KATEDRA INFORMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO

Odhady veľkosti pokrytí náhodne indukovaných podgrafov n-rozmernej hyperkocky

Diplomová práca

Bc. Ján Kliman

študijný odbor: informatika

vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Eduard Toman, Csc. Bratislava, máj 2009

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že túto prácu som napísal sám, len s využitím svojich schopností a vedomostí, s pomocou uvedenej literatúry a vedúceho mojej diplomovej práce.

Bratislava, máj 2009

Ján Kliman

Poďakovanie

Chcel by som poďakovať najmä diplomovému vedúcemu tejto práce doc. Eduardovi Tomanovi za rady a pripomienky, ktoré mi pri pomohli písaní práce, ako aj svojej rodine a priateľom za ich pomoc a dôveru, ktorú mi prejavovali nie len počas môjho vysokoškolského štúdia, ale i počas celého môjho doterajšieho života.

Abstrakt

Skúmame náhodné grafy, ktoré sú generované na n-rozmerných hyperkockách vynechávaním hrán s určitou pravdepodobnosťou, a ich iredudantné pokrytia. Špeciálne sa zaujímame o veľkosť a počet iredudantných pokrytí, táto práca prezentuje ich horné a dolné odhady.

kľúčové slová: náhodný graf, iredudantné pokrytie, hyperkocky a maximálne hyperkocky, asymptotické odhady

Obsah

Úvod

Teória náhodných grafov sa začala rozvíjať v druhej polovici dvadsiateho storočia. Hlavnú zásluhu na tom mali maďarskí matematici Paul Erdős a Alfréd Rényi, ktorí v tejto oblasti ako prví dospeli k nejakým výsledkom. Náhodný graf generovali z úplného n-vrcholového grafu a s nejakou vopred zvolenou pravdepodobnosťou, pre každú hranu rovnakou, im hrana v náhodnom grafe zostávala. Inšpiráciou pre tento výskum im bolo, v tom čase rozmáhajúce sa, prepájanie počítačov a konštruovanie čoraz väčších počítačových sietí, ktoré vyvrcholilo v polovici deväťdesiatych rokov vznikom internetu – celosvetovej počítačovej siete.

Aj keď skúmaním svojho modelu Erdős a Rényi dosiahli niekoľko zaujímavých výsledkov, postupom času sa ukázalo, že tieto ich výsledky úplne nezodpovedajú pozorovanému správaniu sa reálnych sietí. Preto sa začali skúmať iné modely, najmä Barabásiho-Albertovej model a Wattsov a Strogatzov model – takzvané siete malého sveta, ktoré sa generujú mierne odlišným spôsobom ako náhodné grafy v modeli Erdősa a Rényiho, a ich správanie lepšie popisuje pozorovanú skutočnosť v sieťach ako internet, alebo dnes čoraz populárnejších sociálnych sieťach.

Objavili sa však aj iné problémy, ktoré sa dajú riešiť pomocou náhodných grafov. Neustále zvyšujúce sa nároky zákazníkov a konkurencia na trhu nútili a dodnes nútia firmy, ktoré vyrábajú výpočtovú techniku, aby na trh prinášali čoraz rýchlejšie, lacnejšie a efektívnejšie počítače. Táto úloha úzko súvisí s úlohou minimalizácie boolovských funkcií, ktorá, ako je známe [10], je ekvivalentná hľadaniu iredudantného pokrytia náhodných grafov jeho maximálnymi podkockami, pričom náhodný graf vzniká z n – rozmernej hyperkocky vynechávaním jej vrcholov s určenou pravdepodobnosťou p. Tento model skúmajú práce [6] a [7].

Náhodné grafy a ich skúmanie má dnes význam nielen v informatike alebo umelej inteligencii, ale aj v sociológii, biológii či ekonómii.

V tejto diplomovej práci sa venujeme náhodným grafom generovaných z n-rozmernej hyperkocke, a pomocou poznatkov z oblasti pravdepodobnostných metód, teórie grafov a kombinatorickej analýzy odhadujeme veľkosť a počet iredudantných pokrytí takýchto náhodných grafov jeho k- rozmernými maximálnymi podkockami. Práca nadväzuje na prácu [1], ktorá sa venuje maximálnym podkockám, odhaduje ich počet a distribúciu. Výsledky spomínanej práce sú pre nás zaujímavé nie len preto, že nám poskytujú obraz o počte maximálnych podkociek, ktoré môžeme vybrať ako prvky pokrytia náhodného grafu, ale aj preto, že nám poskytuje dolný odhad veľkosti iredudantných pokrytí. Z výsledkov práce [3] vyplýva, že tento odhad je pomerne tesný.

V práci sa zameriavame na získanie horného odhadu veľkosti iredudantných pokrytí náhodných grafov generovaných na n-rozmernej hyperkocke. Metodologický návod pre náš myšlienkový postup nám poskytuje práca [4], pomocné výsledky pre náš postup zase poskytuje práca [2], ktorá sa zaoberá existenciou a odhadom počtu takých maximálnych podkociek v náhodných grafoch, ktoré všetky nutne musia byť prvkami iredudantného pokrytia – tieto podkocky nazývame jadrové podkocky, a tiež regulárnymi vrcholmi, ktoré sa pokryjú tým, že pokryjeme vrchol, ktorý im vlastnosť regularity zabezpečuje. Tento postup sme sa rozhodli uprednostniť pred postupom uvedeným v práci [7] v nádeji, že získame lepší výsledok, ako by sme dosiahli použitím alternatívnej metódy.

V ďalšej časti práce nás zaujíma počet iredudantných pokrytí. Na získanie dolného odhadu využijeme podobný postup, ako sme využili na získanie horného odhadu veľkosti iredudantných pokrytí. Pre získanie horného odhadu budeme hľadať odpoveď na otázku, v koľkých maximálnych podkockách sa môže nachádzať nejaký vrchol náhodného grafu.

Pravdepodobnostné metódy

V úvodnej kapitole uvedieme základné pojmy a označenia týkajúce sa pravdepodobnostných metód, ktoré v tejto práci používame. Ako prvý pojem zavádzame pojem náhodnej premennej.

Definícia 1.1:

Nech (X,P) je pravdepodobnostný priestor. Funkciu $Y:X\rightarrow\mathbb{R}$ nazývame náhodnou premennou.

V mnohých prípadoch nebudeme pracovať priamo s náhodnými premennými, ale skôr s ich strednými hodnotami a disperziami.

Definícia 1.2:

Nech diskrétna náhodná premenná Y nadobúda hodnoty $y_{1,}y_{2,}\ldots,y_n$ s pravdepodobnosťami $P(y_1),P(y_2),\ldots,P(y_n)$. Potom číslo $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_n P(y_n)$ nazývame stredná hodnota náhodnej premennej Y .

Definícia 1.3:

Ak Y je náhodná premenná, potom číslo $D(Y)=E[(Y-E(Y))^2]$ nazveme disperzia náhodnej premennej Y .

Pre výpočet disperzie náhodnej premennej Y pri znalosti jej strednej hodnoty môžeme využiť nasledujúcu vetu:

Veta 1.1:

$$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$$

Na dosahovanie výsledkov v obore pravdepodobnostných metód sa veľmi často používa Markovova a Čebyševova nerovnosť.

Veta 1.2: *(Markovova nerovnosť)*

Nech Y je ľubovoľná nezáporná náhodná premenná a $c > 0$ je ľubovoľné kladné reálne číslo. Potom platí nerovnosť

$$P[Y \geq c] \leq \frac{E(Y)}{c}$$

Veta 1.3: *(Čebyševova nerovnosť)*

Pre každú náhodnú premennú Y a $c > 0$ platí nerovnosť

$$P[(Y - E(Y)) \geq C] \leq \frac{D(Y)}{c^2}$$

Vo veľkej miere využívame logaritmické funkcie a ich vlastnosti, preto je potrebné vyjasniť si ich notáciu, ktorú v práci používame. Pracujeme najmä s logaritmami o dvoch základoch: o základe 2 a o základe $\frac{1}{p}$. V prípade základu 2 namiesto zápisu $\log_2(x)$ používame skrátený zápis $\lg(x)$, v prípade základu $\frac{1}{p}$ tento základ označíme b , teda miesto $\log_{\frac{1}{p}}(x)$ píšeme $\log_b(x)$.

V práci používame aj O-notáciu, ktorú teraz zavedieme.

Definícia 1.4:

Nech $g(n)$ je funkcia. Potom

$$o(g(n)) = \{f(n) | (\forall c > 0)(\exists N_0 > 0)(\forall n > N_0)(0 \leq f(n) \leq c\, g(n))\}$$

$$O(g(n)) = \{f(n) | (\exists c > 0)(\exists N_0 > 0)(\forall n > N_0)(0 \leq f(n) \leq c\, g(n))\}$$

Základné definície

Naša diplomová práca sa venuje náhodným grafom a ich vrcholovým pokrytiam. V tejto kapitole uvedieme definície potrebných pojmov a predložíme presnejšiu formuláciu cieľov práce, ktorými sa v práci zaoberáme.

Definícia 2.1:

Grafom G nazveme usporiadanú dvojicu $G=(V,H)$, kde množinu $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ nazveme množinou vrcholov grafu G a množinu H, ktorá je tvorená neusporiadanými dvojicami $\{v_i,v_j\}$, kde $1\leqslant i<j\leqslant n$, nazveme množinou hrán grafu G.

Pokiaľ nebude zrejmé o množinou vrcholov či hrán ktorého grafu sa jedná, budeme na jej zápis používať označenie $V(G)$ resp. $H(G)$, ktoré znamená, že hovoríme o množine vrcholov alebo hrán grafu G.

Definícia 2.2:

Vrcholy $v_i \in G$ $v_j \in G$ $i<j$ nazveme susedné, ak $\{v_i,v_j\}\in H(G)$.

Definícia 2.3:

Graf G nazveme náhodným grafom, ak je množina jeho hrán H náhodne vybraná podmnožina množiny všetkých možných hrán grafu G.

Existuje veľa rôznych modelov náhodných grafov. Tieto sa navzájom líšia jednak základným grafom, z ktorého náhodný graf vzniká, ale aj spôsobom, ako zo základného grafu náhodné grafy indukujeme. V definícii 2.3. sme sa už jedného obmedzenia dopustili, pretože tak dobre, ako náhodne vyberáme hrany, môžeme vyberať vrcholy. Pre účely našej diplomovej práce však táto definícia postačuje.

Teraz sa budeme venovať nášmu základnému grafu, n-rozmernej hyperkocke.

Definícia 2.4:

n-rozmerným binárnym vektorom nazveme usporiadanú n-ticu $(a_{1,} a_{2,} \ldots, a_n)$, ak platí $(\forall a_i)(i \in \{1, \ldots, n\}) a_i \in \{0,1\}$.

Definícia 2.5:

Nech u, v sú vektory. Prirodzené číslo $\rho(u, v)$ nazveme Hammingovou vzdialenosťou vektorov u, v, ak platí

$$\rho(u, v) = \sum_{i=1}^{n} (u_i \neq v_i)$$

Definícia 2.6:

Graf G nazveme n-rozmernou hyperkockou, ak jeho množinu vrcholov tvorí množina všetkých n-rozmerných binárnych vektorov, a jeho množina hrán je množina takých dvojíc vrcholov $\{v_i, v_j\}$, pre ktoré platí, že $\rho(u, v) = 1$. Takúto hyperkocku označujeme E^n . Niekedy miesto termínu n-rozmerná hyperkocka používame synonymum hyperkocka rádu n.

Ako základný graf pri indukovaní náhodných grafov nám teda slúži n-rozmerná hyperkocka. Vrcholy tejto hyperkocky si nejakým spôsobom očíslujeme. Ako celkom prirodzený spôsob sa javí očíslovanie podľa ich binárnych vektorov, no tento spôsob nie je jediný možný.

Náhodný graf budeme generovať tým spôsobom, že si zvolíme pravdepodobnosť p , a pre každú hranu v hyperkocke E^n sa nezávisle rozhodme, či ju v náhodnom grafe ponecháme alebo nie. Každú hranu pritom ponecháme s pravdepodobnosťou p a odstránime s pravdepodobnosťou 1-p.

Takto dostaneme pravdepodobnostný priestor (G^n, P) , kde $P: G^n \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ je pravdepodobnostná funkcia definovaná nasledovne:

$$P(\text{náhodný graf má realizáciu } G) = p^m (1-p)^{n 2^{n-1} - m}$$

pričom $V(G)=2^n$ a $H(G)=m$. S praktických dôvodov budeme tiež požadovať, aby $p\in(0,1)$.

Skúmanie ľubovolných objektov, vrátane náhodných grafov, často znamená položiť si otázku, či daný objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť. Ak povieme, že náhodné grafy majú nejakú vlastnosť, nemusí to automaticky znamenať, že každý náhodný graf naozaj túto vlastnosť bude mať. Čitateľa, ktorý sa doteraz ešte s problematikou náhodných grafov nestretol, preto môže nasledujúca definícia trochu prekvapiť.

Definícia 2.7:

Hovoríme, že náhodný graf G má vlastnosť A ak $\lim_{n\to\infty} P[G \text{ má vlastnosť } A]=1$.

Teda ak hovoríme, že náhodný graf G má vlastnosť A, tak hovoríme , že pre dostatočne veľký počet vrcholov grafu G je počet tých grafov, ktoré vlastnosť A majú, oveľa väčší ako počet tých grafov, ktoré vlastnosť A nemajú.

V našej práci nás budú zaujímať vrcholové pokrytia náhodných grafov nejakými jeho vhodne zvolenými podgrafmi. K tomu zavedieme ďalšie potrebné pojmy a označenia.

Definícia 2.8:

Graf $G_k=(V_k,H_k)$ nazveme podgrafom grafu G, ak $V_k\subseteq V$ a súčasne $H_k\subseteq H$. Ak navyše G_k je k-rozmerná hyperkocka, podgraf G_k budeme nazývať k-rozmernou podkockou grafu G.

Definícia 2.9:

Hovoríme, že podkocka K je maximálna podkocka G, ak K je obsiahnutá v G a zároveň neexistuje žiadna podkocka L obsiahnutá v G taká, že K je obsiahnutá v L a L je vyššieho rádu.

Definícia 2.10:

Množinu $B=\{G_1,G_2,\ldots,G_m\}$ nazveme vrcholovým pokrytím grafu G, ak $G_i\subseteq G$ pre

$(\forall i)\ i \in \{1,..,m\}$ a $V(G_1) \cup V(G_2) \cup ... \cup V(G_m) = V(G)$. Ak navyše G_i je (maximálna) podkocka $(\forall i)\ i \in \{1,..,m\}$, množinu B nazývame vrcholovým pokrytím grafu G (maximálnymi) podkockami. Číslo m sa nazýva veľkosť alebo dĺžka pokrytia. Najmenšie také m , ktoré určuje veľkosť pokrytia, nazveme veľkosť minimálneho pokrytia. Pokrytie, z ktorého nemôžeme odstrániť žiadny jeho prvok bez toho, aby takto upravená množina stratila vlastnosť byť pokrytím, nazveme iredudantné pokrytie grafu G.

Je zrejmé, že každý náhodný graf je možné podkockami vrcholovo pokryť, stačí vziať 2^n rôznych 0 – rozmerných podkociek (pre každý vrchol grafu G jednu). Ak však miesto podkociek budeme do pokrytia brať iba maximálne podkocky, veľkosť pokrytia sa nezvýši. Toto tvrdenie je dôsledkom nasledujúcej lemy:

Lema 2.1:

Nech $G \in G^n$ je náhodný graf a nech $B = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$ je vrcholové pokrytie grafu G pomocou hyperkociek. Nech K_i je kocka a nech $K_i^{'}$ je jej maximálna nadkocka. Potom $B^{'} = \{K_1, K_2, ..., K_{i-1}, K_i^{'}, K_{i+1}, ..., K_m\}$ je tiež vrcholové pokrytie.

Dôkaz:

Stačí overiť, či $B^{'}$ spĺňa definíciu 2.10. K_j pre $(\forall j)\ j \in \{1,..,m\}$ sú podkocky G , rovnako ako aj $K_i^{'}$. Keďže nám z pôvodného pokrytia vypadla K_i , podkocka $K_i^{'}$ musí pokryť všetky vrcholy z $V(K_i)$. Ale každý vrchol K_i je zároveň vrcholom $K_i^{'}$, lebo K_i je podgrafom $K_i^{'}$.

□

Na základe lemy 2.1 vieme, že nemá veľký zmysel brať ako prvky pokrytia tie podkocky, ktoré nie sú maximálne. Akonáhle by sme tak totiž spravili, tak vďaka leme 1.1 vieme skonštruovať pokrytie len s použitím maximálnych podkociek, ktorého veľkosť nebude väčšia ako veľkosť pôvodného pokrytia. Práve naopak, ak $K_i^{'}$ je nadkocka K_i a $K_j \subseteq K_i^{'}$ pre nejaké $j = \{1,2,...,m\}$ pričom $j \neq i$, veľkosť pokrytia sa zníži.

Maximálnymi podkockami sa zaoberá práca [1]. Môžeme v nej nájsť odhad strednej hodnoty maximálnych podkociek rádu k, ako aj celkový počet maximálnych podkociek. Ďalej sa v nej ukázalo, aká je distribúcia maximálnych podkociek ako aj to, že podkocky príliš malých alebo príliš veľkých rozmerov nepokrývajú takmer žiadne vrcholy. Rovnako sa v práci [1] podarilo zdola odhadnúť veľkosť iredudantných pokrytí náhodných grafov. My teraz nadväzujeme na tieto výsledky a pokúsime sa nájsť horný odhad veľkosti iredudantných pokrytí náhodných grafov. Rovnako nás zaujíma aj počet iredudantných pokrytí.

O maximálnych podkockách

V našej práci skúmame veľkosť a počet iredudantných pokrytí pozostávajúcich z maximálnych podkociek, čo znamená, že maximálne podkocky majú pre ňu kľúčový význam. Maximálnymi podkockami sa zaoberá práca [1]. V nej dosiahnuté výsledky nám veľkou mierou pomôžu v našom snažení odhadnúť veľkosť a počet iredudantných pokrytí. Z tohto dôvodu z nej v tejto kapitole uvádzame niektoré, pre nás dôležité, výsledky.

Veta 3.1:

Pre $n \to \infty$ platí s pravdepodobnosťou idúcou k jednej nasledujúci vzťah pre strednú hodnotu k-rozmerných maximálnych podkociek $X_{n,k}(G)$ grafu G

$$E(X_{n,k}) = \binom{n}{k} 2^{n-k} p^{k \cdot 2^{k-1}} \left(1 - p^{(k+2)2^{k-1}}\right)^{n-k}$$

Výraz $\binom{n}{k} 2^{n-k} p^{k \cdot 2^{k-1}}$ je rovný strednej hodnote k-rozmerných podkociek grafu G.

Výraz $\left(1 - p^{(k+2)2^{k-1}}\right)^{n-k}$ vyjadruje pravdepodobnosť, že náhodne vybraná k-rozmerná podkocka grafu G je maximálna. Podrobný dôkaz tohto ako aj ďalších tvrdení môže čitateľ nájsť v [1].

Lema 3.2:

Nech λ je najmenšie prirodzené číslo spĺňajúce nerovnosť $\lambda + \lg(\lambda + 2) \geq \lg \log_b n$. Potom $X_{n,k}$ rastie pre $0 \leq k < \lambda$, dosahuje maximum pre $k = \lambda$ alebo $k = \lambda + 1$, a klesá pre $\lambda + 1 < k \leq n$.

Predchádzajúce dve vety umožňujú odhadnúť očakávaný počet všetkých maximálnych podkociek $s_n(G)$.

Veta 3.3:

Nech $\epsilon_1(n)=\epsilon_2(n)=O\left(\frac{1}{\lg \log_b n}\right)$. Potom pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platí:

$$n^{(1-\epsilon_2(n))\lg \log_b(n)} \cdot 2^n \leqslant s_n(G) \leqslant n^{(1+\epsilon_1(n))\lg \log_b(n)} \cdot 2^n$$

Podľa [3], náhodné grafy neobsahujú podkocky rozmerov väčších ako μ. To znamená, že pre maximálne podkocky bude platiť rovnaké obmedzenie. V práci [1] sa však podarilo dospieť k lepším odhadom. Avšak skôr, ako môžeme uviesť príslušné tvrdenia, potrebujeme zaviesť nasledovné označenia:

Definícia 3.1:

Náhodná premenná $X^+_{n,k}(G)$ označuje počet maximálnych podkociek grafu G rádu väčšieho ako k. Túto skutočnosť môžeme formálne zapísať

$$X^+_{n,k}(G)=\sum_{j>k} X_{n,k}(G)$$

Náhodná premenná $X^-_{n,k}(G)$ označuje počet maximálnych podkociek grafu G rádu menšieho ako k. Teda

$$X^-_{n,k}(G)=\sum_{j<k} X_{n,k}(G)$$

Podobne zavádzame ďalšie náhodné premenné $V^+_{n,k}(G)$ (resp. $V^-_{n,k}(G)$), ktoré označujú počet vrcholov pokrytých maximálnymi podkockami rádu väčšieho (menšieho) ako k. Taktiež $H^+_{n,k}(G)$ ($H^-_{n,k}(G)$) bude označovať počet hrán, ktoré sú pokryté podkockami rádu väčšieho (menšieho) ako k.

Z lemy 3.2 vyplýva, že najviac maximálnych podkociek grafu G má rozmer blízky λ. Avšak zároveň existujú také hodnoty λ_1 a λ_2, pre ktoré je počet maximálnych podkociek rádov menších od λ_1 a väčších od λ_2 oveľa menší ako počet všetkých maximálnych podkociek grafu G. Dá sa tiež očakávať, že tieto podkocky budú pokrývať zanedbateľne malý počet vrcholov a hrán.

Najskôr však venujme svoju pozornosť nasledujúcim dvom pomocným tvrdeniam:

Lema 3.4:

Pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platí:

1, G neobsahuje podkocku rádu väčšieho ako μ

2, $X_{n,k}(G) < n \cdot E(X_{n,k})$ pre všetky $k = 0, \dots, n$

Lema 3.5:

Pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platia nasledujúce nerovnosti:

$$X^{+}_{n,k}(G) < \sum_{k<j\leq\mu} n \cdot E(X^{+}_{n,k})$$

$$X^{-}_{n,k}(G) < \sum_{j<k} n \cdot E(X^{+}_{n,k})$$

$$V^{+}_{n,k}(G) < \sum_{k<j\leq\mu} n \cdot E(X^{+}_{n,k}) \cdot 2^{j}$$

$$V^{-}_{n,k}(G) < \sum_{j<k} n \cdot E(X^{-}_{n,k}) \cdot 2^{j}$$

$$H^{+}_{n,k}(G) < \sum_{k<j\leq\mu} n \cdot E(X^{+}_{n,k}) \cdot j \cdot 2^{j-1}$$

$$H^{-}_{n,k}(G) < \sum_{j<k} n \cdot E(X^{-}_{n,k}) \cdot j \cdot 2^{j-1}$$

Teraz môžeme vysloviť vety o neexistencii maximálnych podkociek príliš malých a príliš veľkých rozmerov. Tieto vety majú pre nás veľký význam, pretože nám dávajú informáciu o rozmeroch maximálnych podkociek, ktoré budú prvkami pokrytia.

Veta 3.6:

Nech $\lambda_1 = \lg \log_b n - \lg \lg \log_b n$. Potom s pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n \to \infty$ platí:

$$V^{-}_{n,\lambda_1}(G) = o(2^n)$$

$$H^{-}_{n,\lambda_1}(G) = o(|H(G)|)$$

$$X^{-}_{n,\lambda_1}(G) = o(s(n))$$

Veta 3.7:

Nech $\lambda_2 = \lg \log_b n + 2$. Potom s pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n \to \infty$ platí:

$$V^{+}_{n,\lambda_2}(G) = o(2^n)$$

$$H^{+}_{n,\lambda_2}(G) = o(|H(G)|)$$

$$X^{+}_{n,\lambda_2}(G) = o(s(n))$$

V práci [1] sa podarilo dosiahnuť dolný odhad veľkosti iredudantného pokrytia náhodného grafu maximálnymi podkockami.

Veta 3.8:

Nech p_v je náhodná premenná, ktorá označuje veľkosť minimálneho vrcholového pokrytia grafu $G \in G_n$. Potom s pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n \to \infty$ platí

$$\frac{2^n(1-o(1))}{4 \log_b n} \leqslant p_v$$

Keďže každé minimálne pokrytie je iredudantné, a žiadne iredudantné pokrytie nie je menšie ako ľubovoľné minimálne pokrytie, úloha hľadania dolného odhadu veľkosti iredudantného pokrytia náhodného grafu $G \in G_n$ je ekvivalentná úlohe hľadaniu dolného odhadu veľkosti iredudantného pokrytia náhodného grafu $G \in G_n$.

O jadrových podkockách

V nasledujúcich kapitolách sa zaoberáme horným odhadom veľkosti iredudantných pokrytí náhodného grafu maximálnymi podkockami. Pri našej práci nám pomôžu jadrové podkocky, ktorými sa zaoberá táto kapitola. V jej prvej časti uvádzame výsledky práce [2], ktorá sa nimi zaoberá, v druhej časti sa venujeme distribúcii jadrových podkociek.

Definícia 4.1:

Nech $G \in G^n$. Hovoríme, že maximálna podkocka K je jadrová podkocka grafu G, ak existuje vrchol $v \in K$ taký, že v nie je obsiahnutý v žiadnej inej maximálnej podkocke grafu G. Vrchol v nazveme jadrový vrchol grafu G.

Pri konštrukcii pokrytia musíme pokryť každý vrchol grafu G nejakou maximálnou podkockou. Avšak vrcholy, ktoré sa nachádzajú iba v jednej maximálnej podkocke, môžeme pokryť práve len tou jednou podkockou. Takéto podkocky nazývame jadrové podkocky a z uvedeného vyplýva, že každá jadrová kocka musí byť nutne prvkom každého iredudantného pokrytia.

Jadrové podkocky boli študované v práci [2], kde jej autori sformulovali a dokázali vetu o strednom počte jadrových podkociek v náhodných grafoch.

Lema 4.1:

Pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre očakávaný počet jadrových podkociek rádu k platí vzťah

$$E(C_{n,k}) = \binom{n}{k} 2^{n-k} p^{k \cdot 2^{k-1}} \left(1 - \left(1 - (1-p)^{n-k}\right)^{2^k}\right)$$

V [2] bolo ukázané aj to, ako závisí $E(C_{n,k})$ od k.

Lema 4.2:

Nech $\lambda = \lfloor lg(\log_b(n)) + 1 \rfloor$. Potom $E(C_{n,k})$ rastie pre $0 \leq k < \lambda$, dosahuje maximálne hodnoty pre $k=\lambda$ alebo $k=\lambda+1$ a klesá pre $\lambda+1<k\leqslant n$.

Posledný výsledok práce [2] týkajúci sa jadrových podkociek je odhad počtu všetkých jadrových podkociek v náhodnom grafe. Veta 4.3 je dôsledkom Lemy 4.1 a Lemy 4.2.

Veta 4.3:

S pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n\to\infty$ je počet jadrových podkociek c_G obsiahnutých v grafe G

$$c_G=n^{(1+o(1))\lg\log_b n}(2(1-p))^n$$

Pre maximálne podkocky poznáme hodnoty λ_1 a λ_2 , pre ktoré maximálne podkocky rádov menších ako λ_1 a väčších ako λ_2 pokrývajú zanedbateľne málo vrcholov. Teraz o odhadnutie takýchto hodnôt pokúsime aj v prípade jadrových podkociek.

Lema 4.4:

Pre $n\to\infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platí:

$$C_{n,k}(G)<n\cdot E(C_{n,k}),\ \ \text{pre}\ k=0..n$$

Dôkaz:

Platnosť tvrdenia priamo vyplýva z Markovovej nerovnosti.

□

Teraz zavedieme podobné označenie, ako sme zaviedli v definícii 3.1.

Definícia 4.2:

$$C^{-}_{n,k}=\sum_{j<k}C_{n,k}$$

$$C^{+}_{n,k} = \sum_{k<j} C_{n,k}$$

Definícia 4.3:

Náhodnú premennú, ktorá označuje počet vrcholov pokrytých jadrovými podkockami menšieho rádu ako k označíme $V^{-}_{n,k}(G)$. Podobne $V^{+}_{n,k}(G)$ bude označovať počet vrcholov pokrytých jadrovými podkockami rádu väčšieho ako k.

Pozorný čitateľ si mohol všimnúť, že označenie počtu pokrytých vrcholov v predchádzajúcej definícii je rovnaké ako v prípade maximálnych podkociek. Veríme, však, že k nedorozumeniu v tomto prípade nepríde.

Lema 4.5:

Pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platia nasledujúce nerovnosti:

$$C^{+}_{n,k}(G) < \sum_{k<j\leq\mu} n \cdot E(C_{n,j})$$

$$C^{-}_{n,k}(G) < \sum_{j<k} n \cdot E(C_{n,j})$$

$$V^{+}_{n,k}(G) < \sum_{k<j\leq\mu} n \cdot E(C_{n,j}) \cdot 2^{j}$$

$$V^{-}_{n,k}(G) < \sum_{j<k} n \cdot E(C_{n,j}) \cdot 2^{j}$$

Dôkaz:

Na dôkaz lemy 4.5 stačí vhodne využiť lemy 4.4 a 3.4, uvedomiť si, že podkocka rádu j pokrýva nanajvyš 2^{j} vrcholov, a počítať:

$$C^{+}_{n,k}(G) = \sum_{k<j} C_{n,k} = \sum_{k<j\leq\mu} C_{n,k} < \sum_{k<j\leq\mu} n \cdot E(C_{n,j})$$

$$C^{-}_{n,k}(G) = \sum_{j<k} C_{n,k} < \sum_{j<k} n \cdot E(C_{n,j})$$

$$V^{+}_{n,k}(G) \leqslant \sum_{k<j} C_{n,k} \cdot 2^j = \sum_{k<j \leqslant \mu} C_{n,k} \cdot 2^j < \sum_{k<j \leqslant \mu} n \cdot E\left(C_{n,j}\right) \cdot 2^j$$

$$V^{-}_{n,k}(G) \leqslant \sum_{j<k} C_{n,k} \cdot 2^j < \sum_{j<k} n \cdot E\left(C_{n,j}\right) \cdot 2^j$$

□

Teraz sme už pripravení vysloviť a dokázať dva výsledky tejto kapitoly. Tieto výsledky uvádzame aj napriek tomu, že sa neukázali byť relevantné v skúmaní iredudantných pokrytí náhodných grafov.

Veta 4.6:

Nech $\lambda_1 = \lg \log_b n - \lg \lg \log_b n$. Potom s pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n \to \infty$ platí:

$$V^{-}_{n,\lambda_1}(G) = o\left(2^n\right)$$

Dôkaz:

Podľa lemy 4.5 pre ľubovoľné κ platí vzťah $V^{-}_{n,\kappa}(G) < \sum_{j<\kappa} n \cdot E\left(C_{n,j}\right) \cdot 2^j$. Podľa lemy 4.2. je $E\left(C_{n,k}\right)$ rastúce pre každé $\kappa < \lambda$, čo umožňuje vykonať nasledujúci odhad:

$$V^{-}_{n,\kappa}(G) < n \cdot E\left(C_{n,\kappa-1}\right) \sum_{j<\kappa-1} 2^j < n\, E\left(C_{n,\kappa-1}\right) \cdot 2^{\kappa-1}$$

Teraz dosadíme za $E\left(C_{n,\kappa}\right)$ vzťah získaný z lemy 4.1 a dostaneme

$$V^{-}_{n,\kappa}(G) < n \binom{n}{\kappa-1} 2^n p^{(\kappa-1)2^{(\kappa-2)}} \left(\left(\left(1-p\right)^{(n-\kappa+1)}\right)^{2^{(\kappa-1)}}\right)$$

Pre zjednodušenie výrazu použijeme odhad $\binom{n}{\kappa-1} < n^{\kappa-1}$ a dostaneme výraz

$$V^{-}_{n,\kappa}(G) < n^{\kappa} 2^n p^{(\kappa-1)2^{(\kappa-2)}} \left(\left(\left(1-p\right)^{(n-\kappa+1)}\right)^{2^{(\kappa-1)}}\right)$$

Pre $0<p<1$ je $n^{\kappa} p^{(\kappa-1)2^{(\kappa-2)}}\left(\left((1-p)^{(n-\kappa+1)}\right)^{2^{(\kappa-1)}}\right)=o(1)$, keďže n^{κ} rastie oveľa pomalšie ako $p^{(\kappa-1)2^{(\kappa-2)}}$ klesá, a zároveň $0\leqslant\left(\left((1-p)^{(n-\kappa+1)}\right)^{2^{(\kappa-1)}}\right)<1$, čo znamená, že

$$V^{-}_{n,\kappa}(G)<2^{n}\cdot o(1)=o(2^{n})$$

Náš odhad platí pre $\kappa<\lambda$, pričom vieme, že platí $\lg\log_{b}n-\lg\lg\log_{b}n<\lambda$, teda najväčšie prípustné κ označíme λ_1 , pričom $\lambda_1=\lg\log_{b}n-\lg\lg\log_{b}n$. Potom

$$V^{-}_{n,\lambda_1}(G)=o(2^{n})$$

□

Veta 4.7:

Nech $\lambda_2=\lg\log_{b}n+2$. Potom s pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n\to\infty$ platí:

$$V^{+}_{n,\lambda_2}(G)=o\left(2^{n}\right)$$

Dôkaz:

Pri dôkaze vety 4.7 budeme postupovať podobne ako pri dôkaze vety 4.6. Podľa lemy 4.5 pre ľubovoľné κ platí vzťah. $V^{+}_{n,\kappa}(G)<\sum_{\kappa<j\leqslant\mu} n\cdot E\left(C_{n,j}\right)\cdot 2^{j}$. Po dosadení za $E(C_{n,j})$ dostaneme

$$V^{+}_{n,\kappa}(G)<\sum_{\kappa<j\leqslant\mu} n\cdot\binom{n}{j}2^{n} p^{j2^{j-1}}\left(1-\left(1-(1-p)^{n-j}\right)^{2^{j}}\right)$$

Pre zjednodušenie výrazu opäť použijeme odhad $\binom{n}{j}<n^{j}$ a uvážime, že $\left(1-\left(1-(1-p)^{n-j}\right)^{2j}\right)\leqslant 1$ pre každé $\kappa<j\leqslant\mu$. Teda dostávame

$$V^{+}_{n,\kappa}(G) < 2^{n} \sum_{\kappa < j \leqslant \mu} n^{j+1} p^{j 2^{j-1}}$$

Keďže podľa [1] sa $\sum_{\lambda_2 < j \leqslant \mu} n^{j+1} p^{j 2^{j-1}} = o(1)$, $V^{+}_{n,\lambda_2}(G) < 2^{n} \cdot o(1) = o(2^{n})$

$\square$

Ukázali sme, že distribúcia jadrových podkociek je rovnaká, ako je distribúcia maximálnych podkociek.

O regulárnych a zvyšných vrcholoch

V predchádzajúcej kapitole sme sa venovali jadrovým podkockám a snažili sme sa objasniť, prečo sú pre nás tieto podkocky pri konštrukcii horného odhadu veľkosti iredudantných pokrytí náhodných grafov zaujímavé. Teraz, keď sa na vec pozrieme z iného konca, zistíme, že niektoré vrcholy sa v náhodných grafoch pokryjú aj bez toho, aby sme sa ich cielene pokrývali. Takéto vrcholy nazývame regulárnymi vrcholmi.

Definícia 5.1:

Vrchol $v \in G$ nazveme regulárny vrchol grafu G, ak existuje vrchol $u \in G$ $u \neq v$ taký, že pre každú maximálnu podkocku $K \subseteq G$ platí, že ak $u \in K$, potom aj $v \in K$.

Uvedená definícia hovorí, že ak je vrchol v regulárny, potom musí existovať nejaký vrchol u, ktorý vrcholu v túto vlastnosť zabezpečuje. Pri konštrukcii iredudantného pokrytia grafu G prirodzene musíme pokryť obidva vrcholy. Avšak z definície je zrejmé, že pokrytie vrchola u zabezpečuje pokrytie vrchola v, čo nám akoby zmenšovalo množinu pokrývaných vrcholov o regulárne vrcholy. Počet regulárnych vrcholov je odhadnutý v práci [2].

Veta 5.1:

Počet r_G regulárnych vrcholov v náhodnom grafe G je

$$r_G < \gamma^n ,$$

kde $1{,}51 < \gamma < 2$.

Teraz, keď vieme odhadnúť počty jadrových podkociek i regulárnych vrcholov, môžeme odhadnúť aj počet tých vrcholov, ktoré nie sú regulárne a ani ich nevieme pokryť jadrovými podkockami.

Veta 5.2:

Nech M_f označuje množinu tých vrcholov náhodného grafu G, ktoré nie sú regulárne, a ani nevieme garantovať ich pokrytie pomocou jadrových podkociek. Potom pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platí

$$|M_f| \leqslant 2^n (1 - o(1))$$

Dôkaz:

Keďže náhodný graf G indukujeme z n-rozmernej hyperkocky spôsobom, ktorý nemení počet vrcholov v grafe, platí, že $|V(G)| = 2^n$. Počet prvkov množiny M_f získame odpočítaním regulárnych vrcholov a vrcholov pokrytých jadrovými podkockami od množiny $V(G)$. V prípade jadrových podkociek však vieme povedať len to, že každá jadrová podkocka pokryje aspoň jeden nepokrytý vrchol, čo však neznamená, že nemôže pokryť viac. Preto môžeme povedať, že počet vrcholov pokrytých jadrovými podkockami bude väčší alebo rovný počtu jadrových kociek, čo nám zmenšuje počet prvkov množiny M_f. Tieto úvahy dostatočne zdôvodňujú nasledovný výpočet:

$$|M_f| \leqslant 2^n - \gamma^n - n^{(1+o(1)) \lg \log_b n} (2(1-p))^n = 2^n (1 - o(1))$$

$\square$

Veta 5.3:

Pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platí

$$|M_f| \geqslant 2^n (1 - o(1))$$

Dôkaz:

Dôkaz vedieme podobne ako vo vete 5.2. Akurát budeme predpokladať, že jadrové podkocky majú prázdny prienik a sú maximálnych možných rozmerov, čo znamená, že pokrývajú najväčší možný počet vrcholov. Potom

$$|M_f| \geqslant 2^n - \gamma^n - n^{(1+o(1)) \lg \log_b n} (2(1-p))^n \cdot (\lg \log_b n + 2) = 2^n (1 - o(1))$$

$\square$

Horný odhad veľkosti iredudantného pokrytia

V tejto kapitoly sa zameriame na nájdenie horného odhadu veľkosti iredudantného pokrytia. Najskôr sformulujeme a dokážeme horný odhad, ktorého platnosť je v podstate zrejmá. Použitý postup je podobný metóde, ktorá bola použitá v práci [7].

Veta 6.1:

$$p_v \leqslant 2^n$$

Dôkaz:

Vieme, že náhodný graf G, ktorý pokrývame, má 2^n vrcholov. Pokiaľ každý z vrcholov tohto grafu pokryjeme 0-rozmernou podkocou (podkockou, ktorá obsahuje iba jeden vrchol), dostaneme pokrytie podkockami veľkosti 2^n. Z neho môžeme zostrojiť iredudantné pokrytie grafu G maximálnymi podkockami nasledovne:

1) každú 0-rozmernú podkocku nahradíme nejakou jej maximálnou nadkockou. Podľa lemy 2.1 je takto upravená množina tiež pokrytím grafu G a jeho veľkosť sa nezmení.
2) Následne s pokrytia odstránime všetky nadbytočné podkocky – teda tie, ktoré nepokrývajú žiadny inou podkockou nepokrytý vrchol - z pokrytia odstránime. Touto úpravou sa veľkosť pokrytia nezvýši, a teda platí $p_v \leqslant 2^n$.

□

Odhad dosiahnutý vo vete 6.1 je v podstate zrejmý aj pri nie príliš hlbokom zamyslení sa nad daným problémom. My sa preto pokúsime tento odhad vylepšiť použitím inej, trochu sofistikovanejšej metódy. Návod na ňu nám poskytuje práca[4]. Všetky dôležité pomocné výsledky, ktoré potrebujeme na jej použitie, sme uviedli už v predchádzajúcich kapitolách. Napriek tomu potrebujeme zaviesť ešte jeden pojem, ktorý zavádzame podobným spôsobom, ako je to urobené v práci [8].

Definícia 6.1:

Blokový (n,d) kód sa skladá z kódovacej funkcie $E: 2^n \rightarrow 2^d$, dekódovacej funkcie $D: 2^d \rightarrow 2^n$, pričom funckia $E \circ D$ je funkcia identity a funkcie E , D spracovávajú text po blokoch dĺžky n, resp. d.

Definícia 6.2:

Grupovým kódom $G_{n,d}$ s parametrom d nazveme ľubovoľný blokový (n,d) kód, ktorého všetky kódové slová tvoria aditívnu podgrupu.

Teraz už môžeme popísať postup na konštruciu iredudantného pokrytia náhodného grafu n-rozmernými hyperkockami.

Algoritmus na konštrukciu iredudantného pokrytia:

1) do pokrytia zoberieme všetky jadrové podkocky. Keďže jadrové podkocky v sebe obsahujú aspoň jeden vrchol, ktorý nie je obsiahnutý v žiadnej inej maximálnej podkocke, je nevyhnutné do pokrytia vziať každú jednu jadrovú podkocku
2) teraz potrebujeme pokryť už len prvky množiny M_f . Podľa [5] existuje v n-rozmernej hyperkocke grupový kód s parametrom $2r+1$ s počtom prvkov $g \geqslant \frac{2^n}{(2n)^r}$. Podľa vety 3.7 sa v náhodnom grafe G nenachádzajú podkocky rozmeru väčšieho ako $\lambda_2 = \lg \log_b n + 2$. Preto si zvolíme množinu $\bar{M}_f \subseteq M_f$ takú, že $\bar{M}_f$ bude obsahovať iba také vrcholy z M_f , ktorých hammingova vzdialenosť je aspoň $2\lambda_2 + 1$.
3) každý vrchol z $\bar{M}_f$ pokryjeme nejakou maximálnou kockou. Množina $\bar{M}_f$ je zvolená tak, aby mali tieto kocky prázdny prienik.
4) nepokryté vrcholy z M_f pokryjeme takými podkockami, ktoré neobsahujú bod z $\bar{M}_f$. Tu musíme ukázať, že takého pokrytie sa vždy dá spraviť. Ak by sa nedalo, znamenalo by to, že každá maximálna podkocka, ktorá pokrýva nejaký vrchol $v \in M_f$, obsahuje aj nejaký vrchol $u \in \bar{M}_f$. Keďže podkocky majú rozmer nanajvyš λ_2 a prvky $\bar{M}_f$ sú vzdialené aspoň $2\lambda_2 + 1$, znamená to, že každá maximálna podkocka, ktorá obsahuje vrchol v , obsahuje aj vrchol u , a teda u je

regulárny vrchol, čo je spor so skutočnosťou, že množina M_f regulárne vrcholy neobsahuje.

5) z pokrytia odstránime všetky zbytočné podkocky. Zbytočné podkocky sú také podkocky, ktoré nepokrývajú žiadny vrchol grafu G, ktorý nie je pokrytý nejakým iným prvkom pokrytia.

Dúfajúc, že s použitím uvedeného algoritmu dospejeme k lepšiemu hornému odhadu, začneme vyčíslovať horný odhad počtu maximálnych podkociek potrebných na konštrukciu pokrytia. Ako je však zo znenia nasledujúcej vety zrejmé, táto nádej sa nám nesplní.

Veta 6.2:

Pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platí

$$p_v \leqslant 2^n(1+o(1)) + |\bar{M}_f|$$

Dôkaz:

Množinu pokrytia budeme konštruovať postupne. V prvom kroku do nej pridáme všetky maximálne podkocky, ktorých je, podľa vety 4.3, $n^{(1+o(1))\lg\log_b n}(2(1-p))^n$. Z vlastností jadrových podkociek vyplýva, že takto pokryjeme minimálne $n^{(1+o(1))\lg\log_b n}(2(1-p))^n$ vrcholov grafu G.

V druhom kroku algoritmu konštruujeme množinu $\bar{M}_f$. Pre počet prvkov $\bar{M}_f$ platí podľa kroku 2) algoritmu a vety 5.3 vzťah

$$|\bar{M}_f| \geqslant \frac{2^n(1-o(1))}{(2n)^{\lg\log_b n+2}}$$

V treťom kroku pokývame vrcholy z $\bar{M}_f$. Prirodzene, pritom pokryjeme aj nejaké iné vrcholy, ktoré do množiny $\bar{M}_f$ nepatria. Po vykonaní tohto kroku budem mať pokryté všetky jadrové vrcholy a aspoň $V_2(G)$ vrcholov, pričom

$$V_2(G) \geqslant |\bar{M}_f| \cdot 2^{\lambda_1} \geqslant \frac{2^n(1-o(1))}{(2n)^{\lg\log_b n+2}} 2^{\lg\log_b n - \lg\lg\log_b n} = \frac{2^n(1-o(1))}{4n^{\lg\log_b n+2} 2^{\lg\lg\log_b n}}$$

V štvrtom kroku pokrývame doteraz nepokryté vrcholy z množiny M_f . Ich počet označíme $V_3(G)$ a vypočítame ho ako rozdiel $|M_f|$ a $V_2(G)$.

$$V_3(G)=|M_f|-V_2(G)\leq 2^n(1-o(1))-\frac{2^n(1-o(1))}{4n^{\lg\log_b n+2}2^{\lg\lg\log_b n}}=2^n(1-o(1))(1-\frac{1}{4\lg\log_b n\cdot n^{\lg\log_b n+2}})$$

Výraz $\frac{1}{4\lg\log_b n\cdot n^{\lg\log_b n+2}}$ ide k 0, teda

$$|M_f|-V_2(G)\leq 2^n(1-o(1))^2=2^n(1-o(1)) \quad .$$

Z doterajších výsledkov vidieť, že sa nám v druhom a treťom kroku algoritmu nepodarilo asymptoticky zmenšiť množinu vrcholov, ktoré ešte musíme pokryť. Navyše, pokrytie týchto zostávajúcich $V_3(G)$ vrcholov nevieme spraviť lepšie ako tak, že pre každý ešte nepokrytý vrchol zoberieme jednu maximálnu podkocku.

Do pokrytia musíme zobrať všetky jadrové podkocky, ďalej musíme pridať $|\bar{M}_f|$ maximálnych podkociek, pričom nám stále zostane $2^n(1-o(1))$ nepokrytých vrcholov, čo v našom prípade znamená, že potenciálne $2^n(1-o(1))$ maximálnych podkociek môže byť potrebných na konštrukciu iredudantného pokrytia. Preto

$$p_v\leq c_G+|\bar{M}_f|+V_3(G)\leq n^{(1+o(1))\lg\log_b n}(2(1-p))^n+|\bar{M}_f|+2^n(1-o(1)) \quad .$$

Po úprave dostaneme:

$$p_v\leq 2^n(n^{(1+o(1))\lg\log_b n}(1-p)^n+(1-o(1)))+|\bar{M}_f|$$

Nakoľko platí, že $n^{(1+o(1))\lg\log_b n}(1-p)^n=o(1)$, pre horný odhad veľkosti iredudantného pokrytia dostávame

$$p_v\leq 2^n(o(1)+(1-o(1)))+|\bar{M}_f|\leq 2^n(1+o(1))+|\bar{M}_f|$$

□

Jasne vidieť, že odhad veľkosti iredudantného pokrytia je vo vete 6.2 ešte horší, ako sme dosiahli vo vete 6.1.

Počet iredudantných pokrytí

V tejto kapitole sa zaujímame o počet iredudantných pokrytí. Odhadneme ich počet zdola i zhora. Začneme dolným odhadom.

Na dolný odhad počtu iredurantných pokrytí použijeme algoritmus popísaný v predchádzajúcej kapitole. V kroku 3 totiž pokrývame vrcholy množiny $\bar{M}_f$, pričom každý vrchol z tejto množiny môžeme pokryť aspoň dvoma maximálnymi podkockami, keďže vrcholy $\bar{M}_f$ nie sú jadrové vrcholy. Táto skutočnosť nám umožňuje sformulovať a dokázať vetu o dolnom odhade počtu iredudantných pokrytí.

<u>Veta 7.1:</u>

Nech p_p je náhodná premenná, ktorá označuje počet iredudantných pokrytí. Pre $n \to \infty$ s pravdepodobnosťou idúcou k jednej platí

$$p_p \geqslant 2^{\frac{2^n(1-o(1))}{(2n)^{\lg \log_b n+2}}}$$

<u>Dôkaz:</u>

Podľa tretieho kroku algoritmu uvedeného v predchádzajúcej kapitole každý vrchol z množiny $\bar{M}_f$ môžeme pokryť aspoň dvoma maximálnymi podkockami. To nám dáva aspoň $2^{|\bar{M}_f|}$ možností pokrytia množiny $\bar{M}_f$. Keďže v ďalších krokoch nepokrývame podkockami obsahujúcimi vrcholy z $\bar{M}_f$, znamená to, že v iredudantnom pokrytí sa bude nachádzať pre každý vrchol z množiny $\bar{M}_f$ práve jedna maximálna podkocka. Z toho vyplýva, že $p_p \geqslant 2^{|\bar{M}_f|}$. Po dosadení a úprave dostávame výsledok.

$$2^{|\bar{M}_f|} \geqslant 2^{\frac{|M_f|}{(2n)^{\lambda_2}}} \geqslant 2^{\frac{2^n(1-o(1))}{(2n)^{\lg \log_b n+2}}}$$

□

Pre horný odhad počtu iredudantných pokrytí určíme pre každý vrchol najväčší možný počet maximálnych podkociek, v ktorých môže byť obsiahnutý. Stačí, keď sa budeme zaujímať iba o vrcholy z množiny M_f , lebo jadrové vrcholy sú obsiahnuté iba v jednej maximálnej podkocke, čo znamená, že je len jeden spôsob, ako ich pokryť, no a regulárne vrcholy sa pokryjú tak, že sa pokryjú ostatné vrcholy.

Lema 7.2:

S pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n \to \infty$ platí

$$p_p \leqslant 2^n (1 - o(1)) \sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} \binom{n}{i}$$

Dôkaz:

Z každého vrchola $v \in M_f$ vedie maximálne n hrán, z nich λ_1 až λ_2 musí byť obsiahnutých v maximálnej podkocke. Teda pre počet maximálnych podkociek, ktorými môžeme pokryť nejaký vrchol v grafu G, dostávame horný odhad

$$\sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} \binom{n}{i}$$

Z popísaných úvah vyplýva, že

$$p_p \leqslant |M_f| \sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} \binom{n}{i} \quad .$$

Z vety 5.2 dostávame

$$p_p \leqslant 2^n (1 - o(1)) \sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} \binom{n}{i}$$

□

Teraz potrebujeme tento výraz upraviť, v čom nám pomôže nasledujúca lema.

Lema 7.3:

Pre $n \to \infty$ platí

$$\sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} \binom{n}{i} \leqslant (\lambda_2 - \lambda_1 + 1) \binom{n}{\lambda_2}$$

Dôkaz:

Stačí ukázať, že $\binom{n}{i}$ dosahuje najväčšiu hodnotu na množine $\{\lambda_{1,} \dots ,\lambda_2\}$ práve pre číslo

λ_2 . To spravíme tak, že dokážeme platnosť $\dfrac{\binom{n}{\lambda_2}}{\binom{n}{\lambda_2 - 1}} \geqslant 1$. Z vlastností kombinačných čísel

vyplýva, že ak $\binom{n}{i}$ rastie pre nejaké i , potom rastie aj pre $\forall\, j < i$, čo v našom prípade znamená platnosť dokazovanej formuly. Preto počítajme

$$\frac{\binom{n}{\lambda_2}}{\binom{n}{\lambda_2 - 1}} = \frac{\dfrac{n!}{\lambda_2!(n-\lambda_2)!}}{\dfrac{n!}{(\lambda_2-1)!(n-\lambda_2+1)!}} = \frac{n-\lambda_2+1}{\lambda_2}$$

Po dosadení dostávame

$$\frac{n - \lg\log_b n - 1}{\lg\log_b n + 2}$$

Ľahko vidieť, že pre $n \to \infty$ platí $\dfrac{n - \lg\log_b n - 1}{\lg\log_b n - 2} \geqslant 1$

□

S využitím lemy 7.3 môžeme písať

$$p_p \leqslant 2^n (1 - o(1)) \sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} \binom{n}{i} \leqslant 2^n (1 - o(1))(\lambda_2 - \lambda_1 + 1) \binom{n}{\lambda_2}$$

V našej snahe upraviť výraz odhadujúci počet iredudantných pokrytí zhora sa teraz zameriame na kombinačné číslo $\binom{n}{\lambda_2}$. Z definície kombinačných čísel vyplýva rovnosť

$$\binom{n}{\lambda_2}=\frac{n!}{\lambda_2!(n-\lambda_2)!}$$

Výraz na pravej strane rovnosti je možné upraviť s použitím Stirlingovej formuly. Pretože sa zaoberáme horným odhadom, musíme si dať pozor, aby sme daný výraz nezmenšili.

<u>**Lema 7.4:**</u>

Pre $n\to\infty$ platí

$$\frac{n!}{(\lambda_2)!(n-\lambda_2)!}\leqslant\frac{\sqrt{n}\,n^n(1+o(1))}{\sqrt{2\pi\lambda_2(n-\lambda_2)}\,\lambda_2^{\lambda_2}(n-\lambda_2)^{n-\lambda_2}}$$

<u>**Dôkaz:**</u>

Po použití Stirlingovej formuly dostaneme

$$\frac{n!}{(\lambda_2+2)!(n-\lambda_2)!}\leqslant\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))}{\sqrt{2\pi\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{e}\right)^{\lambda_2}\sqrt{2\pi(n-\lambda_2)}\left(\frac{n-\lambda_2}{e}\right)^{(n-\lambda_2)}}$$

Po úprave výrazu na pravej strane nerovnosti dostaneme

$$\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))}{\sqrt{2\pi\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{e}\right)^{\lambda_2}\sqrt{2\pi(n-\lambda_2)}\left(\frac{n-\lambda_2}{e}\right)^{n-\lambda_2}}=\frac{\sqrt{n}\,n^n(1+o(1))e^{\lambda_2}e^{n-\lambda_2}}{\sqrt{2\pi\lambda_2(n-\lambda_2)}e^n\lambda_2^{\lambda_2}(n-\lambda_2)^{n-\lambda_2}}$$

Keďže platí rovnosť $e^{\lambda_2}e^{n-\lambda_2}=e^n$, dostávame

$$\frac{\sqrt{n}\,n^n(1+o(1))e^{\lambda_2}e^{n-\lambda_2}}{\sqrt{2\pi\lambda_2(n-\lambda_2)}e^n\lambda_2^{\lambda_2}(n-\lambda_2)^{n-\lambda_2}}=\frac{\sqrt{n}\,n^n(1+o(1))}{\sqrt{2\pi\lambda_2(n-\lambda_2)}\lambda_2^{\lambda_2}(n-\lambda_2)^{n-\lambda_2}}$$

□

Pri ďalších úpravách horného odhadu počtu iredudantných pokrytí budeme pracovať s dosadenými hodnotami za λ_1 a λ_2. Pripomíname, že $\lambda_1=\lg\log_b n-\lg\lg\log_b n$ a $\lambda_2=\lg\log_b n+2$.

Lema 7.5:

Pre $n\to\infty$ platí

$$\frac{n^n}{(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}(n-\lg\log_b n-2)^{n-\lg\log_b n-2}}\leqslant\frac{2^{n-\lg\log_b n-2}\,n^{\lg\log_b n+2}}{(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}}$$

Dôkaz:

V dôkaze využijeme, že pre dostatočne veľké n platí nerovnosť

$$n-\lg\log_b n-2\geqslant\frac{n}{2}$$

a teda platí aj nerovnosť

$$\frac{n^n}{(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}(n-\lg\log_b n-2)^{n-\lg\log_b n-2}}\leqslant\frac{n^n}{(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}\left(\frac{n}{2}\right)^{n-\lg\log_b n-2}}$$

Využijeme platnosť identity $n^{a-b}=\frac{n^a}{n^b}$ a dostaneme

$$\frac{n^n}{(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}(n-\lg\log_b n-2)^{n-\lg\log_b n-2}}\leqslant\frac{2^{n-\lg\log_b n-2}\,n^{\lg\log_b n+2}}{(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}}$$

□

Lema 7.6:

$$\frac{\sqrt{n}(1+o(1))}{\sqrt{2\pi(\lg\log_b n+2)(n-\lg\log_b n-2)}}\leqslant\frac{(1+o(1))}{\sqrt{\lg\log_b n+2}}$$

Dôkaz:

V dôkaze opäť použijeme, platnosť nerovnosti $n-\lg\log_b n-2\geqslant\frac{n}{2}$, a dostávame

$$\frac{\sqrt{n}(1+o(1))}{\sqrt{2\pi(\lg\log_b n+2)(n-\lg\log_b n-2)}}\leqslant\frac{(1+o(1))}{\sqrt{\pi(\lg\log_b n+2)}}\leqslant\frac{(1+o(1))}{\sqrt{\lg\log_b n+2}}$$

□

Teraz sformulujeme a dokážeme vetu o hornom odhade počtu iredudantných pokrytí náhodného grafu G.

Veta 7.7:

S pravdepodobnosťou idúcou k jednej pre $n\to\infty$ platí

$$p_p\leqslant 2^{2n}(1+o(1))\frac{1}{4\log_b n}\left(\frac{n}{\lg\log_b n+2}\right)^{\lg\log_b n+2}$$

Dôkaz:

Podľa lemy 7.3 platí

$$p_p\leqslant 2^n(1-o(1))(\lambda_2-\lambda_1+1)\binom{n}{\lambda_2}$$

Z lemy 7.4 dostávame

$$p_p\leqslant 2^n(1-o(1))(\lambda_2-\lambda_1+1)\frac{\sqrt{n}\,n^n(1+o(1))}{\sqrt{2\pi\lambda_2(n-\lambda_2)}\lambda_2^{\lambda_2}(n-\lambda_2)^{n-\lambda_2}}$$

Po dosadení za λ_1 a λ_2 a z liem 7.5 a 7.6 máme

$$p_p\leqslant 2^n(1-o(1))(\lg\lg\log_b n+3)\frac{2^{n-\lg\log_b n-2}\,n^{\lg\log_b n+2}}{(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}}\frac{(1+o(1))}{\sqrt{\lg\log_b n+2}}$$

Keďže $(1-o(1))(1+o(1))\leqslant(1+o(1))$ a $\dfrac{\lg\lg\log_b n+3}{\sqrt{(\lg\log_b n+2)}}\leqslant 1$, dostávame

$$p_p\leqslant 2^{2n}(1+o(1))\frac{n^{\lg\log_b n+2}}{2^{\lg\log_b n+2}(\lg\log_b n+2)^{\lg\log_b n+2}}\leqslant 2^{2n}(1+o(1))\frac{1}{4\log_b n}\left(\frac{n}{\lg\log_b n+2}\right)^{\lg\log_b n+2}$$

□

Záver

V práci sme sa zaoberali horným odhadom veľkosti iredudantných pokrytí a horným i dolným odhadom počtu iredudantných pokrytí náhodných grafov generovaných na n-rozmernej hyperkocke. Dokázali sme, že pre veľkosť iredudantného pokrytia platí vzťah $p_v \leqslant 2^n$. Tento odhad sme sa pokúsili vylepšiť, čo sa nám ale nepodarilo. Naopak, máme dôvod sa domnievať, že tento odhad sa už príliš zlepšovať nedá. Je to pravdepodobne kvôli pomerne veľkému rozsahu rozmerov maximálnych podkociek, ktoré náš model náhodných grafov obsahuje.

Pre počet iredudantných pokrytí sme dokázali platnosť

$$2^{\frac{2^n(1-o(1))}{(2n)^{\lg\log_b n+2}}} \leqslant p_p \leqslant 2^{2n}(1+o(1))\frac{1}{4\log_b n}\left(\frac{n}{\lg\log_b n+2}\right)^{\lg\log_b n+2} .$$

Treba však povedať, že problematiku získavania odhadov špeciálnych pokrytí náhodných grafov sa nám nepodarilo vyčerpať. Napríklad je možné zaoberať sa minimálnymi pokrytiami, nájsť horný odhad pre ich veľkosť a oba odhady ich počtu, prípadne sa zaoberať iným modelom náhodných grafov.

Literatúra

[1] Toman, E., Banik, L., Stanek, M. 2007.: On structural properties of random subgraphs of n-cube. Journal of the Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 3, 1, 71-83

[2] Toman, E., Stanek, M. 2006.: On the number of regular vertices and kernel subgraphs in random graphs. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 2, 1, 57-66

[3] Toman, E., Stanek, M. 2006.: Analysis of gready algorithm for vertex covering of random graph by cubes. Computing and Informatics 25, 5, 393-404

[4] Glagolev, V. V.: Some estimates of disjunctive normal forms of Boolean functions. Problemy Kibernetiki, Vol. 19, Moscow 1967, 75 – 94 (in Russian)

[5] Bose, R.C., Ray-Chaudhuri, D. C.: On a class of error correcting binary group codes, Information and Control 3, 1960

[6] Škoviera, M. 1986.: On the minimalization of random boolean functions, part 1. Computers and Artifical Inteligence, 5, 321-334

[7] Škoviera, M. 1986.: On the minimalization of random boolean functions, part 2. Computers and Artifical Inteligence, 6, 493-509

[8] Birkhoff, G., Bartee, O. T. 1981.: Aplikovaná algebra. Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n.p., Bratislava, 215 - 225

[9] Rublík, F. 1983.: Základy pravdepodobnosti a štatistiky. Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n.p., Bratislava, 109 – 138

[10] Reguli, J. 2008. Metrické vlastnosti boolovských funkcií s daným počtom jednotiek. Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 5 - 11

[11] Albert, R., Barabási, A. L. 2002.: Statistical Mechanics of Complex Networks, Rev. Mod. Phys., 2 - 10