále nenašli a prvok s indexom *n+1* poľa *p* je rovný nule. V každom prechode cyklu sa na začiatku pripočíta do prvého prvku poľa *p* jednotka a potom sa pole zmodifikuje. Do premennej *i* ide na začiatku 1. Dokiaľ je *i*-ty prvok poľa *p* rovný trom, vynuluje sa a *i* sa zväčší o 1. Týmto spôsobom dostaneme vždy nasledovníka čísla v trojkovej sústave, pričom v poli *p* sú jeho cifry. Pretože sa to robí vždy na začiatku, bolo potrebné na začiatku priradiť do prvého prvku poľa *p* číslo -1. Ak sa stane, že hodnota prvku s indexom *n+1* je rovná 1, znamená to, že sa už prešlo všetkými hodnotami *n*-ciferného čísla a cyklus sa ukončí s výsledkom, že sa žiadne 2DBP nenašli. Ďalej nasleduje podľa popisu v podkapitole 6.6 rozdelenie hrán do dvoch párení. Tieto párenia sú *m1* a *m2*. Graf *h1* je rozdielom grafu *g* a párenia *m1*. Urobí sa z neho graf, ktorý je ku nemu homeomorfný a skontroluje sa, či je tento graf bipartitný. Ak áno, urobí sa analogický postup s grafom *h2*. Ak sa 2DBP našli, vypíšu sa do výstupného súboru, ak sa nič nenašlo, vypíše sa to do výstupného súboru i protokolu. Zvýši sa príslušná premenná *najdenych*, resp. *nenajdenych*.

Aj v tomto programe sa meria pre informatívne účely čas. Používa sa knižnica *dos* a jej funkcia *gettime*. Čas je meraný v stotínach sekundy. Na úpravu formátu času slúži funkcia *spracuj* popísaná v podkapitole 6.7. V hlavnom tele programu sa inicializujú súbory – jeden vstupný a dva výstupné. Ich názvy sa píše do programu. Globálne premenné *najdenych* a *nenajdenych* sa inicializujú na nulu. Do premennej *start* sa priradí čas na začiatku behu programu. Načítava sa podľa formátu popísanom v podkapitole 6.2, dokiaľ nie je koniec súboru (do konca sa nepočítajú biele znaky). Pretože dominujúca kružnica sa pre daný graf nemusí vo vstupnom súbore nachádzať (vtedy je jej dĺžka nulová), vyhládávanie nastáva len vtedy, keď tento graf na vstupe dominujúcu kružnicu má. Po skončení načítavania súboru sa

zaznamená do premennej *finish* čas, v ktorom beh programu skončil, do protokolu sa vypíše informácia o počte nájdených a nenájdených 2DBP grafov na vstupe a celkový čas behu programu.

## 6.9 Časové a pamäťové zložitosti algoritmov

V tejto kapitole si povieme o časovej a pamäťovej zložitosti algoritmu na hľadanie dominujúcich kružníc, ako aj algoritmu na hľadanie 2DBP. Obe tieto zložitosti sú dôležité pre experimentálnu časť práce. Nejde tu len o zložitosť algoritmov v  $O$ -notácii, ale aj o skutočnú dĺžku trvania behu programov a množstva pamäte, ktoré programy potrebujú.

### 6.9.1 Zložitosť pri hľadaní dominujúcej kružnice

Počet vrcholov grafu  $G$  nech je  $n$ . Počet vidiel nech je  $a$ . Potom má graf  $H$  práve  $n - 4 * a$  vrcholov, pretože každá vidla spôsobí, že sa od grafu  $G$  odpočítajú 4 vrcholy. Časová zložitosť algoritmu na hľadanie dominujúcej kružnice je  $O((n - 4 * a) * 2^{n - 4 * a})$ . Pri inicializácii poľa navštívených stavov sa prechádza totiž všetkými týmito stavmi a tých je práve  $b * 2^b$ , kde  $b$  je počet vrcholov grafu  $H$ . Samotný algoritmus do šírky pracuje už ale rýchlejšie, ako by sa očakávalo od tejto celkovej časovej zložitosti. To sa ukázalo aj pri experimente. Je dosť veľká šanca, že ak algoritmus prejde do šírky rovnajúcej sa počtu vrcholov, dominujúca kružnica sa nájde. Ďalej je predpokladom, nakoľko je graf kubický, a teda riedky, že veľa stavov nebude vôbec navštívených a rad spracovávaných stavov bude po relatívne krátkom čase prázdny. Čo sa týka časovej zložitosti procedúr a funkcií, zložitosť funkcie *na\_cislo* a aj procedúry *na\_pole* je  $O(2^b)$ , kde  $b$  je počet vrcholov grafu  $H$ . Časová zložitosť funkcie *spracuj* je  $O(1)$ , pretože tam ide o výpočtové operácie a operácie s reťazcami, ktoré majú zložitosť v konštantnom čase.

Priestorová zložitosť algoritmu je tiež  $O((n - 4 * a) * 2^{n - 4 * a})$ , pretože každý stav má svoj pamäťový priestor. Exponenciálny rast pamäťového priestoru má za následok zväčšujúcim sa  $n$  alokovanie veľkého množstva operačnej pamäte. Jej veľkosť je individuálna v rámci počítača, na ktorom beží program. V mojom prípade ide o 1 gigabajt. V prípade, že  $n - 4 * a = 22$ , je to ešte možné. Konkrétne čísla hovoria, že  $22 * 2^{22} = 92\,274\,688$ . Pole *visited* je jednobajtové a pole *predchodca* štvorbajtové. Celkovo budú takto zaberat'  $5 * 22 * 2^{22} = 461\,373\,440$  bajtov. Dá sa predpokladať, že rady  $q1$  a  $q2$  nebudú veľmi dlhé, ale pre istotu je dobré im vyhradiť dostatok pamäte. Ide o štvorbajtové polia, v mojom prípade sa im dalo vyhradiť každému 200 MB pamäti (rozsah 50 000 000,  $2 * 4 * 50\,000\,000$  je celkovo 400 MB). Pre vyššiu hodnotu rozdielu  $n - 4 * a$  by bolo potrebné väčšie množstvo pamäte. Z tohto vyplýva to, prečo je možné programom pre jednu vidlu skúšať spracovávať nanajvýš 26 vrcholové grafy. Je to preto, lebo jedna vidla odoberie grafu  $G$  len 4 vrcholy a graf  $H$  má potom 22 vrcholov. Pri grafoch s 28 vrcholmi by mal potom graf  $H$  celkovo 24 vrcholov. Pre dve vidly je možné spracovávať grafy v počtom vrcholov do 30 vrátane. Pri 32 vrcholoch by to už možné nebolo, lebo  $32 - 2 * 4 = 24$ . V prípade, že by boli na vstupe grafy s vrcholmi 32 alebo 34, dalo by sa im hľadať dominujúce kružnice len s použitím troch vidiel. Ak by boli na vstupe grafy s ešte väčším množstvom vrcholov, bolo by potrebné urobiť program s väčším množstvom vidiel. Čo sa týka priestorovej zložitosti procedúr a funkcií, zložitosť funkcie

$na\_cislo$  a aj procedúry  $na\_pole$  je  $O(b)$ , kde  $b$  je počet vrcholov grafu  $H$ . Priestorová zložitosť funkcie  $spracuj$  je  $O(1)$ , pretože výstup je uvedený v reťazci s konštantným počtom znakov.

## 6.9.2 Zložitosť pri hľadaní 2DBP

Hlavná procedúra vyhľadáva všetky dvojice dizjunktných bipartizujúcich párení. Nech počet vidiel v grafe je  $v$  a počet chórd  $c$ , ich súčet nech je  $n$ . Pretože sa generujú všetky  $n$ -ciferné čísla v trojkovej sústave, je z tohto pohľadu časová zložitosť  $O(3^n)$ . To však úplne nie je. Pre každé toto  $n$ -ciferné číslo sa dejú ďalšie operácie závisiace od premenných. Pozrime sa na to bližšie. Nech počet vrcholov grafu  $G$ , teda grafu s dominujúcou kružnicou, je  $a$ .

Funkcia  $odober\_parenie$  beží v čase  $O(m)$ , kde  $m$  je počet hrán párenia. To preto, lebo ostatné jej operácie sú už konštantné. Konštantou je totiž aj počet susedov pre každý vrchol, a síce 3. Pretože hrán v každom párení nebude viac ako súčet chórd a vidiel (premenná  $n$ ), možno potom napísať, že funkcia  $odober\_parenie$  beží v čase  $O(n)$ . Keď odstránime párenie z grafu, takto upravený graf prechádza do funkcie  $homeomorfny$ . Najprv prebieha cyklus, ktorý odstraňuje vrcholy stupňa dva a spája ich susedov. Keďže spájanie susedov a odstraňovanie prebieha v konštantnom čase (počet susedov každého vrchola je konštanta), potom je časová zložitosť  $O(a * \text{počet prechodov cyklu})$ . Počas jedného prechodu nám určite zmiznú všetky vrcholy stupňa 2. Odstránením takéhoto vrcholu sa nemení stupeň žiadneho iného vrchola. Preto je tento prechod cyklu nanajvyš 1 a celková zložitosť cyklu je tak  $O(a)$ . Prečíslovanie prebieha tiež v čase  $O(a)$ . Prečíslovaný graf má nanajvyš toľko vrcholov, ako pôvodný. Úprava prečíslovaného grafu prebieha tiež v čase  $O(a)$ , lebo počet susedov každého vrchola je konštanta. Celá funkcia  $homeomorfny$  má teda časovú zložitosť  $O(a)+O(a)+O(a)$ , čo je celkovo  $O(a)$ . Program obsahuje pod komentárom aj starú verziu funkcie  $homeomorfny$ . Táto bola prepísaná a ďalej nepoužívaná práve kvôli časovej zložitosti. Využívala sa tam matica susednosti vrcholov, preto bola jej časová zložitosť  $O(a^2)$ . Aj experimenty ukázali, že ju je kvôli úspore času potrebné prepísať. Graf potom ide na kontrolu, či je bipartitný. Môže nastať prípad, že sa zakrátko zistí, že nie je. Najhorší prípad z pohľadu času je prípad, že graf je bipartitný, lebo vtedy sa zafarbí všetky jeho vrcholy. Preto je časová zložitosť funkcie  $je\_bipartitny$  rovná  $O(a)$ .

Pre každé zo zvolených  $n$ -ciferných čísel v trojkovej sústave je takto zložitosť  $O(n) + O(a) + O(a)$ , kde prvý sčítanec je zložitosť odobratia párenia, druhý je zložitosť prevodu na homeomorfný graf a tretí je zložitosť zistenia, či je graf bipartitný. Pretože súčet vidiel a chórd je určite menšia, alebo rovná, ako je počet vrcholov grafu, potom sa dá zložitosť pre každé  $n$ -ciferné číslo v trojkovej sústave uviesť ako  $O(a)$ . Aby sme nezabudli, testuje sa potom ešte jeden graf (v prípade, ak je prvý bipartitný), ale 2 je konštanta, preto sa zložitosť nemení. Celková zložitosť hľadania 2DBP je potom  $O(a*3^n)$ , v rozpísanom tvare  $O(a*3^{v+c})$ , kde  $a$  je počet vrcholov grafu  $G$ ,  $v$  je počet vidiel a  $c$  je počet chórd.

V praktickom použití môže byť čas naozaj všelijaký. Po prvých nájdených 2DBP algoritmus končí. Z toho vyplýva, že ak sa nájdu 2DBP rýchlo, algoritmus aj rýchlo skončí. V najhoršom prípade, keď žiadne 2DBP nenájde, prechádza všetky  $n$ -ciferné čísla v trojkovej sústave. Vieme, že vrcholov je nanajvyš 30. Otázka znie, aký je súčet vidiel a chórd. Tento súčet totiž napovie, ako dlho môže prehľadávanie všetkých možností trvať. Pretože uvažujeme vždy presný počet vidiel, nech je tento počet ( $v$ ) konštanta. Zaujímá nás potom počet chórd. Vieme, že kubický graf s  $a$  vrcholmi má  $\frac{3*a}{2}$  hrán. Každá vidla má tri hrany

a jej odobratie spôsobí, že tri vrcholy grafu budú stupňa dva (pre každé dve vidly podľa podkapitoly 6.5 platí, že sú vrcholovo dizjunktné). Po odstránení vidiel bude mať takýto graf teda  $\frac{3 * a}{2} - 3 * v$  hrán. Pre tieto hrany platí, že buď patria dominujúcej kružnici, alebo potom

ide o chordy. Dominujúca kružnica má toľko hrán, koľko má vrcholov. A počet vrcholov ležiacich na tejto kružnici je  $a - v$ , čo zodpovedá vrcholom, ktoré sú v grafe, ale nie sú cípmi vidiel. Počet chórd grafu bude teda potom  $\frac{3 * a}{2} - 3 * v - (a - v) = \frac{a - 4 * v}{2}$ . Súčet chórd

a vidiel bude potom  $\frac{a - 4 * v}{2} + v = \frac{a}{2} - v$ . Ak chceme, aby bola táto hodnota čo najvyššia,

musí byť  $a$  čo najväčšie a  $v$  čo najmenšie. Jedna vidla pri 30 vrcholoch možná podľa podkapitoly 6.9.1 možná nie je. Pri 30 vrcholoch a dvoch vidlách je súčet vidiel a chórd 13, čo je maximálny súčet pri daných grafoch. Jedna vidla je povolená u 26 vrcholových grafov, ale  $13 - 1$  je rovné len 12. Hodnota exponentu je teda nanajvyš 13, čo je prijateľné. Bližšie informácie sú uvedené vo výsledkoch experimentu.

Priestorová zložitosť algoritmu na hľadanie 2DBP veľmi nízka relatívne ku časovej zložitosti. Čo je v prípade časovej zložitosti exponenciálny nárast, tu ide iba o pole  $p$ , ktoré má priestorovú zložitosť  $O(n)$  (resp.  $O(a)$ ). Procedúra *odober\_parenie* má priestorovú zložitosť  $O(a)$ , lebo sa tam len robia zmeny na jednom grafe, ktorý zaberá stále rovnako veľa priestoru. Funkcia *homeomorfny* má tiež zložitosť  $O(a)$ . Jej stará verzia mala priestorovú zložitosť  $O(a^2)$ . Podobne je na tom aj funkcia *je\_bipartitny*, aj jej zložitosť je  $O(a)$  – kvôli poľu *farba*. Všetky polia a dátové typy v procedúre *vyhladavanie* sú v zložitosti  $O(a)$  – či už ide o dominujúcu kružnicu (určite nemá viac vrcholov, ako samotný graf), pole *hrany* (jeho druhá zložka má 6 prvkov, čo je konštanta), pole *chorda*, alebo pole  $p$ . Celková priestorová zložitosť algoritmu na hľadanie 2DBP je teda  $O(a)$ . Zjednodušene povedané, máme jeden graf s  $a$  vrcholmi uložený v pamäti a pre všetky operácie, ktoré na ňom robíme, nám postačuje nanajvyš nejaký konštantný násobok tejto pamäte.

## 6.10 Realizácia a výsledky experimentu

Experiment sa realizuje tak, aby sa potvrdila platnosť hypotézy 5.2.1 pre všetky grafy, ktoré máme k dispozícii. Máme 7 súborov, ktoré boli popísané v podkapitole 6.2. Každý z nich obsahuje grafy, ktoré je potrebné spracovať. Pod spracovaním budeme chápať, že každému grafu sa budeme pokúšať nájsť jednu dominujúcu kružnicu (podľa možnosti jednu pre každý počet vidiel) a potom pre túto kružnicu overíme, či v grafe s touto kružnicou existujú 2DBP. Súbor sa spracovávajú pomocou programov popísaných v kapitole 6. Podľa úspešnosti hľadania dvoch dizjunktných bipartizujúcich párení sa budú robiť ďalšie experimenty.

Vo všeobecnosti je zbytočné vyhľadávať ku konkrétnemu grafu 2DBP pre všetky dominujúce kružnice, ktoré môžeme pomocou programov nájsť. V prípade 30 vrcholových grafov zaváži, že ich je 28400 a teda by toto vyhľadávanie veľmi dlho trvalo. Hypotéza 5.2.1 hovorí, že stačí nájsť jednu dominujúcu kružnicu takú, že vieme nájsť 2DBP. Ak teda pre istý graf takúto dominujúcu kružnicu nájdeme, preňho už potom táto hypotéza platí a hlbšie sa ním zaoberať nemusíme. Pre každý počet vrcholov boli uplatnené iné postupy a vyšli tu špecifické výsledky. V prípade 28 a 30 vrcholových grafov bolo potrebné hlbšie skúmanie. Teraz popíšeme v každej samostatnej podkapitole, ako sa postupovalo a aké výsledky boli nájsené pre každý počet vrcholov grafov na vstupe.



Časy uvedené v jednotlivých podkapitolách majú informatívny charakter. Nejde tam ani o konkrétne hodnoty týchto časov, ide skôr o informáciu, aké sú z časového hľadiska vzťahy medzi hľadaním dominujúcich kružníc pre 1, 2 alebo 3 vidly a hľadaním 2DBP v prípade, že bola dominujúca kružnica nájdená daným počtom vidiel. Meranie času bolo uskutočňované na mojom počítači (procesor rýchlosti 3 GHz). V prípade rýchlejšieho procesora, alebo použitím viacerých počítačov by bol čas spracovania samozrejme rýchlejší.

### 6.10.1 Grafy s 18 vrcholmi

Súbor s grafmi, ktoré majú 18 vrcholov, obsahuje len dva grafy. Z praktického hľadiska poslúžili dobre najmä pri tvorbe programu, ktorý vyhľadáva dominujúce kružnice, lebo sa dali ľahko nakresliť na papier a výsledok sa dal jednoducho overiť. Pre nízky počet vrcholov a celkovo malý počet grafov trvalo hľadanie dominujúcich kružníc, ako aj 2DBP minimálny čas. Pre jednu vidlu a pre dve vidly sa našli dominujúce kružnice a k týmto kružniciam sa našli aj 2DBP. Pre tri vidly sa kvôli obmedzeniam popísaným v podkapitole 6.5.4 nenašla žiadna dominujúca kružnica.

Výsledkom je teda, že pre všetky (dva) 18 vrcholové grafy bola nájdená aspoň jedna ich dominujúca kružnica taká, že sa pre ňu našli 2DBP. Výstupnými súbormi sú *s18\_c4\_dom.c*, kde sú zaznamenané dominujúce kružnice (zvlášť súbor pre jednu a zvlášť pre dve vidly) a *s18\_c4\_2dbp.c*, kde sú zaznamenané 2DBP pre danú dominujúcu kružnicu (tiež zvlášť pre jednu vidlu a pre dve vidly). Súbor *protokol.txt* v príslušných adresároch má v tomto prípade čisto informatívny charakter.

Pri dvoch grafoch na vstupe sa dalo ľahko skontrolovať, či program na vyhľadávanie dominujúcich kružníc našiel naozaj platnú dominujúcu kružnicu. Bolo však jasné, že pri viacerých grafoch to už možné nebude. Z toho dôvodu bol vytvorený pomocný program s názvom *test\_dom*. V stručnosti si popíšeme, ako program *test\_dom* pracuje. Jeho vstupom je súbor s grafmi, ktoré majú zistené dominujúce kružnice. Jeho formát je popísaný v podkapitole 6.2. Program graf načíta a preverí, či ide jednak o kružnicu a potom či ide o dominujúcu kružnicu. Ak pre graf nie je nájdená dominujúca kružnica, takýto graf sa ignoruje – nepovažuje sa to za neplatnú dominujúcu kružnicu. Aby bola kružnica kružnicou, musí pre ňu platiť, že dva jej po sebe idúce vrcholy musia byť susedné v danom grafe a žiadne dva vrcholy sa nesmú opakovať. Toto je v programe vyriešené jednoduchými cyklami a maticou susednosti. V prípade, že sú tieto podmienky splnené, overí sa ešte, či pre všetky hrany grafu platí, že aspoň jeden koniec leží na kružnici. Ak toto všetko platí, je to v poriadku, ak nie, vypíše sa správa, pre aký graf nejde o platnú dominujúcu kružnicu. V prípade, že sú všetky kružnice v súbore platné dominujúce kružnice, program o tom vypíše správu.

### 6.10.2 Grafy s 20 vrcholmi

Súbor s grafmi, ktoré majú 20 vrcholov, obsahuje 6 grafov. Hľadanie dominujúcich kružníc a 2DBP je veľmi podobné, ako v prípade grafov s 18 vrcholmi. Dominujúce kružnice sa našli pre jednu a dve vidly. Pre tri vidly sa nenašli, počet vrcholov je na to stále malý. Čas hľadania dominujúcich kružníc je minimálny. Ku kružniciam s jednou a dvoma vidlami sa našli 2DBP. Čas nájdenia týchto párení v prípade 6 grafov je malý, ale už aj na ňom je vidno

rozdiel v prípade uvažovania jednej a dvoch vidiel. Ak išlo o dominujúcu kružnicu dĺžky 19 (jedna vidla), bol čas behu 4,20 sekundy, pre dominujúcu kružnicu dĺžky 18 (dve vidly) bol čas behu 1,75 sekundy. Korektnosť nájdených dominujúcich kružníc bola skontrolovaná programom *test\_dom*.

Výsledkom je teda, že pre všetkých šesť 20 vrcholových grafov bola nájdená aspoň jedna ich dominujúca kružnica taká, že sa pre ňu našli 2DBP. Výstupnými súbormi sú *s20\_c4\_dom.c*, kde sú zaznamenané dominujúce kružnice (zvlášť súbor pre jednu a zvlášť pre dve vidly) a *s20\_c4\_2dbp.c*, kde sú zaznamenané 2DBP pre danú dominujúcu kružnicu (tiež zvlášť pre jednu vidlu a pre dve vidly). Súbor *protokol.txt* v príslušných adresároch má v tomto prípade opäť informatívny charakter.

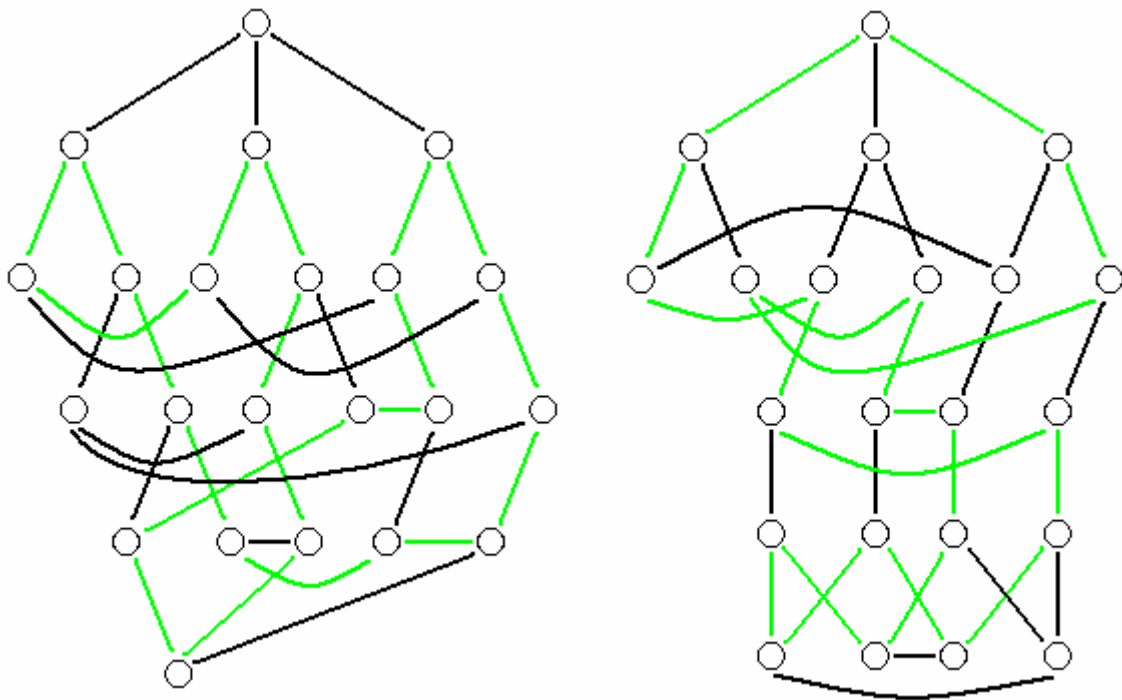
### 6.10.3 Grafy s 22 vrcholmi

Súbor s grafmi, ktoré majú 22 vrcholov, obsahuje 20 grafov. Pre každý z týchto grafov sa našla dominujúca kružnica pre jednu vidlu a dve vidly. Pre tri vidly sa na rozdiel od 18 a 20 vrcholových grafov našli tiež dominujúce kružnice, aj keď nie pre všetky, našli sa pre 15 grafov. Čas behu hľadania kružníc bol zanedbateľný, ale dali sa vyčítať rozdiely v prípadoch jednej, dvoch a troch vidiel. Ak sa uvažovala kružnica s jednou vidlou, bol čas hľadania pre všetkých 20 grafov 0,69 sekundy, s dvoma vidlami 0,06 sekundy a s tromi vidlami 0,01 sekundy. Skutočnosť, že sa našla pre tri vidly v 75% prípadoch dominujúca kružnica je možné vysvetliť tým, že 22 vrcholový graf je už v niektorých prípadoch postačujúci na to, aby sa v ňom našla trojica vrcholov spĺňajúca podmienky z podkapitoly 6.5.4. Správnosť nájdených dominujúcich kružníc bola overená programom *test\_dom*. Čo sa týka hľadania 2DBP, aj v tomto prípade sa tiež našli pre každý graf. Bolo tomu tak v dominujúcich kružniciach dĺžky 21 (1 vidla). Prvýkrát sa ale stalo, že bola vyvrátená hypotéza 5.1.1. V prípade dominujúcich kružníc dĺžky 20 (2 vidly) sa nenašli 2DBP pre graf číslo 17. Podobná vec sa stala aj v dominujúcich kružniciach dĺžky 19 (3 vidly). Graf číslo 1 – preňho sa našla takáto dominujúca kružnica, ale pre ňu sa nenašli 2DBP. Zvláštnosťou je, že hypotéza 5.1.1 bola v článku [6] vyvrátená na príklade 68 vrcholového grafu, ale v tomto prípade ide len o 22 vrcholový graf. Časy pre nájdenie 2DBP boli už o niečo vyššie, v prípade dominujúcich kružníc dĺžky 21 bol čas behu 31,49 sekundy, dĺžky 20 bol 20,25 sekundy a pre kružnicu dĺžky 19 bol 4,79 sekundy (i keď v tomto prípade sa spracovalo len 75% grafov).

Výsledkom je, že pre všetkých 20 grafov veľkosti 22 vrcholov sa našla dominujúca kružnica taká, že sa k nej našli 2DBP. V prípade grafu 17 so svojou dominujúcou kružnicou dĺžky 20 a grafu 1 so svojou dominujúcou kružnicou dĺžky 19 sa ale 2DBP nenašli. Tieto dva grafy so svojimi dominujúcimi kružnicami sú tu aj vyobrazené na obrázku 6.10.3.1. Graf číslo 17 so svojou dominujúcou kružnicou dĺžky 20 je v ľavej časti tohto obrázku a graf číslo 1 so svojou dominujúcou kružnicou dĺžky 19 je v pravej časti tohto obrázku. Kvôli prehľadnosti nie sú vrcholy týchto grafov očíslované. Dominujúca kružnica je u oboch grafov vyznačená na zeleno.

Výstupnými súbormi sú *s22\_c4\_dom.c*, kde sú zaznamenané dominujúce kružnice (zvlášť súbor pre jednu, pre dve a pre tri vidly) a *s22\_c4\_2dbp.c*, kde sú zaznamenané 2DBP pre danú dominujúcu kružnicu (tiež zvlášť pre jednu, pre dve a pre tri vidly). Súbor *protokol.txt* v príslušných adresároch uvádza, či boli pre všetky grafy nájdené dominujúce kružnice, resp. 2DBP. Ak to tak pre niektoré neplatí, sú tam vypísané čísla príslušných grafov.

Obrázok 6.10.3.1



#### 6.10.4 Grafy s 24 vrcholmi

Súbor s grafmi, ktoré majú 24 vrcholov, obsahuje 38 grafov. Pre každý z týchto grafov sa našla dominujúca kružnica pre jednu aj pre dve vidly. Pre tri vidly sa našla dominujúca kružnica v 37 grafoch, nenašla sa len v grafe číslo 38. Dva vrcholy navyše spôsobili, že úspešnosť nájdenia dominujúcich kružníc s tromi vidlami je 97,37% namiesto 75% v prípade 22 vrcholových grafov. Čas behu hľadania kružníc bol stále relatívne ku grafom s viacerými vrcholmi malý, opäť sa dali vyčítať rozdiely v prípadoch jednej, dvoch a troch vidli. Ak sa uvažovala kružnica s jednou vidlou, bol čas hľadania pre všetky grafy 5,28 sekundy, s dvoma vidlami 0,42 sekundy a s tromi vidlami 0,05 sekundy. Správnosť nájdených dominujúcich kružníc bola overená programom *test\_dom*. V prípade hľadania 2DBP – našli sa opäť pre každý graf. Čo do početnosti vidli dominujúcich kružníc sú výsledky podobné, ako u grafov s 22 vrcholmi. V prípade dominujúcich kružníc dĺžky 23 (1 vidla) sa našli 2DBP u všetkých dominujúcich kružníc. U dominujúcich kružníc dĺžky 22 (2 vidly) sa nenašli 2DBP pre graf číslo 24, u ostatných grafov áno. A u dominujúcich kružníc dĺžky 21 (3 vidly) sa nenašli 2DBP pre graf číslo 30. Časy pre nájdenie 2DBP boli už citeľnejšie, v prípade dominujúcich kružníc dĺžky 23 bol čas behu 2 minúty a 48 sekúnd, dĺžky 22 bol čas 1 minúta a 7 sekúnd a pre kružnice dĺžky 21 bol čas 33,13 sekundy (pre 97,37% grafov).

Výsledkom teda je, že pre všetkých 38 grafov veľkosti 24 vrcholov sa našla dominujúca kružnica taká, že sa k nej našli 2DBP. Hypotéza 5.1.1 bola vyvrátená aj v prípade tohto počtu vrcholov, v prípade grafu 24 so svojou dominujúcou kružnicou dĺžky 22 a grafu 30 so svojou dominujúcou kružnicou dĺžky 21 sa 2DBP nenašli. Výstupnými súbormi sú *s24\_c4\_dom.c*, kde sú zaznamenané dominujúce kružnice (zvlášť súbor pre jednu, pre dve a pre tri vidly) a *s24\_c4\_2dbp.c*, kde sú zaznamenané 2DBP pre danú dominujúcu kružnicu (tiež zvlášť pre jednu, pre dve a pre tri vidly). Súbor *protokol.txt* v príslušných adresároch uvádza, či boli pre

všetky grafy nájdené dominujúce kružnice, resp. 2DBP. Ak to tak pre niektoré neplatí, sú tam vypísané čísla príslušných grafov.

### 6.10.5 Grafy s 26 vrcholmi

Súbor s grafmi, ktoré majú 26 vrcholov, obsahuje 281 grafov. Je to už o niečo väčšie množstvo, ako v súboroch s menším počtom vrcholov. Kvôli dôvodom uvedeným v podkapitole 6.9.1 sa v grafoch s týmto počtom vrcholov dajú ešte hľadať dominujúce kružnice s jednou vidlou. Dominujúca kružnica sa pre jednu vidlu našla pre každý z grafov, podobne to platilo pre dominujúce kružnice s dvoma vidlami. Čo sa týka troch vidiel, v troch grafoch sa nenašla. Percento úspešnosti nájdenia dominujúcej kružnice pre tri vidly je tak 98,93%, opäť o niečo viac, ako v predošlom počte vrcholov grafu. Zvýšenie počtu vrcholov a množstva grafov mal za následok aj zvýšený čas behu hľadania kružníc. Ak sa uvažovala kružnica s jednou vidlou, bol čas hľadania pre všetky grafy 3 minúty a 48 sekúnd, ak išlo o dominujúcu kružnicu s dvoma vidlami, bol čas 14,50 sekundy, pre tri vidly bol čas 1,69 sekundy. Správnosť nájdených dominujúcich kružníc bola overená programom *test\_dom*.

Aj v tomto súbore sa našli sa pre každý graf 2DBP. V prípade dominujúcich kružníc s jednou vidlou sa našli 2DBP pre všetky tieto kružnice. Pre kružnice s dvoma vidlami sa nenašli 2DBP pre 4 grafy, ich čísla sú 197, 198, 217 a 227. Pre dominujúce kružnice s troma vidlami sa nenašli 2DBP pre 6 grafov, s číslami 31, 89, 95, 99, 161 a 177. Spomenuté čísla grafov nebolo potrebné ďalej skúmať, pretože 2DBP sa tu našli v prípade dominujúcich kružníc s jednou vidlou. Časy pre nájdenie 2DBP už trvali dlhší časový úsek, najmä v prípade dominujúcich kružníc s jednou vidlou. Pri kružniciach s jednou vidlou bol čas vyhľadávania 2DBP 54 minút a 43 sekúnd, pri kružniciach s dvoma vidlami 19 minút a 51 sekúnd a pri kružniciach s troma vidlami 7 minút a 50 sekúnd (pre 98,93% grafov).

Výsledkom je, že pre všetkých 281 grafov veľkosti 26 vrcholov sa našla dominujúca kružnica taká, že sa k nej našli 2DBP. Hypotéza 5.1.1 bola vyvrátená aj tu, v prípade 4 grafov s dominujúcou kružnicou dĺžky 24 a v prípade 6 grafov s dominujúcou kružnicou dĺžky 23. Výstupnými súbormi sú *s26\_c4\_dom.c*, kde sú zaznamenané dominujúce kružnice (zvlášť súbor pre jednu, pre dve a pre tri vidly) a *s26\_c4\_2dbp.c*, kde sú zaznamenané 2DBP pre danú dominujúcu kružnicu (tiež zvlášť pre jednu, pre dve a pre tri vidly). Súbor *protokol.txt* v príslušných adresároch uvádza, či boli pre všetky grafy nájdené dominujúce kružnice, resp. 2DBP. Ak to tak pre niektoré neplatí, sú tam vypísané čísla príslušných grafov.

### 6.10.6 Grafy s 28 vrcholmi

Súbor s grafmi, ktoré majú 28 vrcholov, má 2901 grafov. Je to už dosť veľké množstvo grafov. Dominujúce kružnice sa hľadajú už len pre dve a tri vidly. Dominujúce kružnice pre dve vidly sa našli v prípade všetkých grafov. Po prvýkrát sa našli pre všetky grafy aj dominujúce kružnice s troma vidlami. Čas nájdenia kružníc s dvoma vidlami pre všetky grafy bol 10 minút a 24 sekúnd, pre tri vidly bol čas 1 minúta a 17 sekúnd. Správnosť nájdených dominujúcich kružníc bola opäť overená programom *test\_dom*. Čo sa týka hľadania 2DBP, bol už problém s časom. V prípade dominujúcich kružníc s dvoma vidlami bolo potrebné rozdeliť súbor na tri časti a spracovať každý osobitne – naraz by to trvalo príliš dlho. Potom sa to zlúčilo do jedného súboru. Výsledkom bolo, že pre 2878 grafov sa našli 2DBP, pre 23 nie. Toto vyhľadávanie trvalo 9 hodín a 18 minút. V prípade dominujúcich kružníc s troma

vidlami bol čas behu programu kratší a nebolo potrebné súbor rozdeľovať. Tam bolo výsledkom, že pre 2866 grafov sa našli 2DBP, pre 35 nie. Čas behu programu bol 3 hodiny a 55 minút.

Prvýkrát sa ale stalo, že sa našli grafy, pre ktoré sa popísaným spôsobom nenašli 2DBP. Prienikom 23 grafov, pre ktoré sa nenašli 2DBP v prípade dvoch vidiel a 35 grafov v prípade troch vidiel, boli tri grafy. Ich čísla sú 2150, 2151 a 2163. Čiastočným výsledkom je teda, že máme nájdené 2DBP pre 2898 grafov, pre 3 zatiaľ nie. Hypotéza 5.1.1 bola vyvrátená celkovo pre 55 grafov (23 + 35 – 3 ako prienik). Výstupnými súbormi sú *s28\_c4\_dom.c*, kde sú zaznamenané dominujúce kružnice (zvlášť súbor pre dve a pre tri vidly) a *s28\_c4\_2dbp.c*, kde sú zaznamenané 2DBP pre danú dominujúcu kružnicu (tiež zvlášť pre dve a pre tri vidly). Súbor *protokol.txt* v príslušných adresároch uvádza, či boli pre všetky grafy nájdené dominujúce kružnice, resp. 2DBP. Ak to tak pre niektoré neplatí, sú tam vypísané čísla príslušných grafov.

Na grafy 2150, 2151 a 2163 sa pozrieme podrobnejšie. Pre každý z nich vytvoríme samostatný súbor a zmodifikujeme programy na hľadanie dominujúcich kružníc a program na hľadanie 2DBP tak, aby sa to dalo použiť pre práve jeden graf. Zmodifikované programy na hľadanie dominujúcich kružníc sú *domin2ex* a *domin3ex*. Vznikli z programov *dominuj2* a *dominuj3* tak, že v prípade nájdenia dominujúcej kružnice program nekončí, ale pokračuje v hľadaní ďalších dominujúcich kružníc. Takto nájde program všetky kružnice, ktoré je pre daný graf schopný nájsť. Zmodifikovaný program na hľadanie 2DBP je *modBMCex*. Zmena je len vo výpise čísiel do súboru *protokol.txt* a na obrazovku sa vypisuje poradové číslo dominujúcej kružnice. Číslo grafu je tu totiž stále rovnaké. Pre každý graf nájdeme najprv pre dve i tri vidly všetky možné dominujúce kružnice a potom skúsime nájsť ku všetkým týmto dominujúcim kružniciam 2DBP. Takže robíme podobný postup, ako doteraz, na vstupe je však len jeden graf a všetky jeho nájdené dominujúce kružnice. Čo je jasné – že sa 2DBP nenájdu pre prvú nájdenú dominujúcu kružnicu v prípade dvoch aj troch vidiel. Otázkou je, ako to bude vyzeráť, ak skúsime nájsť 2DBP pre všetky dominujúce kružnice, ktoré nájdeme. Nepredpokladalo sa, že sa nenájdu 2DBP pre všetky kružnice, ale možno sa predpokladalo, že takýchto kružníc bude nejaké vyššie percento. Ukázalo sa, že hypotéza 5.2.1 sa vyvráti ozaj len veľmi ťažko. Po podrobnom prehľadaní 2DBP pre všetky dominujúce kružnice sa zistilo, že len pre malú časť dominujúcich kružníc sa nenašli 2DBP.

Pre graf číslo 2150 sa našlo 110 dominujúcich kružníc s dvoma vidlami a pre 105 z nich sa našli 2DBP, pre 5 nie. Pre graf 2151 sa našlo 133 kružníc s dvoma vidlami, pre 127 sa našli 2DBP a pre 6 nie. Nakoniec, pre graf 2163 sa našlo 121 kružníc s dvoma vidlami, pre 116 z nich sa našli 2DBP a pre 5 nie. Prerátané na percentá, 2DBP sa našli v prípade 95,5%, 95,5% a 95,9% dominujúcich kružníc s dvoma vidlami. Teda ozaj ani náznak na vyvrátenie hypotézy 5.2.1. Pre graf číslo 2150 sa našlo 234 dominujúcich kružníc s troma vidlami a pre 217 z nich sa našli 2DBP, pre 17 nie. Pre graf 2151 sa našlo 169 kružníc s troma vidlami, pre 167 sa našli 2DBP a pre 2 nie. Nakoniec, pre graf 2163 sa našlo 114 kružníc s troma vidlami, pre 110 z nich sa našli 2DBP a pre 4 nie. Prerátané na percentá, 2DBP sa našli v prípade 92,7%, 98,8% a 96,5% dominujúcich kružníc s troma vidlami. Takže nielen v prípade dominujúcich kružníc s dvoma vidlami, ale aj v prípade kružníc s troma vidlami vyšlo, že hypotéza 5.2.1 je ťažko vyvrátená.

Po hlbšom a podrobnejšom skúmaní troch vybraných grafov, ktorým sa nenašli 2DBP ku prvej nájdenej dominujúcej kružnici s dvoma a troma vidlami bolo zistené, že ku veľmi vysokému percentu kružníc (vždy nad 90%) sa našli 2DBP. Je predpoklad, že ak by sme takto dopodrobna skúmali všetkých 2901 grafov v súbore, že by boli výsledky podobné. Podrobné skúmanie by ale trvalo veľmi dlho. Pre informáciu, nájdenie všetkých dominujúcich kružníc a 2DBP k nim trvalo pre všetky tri grafy dovedna 1 hodinu a 23 minút. Ak by sme takúto rýchlosť podrobného spracovania uvažovali ako priemernú, podrobné spracovanie všetkých

2901 grafov by trvalo približne 1338 hodín (rádovo 8 týždňov). Súbor s nájdenými dominujúcimi kružnicami a 2DBP k nim sú v adresári *Podrobne\_skumanie*. Sú tam vstupné súbory (tvaru *s28\_(číslo grafu).c*) a potom samostatne pre dve a tri vidly nájdené dominujúce kružnice (súbory tvaru *s28\_(číslo grafu)\_dom.c*) a 2DBP (súbory tvaru *s28\_(číslo grafu)\_2dbp.c*). Súbor *protokol\_(číslo grafu).txt* obsahuje čas behu programu pre dominujúce kružnice a 2DBP. V prípade hľadania 2DBP obsahuje aj poradové čísla grafov v súbore *s28\_(číslo grafu)\_dom.c*, pre ktoré sa 2DBP nenašli.

### 6.10.7 Grafy s 30 vrcholmi

Súbor s grafmi, ktoré majú 30 vrcholov, má 28400 grafov. Ide o veľké množstvo grafov a preto spracovanie všetkých grafov malo značne odlišný priebeh, ako v prípade všetkých predošlých súborov s grafmi. Dominujúce kružnice s dvoma vidlami sa našli pre všetky grafy. Trvalo to však dlho, čas behu programu bol 7 hodín a 36 minút. Dominujúce kružnice s troma vidlami sa našli v prípade 28399 grafov, pre graf s číslom 10055 sa takáto kružnica nenašla. Čas behu programu bol podstatne nižší, ako v prípade dvoch vidiel – 57 minút a 31 sekúnd. Správnosť nájdených dominujúcich kružníc bola overená programom *test\_dom*. Nájdenie 2DBP nemohlo byť z časových dôvodov kvôli veľkému množstvu grafov uskutočnené pre dominujúce kružnice s dvoma a aj troma vidlami. Výhodnejšie bolo skúsiť nájsť 2DBP iba pre dominujúce kružnice s troma vidlami. V podkapitole 6.9.2 je objasnené, prečo je časovo menej náročné hľadať 2DBP pre dominujúce kružnice s vyšším počtom vidiel. Grafu 10055 bola nájdená kvôli kompletnosti súboru dominujúca kružnica pre dve vidly. Bolo jasné, že hľadať 2DBP súboru *s30\_c4\_dom.c*, v ktorom sú uložené všetky dominujúce kružnice s troma vidlami (s výnimkou grafu 10055) sa na jedno spustenie programu kvôli dlhému behu programu nedá. Pomocou programu *rozdel* sa rozdelil tento súbor na 29 častí, 28 po 1000 grafov s dominujúcimi kružnicami a jeden so 400 grafmi. (program *rozdel* je vytvorený práve na tento účel a bližšie ho popisovať nebudeme, lebo je intuitívne jasné, čo ktorý jeho príkaz znamená). Súbory majú názov *s30\_c4\_dom\_(číslo časti).c*. Všetkých týchto 29 súborov s dominujúcimi kružnicami bolo potom vstupom pre program *modifBMC*.

Dostali sme takto 29 čiastočných výsledkov, každý z nich mal svoj súbor s nájdenými, resp. nenájdenými 2DBP a svoj protokol. Názvy sú *s30\_c4\_2dbp\_(číslo časti).c* a *protokol\_(číslo časti).txt*. Bolo dobré ich zlúčiť do jedného súboru. Na to slúži program *zlucenie* (Tiež ho nebudeme podrobne popisovať, slúži výhradne na tento účel. Je však o niečo dlhší, lebo sčítava aj počet nájdených a nenájdených 2DBP a celkový čas behu). Po zlúčení súboru s 2DBP a protokolov do jedného súboru bolo zistené, že v prípade 28071 grafov sa našli 2DBP a v prípade 329 grafov nie. Celkový čas behu hľadania 2DBP bol pritom 50 hodín a 21 minút. Bolo potrebné nájsť 2DBP aj pre tých 329 grafov. Druhým krokom bolo pripraviť si súbor, v ktorom budú iné dominujúce kružnice týchto grafov. Tie iné dominujúce kružnice boli tie, ktoré sa našli pri dvoch vidlách u týchto grafov. Program *vyber* slúži na to, aby prečítal súbor *protokol.txt*, v ktorom sú čísla grafov, pre ktoré neboli nájdené 2DBP v prípade troch vidiel a vytvoril súbor, ktorý bude obsahovať predpis a dominujúcu kružnicu s dvoma vidlami týchto grafov. Konkrétne bol vstupným súborom súbor s dominujúcimi kružnicami s dvoma vidlami všetkých 28400 grafov a výstupom bol súbor, ktorý obsahoval dominujúce kružnice s dvoma vidlami len týchto 329 grafov.

V ďalšom kroku sme skúsili nájsť 2DBP k týmto 329 grafom s inou dominujúcou kružnicou. Výsledkom bolo, že pre 303 grafov sa 2DBP našli, pre 26 nie. Ich čísla sú 10309, 10314, 10865, 10866, 10916, 10978, 10981, 10992, 11003, 11021, 11025, 11033, 11035, 11048, 11050, 11056, 11065, 11066, 12043, 12135, 17133, 18323, 20836, 20844, 26248

a 26251. Týmto 26 grafmi sa budeme zaoberať podrobne, rovnakým spôsobom, ako v prípade grafov 2150, 2151 a 2163 pri 28 vrcholoch. Pre informáciu, hľadanie 2DBP týchto 329 grafov trvalo 3 hodiny a 46 minút. Pretože sa opäť nejedná o veľké množstvo grafov, vstupné súbory s grafmi boli urobené ručne. Ich názov je *s30\_(číslo grafu).c*. Programami *domin2ex* a *domin3ex* boli nájdené všetky dominujúce kružnice s dvoma a troma vidlami pre každý graf. Sú uložené v súboroch s názvom *s30\_(číslo grafu)\_dom.c*, pre každý počet vidiel v samostatnom adresári. Pre každý graf so svojimi dominujúcimi kružnicami sa spustil program *modBMCex*, výstupom bola informácia, pre koľko dominujúcich kružníc (pre dve a pre tri vidly) sa našli 2DBP. Výsledky sú kvôli prehľadnosti uvedené v tabuľke.

**Tabuľka 6.10.7.1**

V 1. stĺpci je číslo grafu, v 2. počet nájdených dominujúcich kružníc pre dve vidly, v 3. nájdených 2DBP ku kružniciam s dvoma vidlami, v 4. počet nenájdených 2DBP ku kružniciam s dvoma vidlami, v 5. je podiel nájdených 2DBP pre dominujúce kružnice s dvoma vidlami v percentách, v 6. počet nájdených dominujúcich kružníc pre tri vidly, v 7. nájdených 2DBP ku kružniciam s troma vidlami, v 8. počet nenájdených 2DBP ku kružniciam s troma vidlami a v 9. stĺpci je podiel nájdených 2DBP pre dominujúce kružnice s troma vidlami v percentách.

Číslo grafu	Dominujúce kružnice s dvoma vidlami				Dominujúce kružnice s troma vidlami			
10309	157	150	7	95,54%	260	251	9	96,54%
10314	151	145	6	96,03%	282	272	10	96,45%
10865	148	143	5	96,62%	199	191	8	95,98%
10866	156	151	5	96,79%	222	210	12	94,59%
10916	165	164	1	99,39%	241	237	4	98,34%
10978	143	137	6	95,80%	229	221	8	96,51%
10981	135	130	5	96,30%	207	195	12	94,20%
10992	161	158	3	98,14%	218	212	6	97,25%
11003	152	147	5	96,72%	193	186	7	96,37%
11021	156	151	5	96,79%	187	183	4	97,86%
11025	151	147	4	97,35%	191	186	5	97,38%
11033	123	120	3	97,56%	200	194	6	97,00%
11035	140	137	3	97,86%	212	207	5	97,64%
11048	157	152	5	96,82%	195	191	4	97,95%
11050	144	140	4	97,22%	203	197	6	97,04%
11056	140	139	1	99,29%	184	176	8	95,65%
11065	132	129	3	97,73%	195	192	3	98,46%
11066	135	133	2	98,52%	182	178	4	97,80%
12043	159	155	4	97,48%	173	170	3	98,27%
12135	158	155	3	98,10%	163	161	2	98,77%
17133	185	183	2	98,92%	174	171	3	98,28%
18323	191	185	6	96,86%	94	91	3	96,81%
20836	202	201	1	99,50%	121	118	3	97,52%
20844	182	181	1	99,45%	107	105	2	98,13%
26248	211	209	2	99,05%	184	182	2	98,91%
26251	218	215	3	98,62%	191	185	6	96,86%

Po hlbšom a podrobnejšom skúmaní 26 vybraných grafov, ktorým sa nenašli 2DBP ku prvej nájdenej dominujúcej kružnici s dvoma a troma vidlami bolo zistené, že ku veľmi vysokému percentu všetkých ich nájdených dominujúcich kružníc (vždy nad 94%) sa našli 2DBP. Podobne ako v prípade grafov s 28 vrcholmi, je predpoklad, že ak by sme takto dopodrobna skúmali všetkých 28400 grafov v súbore, že by boli výsledky podobné. Podrobné skúmanie všetkých grafov by trvalo ale veľmi dlho. Podrobné skúmanie prinieslo ďalšie kontrapríklady ku hypotéze 5.1.1. Pri všetkých 26 grafoch so všetkými svojimi nájdenými dominujúcimi kružnicami sa našlo 240 dominujúcich kružníc, ku ktorým sa nenašli 2DBP. V prípade dominujúcich kružníc s dvoma vidlami ide o 95 kružníc, v prípade kružníc s troma vidlami ide o 145 kružníc. Súbory s nájdenými dominujúcimi kružnicami a 2DBP k nim sú v adresári *Podrobne\_skumanie*. Sú tam vstupné súbory (tvaru *s30\_(číslo grafu).c* ) a potom samostatne pre dve a tri vidly nájdené dominujúce kružnice (súbory tvaru *s30\_(číslo grafu)\_dom.c* ) a 2DBP (súbory tvaru *s30\_(číslo grafu)\_2dbp.c* ). Súbor *protokol\_(číslo grafu).txt* obsahuje čas behu programu pre dominujúce kružnice a 2DBP. V prípade hľadania 2DBP obsahuje aj poradové čísla grafov v súbore *s30\_(číslo grafu)\_dom.c*, pre ktoré sa 2DBP nenašli.

### 6.10.8 Zhrnutie výsledkov

Zistili sme, že zmenená Bipartizing Matchings Conjecture platí pre všetky grafy, ktoré sme dostali ako vstupné dáta. Pre grafy s vrcholmi od 18 do 26 sa našli 2DBP aspoň pre jednu prvú nájdenú dominujúcu kružnicu v prípade hľadania s jednou, dvoma, alebo troma vidlami. Pri 28 a 30 vrcholoch sa našli grafy, pre ktoré to neplatilo. Tieto sme podrobili dôkladnému skúmaniu. Toto skúmanie potvrdilo silu zmenenej Bipartizing Matchings Conjecture, keď pre každý z grafov sa vždy vo vyše 90% dominujúcich kružníc našli 2DBP a je možné takto vysloviť predpoklad, že zmenená Bipartizing Matchings Conjecture skutočne platí.



# Záver

Hlavnými prínosmi práce sú:

1. Odstránenie chýb z Fleischnerovej práce [4]
2. Experimentálne overenie zmenenej Fleischnerovej hypotézy o bipartizujúcich páreniach na snarkoch do rádu 30 a nájdenie podstatne menších kontrapríkladov k pôvodnej Fleischnerovej hypotéze.

Čo sa týka jednotlivých kapitol práce, v druhej kapitole sme definovali bipartizujúce párenie a vysvetlili sme si ho i na príkladoch. Ukázali sme súvis s eulerovskými grafmi. V tretej kapitole sme ukázali súvis s nikde nulovým 5-tokom. Ukázali sme, ako nájdeme nikde nulový 5-tok v kubickom grafe, keď poznáme jeho dominujúcu kružnicu a k nej dve dizjunktné bipartizujúce párenia. Vychádzali sme z dôkazu v jednom článku, prínosom práce je podrobné vysvetlenie tohto dôkazu a ukážka na konkrétnych grafoch prostredníctvom obrázkov. Vo štvartej kapitole sme ukázali súvis s dvojitém pokrytím cyklami. Ukázali sme, ako nájdeme dvojité pokrytie cyklami kubického grafu, keď poznáme jeho dominujúcu kružnicu a k nej dve dizjunktné bipartizujúce párenia. Vychádzali sme z dôkazu v jednom článku. Prínosom práce je podrobné vysvetlenie tohto dôkazu a už spomenuté upozornenie na nezrovnalosť v terminológii dôkazu. Prínosom je aj vysvetlenie dôkazu na konkrétnych grafoch prostredníctvom obrázkov. V piatej kapitole je znenie Fleischnerovej hypotézy, ako aj kontrapríklad k nej. Zároveň je tam uvedené slabšie tvrdenie Fleischnerovej hypotézy. V šiestej kapitole je popísaná experimentálna časť práce. Ide o popis vstupných údajov, výstupných údajov, algoritmov, ktoré boli použité v práci. Nechýba popis programov, ich časová a pamäťová zložitosť a popis výsledkov experimentu.

Výsledkom experimentu je zistenie, že zmenená Fleischnerova hypotéza platí na všetkých skúmaných grafoch a možno uvážiť, že je veľmi pravdepodobné, že platí aj vo všeobecnosti. V každom grafe vo vstupných dátach sa vždy našla aspoň jedna dominujúca kružnica, pre ktorú sa našli dve dizjunktné bipartizujúce párenia. V prípade 29 grafov sa zdalo, že by to tak nemuselo byť. Podrobné vyhľadávanie čo najväčšieho počtu dominujúcich kružníc v týchto grafoch a následný pokus o nájdenie dvoch dizjunktných bipartizujúcich párení ukázalo, že týchto kružníc je ozaj veľa a len pre málo z nich sa nenašla takáto dvojica bipartizujúcich párení. Z tohto dôvodu je presvedčenie, že zmenená Fleischnerova hypotéza platí, také silné.

Výsledkom experimentu je aj to, že sme našli rádovo stovky kontrapríkladov k pôvodnej Fleischnerovej hypotéze. Podarilo sa to dokonca už v prípade grafu s 22 vrcholmi. Pre porovnanie, graf, ktorý uviedol ako kontrapríklad Hoffmann-Ostenhof, má 68 vrcholov. Tento výsledok hovorí, že prístup na riešenie problému dvojitého pokrytia cyklami, resp. nájdenia nikde nulového 5-toku v grafe prostredníctvom Fleischnerovej hypotézy nie je vhodný, pretože pre konkrétny snark s dominujúcou kružnicou nemusí platiť, že sa v ňom nájdú dve dizjunktné bipartizujúce párenia. A podrobnejšie vyhľadávanie dominujúcich kružníc v grafoch s 30 vrcholmi ukázalo, že percento kružníc, pre ktoré sa nenašli dve dizjunktné bipartizujúce párenia, je relatívne vysoké, podrobne to ukazuje tabuľka v závere šiestej kapitoly. Programy a výstupy z programov sa nachádzajú na priloženom CD.

# Literatúra

- [1] G. Brinkmann, Fast generation of cubic graphs, *Journal of graph theory* 23 (1998) 139 – 149
- [2] J. Demel, *Grafy a jejich aplikace*, Academia, 2002.
- [3] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer – Verlag, 2005.
- [4] H. Fleischner, Bipartizing matchings and Sabidussi's compatibility conjecture, *Discrete Math.* 244 (2002) 77 – 82.
- [5] H. Fleischner, (Some of) the many uses of Eulerian graphs in graph theory (plus some applications), *Discrete Math.* 230 (2001) 23 – 43.
- [6] A. Hoffmann-Ostenhof, A counterexample to the bipartizing matching conjecture, *Discrete Math.* 307 (2007), 2723 – 2733.