Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Silné hranové farbenia regulárnych grafov

Bc. Martin Veselý

2011

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Silné hranové farbenia regulárnych grafov

Diplomová práca

Bc. Martin Veselý

06086200-45c3-4fbc-9758-7f1e3fddcb47
Študijný program: Informatika
9.2.1 Informatika

Vedúci záverečnej práce
RNDr. Edita Máčajová, PhD.

KATEDRA INFORMATIKY

BRATISLAVA 2011

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Martin Veselý
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Silné hranové farbenia regulárnych grafov

Cieľ : Cieľom práce je urobiť prehľad v oblasti silných farbení grafov a dokázať Hypotézu o silnom farbení pre niektoré triedy 4-regulárnych grafov.

Vedúci : Mgr. Edita Mačajová, PhD.

Dátum zadania: 04.04.2011

Dátum schválenia: 04.04.2011

prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

vedúci práce

Poďakovanie

Chcel by som poďakovať všetkým, ktorí mi akýmkoľvek spôsobom pomohli pri písaní tejto diplomovej práce. Moje osobitné poďakovanie patrí vedúcej práce, RNDr. Edite Máčajovej, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a podnetné pripomienky pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

V tejto práci sa venujeme silnému hranovému farbeniu regulárnych grafov. Najskôr popisujeme, kde sa tento problém využíva v praxi a ako sa postupne historicky vyvíjali výsledky v tejto oblasti a zhŕňame niektoré základné alebo zaujímavé výsledky, ktoré už boli v tejto oblasti vyskúmané. Neskôr zhŕňame nastolené otvorené hypotézy. Základná hypotéza o silnom chromatickom indexe hovorí pre triedu 4-regulárnych grafov, že tieto grafy majú silný chromatický index maximálne 20. V práci overujeme túto hypotézu pre niektoré triedy 4-regulárny grafov, konkrétne pre 2-rozmerné torusy, grafy, ktoré vznikli spojením dvoch kubických grafov a niektoré triedy Cayleyho grafov s počtom vrcholov deliteľným 5, 7, 8 a 9. Vylepšili a dokázali sme aj hypotézu, ktorá bola nastolená v bakalárskej práci.

Kľúčové slová: silný hranový chrimatický index, teória grafov, silné hranové farbenie.

Abstract

In this thesis, we look at the strong edge chromatic index of regular graphs. Firstly, we describe how this problem is used in practice and how the results in this field of graph theory were advanced in history. We also summarize some basic and significant results, which been obtained by other researchers working in this field. Further on, we sum up the conjectures that are still open. The main conjecture of the strong edge chromatic index states, that for 4-regular graphs the strong edge chromatic index is at most 20. In this thesis, we verify this conjecture for some classes of 4-regular graphs, namely for 2-dimensional toruses, graphs which were created from cubic graphs and some classes of Cayley graphs with the number of vertices divisible by $5, 7, 8$ and 9. We also proved the stronger version of the conjecture that has been raised in the autor's bachelor thesis.

Key words: strong edge chromatic index, graph theory, strong edge coloring.

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Silné hranové farbenie je špeciálny druh farbenia hrán grafu taký, že žiadne dve hrany vo vzdialenosti maximálne 2 nemajú rovnakú farbu.
Vlastnosť silného hranového farbenia sa využíva aj v praxi. Problém silného hranového farbenia má zaujímavé aplikácie najmä pre priradenie kanálov v mobilnej viacskokovej sieti a v mobilných sieťach: Určovanie kanálov frekvencii linkám medzi vysielačmi vyhýbajúc sa primárnej a sekundárnej interferencii korešponduje s problémom silného hranového farbenia grafu, ktorý modeluje rádiovú sieť.

Silné hranové farbenie je jedna z vlastností grafov, ktoré nie sú veľmi preskúmané. Prvýkrát sa o silnom chromatickom indexe hovorilo v roku 1984. O rok neskôr Erdős a Nešetřil vyslovili hypotézu, ktorej čiastočnému dokazovaniu sme sa venovali aj v tejto práci:

Pre akýkoľvek graf s maximálnym stupňom $\Delta(G)$, $s\chi'(G) \leq f(\Delta)$ kde $f(\Delta)$ je definovaná takto:

$$f(\Delta) = \begin{cases} \frac{5\Delta^2}{4} & \text{ak } \Delta \text{ je párne} \\ \frac{5\Delta^2}{4} - \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{4} & \text{ak } \Delta \text{ je nepárne} \end{cases}$$

V diplomovej práci spravíme prehľad v problematike silného hranového farbenia grafov. Základ pre tvorbu prehľadu sme našli v mojej bakalárskej práci [1], ktorej témou bolo aj urobiť prehľad o silnom hranovom farbení. Tento prehľad sme doplnili o vzdialenostné hranové farbenie a niektoré dalšie výsledky silného hranového farbenia. V diplomovej práci preskúmame ďalšie triedy 4-regulárnych grafov a dokážeme pre ne hypotézu o silnom farbení, prípadne určíme silný chromatický index na týchto triedach presnejšie.

V prvej kapitole sú definície a vety, ktoré využívame v celej práci. Druhá kapitola je venovaná motivácií výskumu silného chromatického indexu a využitiu v praxi. V kapitole 3 je stručne popísaná história skúmania silného chromatického indexu. V kapitole 4 nájde čitateľ všeobecné ohraničenia silného chromatického indexu a dokázané tvrdenia pre niektoré triedy grafov s malým maximálnym stupňom. V piatej kapitole sú doteraz známe výsledky pre rôzne typy grafov, napríklad stromy, Chordálne grafy, Halinové grafy. V kapitole 6 sú zhrnuté zaujímavé hypotézy. V kapitole 7 je zadefinované vzdialenostné hranové farbenie, ktoré zahŕňa aj silné hranové farbenie. V kapitole 8 sú zhrnuté výsledky z mojej bakalárskej práce.

Celá kapitola 9 je venovaná našim výsledkom. Najskôr overujeme základnú hypotézu pre dvojrozmerné torusy, potom pre 4-regulárne grafy, ktoré vznikli spojením dvoch 3-regulárnych grafov. Vo vetách $9.3, 9.4, 9.5$ a 9.6 dokazujeme hypotézu a zároveň lepšie ohraničujeme silný chromatický index zhora pre Cayleyho grafy $Cay(Z_n, \{1, -1, j, -j\})$, kde n je násobkom postupne $5, 7, 8$ a 9 pre niektoré parametre j. Nakoniec sme dokázali, že antiprismové grafy majú silný chromatický index 9.

Kapitola 1

Definície a vety použité v práci

Definícia 1. Dve hrany sú *vo vzdialenosti maximálne* 2 práve vtedy, keď zdieľajú koncový bod, alebo ak niektoré dva z ich koncových bodov sú susedné.

Definícia 2. *Silné hranové farbenie* grafu G je priradenie farieb hranám grafu G tak, že žiadne dve hrany vo vzdialenosti maximálne 2 nemajú rovnakú farbu.

Definícia 3. *Stupeň vrchola* v grafe je počet hrán incidentných s vrcholom. Stupeň vrchola v v grafe G sa označuje $\deg_G(v)$.

Definícia 4. *Maximálny stupeň grafu* je maximálny zo stupňov vrcholov v grafe G.

Definícia 5. *Indukované párenie* (alebo tiež *silné párenie*) v grafe G je množina A hrán takých, že žiadne dve hrany v A nie sú vo vzdialenosti maximálne 2. Inými slovami, indukované párenie grafu G je množina hrán v indukovanom podgrafe grafu G, ktoré je taktiež párenie. Silné hranové farbenie môže byť teda taktiež definované ako rozdelenie hrán do indukovaných párení.

Takisto je možné definovať silné hranové farbenie ako vrcholové farbenie špeciálneho typu grafu:

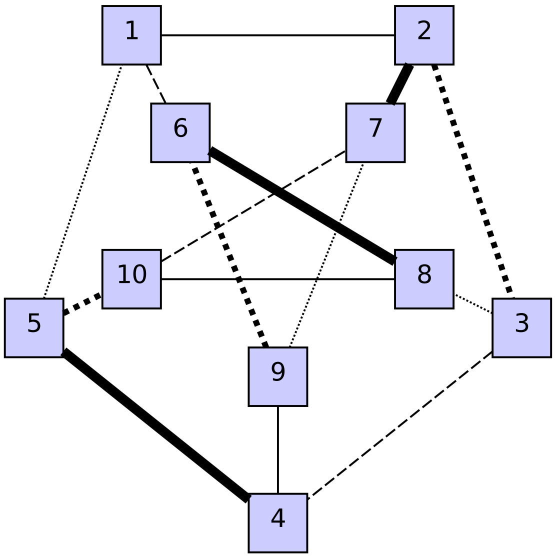
Definícia 6. *Hranový graf grafu G*, ktorý sa označuje $L(G)$ je graf, ktorý má vrchol korešpondujúci ku každej hrane grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď korešpondujúce hrany sú susedné (zdieľajú koncový bod).

Definícia 7. Štvorec grafu H, ktorý sa označuje H^2, je graf, ktorý má jeden vrchol korešpondujúci s každým vrcholom grafu H a jeho dva vrcholy sú susedné ak ich korešpondujúce vrcholy v H sú buď susedné, alebo majú spoločného suseda t.j. sú vo vzdialenosti maximálne 2 v H.

Podľa predchadzajúcich definícii, je jasné, že na silné hranové farbenie grafu G sa môžeme pozerať aj ako na klasické vrcholové farbenie štvorca hranového grafu G, ktorý označujeme $L(G)^2$.

Definícia 8. *Silný hranový chromatický index* grafu G, ktorý obyčajne označujeme $s\chi'(G)$ je minimálny počet farieb v silnom hranovom farbení grafu G.

Príklad 1. Silný hranový chromatický index Petersenovho grafu je 5. Na obrázku 1.1 je príklad silného hranového farbenia tohoto grafu.



Obr. 1.1: Silné hranové farbenie Petersenovho grafu

Definícia 9. Dve hrany *silne susedia*, ak ich vzdialenosť je 1 alebo 2.

Definícia 10. *Obvodom grafu G* nazývame dĺžku minimálnej kružnice v grafe G.

Definícia 11. Najväčšie n také, že $K_n \subseteq G$ označíme $\omega(G)$.

Definícia 12. Graf G nazývame perfektný, ak každý indukovaný podgraf $H \subseteq G$ má chromatické číslo $\chi(H) = \omega(H)$.

Veta 1.1. *Vyberacie číslo akéhokoľvek spojitého grafu, ktorý nie je kompletný, alebo nepárna kružnica, je nanajvýš jeho maximálny stupeň.*

Dôkaz. Dôkaz je v [6] □

Kapitola 2

Motivácia výskumu

Problém silného hranového farbenia má zaujímavé aplikácie najmä pre priradenie kanálov v mobilnej viacskokovej sieti a v mobilných sieťach: Bezdrôtová rádiová sieť pozostáva zo skupiny vysielačov komunikujúcich navzájom cez zdieľané médium. Každý vysielač má dosah, v ktorom dokáže komunikovať s ostatnými zariadeniami. Komunikácia sa uskutočňuje medzi párom uzlov, ktoré sú oba navzájom v dosahu cez protokoly, ktoré posielajú dátové pakety jedným smerom a správy o doručení v druhom smere.

Určovanie kanálov frekvencii linkám medzi vysielačmi vyhýbajúc sa primárnej a sekundárnej interferencii korešponduje s problémom silného hranového farbenia grafu, ktorý modeluje rádiovú sieť. Takýto graf má jeden uzol pre každý vysielač. Pre každý pár vysielačov, z ktorého každý vysielač je v dosahu toho druhého, je hrana medzi korešpondujúcimi vrcholmi. V tomto grafe, správne silné hranové farbenie musí prideliť rozdielne farby korešpondujúce s rozdielnymi kanálmi akémukoľvek páru hrán medzi ktorými je cesta o dĺžke maximálne 2. Sú tu dva príbuzné problémy:

Problém $D2EC(G)$: Počíta silné hranové farbenie daného grafu $G = (V, E)$ s najmenším možným počtom farieb. Ekvivalentne, počíta priradenie kanálov bez interferencie s použitím najmenšieho počtu kanálov.

Problém $D2EC(G, k)$: Maximalizuje počet hrán zafarbených silným hranovým farbením s maximálne k farbami daného grafu $G = (V, E)$. Ekvivalentne, počíta priradenie kanálov s maximálne k kanálmi, ktoré maximalizuje páry vysielačov, ktoré môžu komunikovať bez interferencie.

Mahdian and Erickson dokázali, že $D2EC(G)$ je NP úplný problém. Zložitosť $D2EC(G)$ implikuje, že aj problém $D2EC(G, k)$ je tiež NP úplný.

Pre väčšinu grafových farbení je prvá otázka, ktorá je kladená, nájdenie horného ohraničenia minimálneho počtu farieb potrebných na farbenie v závislosti od $\Delta(G)$. Pre silné hranové farbenie bol tento problém prvýkrát riešený Erdősom a Nešetřiom. Vyslovili hypotézu, že silný hranový chromatický index každého grafu s maximálnym stupňom $\Delta(G)$ je maximálne $\frac{5}{4}\Delta^2$. Táto hypotéza je stále otvorená.

Kapitola 3

História

Koncept silného chromatického hranového farbenia bol najskôr definovaný v roku 1984 J. L. Fouwuetom a J. L Jolivenom. Študovali silný chromatický index na kubických planárnych grafoch. Ich výstupom bola [22].

Na konferencii v Prahe v 1985, P. Erdős and J Nešetřil prezentovali nasledujúci problém:

Problém 3.1. *Nájdite najmenšie* $t(k)$ *také, že ak* $\Delta(G) = k$*, potom* $s\chi'(G) \leq t(k)$*.*

Pre akýkoľvek graf G s maximálnym stupňom $\Delta(G)$, $s\chi'(G) \leq 2\Delta^2 \breve{\ } 2\Delta + 1$. Je to preto, lebo každá hrana priamo susedí s $2\Delta - 2$ hranami a vo vzdialenosti dva má $2(\Delta - 1)^2$ hrán. Spolu teda každá hrana má maximálne $2\Delta^2 - 2\Delta$ susedných hrán do vzdialenosti 2. Každú hranu teda môžeme určite zafarbiť jednou z $2\Delta^2 \breve{\ } 2\Delta + 1$ farieb. Z toho vyplýva, že $t(k) \leq 2k_2 \breve{\ } 2k + 1$.

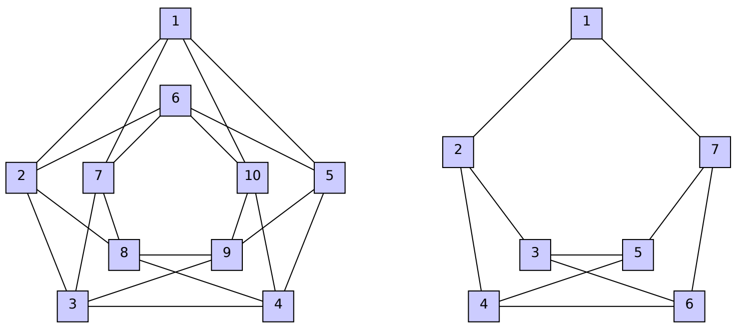
Erdős a Nešetřil vyslovili hypotézu:

Hypotéza 3.2. *(Hypotéza o silnom farbení) Pre akýkoľvek graf s maximálnym stupňom* $\Delta(G)$*,* $s\chi'(G) \leq f(\Delta)$ *kde* $f(\Delta)$ *je definovaná takto:*

$$f(\Delta) = \begin{cases} \frac{5\Delta^2}{4} & \text{ak } \Delta \text{ je párne} \\ \frac{5\Delta^2}{4} - \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{4} & \text{ak } \Delta \text{ je nepárne} \end{cases}$$

Nasledujúce príklady ukazujú, že odhad nemožno zlepšiť:
Pre k párne, môžeme nájsť príklad nahradením každého vrchola 5-cyklu nezávislou množinou s veľkosťou $\frac{k}{2}$ a spojením dvoch vrcholov ak korešpondujúce vrcholy v 5-cykle sú susedné. (Operácia nahrádzania každého vrchola v grafe nezávislou množinou sa volá vrcholové násobenie a výsledný graf označujeme $C_5^{K/2}$).

Pre nepárne k môžeme príklad získať nahradením dvoch susedných vrcholov 5-cyklu nezávislou množinou o veľkosti $\frac{(k+1)}{2}$ a ostatné nezávislou množinou o veľkosti $\frac{(k-1)}{2}$. V každom prípade, môžeme ľahko vidieť, že neexistuje indukované párenie o veľkosti 2 v grafe a preto farba hrán musí byť odlišná.



Obr. 3.1: Príklad grafov, ktoré ukazujú, že hypotézu nie je možné zlepšiť

V roku 1989 bola v [14] vyslovená nasledujúca hypotéza pre silný chromatický index bipartitného grafu:

Hypotéza 3.3. *(Bipartitné silné hranové farbenie) Pre každý bipartitný graf G s maximálnym stupňom Δ, $s\chi'(G) \leq \Delta^2$*

Kompletný bipartitný graf $K_{\Delta,\Delta}$ ukazuje, že nasledujúca hypotéza je pravdivá a najlepšia možná.

V roku 1993 R. Bruadi a J. Quinn v [12] zovšeobecnili predchádzajúcu hypotézu takto:

Hypotéza 3.4. *(Zovšeobecnené bipartitné silné hranové farbenie) Pre každý bipartitný graf G s partíciami X a Y takými, že maximálny stupeň vrchola v partícii X je α a v partícií Y β platí, $s\chi'(G) \leq \alpha\beta$.*

Kapitola 4

Všeobecné ohraničenia

Horák, Qing a Trotter si v [24] všimli, že je veľmi zložité dokázať dokonca, že $s\chi'(G) \leq (2-\epsilon)\Delta^2$ pre nejaké $\epsilon > 0$.
M. Molly a B. Reed vyriešili tento problém nasledujúcou vetou. Toto je jediná známa všeobecná hranica pre silný hranový chromatický index:

Veta 4.1. *Ak graf G má maximálny stupeň* Δ *dostatočne veľký, potom* $s\chi'(G) \leq 1.998\Delta^2$

Dôkaz pozostáva z dvoch častí. V prvej časti je ukázané, že pre každý graf, štvorec hranového grafu grafu G je $\frac{1}{36}$-riedky, to znamená, že okolo ktoréhokoľvek vrchola je najviac $(1-\frac{1}{36})\binom{\Delta L(G)^2}{2}$ hrán v susedstve akéhokoľvek vrchola z $L(G)^2$. V druhej časti je dokázané, že pre nejaké $\delta > 0$ existuje $\gamma > 0$ taká, že graf H je Δ-riedky. Jeho chromatické číslo je maximálne $(1-\gamma)\Delta(H)$. Dôkaz tejto časti je pravdepodobnostný a je založený na jednoduchej iterácii procedúry náhodného farbenia.

Dôsledky hypotéz:

Definícia 13. Veľkosť najväčšieho indukovaného párenia grafu G sa označuje $sm(G)$.

Definícia 14. Veľkosť najväčšieho antipárenia grafu G sa označuje $am(G)$.

Antipárenie je množina A hrán takých, že každé dva prvky A sú vo vzdialenosti maximálne 2. Je jasné, že $sm(G)$ a $am(G)$ korešpondujú s veľkosťou maximálnej nezávislej množiny a maximálnej kliky štvorca hranového grafu.

Hypotéza silného chromatického indexu implikuje nasledujúce dve hypotézy:

Hypotéza 4.2. *Pre každý graf* G*,* $|E(G)| \leq f(\Delta)sm(G)$ *kde* f *je funkcia definovaná v hypotéze o silnom farbení.*

Hypotéza 4.3. *Pre každý graf G, $am(G) \leq f(\Delta)$, kde f je funkcia definovaná v hypotéze o silnom farbení.*

Špeciálny prípad hypotézy 4.2 môže byť formulovaný podľa $2K_2$-free grafov.

Definícia 15. Súvislý graf nazývame $2K_2$-free, ak neobsahuje indukovaný podgraf izomorfný ku $2K_2$.

Trieda $2K_2$-free grafov má veľa zaujímavých vlastností a vystupuje vo veľa aplikáciách v teorii grafov, ako napríklad hypotéza perfektého grafu a hypotéza silného chromatického indexu.

Keď $sm(G) = 1$, predpredchádzajúca hypotéza môže byť formulovaná nasledovne:

Veta 4.4. *(Bermondova veta). Každý $2K_2$-free graf s maximálnym stupňom Δ má maximálne f(Δ) hrán, kde f je funkcia definovaná v hypotéze o silnom farbení.*

Predchádzajúca veta bola vyslovená ako hypotéza Erdősom a Nešetřilom v [19]. Takisto bola vyslovená Bermondom v [13] v roku 1983. Ich hypotéza bola motivovaná problémom v dizajnovaní zbernicových prepojovacích sietí. Problém je o maximálnom počte procesorov v multiprocesorovom systéme. Procesory komunikujú cez zbernice. Každý procesor je na dvoch zberniciach a maximálne d procesov môže zdieľať jednu zbernicu. Úlohou je nájsť maximálny počet procesorov pre ktoré môžeme vytvoriť takú sieť, že každé dva procesory P1 a P2 môžu komunikovať priamo cez zbernicu alebo je tam iný procesor P taký, že P1 a P a takisto P2 a P vedia komunikovať priamo. Nie je ťažké vidieť, že maximálny počet procesorov v takomto systéme je ekvivalentný maximálnemu počtu hrán v $2K_2$-free grafe s maximálnym stupňom Δ.

V [13] je spomenuté, že D. J. Kleitman dokázal Bermondovú vetu pre párne stupne, ale jeho dôkaz nebol nikde publikovaný. Prvý publikovaný dôkaz Bermondovej vety patrí Chungovi ([18]).

Dôsledky Bermondovej vety:

Veta 4.5. *Pre každý graf G, ktorý nie je kružnicou s nepárnou dĺžkou alebo kompletným grafom, a má maximálny stupeň Δ platí: $s\chi'(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1)$.*

Dôkaz. Podľa Brookovej vety, pre každý graf G, $s\chi'(G) = \chi(L(G)^2) \leq \Delta(L(G)^2) = 2\Delta(\Delta - 1)$. pokiaľ $L(G)^2$ nie je kompletný graf alebo nepárny cyklus, ľahko overíme, že štvorec grafu nemôže byť nepárny cyklus s dĺžkou viac ako 3. Ak $L(G)^2$ je kompletný graf, znamená to, že G je $2K_2$-free graf. Ale v tom prípade, podľa Bermondovej vety, G má maximálne $f(\Delta)$ hrán, a preto $s\chi'(G) \leq |E(G)| \leq f(\Delta) \leq 2\Delta(\Delta\breve{}1)$. $\square$

Hypotéza 4.3 je stále otvorená. Nasledujúca slabšia forma je dokázaná Faudree-om v [21].

Veta 4.6. *Existuje* $\epsilon > 0$ *také, že* $am(G) \leq (2\text{˘}\epsilon)\Delta^2$

Pre bipartitné prípady je dokázané korešpondujúce vyjadrenie. Faudree dokázal v [21] nasledujúcu vetu:

Veta 4.7. *Pre každý bipartitný graf* G*,* $am(G) \leq \Delta^2$*.*

Tiež dokázali v [20], že každý bipartitný $(k+1)K_2$-free graf s maximálnym stupňom Δ má maximálne $k\Delta^2$ hrán. Toto implikuje nasledujúcu teorému.

Veta 4.8. *Pre každý bipartitný graf* G*,* $\mid E(G) \mid \leq \Delta^2 sm(G)$*.*

4.1 Grafy s malým maximálnym stupňom

Nerovnosť $s\chi'(G) \leq 2\Delta^2\text{˘}2\Delta + 1$ implikuje, že hypotéza o silnom farbení je pravdivá pre $\Delta \leq 2$. Preto prvý netriviálny prípad je $Delta = 3$. L. Andersen v [11] a nezávisle P. Horák v [24] vyriešili tento problém nasledujúcou vetou:

Veta 4.9. *Ak* G *je graf s maximálnym stupňom* $\Delta \leq 3$*, potom* $s\chi'(G) \leq 10$*.*

V [11] je takisto dokázané, že pre akýkoľvek graf G s maximálnym stupňom $\Delta \leq 3$, existuje lineárny algoritmus na nájdenie silného hranového farbenia s použitím 10 farieb.

Pre $\Delta = 4$, podľa hypotézy, každý graf sa musí dať silno hranovo zafarbiť s použitím 20 farieb. Podľa Vety 4.5, vieme, že každý graf má silné hranové farbenie s použitím 24 farieb. Táto hranica bola vylepšená Horákom v [23] takto:

Veta 4.10. *Ak* G *je graf s maximálnym stupňom* $\Delta \leq 4$*, potom* $s\chi'(G) \leq 23$*.*

Bol dokázaný ešte lepší výsledok ohľadom grafov s $\Delta \leq 4$ v [9]:

Veta 4.11. *Každý graf s maximálnym stupňom* 4 *má silné hranové farbenie ktoré používa maximálne* 22 *farieb.*

Náznak dôkazu: Nasledujúca lema dokazuje vetu pre 4-regulárne grafy s obvodom aspoň 6. Kompletný dôkaz tejto vety je [9]. V dôkaze sú použité nasledujúce lemy:

Lema 4.12. *Ak G je graf s maximálnym stupňom 4, potom G má silné hranové farbenie, ktoré používa 21 farieb, ktoré ale necháva neofarbené hrany incidentné s jednoduchým vrcholom. Ak C je cyklus v G, potom G má silné hranové farbenie, ktoré používa 21 farieb, ktoré necháva neofarbené hrany cyklu C.*

Lema 4.13. *Každý 4-regulárny graf s obvodom aspoň 6 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 22 farieb.*

Lema 4.14. *Každý graf s maximálnym stupňom 4, ktorý má vrchol so stupňom maximálne 3 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 21 farieb.*

Lema 4.15. *4-regulárny graf so slučkou, alebo dvojitou hranou má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 21 farieb.*

Lema 4.16. *4-regulárny graf s obvodom 3 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 21 farieb.*

Lema 4.17. *Každý 4-regulárny graf s obvodom 4 má silné hranové farbenie, ktoré používa maximálne 22 farieb.*

Lema 4.18. *Ak G je 4-regulárny graf s obvodom 5, potom G má silné hranové farbenie ktoré používa maximálne 22 farieb.*

Pre $\Delta \geq 5$ je problém nevyriešený. Pre bipartiné grafy je problém vyriešený pre $\Delta = 3$ A. Stegerom a M Yuom v [27].

Veta 4.19. *Ak G je bipartitný graf s maximálnym stupňom $\Delta \leq 3$, potom $s\chi'(G) \leq 9$.*

Hypotéza 3.3 je otvorená pre $\Delta > 4$. Pre Hypotézu 3.4, jediný známy výsledok iný ako predchádzajúca veta (ktorá rieši túto hypotézu v prípade $\alpha = \beta = 3$) je nasledujúci: Tento výsledok je dokázaný v [16].

Veta 4.20. *Nech G je bipartitný graf s bipartíciami X, Y a bez cyklu dĺžky 4. Ak maximálny stupeň vrchola X je dva a maximálny stupeň vrchola z Y je Δ, potom $s\chi'(G) \leq 2\Delta$.*

V [16] je vyslovené, že 2Δ v predchádzajúcej teoréme môže byť nahradené $\Delta + 2$. Táto hypotéza je stále otvorená a zdá sa byť veľmi ťažká.

Kapitola 5

Špeciálne triedy grafov

Hypotéza o silnom farbení je dokázaná pre veľa tried grafov. V tejto sekcii je zoznam niekoľkých takýchto tried grafov. Takisto sú tu doteraz známe výsledky niektorých tried grafov.

5.1 Stromy

Triviálne najnižšie ohraničenie pre silný chromatický index grafu G je nasledujúce: $\forall uv \in E(G)$, $s\chi'(G) \geq am(G) \geq max\{deg(u) + deg(v) - 1\}$

Definujme $o(G) := max(u, v \in E(G))deg(u) + deg(v) - 1$ Preto pre akýkoľvek graf $s\chi'(G) \geq o(G)$. Nasledujúca veta, ktorá je dokázaná v [21], ukazuje, že rovnosť sa dosahuje u stromov:

Veta 5.1. *Ak G je strom, potom $s\chi'(G) = o(G)$;*

Toto jasne implikuje, že hypotézy 3.2 a 3.3 platia pre stromy.

5.2 D-dimenzionálne kocky

Definícia 16. D-dimenzionálna kocka Q_d je graf, ktorého množina vrcholov je množina všetkých binárnych sekvencii dĺžky d. Dva vrcholy sú susedné, práve keď korešpondujúce sekvencie sú rozdielne práve na jednej pozícií.

Je ľahké vidieť, že Q_d je bipartitný graf.

Nasledujúca veta, ktorá je dokázaná v [13], implikuje že Hypotéza 3.3 je pravdivá pre d-dimenzionálne kocky.

Veta 5.2. *Pre d-dimenzionálne kocky Q_d, $s\chi'(Q_d) = am(Q_d) = 2d$ ak $d \geq 2$.*

5.3 Chordálne grafy

Definícia 17. Graf G nazývame chordálnym, ak pre každý cyklus C s dĺžkou minimálne 4 v G, existuje hrana iná ako hrany v C spojujúca dva vrcholy v C (takuto hranu voláme chorda v cykle).

Nasledujúce dve vety sú dokázané v [17].

Veta 5.3. *Ak G je chordálny, potom $L(G)^2$ je chordálny.*

Veta 5.4. *V chordálnom grafe, každé maximálne antipárenie je maximálne okolie kliky, kde okolie kliky je množina K hrán kliky spolu s niekoľkými hranami, z ktorých každá je incidentná s členom K.*

Veta 5.5. *Pre každý chodálny graf G, $L(G)^2$ je perfektný a preto jeho silný chromatický index je ekvivalentný s veľkosťou jeho maximálnej kliky, ktorá je ekvivalentná s veľkosťou maximálného antipárenia v G. Podľa predchadzajucej vety, veľkosť antipárenia v chordálnom grafe G je maximálne: max$\binom{k}{2} + k(\Delta - k + 1) = \frac{\Delta(\Delta+1)}{2}$.*

a preto chordálne grafy spĺňajú hypotézu o silnohranovom chromatickom indexe.

5.4 Kneserove grafy

Definícia 18. Kneserov Graf KN_n^m je definovaný pre $m > 2n$. Vrcholy sú n-prvkové množiny fixovanej m-prvkovej množiny a dva vrcholy sú sudedné, práve keď korešpondujúce množiny sú dizjunkné.

Faudree v [21] prezentoval dva krátke elegantné dôkazy pre nasledujúcu vetu.

Veta 5.6. *Silný chromatický index v Kneserovom grafe KN_n^m je rovný $\binom{m}{2n}$ pre každé $m > 2n$.*

Toto spolu s kombinatorickým: $\binom{m}{2n} \leq \binom{m-n}{n}^2$ implikuje, že hypotéza o silnom hranovom chromatickom indexe platí pre Kneserové grafy.

5.5 Grafy s cyklami, ktorých dĺžky sú deliteľné štyrmi

Dôležitou vlastnosťou grafov G, ktorých dĺžky cyklov sú deliteľné štyrmi je, že žiaden z cyklov nemá chordu. Nasledujúca veta, ktorá je dokázaná v [16], ukazuje, že Hypotéza 3.4 je pravdivá pre také grafy. Všimnime si, že každý taký graf je bipartitný.

Veta 5.7. *Nech G je bipartitný graf s partíciami X, Y. Nech maximálny stupeň vrchola v X je α a v Y je β. Predpokladajme, že všetky dĺžky cyklov sú deliteľné štyrmi. Potom: $s\chi'(G) \leq \alpha\beta$.*

V [21] bolo dokázané, že Hypotéza 2.2 platí pre takéto grafy. Takisto existuje hypotéza, že v skutočnosti silný chromatický index akéhokoľvek takého grafu je ohraničený lineárnou funkciou podľa Δ.

5.6 Planárne grafy

Nasledujúca veta je dokázaná v [21]. Dôkaz využíva Vetu o 4 farbách.

Veta 5.8. *Ak G je planárny graf, potom $s\chi'(G) \leq 4\Delta + 4$. Navyše, pre každé $\Delta \geq 2$, existuje planárny graf G s maximálnym stupňom Δ a $s\chi'(G) = 4\Delta - 4$.*

5.7 C_4-free grafy

Definícia 19. Graf sa nazýva C_4-free, ak neobsahuje žiady podgraf izomorfný s C_4, inak povedané, neobsahuje žiaden cyklus s dĺžkou 4.

Nasledujúca veta ukazuje doteraz najlepší výsledok:

Veta 5.9. *Pre každý C_4-free graf G:*
$s\chi'(G) \leq (2 + o(1))(\frac{\Delta^2}{ln\Delta})$

Všimnime si, že sa môžeme bez straty všeobecnosti domnievať, že graf je regulárny (toto môže byť dokázané ľahko; jediný problém je v udržiavaní neprítomnosti C_4 podgrafu). Tento fakt spolu s ekvivalenciou silného hranového farbenia a klasického vrcholového farbenia štvorca hranového grafu implikuje, že predchádzajúca veta je ekvivalentná s nasledujúcou, ktorá je dokázaná v [7]

Veta 5.10. *Pre každé $\epsilon > 0$, existuje Δ_0, také, že pre každý graf G s maximálnym stupňom $\Delta > \Delta_0$, ktorý je štvorcom hranového grafu z C_4-free regulárneho grafu, $\chi(G) \leq (2 + \epsilon)(\frac{\Delta}{ln\Delta})$.*

Dôkaz tejto vety je pravdepodobnostný a podobný Kimovmu dôkazu faktu, že chromatické číslo grafu s obvodom 5 je maximálne $(1 + o(1))\frac{\Delta}{ln\Delta}$ ktorý je v [15]. Použitá je Kimova polonáhodná ofarbovacia procedúra s rozdielnou analýzou. Nasledujúca veta ukazuje, že predchádzajúca veta je asymptoticky najlepšia možná.

Veta 5.11. *Pre každé $g \geq 3$ a dostatočne veľké Δ, existuje graf s obvodom maximálne g, maximálnym stupňom maximálne Δ a silným chromatickým indexom minimálne: $(\frac{1}{2} \breve{} o(1))\frac{\Delta^2}{ln\Delta}$.*

Táto veta je dokázaná v [7].

5.8 Halinove grafy

Definícia 20. Halinov graf $G = T \bigcup C$ je planárny graf, ktorý pozostáva z stromu a cyklu C spojujúceho všetky listy stromu, takže C je ohraničenie vonkajšej plochy. Stupeň každého interiérového vrcholu v T je minimálne 3. Strom T a cylkus C sa volajú *charasterický strom* a *pripojený cyklus* grafu G.

Strom sa nazýva (3,1)-strom, ak stupeň každého vnútorného vrchola je 3. (3,1)-pásový T je (3, 1)-strom ak odstránením listov (spolu s ich incidentnými hranami) vznikne cesta, ktorá sa nazýva chrbát stromu T.

V ďalšom texte "pásový" znamená (3,1) pásový

Nech G_h je množina všetkých kubických Halinových grafov, ktorých charestický stromy sú pásové rádu $2h + 2$.

Nech $G \in G_h$. Ak $\{0, 1\}, \{1, 2\}, ..., \{(h - 1), h\}, \{h, h + 1\}$, a $\{h + 1, 0\}$ sú hrany pripojeného cyklu grafu G, potom G sa označuje N_{eh}

Predpokladajme že G je Halinov graf rádu $2h + 2$ s pásovým T ako jeho charasterickým stromom, $h \geq 1$. Pomenujeme vrcholy pozdĺž chrbtu P_h číslami $1, 2....h$. Vrcholy susedné s 1 sa volajú 0 a $1'$. Vrcholy susedné s h sa volajú $h + 1$ a h'. Ostatné listy susedné s i sa volajú $i', 2 \leq i \leq h - 1$. Všimnime si, že $0, 1' \ldots .h', h + 1$ sú vrcholy ležiace na pripojenom cykle C_{h+2}. Toto označenie budeme teraz používať. Nech G_h je množina všetkých kubických Halinových grafov, ktorých charakteristické stromy sú pásy rádu $2h + 2$.

Veta 5.12. *Pre $h \geq 4$ a $G \in G_h$,* $6 \leq s\chi'(G) \leq 8$

Dôkaz je v [8]

Lema 5.13. *Predpokladajme G je graf so silných hranovým chromatickým idexom minimálne 6. Nech dva susedné vrcholy a a b z G sú stupňa 3. Nech x, y a y, w sú sú ďalšími susedmi a a b. Nech $\overline{G}$ je graf získaný z G vymenením hranovo-indukovaných subgrafov $G[\{AB\}]$ rebríkovým grafom o dĺžke 4. Potom $s\chi'(\overline{G}) \leq s\chi'(G)$.*

Veta 5.14.

$$s\chi'(N_{eh}) = \begin{cases} 6 & \textit{ak } h \textit{ je nepárne} \\ 7 & \textit{ak } h \ \geq 6 \textit{ a } h \textit{ je párne} \\ 8 & \textit{ak } h = 4 \\ 9 & \textit{ak } h = 2 \end{cases}$$

Veta 5.15. *Ak G je kubický Halinov graf, potom $6 \leq s\chi'(G) \leq 9$ a ohraničenie je tesné.*

Dôsledok 5.16. *Podľa predchadzajucej vety sme dostali, že každý kubický Halinovský graf je hranovo-rozložiteľný do 9 indukovaných párení.*

5.9 Karteziánsky, Kroneckerov a silný súčin

Definícia 21. *Karteziánsky súčin $G\Box H$* dvoch grafov G a H má množinu vrcholov $V(G) \times V(H)$ a množinu hrán $\{(a, x)(b, y) : ab \in E(G)$ a $x = y$ alebo $xy \in E(H)$ a $a = b\}$.

Definícia 22. *Kreneckerov(kategorický) súčin $G \times H$* má množinu vrcholov $V(G) \times V(H)$ a množinu hrán $\{(a, x)(b, y) : ab \in E(G)$ a $xy \in E(H)\}$

Definícia 23. *Silný súčin $G \boxtimes H$* má množinu vrcholov $V(G) \times V(H)$ a množinu hrán $E(G\Box H) \bigcup E(G \times H)$.

5.9.1 Karteziánsky súčin

Veta 5.17. *Pre akýkoľvek graf G a akýkoľvek graf H, ktoré obsahujú dva susedné vrcholy s maximálnym stupňom, máme $s\chi'(G\Box H) \geq 2\Delta(G\Box H)$*

Dôkaz. Nech ab je hrana v G a a vrchol s maximálnym stupňom. A nech xy je hrana v H a x aj y vrcholy s maximálnym stupňom. Označme si S množinu všetkých hrán incidentných s (a,x) alebo (a,y) plus hranu (b,x)(b,y). Potom všetky hrany v S musia byť ofarbené rozdielnymi farbami v každom silnom farbení. Jednoduchá matematika hovorí: $\mid S \mid = 2\Delta(G) + 2\Delta(H) = 2\Delta(G\Box H)$. □

Veta 5.18. *Nech G a H sú dva grafy. Pre Karteziánsky súčin máme: $s\chi'(G\Box H) \leq s\chi'(G)\chi'(H) + s\chi'(H)\chi'(G)$.*

Dôkaz nájdeme v [10].

Veta 5.19. *Nech G a H sú dva grafy, potom $s\chi'(G\Box H) \geq f\chi'(G)\Delta(H)$.*

Dôkaz nájdeme v [10].

5.9.2 Kroneckerov súčin

Veta 5.20. *Nech G a H sú dva grafy rozdielne od K_2. Pre Kroneckerov súčin $G \times H$ máme: $s\chi'(G \times H) \leq s\chi'(G)s\chi'(H)$.*

Dôkaz nájdeme v [10].

5.9.3 Silný súčin

Ako množinu hrán v silnom súčine $G \boxtimes H$ môžeme brať zjednotenie množiny hrán kartézskeho a Kroneckerovho súčinu. Skonštruujeme silné farbenie $G \boxtimes H$ farbením hrán karteziánskeho súčinu pomocou Vety 5.18 a hrán krockenorovho súčinu podľa modifikovanej verzie farbenia definovaného v dôkaze Vety 5.20. Nasledujúce dve lemy nás uistia, že každé z týchto dvoch farbení zostanú silnými vo finálnom $G \boxtimes H$. Obe sú dokázané v [10].

Lema 5.21. *Pre každý graf G a H, existuje silné farbenie c grafu $(G\Box H)$ v $s\chi'(G)\chi'(H)+s\chi'(H)\chi'(G)$ farbách, ktoré spĺňa nasledujúcu doplňujúcu podmienku: pre každú hranu ab v G a pre každú hranu xy v H, $S_c((a,x)) \bigcap S_c((b,y)) = \theta$ (prázdna množina).*

Lema 5.22. *Pre akékoľvek grafy G a H, existuje silné farbenie c grafu $G \times H$ v $2s\chi'(G)s\chi'(H)$ farbách, ktoré spĺňa nasledujúcu doplňujúcu podmienku: Pre každú hranu ab z G a pre každú hranu xy z H, $S_c((a,x)) \bigcap S_c((a,y)) = \theta$ (prázdna množina). $S_c((a,x)) \bigcap S_c((b,x)) = \theta$ (prázdna množina).*

Veta 5.23. *Nech G a H sú dva grafy. Pre silný súčin $G \boxtimes H$ máme: $s\chi'(G \boxtimes H) \leq s\chi'(G)\chi'(H) + s\chi'(H)\chi'(G) + 2s\chi'(G)s\chi'(H)$.*

Dôkaz opäť nájdeme v [10].

Všimnime si, že táto veta nám dáva presnú hodnotu silného chromatického indexu silného súčinu dvoch kompletných grafov. Keďže $K_m \boxtimes K_n = K_m n$, potom $s\chi'(K_{mn}) = \binom{mn}{2} = s\chi'(K_m)\chi'(K_n)+s\chi'(K_n)\chi'(K_m)+2s\chi'(K_m)s\chi'(K_n)$.

5.10 Náhodné grafy

Definícia 24. *Náhodný graf* je graf, ktorý dostaneme z množiny vrcholov a náhodne pridávame hrany medzi niektoré vrcholy. Rôzne modely náhodných grafov produkujú rôzne pravdepodobnostné rozdelnie na grafch. $G(n,p)$ je graf, ktorý má n vrcholov a pravdepodobnosť výskytu každej hrany je nezávislá a s pravdepodobnosťou $p = p(n)$.

Palka ukázal, že ak $p = \theta(n^{-1})$ potom s veľkou pravdepodobnosťou $s\chi'(G) = O(\Delta(G)) = O(log(n)/log(log(n)))$.

Wu ukázal, že ak $(n^{-1})log(n)^{1+\delta} \leq p \leq n^{-\epsilon}$ pre konštanty $0 < \epsilon$, $1 < \delta$, potom s veľkou pravdepodobnosťou $\chi_s(G) = O(\Delta^2/log(\Delta))$.

Gzygrinow a Nagle ukázali, že ak $p > n^{-\epsilon}$, potom $s\chi'(G) \leq (1+o(1))n^2p/log_b n$ kde $b = 1/(1-p)$.

Definícia 25. Pre graf $G = (V,E)$ nech $d(v)$ je stupeň vrchola $v \in V$ a nech: $\Delta_1 = \Delta_1(G) = max\{d(u) + d(v) - 1 : (u,v) \in E\}$.

Určme $\lambda = (\frac{log(n)}{log(log(n)))})^{1/2}$, potom pre riedke náhodné grafy platí nasledujúci výsledok:

Veta 5.24. *Nech p je také, že* $np \leq \lambda/100$. *Potom s veľkou pravedepodobnosťou, s* $G = G(n,p)$*:*
$s\chi'(G) = \Delta_1(G)$.

Poznámka 5.25. *Priama kalkulácia ukazuje, že v tomto intervale hranových pravdepodobností,*

$$\Delta_1(G) = (1 + o(1))\Delta(G)$$

.

Veta 5.26. *Nech* $p > 0$ *je konštanta, určme* $b = 1/(1-p)$. *Potom s veľkou pravdepodobnosťou s* $G = G(n,p)$*:*

$$s\chi'(G) \leq (1 + o(1))\frac{3}{4}\frac{n^2p}{log_b n}$$

5.11 Podmnožinové grafy

Definícia 26. Pre prirodzené čísla $0 \leq l \leq k \leq m$, definujeme *podmnožinový graf* $S_m(k,l)$ ako bipartitný graf (χ, E, ψ), kde vrcholy z χ sú k-podmnožinmi [m] $= \{1, 2, 3, .., m\}$, vrcholy z ψ sú l-podmnožinmi [m] $= \{1, 2, 3, .., m\}$ a pre $X \in \chi$ a $Y \in \psi$, Dva vrcholy sú susedné, ak jeden z ich zodpovedajúcich množín je podmnožina druhej množiny.

Nasledujúca veta je dokázaná v [26].

Veta 5.27. *Silný chromatický index grafu $S_m(k,l)(k \leq l \leq m)$ je rovný:* $s\chi'(S_m(k,l)) = \binom{m}{l-k} = \binom{m-k}{l-k}\binom{l}{k}$

Definícia 27. Definujme *disjunktne podmnožinový graf* $D_m(k,l)$ ako bipartitný graf s jednou časťou obsahujúcou k-prvkovú podmnožinu a druhou časťou obsahujúcou l-prvkovú podmnožinu m-prvkovej množiny. Dva vrcholy sú susedné vtedy a len vtedy, ak zodpovedajúce množiny sú disjunktné.

Nasledujúca veta je taktiež dokázana v [26]:

Veta 5.28. *$D_m(k,l)$ je izomorfný s $S_m(k, m-l)$ a preto je jeho silný chromatický index rovný $\binom{m}{l+k}$.*

Definícia podmnožinového grafu môže byť zovšeobecnená takto:

Definícia 28. Graf $S_m(k,l,\lambda)$ je bipartitný graf s množinou vrcholov k-prvkovú a l-prvkovú podmnožinu m-prvkovej množiny. Dva vrcholy sú susedné vtedy a len vtedy, ak sa zodpovedajúce podmnožiny prelínajú presne v λ prvkoch.

Nasledujúca veta je taktiež dokázana v [26]:

Veta 5.29. *Silný chromatický index grafu $S_m(k,l,\lambda)$ je:*
$s\chi'(S_m(k,l,\lambda)) \leq \binom{m}{k+l-2\lambda}$ *min* $\{\binom{m-k-l+2\lambda}{\lambda}, \binom{k+l-2\lambda}{l-\lambda}\}$

Poznámka 5.30. *Všetky tieto výskedky vyhovujú zovšeobecnenej hypotéze o silnom bipartitnom hranovom farbení.*

Kapitola 6

Ďalšie hypotézy

Existuje veľa otvorených problémov a hypotéz ohľadom silného chromatického indexu a indukovaného párenia. V tejto sekcii si vymenujeme niekoľko hypotéz.

Faudree v [20] dokázal, že maximálny počet hrán v $(k+1)K_2 - free$ grafe je $k\Delta^2$. Takisto dokázali, že ak dodáme dalšie obmedzenie, že graf je súvislý, maximálny počet hrán je maximálne $k\Delta^{2\,\breve{}}\Delta$ a vyslovili nasledujúcu hypotézu:

Hypotéza 6.1. *Existuje konštanta c taká, že pre k a Δ dostatočne veľké, každý súvislý $(k+1)K_2$-free graf s maximálnym stupňom Δ má maximálne $K\Delta^{2\,\breve{}}ck\Delta$ hrán.*

Nasledujúca hypotéza Faudreeho bola spomenutá vyššie:

Hypotéza 6.2. *Silný chromatický index každého grafu s dĺžkami cyklov deliteľnými štyrmi je ohraničený lineárnou funkciou podľa Δ.*

Nasledujúca hypotéza je spomínaná v [21], [25], Je takisto viditeľné, že komplement C_6 ukazuje, že táto hypotéza, aj je pravdivá, je najlepšia možná.

Hypotéza 6.3. *Ak G je kubický a planárny, potom $s\chi'(G) \leq 9$.*

Nasledujúce dve hypotézy su takisto spomenuté v [21], [25].

Hypotéza 6.4. *Ak G je bipartitný kubický $C_4 - free$ graf, potom $s\chi'(G) \leq 7$.*

Hypotéza 6.5. *Silný chromatický index každého C_5-free grafu je maximálne Δ^2.*

Nasledujúca veta podporuje túto hypotézu:

Veta 6.6. *Každý $C5$-free graf G, ktorý nemá indukované párenie o veľkosti 2 má maximálne Δ^2 hrán.*

Dôkaz je v [7].

Hypotéza 6.7. *Ak G je bipartitný kubický graf a jeho obvod je dostatočne veľký, potom $s\chi'(G) \leq 5$.*

Pre Halinove grafy:

Hypotéza 6.8. *Pre $h \geq 5, s\chi'(G) \leq 7$ pre každé $G \in G_h$.*

Hypotéza 6.9. *Pre $h \geq 5$ a h nepárne, $s\chi'(G) = 6$ pre každý $G \in G_h$.*

Hypotéza 6.10. *Predpokladajme $G = T \bigcup C$ je Halinov graph. Potom $s\chi'(G) \leq s\chi'(T) + 4$.*

Kapitola 7

Vzdialenostné hranové farbenie

7.1 Definície

Definícia 29. Pre dva vrcholy u a v, definujme $dist(u, v)$ ako vzdialenosť medzi vrcholmi u a v.

Definícia 30. *Vzdialenosť* medzi vrcholmi u a v je počet hrán v najkratšej ceste medzi u a v v G. To znamená že pre dve hrany $e = (u, v)$ a $e' = (u', v')$, vzdialenosť medzi e a e' v G je definovaná takto:

$$dist(e, e') = min\{dist(u, u'), dist(u, v'), dist(v, u'), dist(v, v')\}$$

Definícia 31. Pre dané prirodzené číslo l, chceme zafarbiť všetky hrany v G tak, že ktorékoľvek dve hrany e a e' s $dist(e, e') \leq l$ majú rôzne farby. Takéto farbenie sa nazýva *vzdialenostné hranové farbenie, alebo l-hranové farbenie.*

0-hranové farbenie je vlastne klasické hranové farbenie a 1-hranové farbenie je silné hranové farbenie, ktorým som sa zaoberal najviac.

Definícia 32. *l-chromatický index* $\chi'_l(G)$ grafu G je minimálny počet farieb potrebných na l-hranové farbenie.

Problém vzdialenostného hranového farbenia je zistiť l-chromatický index $\chi'_l(G)$ daného grafu G.

Poznámka 7.1. *Každé l-hranové farbenie je zároveň aj m-hranovým farbením, kde $m < l$.*

l-hranové farbenie je NP-ťažký problém, pretože aj klasické hranové farbenie (0-hranové farbenie) je NP-ťažký problém. Preto je veľmi nepravdepodobné, že problém vzdialenostného hranového farbenia môže byť efektívne riešiteľný pre všeobecné grafy.

Kapitola 8

Výsledky z bakalárskej práce

Poznámka 8.1. *Všetky vety v tejto kapitole sú dokázane v [1].*

8.1 2-rozmerný torus

Definícia 33. 2*-rozmerný torus* (alebo len *torus*) je graf $C_l \square C_k$, kde l a k sú kladné prirodzené čísla a $\square$ je karteziánsky súčin definovaný v 5.9.1. Číslo k nazveme šírka torusu a číslo l nazveme výška torusu.

Veta 8.2. *Silný chromatický index torusu s výškou* $4k$*, kde* $k \in N > 0$ *a šírkou aspoň* 4 *je nanajvýš* 10*.*

Veta 8.3. *Na silné hranové farbenie akéhokoľvek torusu s výškou aspoň* 3 *a šírkou aspoň* 4*, potrebujeme aspoň* 8 *farieb.*

Dôkaz. V každom takomto grafe existuje 8 hrán, z ktorých každá musí mať inú farbu. Na obrázku 8.1 je príklad takýchto 8 hrán.

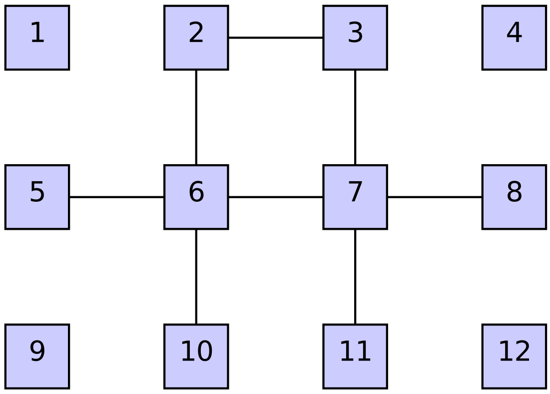
$\square$

Veta 8.4. *Nech* $k, j \in N > 0$*. Potom silný chromatický index torusu so šírkou* $4k$ *a s výškou* $4j$ *je* 8*.*

Veta 8.5. *Nech* $k, j \in N > 0$*. Potom silný chromatický index torusu so výškou* $4k$ *s šírkou aspoň* 10 *je nanajvýš* 9*.*

8.2 Cayleyho grafy

Predpokladajme, že $(C, +)$ je grupa, $+$ je operácia na tejto grupe a $S = \{\pm 1, \pm b\}$, kde $b \in C$. Označme si b ako dĺžku skoku pri vytváraní grafu.



Obr. 8.1: Príklad 8 hrán v toruse s výškou aspoň 3 a šírkou aspoň 4, ktoré musia mať v silnom hranovom farbení rôznu farbu.

Definícia 34. Cayleyho graf $G = G(C, S)$ je graf skonštruovaný nasledovne: $V(G) = Z_n$. Medzi vrcholmi u a v je hrana práve vtedy, keď $u = v + x$, kde $x \in S$.

Hypotéza 8.6. *Cayleyho grafy s aspoň* 12 *vrcholmi, ktorých dĺžka skoku je* 2*, majú silný chromatický index maximálne* 10*.*

Kapitola 9

Výsledky

9.1 Overenie hypotézy pre dvojrozmerné torusy

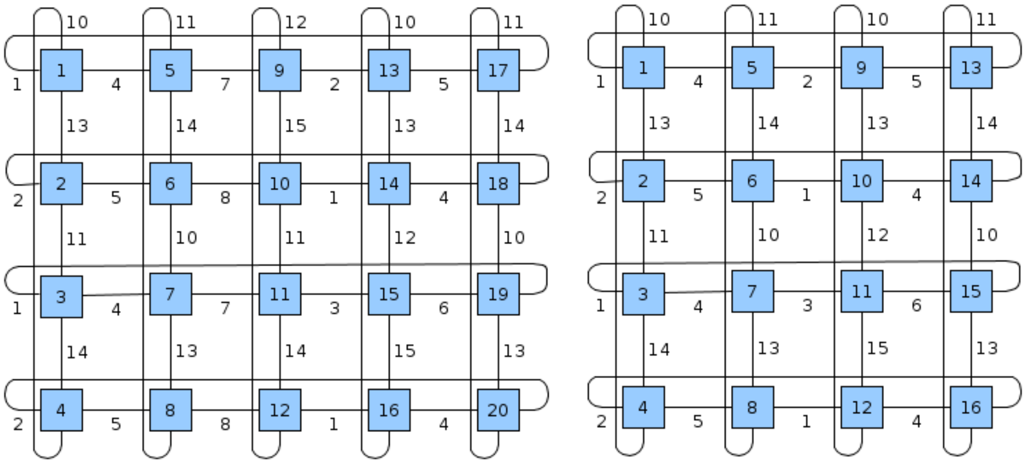
Veta 9.1. *Dvojrozmerné torusy s výškou aspoň* 12 *a šírkou aspoň* 12 *majú silný chromatický index maximálne* 18

Dôkaz. Dôkaz spočíva v tom, že nájdeme vhodné farbenie pre akýkoľvek dvojrozmerný torus s výškou aspoň 12 a šírkou aspoň 12.
Našli sme farbenia grafov s rozmermi $4 * 4$, $4 * 5$, $5 * 4$, $5 * 5$, ktoré do seba zapadajú. Farbenia týchto grafov môžeme vidieť na obrázkoch 9.1 a 9.2.

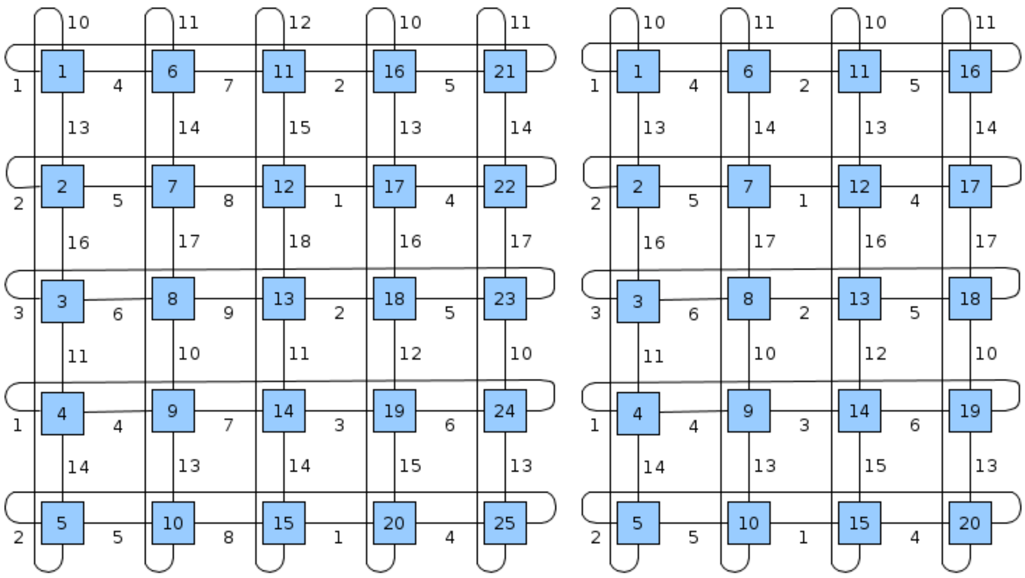
Tieto grafy aj s farbeniami môžeme ukladať vedľa seba a pod seba a dostaneme vždy väčší graf, ktorý bude zafarbený takisto maximálne 18 farbami. Napríklad keď dva grafy s rozmermi $4 * 5$ uložíme vedľa seba, tak dostaneme graf s rozmermi $4 * 10$ a ak ich uložíme pod seba, dostaneme graf s rozmermi $8 * 5$.

A tak vieme zostrojiť farbenie pre graf s výškou $4k + 5l$ a šírkou $4m + 5n$. Takže vieme zafarbiť takýto graf s akoukoľvek šírkou a výškou väčšou ako 11.

□



Obr. 9.1: Farbenie torusov s výškou 4 a šírkou 5 a 4



Obr. 9.2: Farbenie torusov s výškou 5 a šírkou 5 a 4

9.2 Overenie hypotézy pre 4-regulárne grafy, ktoré vznikli spojením dvoch 3-regulárnych grafov

Veta 9.2. *Nech $G1$ a $G2$ sú 3-regulárne grafy s rovnakým počtom vrcholov a nech $G2$ má 1-faktor. Nech H je 4-regulárny graf, ktorý vznikne z grafov $G1$ a $G2$ tak, že každý vrchol z $G1$ sa spojí s nejakým vrcholom z $G2$ (môžu to byť aj rôzne vrcholy). Potom H má silný chromatický index nanajvýš 20.*

V dôkaze využijeme nasledujúcu definíciu:

Definícia 35. *Spojovacie hrany* sú hrany, ktorými sú spojené grafy $G1$ a $G2$.

Dôkaz. Veta, ktorú použijeme v dôkaze neplatí pre kompletné grafy, a tak najskôr vyriešime prípad, keď H vznikne z dvoch grafov $K4$. Vtedy graf H bude mať 16 hrán. Tieto môžeme nafarbiť 16 rôznymi farbami, a tak určite bude silné hranové farbenie v poriadku.

Teraz ukážeme, ako zostrojiť farbenie pre akýkoľvek iný graf H v niekoľkých krokoch.

1. Využijeme vetu 4.9, ktorá hovorí, že 3-regulárne grafy majú silný chromatický index nanajvýš 10. Teda grafy $G1$ a $G2$ vieme zafarbiť 10 farbami. $G1$ zafarbíme farbami $a0$ až $a9$. $G2$ zafarbíme farbami $b0$ až $b9$.

2. Označíme si 1-faktor grafu $G2$ ako F. Odfarbíme hrany grafu F. Tieto budeme farbiť pomocou farieb $a0$ až $a9$.
   Zafarbíme si každú hranu grafu F zvlášť. Je maximálne 6 hrán z $G1$, ktoré silne susedia s touto hranou. Ak by všetky tieto hrany mali rôzne farby, zakázali by nám použiť 6 farieb z $a0$ až $a9$. Zvyšné 4 farby zostanú voľné a použijeme ich na farbenie hrán grafu F. Každá hrana grafu F silne susedí s maximálne 4 ďalšími hranami grafu F. Použitím vety 1.1 dostávame, že hrany z F možu byť zafarbené týmito 4 farbami tak, že žiadne dve, ktoré sú silne susedné, nemajú rovnakú farbu.

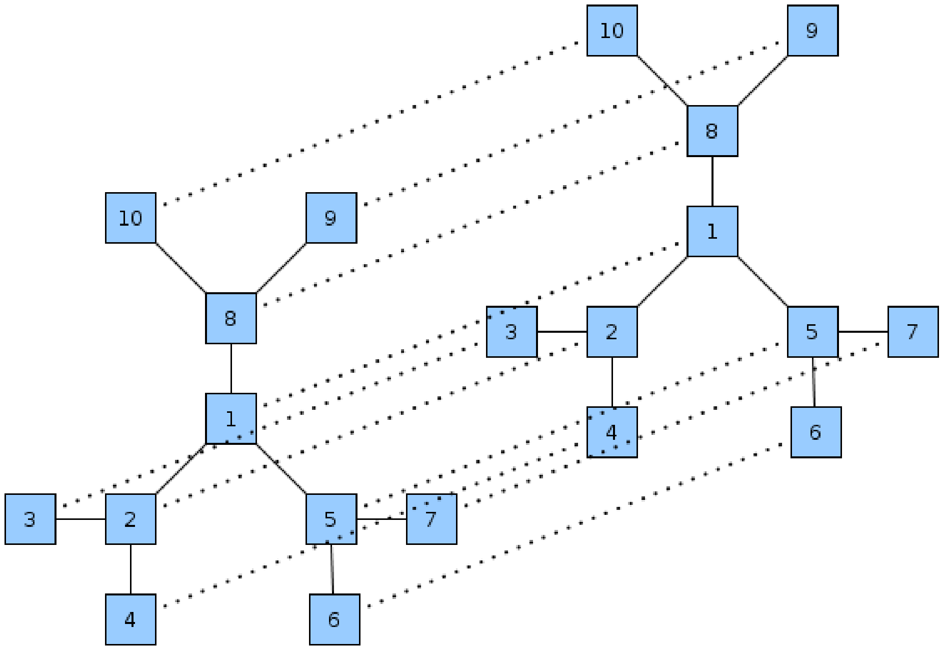
   Teraz máme zafarbené grafy $G1$ a $G2$ tak, že silné farbenie je po spojení v poriadku. Zostáva zafarbiť spojovacie hrany.

3. Každá spojovacia hrana silne susedí s maximálne 9 hranami grafu $G1$, a tak je okolo každej spojovacej hrany použitých v grafe $G1$ maximálne 9 farieb z $a0 - a9$.

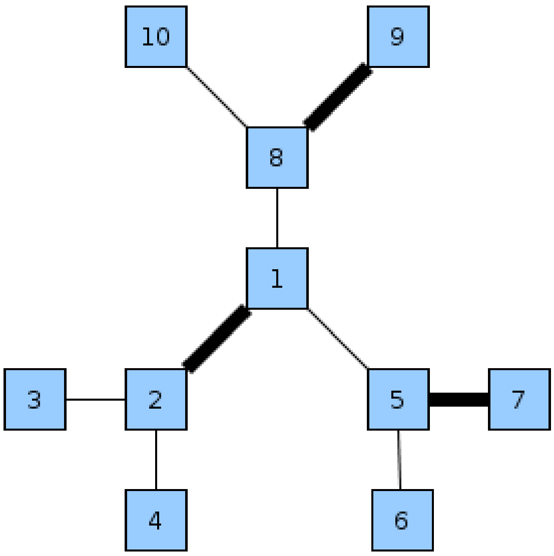
   V grafe $G2$ je na hranách, ktoré silne susedia so spojovacou hranou použitých maximálne 7 farieb z $b0$ až $b9$. Jednu sme ušetrili tak isto ako pri $G1$ a ďalšie dve farby sme ušetrili na hranách grafu F, ktoré silne susedia so spojovacou hranou. Prvá farba je pôvodná farba grafu F, ktorá je spojená so spojovacou hranou. So spojovacou hranou silne susedia ešte ďalšie dve hrany grafu F, ktoré musia mať inú farbu ako tá, ktorú sme už ušetrili. Na obrázku 9.4 vidíme, že hrana medzi vrcholmi 5 a 7 a hrana medzi vrcholmi 8 a 9 môžu mať rovnaké farby. Preto ušetríme len 2 farby.

   Mohlo sa stať, že farba z $G1$, ktorá nebola použitá medzi 9 silne susediacimi hranami so spojovacou hranou, bola použitá na zafarebnie hrany grafu F. I tak nám zostávajú aspoň 3 farby z $b0$ až $b9$, ktoré nemajú použitú farbu v okolí každej spojovacej hrany. Podľa tej istej vety (1.1) vieme, že 3 farby nám už určite stačia na zafarbenie každej spojovacej hrany.

$\square$



Obr. 9.3: Spájanie dvoch 3-regulárnych grafov



Obr. 9.4: 1-faktorové hrany okolo spojovacej hrany spojenej s vrcholom 1

9.3 Overenie hypotézy pre niektoré triedy Cayleyho grafov

Veta 9.3. *Nech G je Cayleyho graf $Cay(Z_n, \{1, -1, k, -k\})$ a $n = 5m$. Nech $k = 5l+2$ alebo $k = 5l+3$ a $NSD(k, 5m) = 1$. Potom G má silný chromatický index maximálne 10.*

Dôkaz. Ukážeme, ako zafarbiť každý takýto graf G 10 farbami. Rozdelíme si hrany grafu G do dvoch skupín a každú budeme farbiť zvlášť. Jedna skupina budú hrany generované prvkami $\{1, -1\}$ a druhá skupina budú hrany generované prvkami $\{k, -k\}$.

Hrany prvej skupiny budeme farbiť farbami 1 až 5 a hrany druhej skupiny farbami 6 až 10. Najskôr zafarbime hrany prvej skupiny tak, že hrana medzi vrcholom $5i + j - 1$ a $5i + j$ bude mať farbu j.

Takéto farbenie je vzhľadom na silné hranové farbenie v poriadku, pretože hrany z druhej skupiny nemôžu spojiť žiadne dva vrcholy, okolo ktorých existujú hrany s rovnakými farbami.

Teraz je potrebné si uvedomiť, že keďže $NSD(k, 5m) = 1$, vieme, že hrany v druhej skupine tvoria jednu kružnicu takisto ako hrany prvej skupiny. Graf teda preusporiadame tak, aby hrany generované prvkami $\{k, -k\}$ spájali vrcholy, ktoré sú v kružnici hneď pri sebe.

Ukážeme, že dostaneme opäť Cayleyho graf $Cay(Z_n, \{1, -1, j, -j\})$, kde $j = 5i + 2$ alebo $j = 5i + 3$.

Číslo j bude vlastne počet hrán, po ktorých treba prejsť na ceste od niektorého vrcholu až k vrcholu, ktorý ležal v pôvodnej kružnici hneď vedľa neho. Bude to teda počet hrán, ktoré po preusporiadaní budú medzi každými dvoma pôvodne vedľa seba stojacimi vrcholmi. Je jasné, že také j existuje.

Hľadáme teda minimálne j také, že $(j * k)$ mod $5m = \pm 1$.

Rozoberme si prípady:

- $k = 5l + 2$ Hľadáme minimálne j také, že $j * (5l + 2) \bmod 5m = \pm 1$.
  Z toho vyplýva, že aj $j * (5l + 2) \bmod 5 = \pm 1$.
  Rozoberme si podprípady pre j podľa zvyškovej triedy modulo 5:
  -ak by $j = 5i$, potom $j * (5l + 2) \bmod 5 = 0$.
  -ak by $j = 5i + 1$, potom $j * (5l + 2) \bmod 5 = 2$.
  -ak by $j = 5i + 2$, potom $j * (5l + 2) \bmod 5 = -1$.
  -ak by $j = 5i + 3$, potom $j * (5l + 2) \bmod 5 = 1$.
  -ak by $j = 5i + 4$, potom $j * (5l + 2) \bmod 5 = 3$.

  Z toho vyplýva, že ak $j * (5l + 2) \bmod 5m = \pm 1$, tak $j = 5i + 2$ alebo $j = 5i + 3$.

- $k = 5l + 3$. Opäť si rozoberme podprípady pre j podľa zvyškovej triedy modulo 5.
  -ak by $j = 5i$, potom $j * (5l + 3) \bmod 5m = 0$.
  -ak by $j = 5i + 1$, potom $j * (5l + 3) \bmod 5m = 3$.
  -ak by $j = 5i + 2$, potom $j * (5l + 3) \bmod 5m = 1$.
  -ak by $j = 5i + 3$, potom $j * (5l + 3) \bmod 5m = -1$.
  -ak by $j = 5i + 4$, potom $j * (5l + 3) \bmod 5m = 2$.

  V tomto prípade musí takisto platiť $j = 5i + 2$ alebo $j = 5i + 3$.

Keďže po preusporiadaní vrcholov dostávame opäť Cayleyho graf $Cay(Z_n, \{1, -1, j, -j\})$, kde $j = 5i + 2$ alebo $j = 5i + 3$, môžeme zafarbiť druhú skupinu hrán takým istým spôsobom, ako sme farbili prvú skupinu (len s farbami 6 až 10).

$\square$

Veta 9.4. *Nech G je Cayleyho graf $Cay(Z_n, \{1, -1, k, -k\})$ a $n = 7m$. Nech $k = 7l+2$, $k = 7l+3$, $k = 7l+4$ alebo $k = 7l+5$ a $NSD(k, 7m) = 1$. Potom G má silný chromatický index maximálne* 14.

Dôkaz. Dôkaz vety je obdobný ako pri vete 9.3. Hrany si rozdelíme do dvoch skupín. Prvú skupinu budeme farbiť farbami 1 až 7 tak, že hrana medzi vrcholom $7i + j - 1$ a $7i + j$ bude mať farbu j.

Po preusporiadaní vrcholov dostaneme opäť graf $Cay(Z_n, \{1, -1, j, -j\})$.

Opäť sme rozobrali všetky možnosti pre každý prípad a zistili sme, že j také, že $j * k \bmod 7m = \pm 1$ existuje len v týchto prípadoch:

- ak $k = 7l + 2$, tak $j = 7i + 3$, alebo $j = 7i + 4$.
- ak $k = 7l + 3$, tak $j = 7i + 2$, alebo $j = 7i + 5$.
- ak $k = 7l + 4$, tak $j = 7i + 2$, alebo $j = 7i + 5$.
- ak $k = 7l + 5$, tak $j = 7i + 3$, alebo $j = 7i + 4$.

Takže platí $j = 7i + 2$, $j = 7i + 3$, $j = 7i + 4$ alebo $j = 7i + 5$.

Druhú skupinu hrán teda môžeme zafarbiť farbami 8 až 14 rovnako, ako sme farbili prvú skupinu.

□

Veta 9.5. *Nech G je Cayleyho graf $Cay(Z_n, \{1, -1, k, -k\})$ a $n = 8m$. Nech $k = 8l+3$ alebo $k = 8l+5$ a $NSD(k, 8m) = 1$. Potom G má silný chromatický index maximálne 16.*

Dôkaz. Dôkaz vety je obdobný ako pri vete 9.3. Hrany si rozdelíme do dvoch skupín. Prvú skupinu budeme farbiť farbami 1 až 8 tak, že hrana medzi vrcholom $8i + j - 1$ a $8i + j$ bude mať farbu j.

Po preusporiadaní vrcholov dostaneme opäť graf $Cay(Z_n, \{1, -1, j, -j\})$.

Opäť sme rozobrali všetky možnosti pre každý prípad a zistili sme, že j také, že $j * k \bmod 8m = \pm 1$ existuje len v týchto prípadoch:

- ak $k = 8l + 3$, tak $j = 8i + 3$, alebo $j = 8i + 5$.
- ak $k = 8l + 5$, tak $j = 8i + 3$, alebo $j = 8i + 5$.

Takže platí $j = 8i + 3$ alebo $j = 8i + 5$.

Druhú skupinu hrán teda môžeme zafarbiť farbami 9 až 18 rovnako, ako sme farbili prvú skupinu.

□

Veta 9.6. *Nech G je Cayleyho graf $Cay(Z_n, \{1, -1, k, -k\})$ a $n = 9m$. Nech $k = 9l+2$, $k = 9l+4$, $k = 9l+5$ alebo $k = 9l+7$ a $NSD(k, 9m) = 1$. Potom G má silný chromatický index maximálne* 18.

Dôkaz. Dôkaz vety je obdobný ako pri vete 9.3. Hrany si rozdelíme do dvoch skupín. Prvú skupinu budeme farbiť farbami 1 až 9 tak, že hrana medzi vrcholom $9i + j - 1$ a $9i + j$ bude mať farbu j.

Po preusporiadaní vrcholov dostaneme opäť graf $Cay(Z_n, \{1, -1, j, -j\})$.

Opäť sme rozobrali všetky možnosti pre každý prípad a zistili sme, že j také, že $j * k \bmod 9m = \pm 1$ existuje len v týchto prípadoch:

- ak $k = 9l + 2$, tak $j = 9i + 4$, alebo $j = 9i + 5$.
- ak $k = 9l + 4$, tak $j = 9i + 2$, alebo $j = 9i + 7$.
- ak $k = 9l + 5$, tak $j = 9i + 2$, alebo $j = 9i + 7$.
- ak $k = 9l + 7$, tak $j = 9i + 4$, alebo $j = 9i + 5$.

Takže platí $j = 9i + 2$, $j = 9i + 4$, $j = 9i + 5$ alebo $j = 9i + 7$.

Druhú skupinu hrán teda môžeme zafarbiť farbami 10 až 18 rovnako, ako sme farbili prvú skupinu.

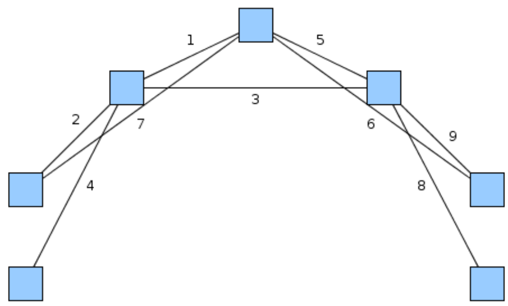
□

9.4 Antiprismové grafy

Veta 9.7. *Antiprismové grafy s aspoň* 32 *vrcholmi, majú silný chromatický index* 9*.*

Antiprismy sú vlastne Cayleyho grafy $Cay(Z_n, \{1, -1, 2, -2\})$.

Dôkaz. V takomto grafe vieme nájsť 9 hrán, ktoré musia byť navzájom všetky nafarbené inými farbami a preto tieto grafy musia mať silný hranový chromatický index aspoň 9. Týchto 9 hrán vidíme aj na obrázku 9.5.



Obr. 9.5: 9 hrán, ktoré navzájom silne susedia

Antiprismové grafy s 9, 18, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 40 vrcholmi vieme zafarbiť 9 farbami. Farbenia týchto grafov sú znázornené na obrázkoch 9.7, 9.8, 9.9, 9.10 a 9.11.

Ku každému z uvedených grafov vieme ľubovoľný počet krát nadpojiť graf s 9 vrcholmi, ktorý je na obrázku 9.7.

Vieme teda zostrojiť farbenie pre antiprismové grafy s počtom vrcholov $i + 9k$, kde $i \in \{18, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 40\}$, takže aj pre grafy s počtom vrcholov $i + 9k$, kde $i \in \{32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40\}$, a tak pre všetky grafy s počtom vrcholov väčším, ako 31.

Samotné nadpájanie je znázornené na obrázku 9.6 a bude vyzerať nasledovne:

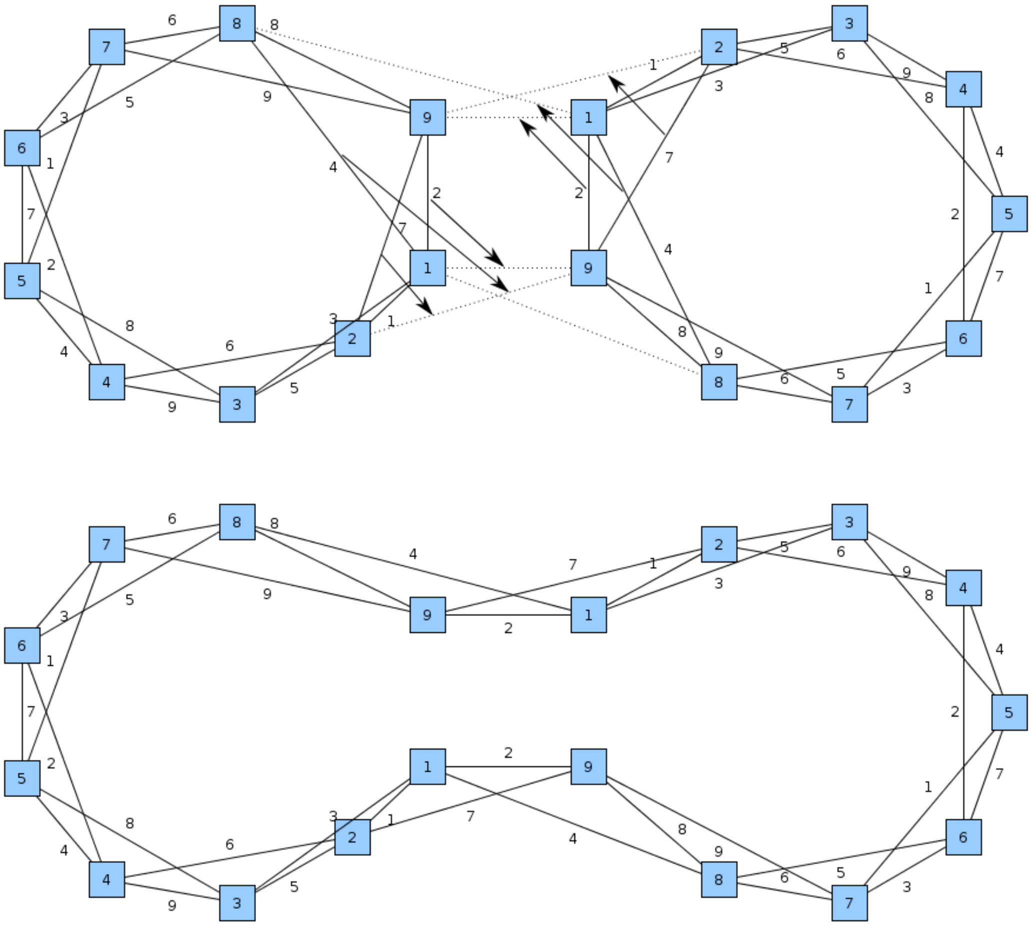
Označme vrcholy postupne číslami od 1 do X, kde X je počet vrcholov v grafe tak, ako ich spájajú hrany generované prvkom 1. Označme v každom grafe *prvý* vrchol ten, ktorý má číslo 1, a *posledný* ten, ktorý má číslo X. Prvý a posledný vrchol teda budú susedné vrcholy.

Z oboch grafov presunieme 3 hrany, pričom farby na týchto hranách zostávajú nezmenené:

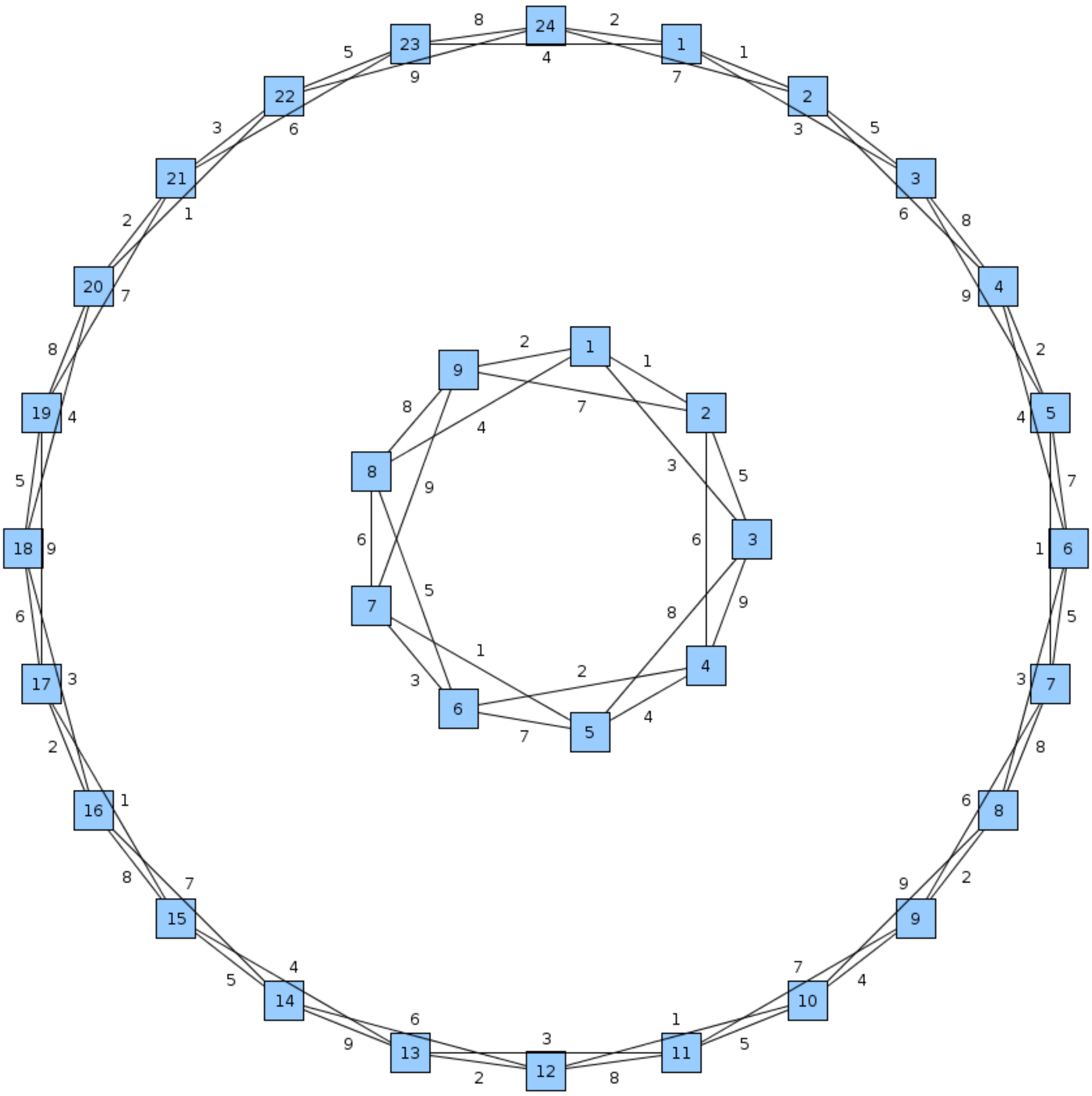
- hrana, ktorá spájala prvý a posledný vrchol v prvom grafe, bude spájať prvý vrchol prvého grafu s posledným vrcholom druhého grafu.
- hrana, ktorá spájala prvý a predposledný vrchol v prvom grafe, bude spájať prvý vrchol prvého grafu s predposledným vrcholom druhého grafu.
- hrana, ktorá spájala druhý a posledný vrchol v prvom grafe, bude spájať druhý vrchol prvého grafu s posledným vrcholom druhého grafu.
- hrana, ktorá spájala prvý a posledný vrchol v druhom grafe, bude spájať prvý vrchol druhého grafu s posledným vrcholom prvého grafu.
- hrana, ktorá spájala prvý a predposledný vrchol v druhom grafe, bude spájať prvý vrchol druhého grafu s predposledným vrcholom prvého grafu.
- hrana, ktorá spájala druhý a posledný vrchol v druhom grafe, bude spájať druhý vrchol druhého grafu s posledným vrcholom prvého grafu.

Silné hranové farbenie bude stále v poriadku. Je to preto, že v každom grafe, ktorý sme ukázali, sú hrany, ktoré silne susedia s hranou medzi prvým a posledným vrcholom, rovnakej farby, ako rovnako vzdialené hrany v ktoromkoľvek inom grafe.

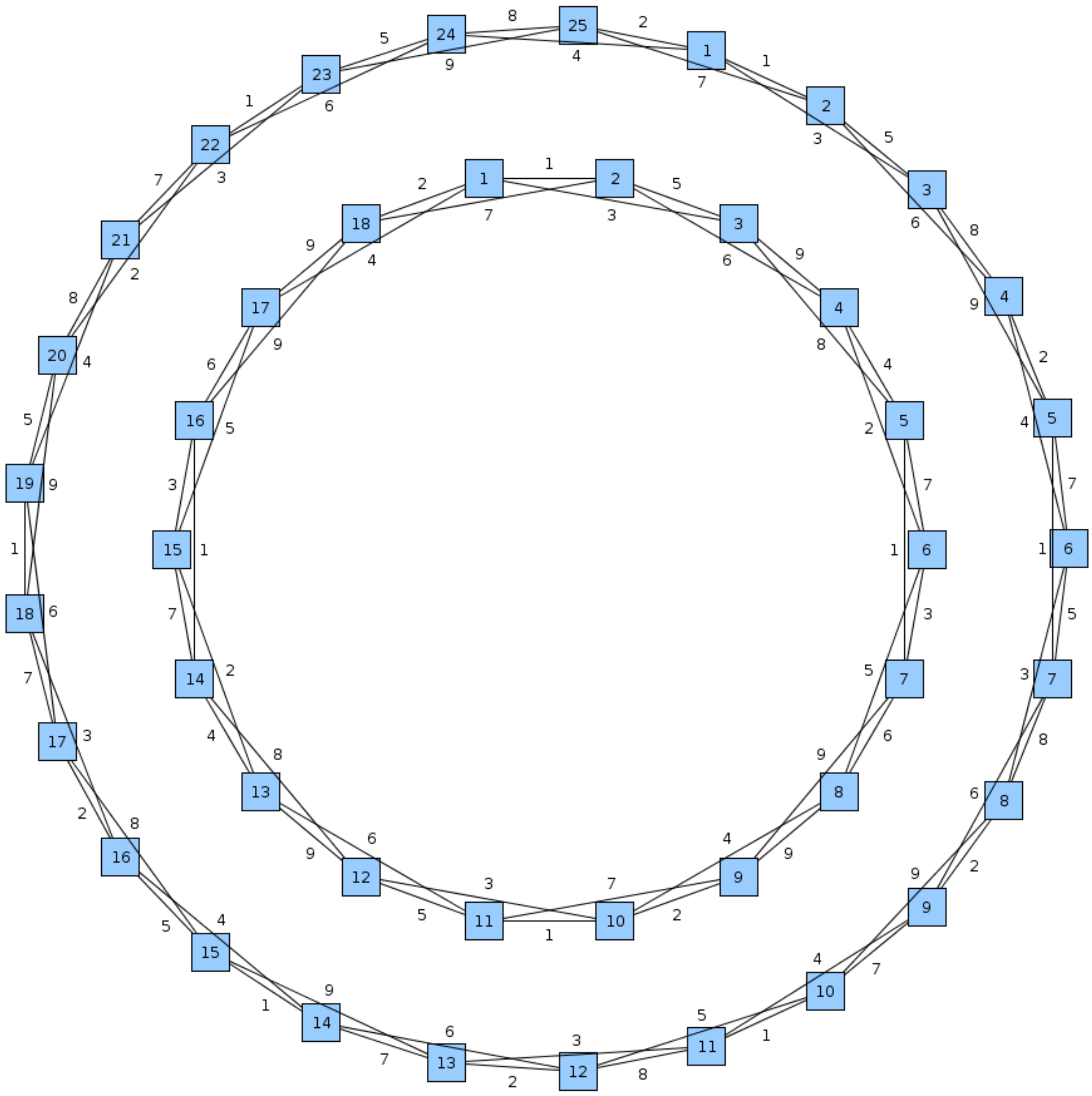
$\square$



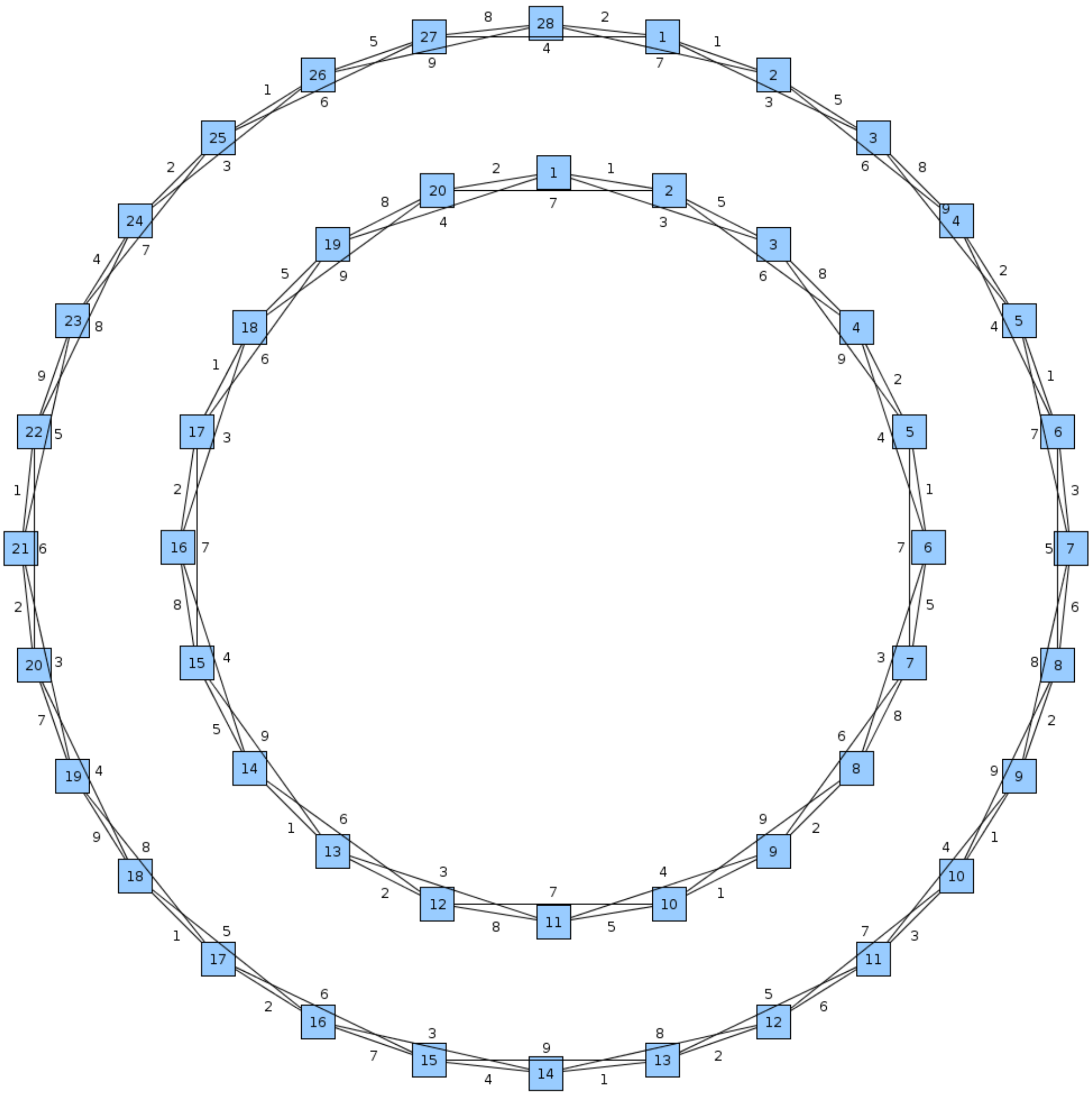
Obr. 9.6: Nadpájanie dvoch 9 vrcholových antiprismových grafov



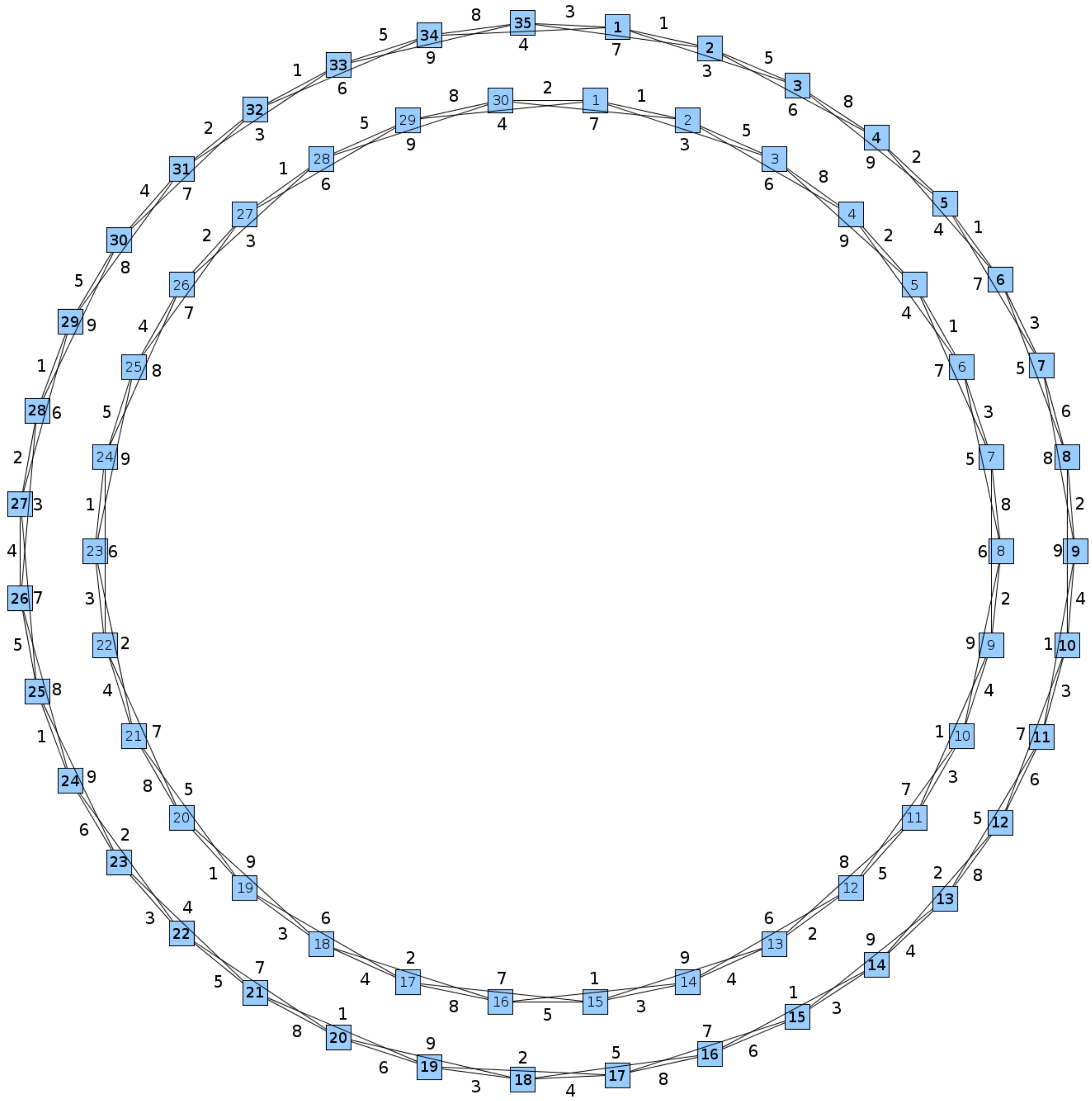
Obr. 9.7: Silné farbenie antiprismových grafov s 9 a 24 vrcholmi



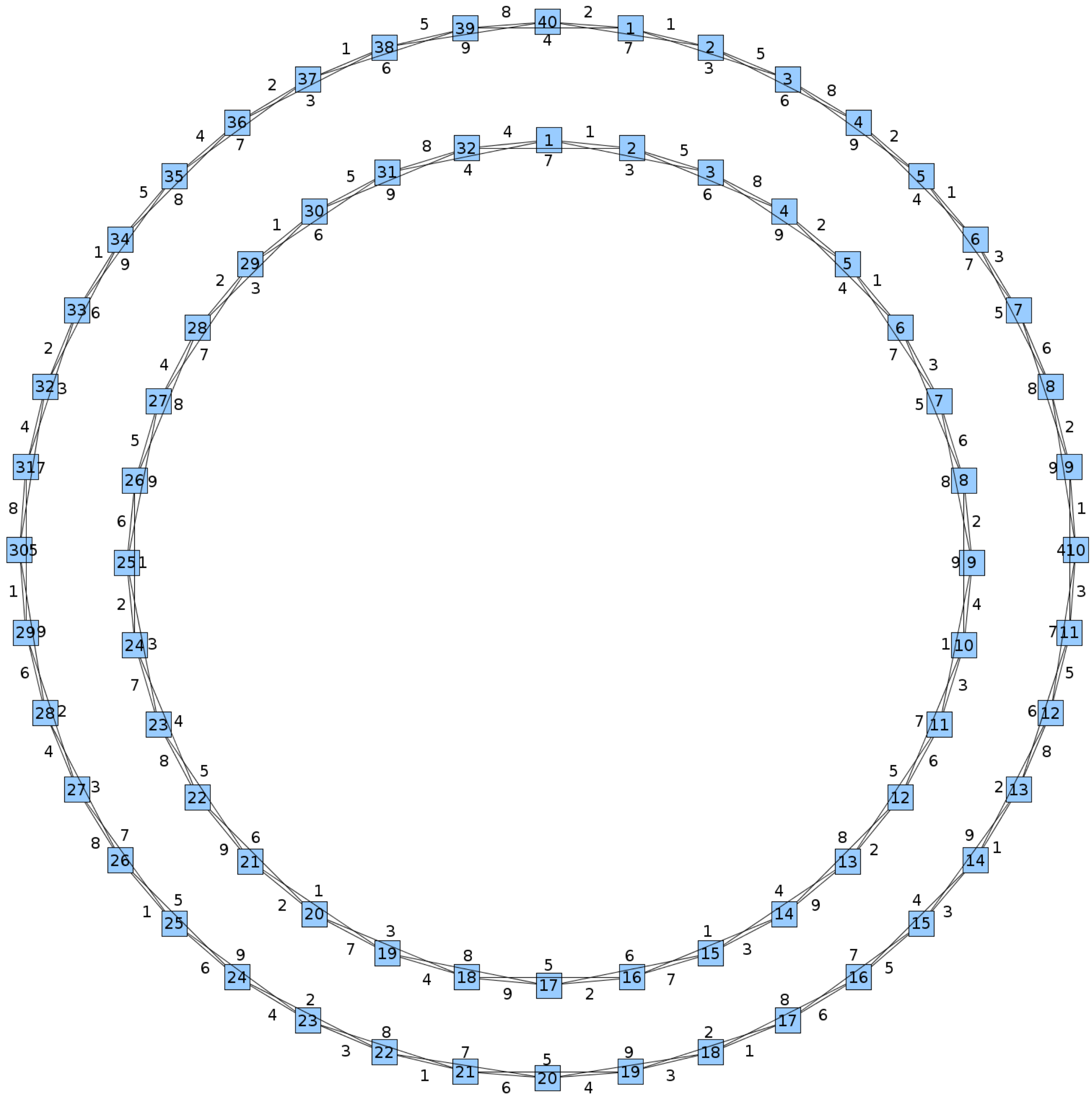
Obr. 9.8: Silné farbenie antiprismových grafov s 18 a 25 vrcholmi



Obr. 9.9: Silné farbenie antiprismových grafov s 20 a 28 vrcholmi



Obr. 9.10: Silné farbenie antiprismových grafov s 30 a 35 vrcholmi



Obr. 9.11: Silné farbenie antiprismových grafov s 32 a 40 vrcholmi

Záver

V práci sa nám podarilo zhrnúť základné a zaujímavé výsledky z oblasti silného farbenia grafov a zhrnúť veľké množstvo hypotéz. Takisto sme zadefinovali vzdialenostné hranové farbenie grafu, ktorého súčasťou je aj silné hranové farbenie. Spomenuli sme aj výsledky z bakalárskej práce. V práci sme preskúmali najmä 4-regulárne grafy.

Najskôr sme dokázali hypotézu o silnom farbení pre dvojrozmerné torusy a pre 4-regulárne grafy, ktoré vznikli z dvoch 3-regulárnych grafov.

Dokázali sme aj, že Cayleyho grafy $Cay(Z_n, \{1, -1, j, -j\})$, kde $n = 5m$ a $j \in \{2, 3\}$ majú silný chromatický index maximálne 10. Dokázali sme aj nasledujúce tvrdenia: Ak $n = 7m$ a $j \in \{2, 3, 4, 5\}$, silný chromatický index je maximálne 14. Ak $n = 8m$ a $j \in \{3, 5\}$, silný chromatický index je maximálne 16. Ak $n = 9m$ a $j \in \{2, 4, 5, 7\}$, silný chromatický index je maximálne 18.

Posledná dokázaná veta hovorí, že všetky antiprislové grafy majú silný chromatický index 9.

Verím, že v budúcnosti bude mať silné hranové farbenie ešte väčšie využitie, ako doteraz.

Literatúra

[1] M. Vesely, *Silné hranové farbenie regulárnych grafov*, bakalárska práca, FMFI UK, 2009

[2] L. Wang, *Computing and Combinatorics*, pages 798-800, COCOON 2005, Springer-Verlag Heidelberg, 2005

[3] A. Frieze, M. Krivelevich, B. Sudakov, *The strong chromatic index of random graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, V. 19, I. 3, 2005

[4] J. J. Quinn, *Strong Chromatic Index of Subset Graphs*, Department of mathematics, Occidental College, Journal of Graph Theory, V. 24, I. 3, 1997

[5] M. Mahdian, *The Strong Chromatic Index of Graphs*, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139-4307, 2000

[6] Noga Alon, *Restricted coloring of graphs*, Department of Mathematics, Raymond and Beverly Sackler Faculty of Exact Sciences Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel and Bellcore, Morristown, NJ 07960, USA

[7] M. Mahdian, *The Strong Chromatic Index of $C_4 - free$ Graphs*, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139-4307, 2000

[8] W.C. Shiu, P.C.B. Lam and W.K. Tam, *On Strong Chromatic Index of Halin Graph*, Department of Mathematics, Hong Kong Baptist University, 224 Waterloo Road, Kowloon Tong, Hong Kong

[9] D. Cranston *A Strong Edge-Coloring of Graphs with Maximum Degree 4 Using 22 Colors*, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2005

[10] O. Togini *Strong chromatic index of products of graphs*, LE2I, UMR CNRS 5158, Universit de Bourgogne, BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France, 2007

[11] L.D. Andersen, *The Strong chromatic index of a cubic graph is at most 10*, discrete Mathematics 108, 231-252, 1992.

[12] J. C. Bermond, J. Bond, and S. Djellul, *Dense bus networks of diameter 2* DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 21, 9-19, 1995.

[13] J. C. Bermond, J. Bond, M. Paoli and C. Peyrat, *Graphs and interconnection networks: Diameter and vulnerability*, Proceedings of 9th British Combinatorial Conference, London Mathematical Society, Lecture Note Series 82, 1-30, 1983.

[14] J. C. Bermond, and F. O. Ergincan, *Bus interconnection networks* Discrete Applied Mathematics 68, 1-15, 1996.

[15] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with applications*, American Elsevier, 1976.

[16] R. A. Brualdi, and J. J. Quinn Massey, *Incidence and strong edge colorings of graphs*, Discrete Mathematics, 122, 51-58, 1993.

[17] K. Cameron, *Induced matchings*, Discrete Applied Mathematics 24, 97-102, 1989.

[18] F. R. K. Chung, A. Gyárfás, Zs. Tuza a W. T. Trotter *The maximum number of edges in $2K_2$-free graphs of bounded degree*, Discrete Mathematics 81, 129-135, 1990.

[19] P. Erdős, *Problems and results in combinatorial analysis and graph theory*, Discrete Mathematics, 72, 81-98, 1988.

[20] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp and Zs. Tuza, *Induced matchings in bipartite graphs*, Discrete Mathematics 78, 83 - 87, 1989

[21] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp and Zs. Tuza, *The strong chromatic index of graphs*, Ars Combinatoria 29B, 205-211, 1990.

[22] J. L. Fouquet and J. L. Jolivet, *Stronge edge-coloring of cubic planar graphs*, Progess in graph theory (Waterloo, 1982), 247-264, 1984.

[23] P. Horák, *The strong chromatic index of graphs with maximum degree four*, in R. Bodendiek (editor), Contemporary Methods in Graph Theory, 399-403, 1990.

[24] P. Horák, H. Qing and W. T. Trotter, *Induced matchings in cubic graphs*, Journal of Graph Theory 17, 151-160, 1993.

[25] T. R. Jensen, and B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons Inc., 1995.

[26] J. J. Quinn and A. T. Benjamin, *Strong chromatic index of subset graphs*, Journal of Graph Theory 24, 267-273, 1997.c

[27] A. Steger and M. Yu, *On induced matchings*, Discrete Mathematics, 120, 291-295, 1993.

[28] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition 2005 c Springer-Verlag Heidelberg, (New York 1997, 2000, 2005).