



KATEDRA INFORMATIKY  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

ŠTUDIJNÝ ODBOR: INFORMATIKA

---

ZBIERKA ÚLOH  
Z TEÓRIE GRAFOV  
(diplomová práca)

ONDREJ HOLOTŇÁK

---

Vedúci: doc. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Bratislava, 2006



Čestne vyhlasujem, že som túto diplomovú prácu  
vypracoval samostatne s použitím citovaných zdro-  
jov.

.....

# Abstrakt

HOLOTŇÁK, Ondrej. *Zbierka úloh z Teórie grafov*. [Diplomová práca]. Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra informatiky.

Školiteľ: doc. RNDr. Martin Škoviera, PhD. Obhajoba: Bratislava, 2006. 93s.

V našej práci sme sa snažili zozbierať reprezentatívnu vzorku úloh tematicky patriacu k základným okruhom teórie grafov, ako sú párenie, súvislosť, planárne grafy, farbenie, toky, a pod. Medzi úlohami sú zastúpené rôzne stupne obtiažnosti od ľahkých (napr. zostrojenie grafu s požadovanými vlastnosťami), cez stredne ťažké (napr. dokázať tvrdenie priamo odvoditeľné z iných, už dokázaných tvrdení), až po náročné úlohy (napr. dokázať práve zadefinovanú vlastnosť skupiny grafov, prípadne dokázať tvrdenie, ktoré sa nedá priamo odvodiť z iných, dovtedy dokázaných tvrdení). K všetkým úlohám sme poskytli stručné návody a taktiež vzorové riešenia. Okrem praktických úloh zbierka obsahuje vždy aj prehľad najdôležitejších definícií a tvrdení v danej oblasti. Tvrdenia sú uvádzané bez dôkazov.

Kľúčové slová: teória grafov, cvičenia, úlohy, zbierka úloh, párenie, súvislosť, planárne grafy, farbenie, toky.

HOLOTŇÁK, Ondrej. *Graph theory exercise book*. [Master thesis]. Comenius University. Faculty of mathematics, physics and computer sciences. Department of computer sciences.

Tutor: doc. RNDr. Martin Škoviera, PhD. Habilitation: Bratislava, 2006. 93p.

In our thesis we focused on collecting a representative sample of exercises that belong thematically to basic areas of graph theory, such as matching, connectivity, planar graphs, coloring, flows, etc. A wide range of difficulty levels are represented among the exercises, among them easy (e.g. constructing a graph with required properties), moderate (e.g. proving declaration easily deductible from already proven theorems), and hard (e.g. proving a newly defined property of some class of graphs, or proving declaration not

trivially deductible from others). We provided short hints to all exercises as well as exemplary solutions. Apart from practical exercises our thesis contains an overview of basic definitions and theorems for each area. Theorems are stated without proofs.

Keywords: graph theory, exercises, problems, exercise book, matching, connectivity, planar graphs, coloring, flows.

# Predhovor

Prvýkrát som sa s teóriou grafov stretol ako študent tretieho ročníka informatiky na FMFI UK (vtedy sa škola ešte volala Fakulta matematiky a fyziky). Od starších spolužiakov som počul, že je to vraj ťažký predmet. Po jeho absolvovaní môžem s nimi čiastočne súhlasiť. Ľahký určite nebol. No napriek tomu mi bol v porovnaní s ostatnými matematickými predmetmi, ako napr. algebra, či matematická analýza, oveľa bližší. Krása teórie grafov pre mňa spočíva v jej jednoduchých a ľahko predstaviteľných základných princípoch. Graf sa dá často pekne nakresliť ako krúžky pospájané čiarkami (pozrite si ľubovoľný obrázok v tejto zbierke). Navyše vo väčšine prípadov uvažujeme o konečných grafoch. Takéto uvažovanie je veľmi jasné, a najmä pre každého ľahko predstaviteľné. Veď skúste si predstaviť taký  $n$ -rozmerný vektorový priestor. Ja to nedokážem. Ale ak nakreslím Petersenov graf (obrázok 1.3), väčšina ľudí (teraz myslím “obyčajných smrteľníkov” - nematematikov) uzná, že je to “celkom pekné”. Na takomto nákrese sa dá potom ľahko demonštrovať neexistencia eulerovského ľahu, či hamiltonovskej kružnice a rôzne iné vlastnosti.

Nezainteresovaný človek sa môže v duchu pýtať: “Na čo je to všetko vlastne dobré?”. Odpoveď na túto otázku je možno až prekvapujúco pestrá. Uplatnenia sa nájdu v takmer každom dobrom programe. Či už ide o optimalizáciu jednoduchých, ale častých algoritmických problémov, o schému kanalizačného systému, alebo o systém riadenia letovej prevádzky, vo všetkých týchto prípadoch sa využívajú poznatky z teórie grafov. A práve ľahká predstaviteľnosť a široké možnosti využitia patria k dôvodom, prečo sa v diplomovej práci venujem práve tejto disciplíne.

Pri zostavovaní zbierky som sa snažil zamerať najmä na poslucháčov predmetu teória grafov, pretože aj mne často k lepšiemu pochopeniu prednášanej látky pomohlo riešenie úloh na cvičeniach a privítal by som existenciu zbierky úloh. Taktiež mi veľmi pomáha, ak je k úlohe uvedený aj krátky návod, lebo pre čitateľa, ktorý sa ešte v danej oblasti nevyzná, je občas ťažké určiť, ktorým smerom sa pri riešení uberať. No a na záver pomôže možnosť overiť si správnosť riešenia podľa vzoru. Tieto zásady som sa snažil mať po celý

čas na pamäti.

Rád by som sa na tomto mieste poďakoval môjmu diplomovému vedúcemu doc. RNDr. Martinovi Škovierovi PhD. za cenné rady a odborné vedenie diplomovej práce. Veľká vďaka tiež patrí mojej manželke a rodičom za ich neustálu podporu.

Dokument bol vysádzaný pomocou L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>.

# Obsah

<b>Abstrakt</b>	<b>iv</b>
<b>Predhovor</b>	<b>vi</b>
<b>Obsah</b>	<b>viii</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>xi</b>
<b>Úvod</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Základy</b>	<b>1</b>
1.1 Základné definície a tvrdenia . . . . .	1
1.1.1 Grafy . . . . .	1
1.1.2 Stupeň vrchola . . . . .	2
1.1.3 Cesty a cykly . . . . .	3
1.1.4 Súvislosť . . . . .	4
1.1.5 Stromy a lesy . . . . .	5
1.1.6 Bipartitné grafy . . . . .	6
1.1.7 Kontrakcie a minory . . . . .	6
1.1.8 Eulerovské ťahy . . . . .	7
1.1.9 Lineárna algebra . . . . .	7
1.1.10 Ďalšie grafové pojmy . . . . .	9
1.2 Úlohy . . . . .	10
<b>2 Párenie</b>	<b>15</b>
2.1 Základné definície a tvrdenia . . . . .	15
2.1.1 Párenie v bipartitných grafoch . . . . .	15
2.1.2 Párenie vo všeobecných grafoch . . . . .	16
2.2 Úlohy . . . . .	17



<b>3</b>	<b>Súvislosť</b>	<b>19</b>
3.1	Základné definície a tvrdenia . . . . .	19
3.1.1	Dvojsúvislé grafy a podgrafy . . . . .	19
3.1.2	Štruktúra trojsúvislých grafov . . . . .	19
3.1.3	Mengerova veta . . . . .	20
3.1.4	Hranovo-disjunktné kostry . . . . .	20
3.2	Úlohy . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Planárne grafy</b>	<b>23</b>
4.1	Základné definície a tvrdenia . . . . .	23
4.1.1	Topologické predpoklady . . . . .	23
4.1.2	Rovinné grafy . . . . .	24
4.1.3	Rovinné reprezentácie . . . . .	26
4.1.4	Planárne grafy: Kuratowského veta . . . . .	27
4.1.5	Algebraické kritériá planárnosti . . . . .	28
4.1.6	Rovinná dualita . . . . .	28
4.2	Úlohy . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Farbenie</b>	<b>31</b>
5.1	Základné definície a tvrdenia . . . . .	31
5.1.1	Farbenie máp a planárnych grafov . . . . .	31
5.1.2	Farbenie vrcholov . . . . .	32
5.1.3	Farbenie hrán . . . . .	32
5.1.4	Výberové farbenia . . . . .	33
5.1.5	Perfektné grafy . . . . .	33
5.2	Úlohy . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Toky</b>	<b>38</b>
6.1	Základné definície a tvrdenia . . . . .	38
6.1.1	Cirkulácie . . . . .	38
6.1.2	Toky v sieťach . . . . .	39
6.1.3	Toky s hodnotami v grupách . . . . .	40
6.1.4	$k$ -toky pre malé $k$ . . . . .	40
6.1.5	Dualita medzi tokmi a farbeniami . . . . .	41
6.1.6	Tutteove tokové hypotézy . . . . .	42
6.2	Úlohy . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Hamiltonovské kružnice</b>	<b>46</b>
7.1	Základné definície a tvrdenia . . . . .	46
7.1.1	Jednoduché postačujúce podmienky . . . . .	46
7.1.2	Hamiltonovské kružnice a postupnosti stupňov . . . . .	46

---

7.1.3	Hamiltonovské kružnice vo štvorci grafu . . . . .	47
7.2	Úlohy . . . . .	47
<b>8</b>	<b>Riešenia úloh</b>	<b>51</b>
8.1	Základy . . . . .	51
8.2	Párenie . . . . .	62
8.3	Súvislosť . . . . .	67
8.4	Planárne grafy . . . . .	71
8.5	Farbenie . . . . .	74
8.6	Toky . . . . .	81
8.7	Hamiltonovské kružnice . . . . .	86
	<b>Záver</b>	<b>91</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>92</b>

# Zoznam obrázkov

1.1	Incidenčné matice a matice susedností. . . . .	11
1.2	Počet kostier rôznych grafov. . . . .	12
1.3	Petersenov graf. . . . .	13
1.4	Povoľujú dané grafy eulerovský ťah? . . . . .	13
2.1	Nájdite všetky 1-faktory a 1-faktorizácie grafu $G$ . . . . .	17
6.1	Sieť $N$ s danými kapacitami a tokmi hrán. . . . .	44
7.1	Grafy neobsahujúce hamiltonovskú kružnicu. . . . .	48
7.2	Grafy z úlohy 7.2. . . . .	48
8.1	Najdlhšie cesty bez spoločnej hrany. . . . .	52
8.2	Uzavretý sled párnej dĺžky obsahujúci len kružnice nepárnej dĺžky. . . . .	52
8.3	Samokomplementárne grafy. . . . .	54
8.4	Počet kostier grafu $G_1$ . . . . .	55
8.5	Počet kostier grafu $G_2$ . . . . .	56
8.6	Počet kostier grafu $G_3$ . . . . .	57
8.7	Cykly dĺžky 5, 6, 8 a 9 v Petersenovom grafe. . . . .	58
8.8	Eulerovské ťahy v grafoch. . . . .	59
8.9	Všetky súvislé grafy so štyrmi vrcholmi obsahujúce párenie. . . . .	63
8.10	Všetky 1-faktory grafu $G$ z obrázku 2.1. . . . .	63
8.11	Grafy s rôznymi vzťahmi medzi $\kappa(G)$ , $\lambda(G)$ a $\delta(G)$ . . . . .	69
8.12	Rovinné reprezentácie grafov $K_4$ a $K_{2,3}$ . . . . .	72
8.13	Príklady koplanárnych grafov. . . . .	72
8.14	Zakreslenie grafu $K_{2,n}$ do roviny. . . . .	73
8.15	Antiregulárny planárny graf so siedmymi vrcholmi. . . . .	73
8.16	Farbenie Petersenovho grafu tromi farbami . . . . .	75
8.17	Neizomorfné dvojsúvislé grafy s rovnakou chromatickou funkciou. . . . .	77
8.18	Maximálny tok siete $N$ z obrázku 6.1. . . . .	82
8.19	4-tok v grafe $K_4$ . . . . .	83

---

8.20	Diagram kapacít medzi vybranými množinami vrcholov v $N$ . . .	83
8.21	a) 5-tok Petersenovho grafu $P$ . b) 4-tok grafu $P \cup \{e\}$ . . . . .	84
8.22	Podgrafy $K_{3,3}$ , ktoré a) obsahujú b) neobsahujú hamiltonovskú kružnicu. . . . .	87
8.23	Dôkaz, že Petersenov graf neobsahuje hamiltonovskú kružnicu.	88
8.24	Protiklady k tvrdeniam z úlohy 7.5. . . . .	88
8.25	Rozklad $K_7$ na hamiltonovské kružnice. . . . .	89
8.26	Graf so štyrmi vrcholmi a štyrmi hranami neobsahujúci hamiltonovskú kružnicu. . . . .	90

# Úvod

V našej práci sme sa snažili ponúknuť čitateľom zaujímavým sa o teóriu grafov prehľad základných tématických okruhov tohto odvetvia matematiky, no najmä reprezentatívnu vzorku úloh a cvičení z daných tématických okruhov, návody na ich riešenie a takisto im poskytnúť vzorové riešenia. Podľa týchto okruhov sme potom štruktúrovali aj samotnú zbierku.

Každá kapitola, okrem poslednej, pozostáva z dvoch častí. V prvej časti ponúkame definície a základné tvrdenia potrebné pre pochopenie problematiky obsahu danej kapitoly. Všetky tvrdenia uvádzame bez dôkazov, keďže dôkazy týchto tvrdení sú uvádzané v takmer každej monografii pojednávajúcej o danej problematike, prípadne o teórii grafov, odporúčam napr. [8], [4] a [2]. V druhej časti uvádzame samotné úlohy a návody k nim. Riešenia úloh sú uvedené v samostatnej kapitole.

Obtťažnosť úloh je na rôznej úrovni. Keďže cieľovou skupinou zbierky boli najmä čitatelia so žiadnymi, alebo iba základnými poznatkami z teórie grafov, väčšina úloh je z kategórie ľahších a stredne náročných, ktoré slúžia najmä na precvičenie si základných poznatkov a napomáhajú lepšiemu pochopeniu udávaných definícií a tvrdení. Príkladom ľahkých cvičení sú konštrukčné úlohy, v ktorých má čitateľ za úlohu zostrojiť graf s potrebnými vlastnosťami. Stredne náročné úlohy sú napr. tie, v ktorých sa vyžaduje dokázať tvrdenie, ktoré priamo vyplýva z uvádzaných tvrdení, prípadne vyvrátiť tvrdenie kontrapríkladom. V každej kapitole sú však zastúpené aj náročnejšie úlohy. V nich zväčša treba dokázať nové tvrdenie, ktoré sa nedá priamo odvodiť z predtým uvádzaných tvrdení, prípadne ktoré v sebe obsahuje novodefinovanú netriviálnu vlastnosť nejakej triedy grafov. Náročné úlohy sú označené znakom “(+)”.

V prvej, najdlhšej kapitole teoretickej časti zbierky ponúkame základné definície a tvrdenia, ktoré sú potrebné pre porozumenie obsahu všetkých ostatných kapitol. Preto je táto kapitola ďalej rozdelená na časti pojednávajúce o grafoch, stupňoch vrcholov, cestách a cykloch v grafoch, grafovej súvislosti, konkrétnych prípadoch jednoduchých grafov ako sú stromy a lesy, bipartitných grafoch, ďalej kontrakciách a minoroch, eulerovských ťahoch v grafoch,

použití základov lineárnej algebry v teórii grafov a tiež o iných typoch grafov, ako sú napr. multigrafy, hypergrafy a orientované grafy. Všetky tieto pojmy sú najskôr v príslušnej časti zadefinované a sú tiež uvedené základné tvrdenia o nich, ktoré nevyžadujú zložitejšiu analýzu daných problémov. Práve kvôli obsahovej pestrosti tejto kapitoly táto obsahuje aj najviac úloh - dvadsaťdva. V druhej kapitole detailnejšie pojednávame o párení v grafoch, konkrétne sa v jednej časti venujeme páreniu v bipartitných grafoch. Medzi uvedenými tvrdeniami figurujú aj veľmi známe, ako napr. Kőnigova veta o mohutnosti maximálneho párenia, či Tutteova veta o jedna-faktore. Táto kapitola obsahuje desať úloh.

Tretia kapitola sa venuje problematike súvislosti grafov. Detailnejšie sú rozobrané prípady dvoj- a troj-súvislosti grafov. Uvádzané sú klasické výsledky v oblasti súvislosti, ako Mengerova veta o minimálnom počte oddeľujúcich vrcholov, alebo Maderova veta o počte nezávislých  $H$ -ciest v grafe. V kapitole je uvedených desať úloh.

O jednej z najstarších problematík v rámci teórie grafov, planárnych grafov, pojednáva štvrtá kapitola. Na úvod sú uvedené topologické predpoklady, ktoré síce nemajú veľký význam pre riešenie grafových problémov, ale sú akousi povinnou prerekvizitou k vybudovaniu jednoznačnej terminológie planárnych a najmä rovinných grafov. Ďalej v kapitole rozoberáme rovinné grafy a rovinné reprezentácie jednoduchých grafov. Uvádzame známy Eulerov polyhedrálny vzorec a Kuratowského vetu vymedzujúcu triedu planárnych grafov, ako aj definíciu a pár tvrdení o duálnych grafoch. V tejto kapitole figuruje desať úloh.

V ďalšej, piatej kapitole sa venujeme problematike farbenia grafov. Prirodzeným pokračovaním predchádzajúcej kapitoly a zároveň akýmsi historickým úvodom k farbeniu grafov je prvá časť zameraná na farbenie máp a planárnych grafov, kde bez dôkazov konštatujeme zafarbiteľnosť ľubovoľnej mapy piatimi, ale aj štyrmi farbami. Ďalej uvádzame známe poznatky o farbení vrcholov a hrán, ako napr. rozdelenie grafov do dvoch tried na základe Vizingovej vety o hodnote chromatického indexu. Venujeme sa tiež výberovým farbeniam a charakteristike perfektných grafov. Úloh o farbení je v tejto zbierke uvedených pätnásť.

Šiesta kapitola je tematicky venovaná tokom. Je rozdelená na časti pojednávajúce o cirkuláciách, tokoch v sieťach, tokoch s hodnotami v grupách, charakterizácii grafov umožňujúcich dvoj-, troj-, či štvor-tok, dualite medzi tokmi a farbením a pre zaujímavosť uvádzame aj najznámejšie Tutteove hypotézy o tokoch. Kapitola obsahuje desať úloh.

Siedmou a zároveň poslednou kapitolou obsahujúcou teoretickú časť je kapitola venovaná hamiltonovským kružniciam. Uvedené sú jednoduché postačujúce podmienky pre existenciu hamiltonovskej kružnice v grafe, ďalej pod-

mienky pre hamiltonovské postupnosti a nakoniec uvádzame Fleischnerovu vetu o hamiltonovskej kružnici vo štvorci dvojsúvislého grafu. V tejto kapitole je uvedených jedenásť úloh.

V poslednej, ôsmej kapitole zbierky ponúkame vzorové riešenia všetkých osmdesiatichôsmich úloh uvedených v predchádzajúcich kapitolách. Táto kapitola preto obsahuje aj najviac obrázkov ilustrujúcich použité postupy, prípadne výsledky konštrukčných úloh, a kapitola je zároveň aj najdlhšou z celej zbierky.

# Kapitola 1

## Základy

### 1.1 Základné definície a tvrdenia

#### 1.1.1 Grafy

**Definícia 1.1.1.1.** *Graf* je dvojica  $G = (V, E)$  disjunktných množín spĺňajúca  $E \subseteq [V^2]$ , teda prvky  $E$  sú 2-prvkové podmnožiny  $V$ .

Množinu *vrcholov* grafu  $G$  označíme  $V(G)$  a množinu *hrán*  $E(G)$ .

**Definícia 1.1.1.2.** *Rád* grafu  $G$  je počet jeho vrcholov, označuje sa  $|G|$ . Počet hrán grafu  $G$  označujeme  $\|G\|$ .

**Definícia 1.1.1.3.** Vrchol  $v$  je *incidentný* s hranou  $e$ , ak  $v \in e$ .

Dva vrcholy  $v$  a  $w$  sú *susedné*, ak  $(v, w) \in E(G)$ .

Dve hrany  $e \neq f$  sú *susedné*, ak majú spoločný vrchol, t.j.  $\exists v \in V(G)$  taký, že  $v \in e \wedge v \in f$ .

**Definícia 1.1.1.4.** Graf  $G$  sa nazýva *kompletný*, ak všetky jeho vrcholy sú navzájom susedné. Kompletný graf s  $n$  vrcholmi značíme  $K_n$ .

Maximálny kompletný podgraf nazývame *klika*.

**Definícia 1.1.1.5.** Množina vrcholov (alebo hrán) sa nazýva *nezávislá*, ak žiadne dva z jej prvkov nie sú susedné.

Maximálna mohutnosť nezávislej množiny vrcholov v grafe  $G$  je jeho *číslo nezávislosti*, označujeme ho  $\alpha(G)$ .

**Definícia 1.1.1.6.** Grafy  $G = (V, E)$  a  $G' = (V', E')$  nazývame *izomorfné* (označujeme  $G \simeq G'$ ), ak existuje bijekcia  $\varphi : V \rightarrow V'$ , kde  $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$  pre každé  $x, y \in V$ .



**Definícia 1.1.1.7.** Ak  $G' \subseteq G$  a  $G'$  obsahuje všetky hrany  $xy \in E$ , kde  $x, y \in V'$ , potom  $G'$  je *indukovaný podgraf* podľa  $V'$  v  $G$  a označujeme ho  $G[V']$ .

**Definícia 1.1.1.8.** Graf  $G$  nazývame *hranovo maximálny* s danou vlastnosťou grafu ak  $G$  má túto vlastnosť ale žiaden graf  $G + xy$  ju nemá, pre nesusedné vrcholy  $x, y \in G$ .

**Definícia 1.1.1.9.** *Komplement*  $\bar{G}$  grafu  $G$  je graf na  $V$  s množinou hrán  $[V]^2 \setminus E$ .

**Definícia 1.1.1.10.** *Hranový graf*  $L(G)$  grafu  $G$  je graf na  $E$  kde  $x, y \in E$  sú susedné vrcholy v  $L(G)$  práve vtedy ak sú susedné ako hrany v  $G$ .

## 1.1.2 Stupeň vrchola

**Definícia 1.1.2.1.** Nech  $G = (V, E)$  je (neprázdny) graf. Množina susedov vrchola  $v$  v  $G$  sa označuje  $N_G(v)$  alebo aj  $N(v)$ .

Všeobecnejšie pre  $U \subseteq V$ , susedia vo  $V \setminus U$  vrcholov v  $U$  sa nazývajú *susedia*  $U$ ; ich množina sa označuje  $N(U)$ .

**Definícia 1.1.2.2.** *Stupeň*  $d_G(v) = d(v)$  vrchola  $v$  je číslo  $|E(v)|$  hrán incidentných s  $v$ ; podľa našej definície grafu je toto číslo rovné počtu susedov  $v$ . Vrchol stupňa 0 sa nazýva *izolovaný*.

**Definícia 1.1.2.3.** Číslo  $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$  je *minimálny stupeň* grafu  $G$ , číslo  $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$  je *maximálny stupeň* grafu  $G$ .

**Definícia 1.1.2.4.** Ak všetky vrcholy grafu  $G$  majú rovnaký stupeň  $k$ , tak  $G$  je *k-regulárny* alebo jednoducho *regulárny*.

3-regulárny graf sa nazýva *kubický*.

**Definícia 1.1.2.5.** Číslo

$$d(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

je *priemerný stupeň* grafu  $G$ . Zrejme

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

**Definícia 1.1.2.6.**  $\varepsilon(G) := \frac{|E|}{|V|}$ .

**Lema 1.1.2.1.**  $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G)$ .

**Tvrdenie 1.1.2.2.** *Počet vrcholov nepárneho stupňa v grafe je vždy párny.*

**Tvrdenie 1.1.2.3.** *Každý graf  $G$  s aspoň jednou hranou má podgraf  $H$  s  $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ .*

### 1.1.3 Cesty a cykly

**Definícia 1.1.3.1.** *Cesta* je neprázdny graf  $P = (V, E)$  tvaru

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

kde všetky  $x_i$  sú si navzájom rôzne. Vrcholy  $x_0$  a  $x_k$  sú *spojené* cestou  $P$  a nazývajú sa jej *konce*; vrcholy  $x_1, \dots, x_{k-1}$  sú *vnútorné* vrcholy cesty  $P$ .

**Definícia 1.1.3.2.** Počet hrán cesty  $P$  je jej *dĺžka*, a cesta dĺžky  $k$  sa značí  $P^k$ .

$k$  môže byť aj nulové, teda  $P^0 = K^1$ .

**Definícia 1.1.3.3.** Pre dané množiny vrcholov  $A, B$  nazývame  $P = x_0 \dots x_k$  *A-B cestou* ak  $V(P) \cap A = \{x_0\}$  a  $V(P) \cap B = \{x_k\}$ .

**Definícia 1.1.3.4.** Dve a viac ciest je navzájom *nezávislých* ak žiadna z nich neobsahuje vnútorný vrchol inej.

**Definícia 1.1.3.5.** Pre daný graf  $H$ , nazveme  $P$  *H-cestou* ak  $P$  je netriviálna a pretína  $H$  presne vo svojich koncoch.

**Definícia 1.1.3.6.** Ak  $P = x_0 \dots x_{k-1}$  je cesta a  $k \geq 3$ , potom graf  $C := P + x_{k-1}x_0$  nazývame *cyklus* (alebo *kružnica*).

*Dĺžka* cyklu je počet jej hrán (alebo vrcholov); cyklus dĺžky  $k$  sa nazýva *k-cyklus* a označuje sa  $C^k$ .

**Definícia 1.1.3.7.** Minimálna dĺžka cyklu v grafe  $G$  je *obvod*  $g(G)$  grafu  $G$ ; maximálna dĺžka cyklu v  $G$  je jeho *horný obvod*. Ak  $G$  neobsahuje cyklus, obvod je rovný  $\infty$ , horný obvod nule.

**Definícia 1.1.3.8.** Hrana ktorá spája dva vrcholy cyklu ale sama nie je hranou z tohto cyklu sa nazýva *tetivou* tohto cyklu.

Teda *indukovaný cyklus* v  $G$ , cyklus v  $G$  tvoriaci indukovaný podgraf je taký, ktorý nemá žiadne tetivy.

**Tvrdenie 1.1.3.1.** Každý graf  $G$  obsahuje cestu dĺžky  $\delta(G)$  a cyklus dĺžky aspoň  $\delta(G) + 1$  (za podmienky, že  $\delta(G) \geq 2$ ).

**Definícia 1.1.3.9.** *Vzdialenosť*  $d_G(x, y)$  v  $G$  dvoch vrcholov  $x, y$  je dĺžka najkratšej  $x$ - $y$  cesty v  $G$ .

Ak taká cesta neexistuje, položíme  $d(x, y) := \infty$ .

**Definícia 1.1.3.10.** Najväčšia vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi grafu  $G$  je *priemer* grafu  $G$ , označuje sa  $\text{diam}(G)$ .

**Tvrdenie 1.1.3.2.** V každom grafe  $G$  obsahujúcom cyklus platí  $g(G) \leq 2\text{diam}(G) + 1$ .

**Definícia 1.1.3.11.** Vrchol nazveme *centrálnym* v  $G$  ak jeho najväčšia vzdialenosť od ľubovoľného iného vrchola je najmenšia možná.

Táto vzdialenosť sa nazýva *polomer* grafu  $G$ , označuje sa  $\text{rad}(G)$ .

Teda formálne,  $\text{rad}(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_g(x, y)$ .

**Tvrdenie 1.1.3.3.**  $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G)$ .

**Tvrdenie 1.1.3.4.** Graf  $G$  s polomerom najviac  $k$  a maximálnym stupňom najviac  $d$  nemá viac ako  $1 + kd^k$  vrcholov.

**Definícia 1.1.3.12.** Sled dĺžky  $k$  v grafe  $G$  je neprázdna striedavá postupnosť  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$  vrcholov a hrán v  $G$  taká, že  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  pre všetky  $i < k$ .

Ak  $v_0 = v_k$ , sled je *uzavretý*.

Ak sú hrany v slede navzájom rôzne, tento sled nazveme *ťah*.

#### 1.1.4 Súvislosť

**Definícia 1.1.4.1.** Neprázdny graf  $G$  nazývame *súvislý* ak ľubovoľné dva jeho vrcholy sú spojené cestou v  $G$ .

Ak  $U \subseteq V(G)$  a  $G[U]$  je súvislý, tak aj samotný  $U$  nazývame *súvislý* (v  $G$ ).

**Tvrdenie 1.1.4.1.** Vrcholy súvislého grafu  $G$  sa dajú vždy očíslovať, povedzme ako  $v_1, \dots, v_n$  tak, že  $G_i := G[v_1, \dots, v_i]$  je súvislý pre každé  $i$ .

**Definícia 1.1.4.2.** Maximálny súvislý podgraf grafu  $G$  sa nazýva *komponent* grafu  $G$ .

**Definícia 1.1.4.3.** Ak  $A, B \subseteq V$  a  $X \subseteq V \cup E$  sú také, že každá  $A$ - $B$  cesta v  $G$  obsahuje vrchol alebo hranu z  $X$ , hovoríme, že  $X$  *oddeľuje* množiny  $A$  a  $B$  v  $G$ .

Všeobecnejšie hovoríme, že  $X$  oddeľuje  $G$  a nazývame  $X$  a *oddeľujúcou množinou* v  $G$ , ak  $X$  oddeľuje dva vrcholy grafu  $G - X$  v  $G$ .

**Definícia 1.1.4.4.** Vrchol ktorý oddeľuje dva ďalšie vrcholy toto istého komponentu je *artikulácia*.

Hrana, ktorá oddeľuje jej konce sa nazýva *most*.

**Definícia 1.1.4.5.**  $G$  sa nazýva  *$k$ -súvislý* (pre  $k \in \mathbb{N}$ ) ak  $|G| > k$  a  $G - X$  je súvislý pre ľubovoľnú množinu  $X \subseteq V$  s  $|X| < k$ .

**Definícia 1.1.4.6.** Najväčšie celé číslo  $k$  také, že  $G$  je  $k$ -súvislý je *stupeň súvislosti*  $\kappa(G)$  grafu  $G$ .

**Definícia 1.1.4.7.** Ak  $|G| > 1$  a  $G - F$  je súvislý pre všetky množiny  $F \subseteq E$  s menej ako  $\ell$  hranami, potom  $G$  sa nazýva *hranovo  $\ell$ -súvislý*

**Definícia 1.1.4.8.** Najväčšie celé číslo  $\ell$  také, že  $G$  je hranovo  $\ell$ -súvislý je *stupeň hranovej súvislosti*  $\lambda(G)$  grafu  $G$ .

**Tvrdenie 1.1.4.2.** Pre každý netriviálny graf  $G$  platí

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

**Veta 1.1.4.3** (Mader 1972). Každý graf s priemerným stupňom aspoň  $4k$  obsahuje  $k$ -súvislý podgraf.

### 1.1.5 Stromy a lesy

**Definícia 1.1.5.1.** *Acyklický* graf, t.j. taký, ktorý neobsahuje cykly, sa nazýva *les*.

Súvislý les sa nazýva *strom*.

**Definícia 1.1.5.2.** Vrcholy stupňa 1 v strome sa nazývajú jeho *listy*.

**Veta 1.1.5.1.** Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné pre graf  $T$ :

1.  $T$  je strom;
2. každé dva vrcholy z  $T$  sú spojené jedinou (a jedinečnou) cestou v  $T$ ;
3.  $T$  je minimálne súvislý, t.j.  $T$  je súvislý, ale  $T - e$  je nesúvislý pre každá hranu  $e \in T$ ;
4.  $T$  je maximálne acyklický, t.j.  $T$  neobsahuje cyklus, ale  $T + xy$  ho obsahuje, pre každé dva nesusedné vrcholy  $x, y \in T$ .

**Dôsledok 1.1.5.2.** Vrcholy stromu môžu vždy byť zoradené, povedzme ako  $v_1, \dots, v_n$  tak, že každý vrchol  $v_i$  s  $i \geq 2$  má jediného suseda v množine  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ .

**Dôsledok 1.1.5.3.** Súvislý graf s  $n$  vrcholmi je strom práve vtedy, keď má  $n - 1$  hran.

**Dôsledok 1.1.5.4.** Ak  $T$  je strom a  $G$  je jeho ľubovoľný podgraf s  $\delta(G) \geq |T| - 1$ , tak potom  $T \subseteq G$ , t.j.  $G$  obsahuje podgraf izomorfný s  $T$ .

**Tvrdenie 1.1.5.5.** Každý súvislý graf obsahuje normálnu kostru s ľubovoľným vrcholom označeným ako koreň.

### 1.1.6 Bipartitné grafy

**Definícia 1.1.6.1.** Nech  $r \geq 2$  je celé číslo. Graf  $G = (V, E)$  sa nazýva *r-partitný* ak  $V$  dovoľuje rozklad na  $r$  tried takých, že každá hrana má svoje konce v rôznych triedach; vrcholy z rovnakej partície nesmú byť susedné. Namiesto '2-partitný' zvyčajne hovoríme *bipartitný*.

**Definícia 1.1.6.2.** *r*-partitný graf v ktorom každé dva vrcholy z rôznych tried rozkladu sú susedné nazývame *kompletný*; kompletný *r*-partitný graf pre všetky  $r$  dohromady sa nazýva *kompletný multipartitný* graf.

**Definícia 1.1.6.3.** Kompletný *r*-partitný graf  $\overline{K}^{n_1} * \dots * \overline{K}^{n_r}$  sa označuje  $K_{n_1, \dots, n_r}$ ; ak  $n_1 = \dots = n_r =: s$ , skracujeme to na  $K_s^r$ . Grafy tvaru  $K_{1, n}$  sa nazývajú *hviezdy*.

**Tvrdenie 1.1.6.1.** *Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje nepárny cyklus (cyklus nepárnej dĺžky).*

### 1.1.7 Kontrakcie a minory

**Definícia 1.1.7.1.** Nech  $e = xy$  je hrana grafu  $G = (V, E)$ .  $G/e$  označíme graf, ktorý vznikne z  $G$  *kontraktiou* hrany  $e$  do nového vrchola  $v_e$ , ktorý bude incidentný so všetkými pôvodnými susedmi vrcholov  $x$  a  $y$ . Formálne,  $G/e := (V', E')$  je graf s množinou vrcholov  $V' := (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$  (kde  $v_e$  je 'nový' vrchol, t.j.  $v_e \notin V \cup E$ ) a množinou hrán

$$E' := \{vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w \mid xw \in E \setminus \{e\} \text{ alebo } yw \in E \setminus \{e\}\}.$$

**Definícia 1.1.7.2.** Ak  $X$  je graf a  $\{V_x \mid x \in V(X)\}$  je partícia  $V$  do súvislých podmnožín tak, že pre každé dva vrcholy  $x, y \in X$  existuje  $V_x - V_y$  hrana v  $G$  práve vtedy ak  $xy \in E(X)$ , tak  $G$  označujeme  $MX$  a píšeme  $G = MX$ . Množiny  $V_x$  sú *vetvové množiny* tohto  $MX$ .

**Tvrdenie 1.1.7.1.** *G je MX práve vtedy ak X môžeme dostať z G sériou hranových kontrakcií, t.j. práve vtedy ak existujú grafy  $G_0, \dots, G_n$  a hrany  $e_i \in G_i$  také, že  $G_0 = G, G_n \simeq X$  a  $G_{i+1} = G_i/e_i$ , pre všetky  $i < n$*

**Definícia 1.1.7.3.** Ak  $G = MX$  je podgraf iného grafu  $Y$ , nazveme  $X$  *minor* grafu  $Y$  a značíme  $X \preceq Y$ .

**Definícia 1.1.7.4.** Ak nahradíme hrany grafu  $X$  nezávislými cestami medzi ich koncami (tak, že žiadna z týchto ciest nemá vnútorný vrchol spoločný s inou cestou v  $X$ ), nazveme graf  $G$  *subdivízia* grafu  $X$  a značíme  $G = TX$

**Definícia 1.1.7.5.** Ak  $G = TX$  je podgraf iného grafu  $Y$ , tak  $X$  nazývame *topologický minor* grafu  $Y$ .

**Definícia 1.1.7.6.** Ak  $G = TX$ , na  $V(X)$  pozeráme ako na podmnožinu  $V(G)$  a tieto vrcholy nazývame *vetvové vrcholy* grafu  $G$ ; ostatné vrcholy  $G$  nazývame jeho *subdivízne vrcholy*.

**Tvrdenie 1.1.7.2.**

1. Každý  $TX$  je aj  $MX$ ; teda, každý topologický minor nejakého grafu je tak isto aj jeho (obyčajný) minor.
2. Ak  $\Delta(X) \leq 3$ , tak každý  $MX$  obsahuje  $TX$ ; teda, každý minor s maximálnym stupňom najviac 3 nejakého grafu je tak isto jeho topologickým minorom.

**Tvrdenie 1.1.7.3.** Relácia minorov  $\preceq$  a relácia topologických minorov tvoria čiastočné usporiadanie triedy konečných grafov, t.j. tieto relácie sú reflexívne, antisymetrické a tranzitívne.

### 1.1.8 Eulerovské ťahy

**Definícia 1.1.8.1.** Uzavretý sled v grafe nazývame *eulerovský ťah* ak prechádza každou hranou grafu práve raz.

Graf je *eulerovský*, ak pripúšťa eulerovský ťah.

**Veta 1.1.8.1** (Euler 1736). *Spojitý graf je eulerovský práve vtedy, ak každý jeho vrchol je párneho stupňa.*

### 1.1.9 Lineárna algebra

**Definícia 1.1.9.1.** Nech  $G = (V, E)$  je graf s  $n$  vrcholmi a  $m$  hranami, povedzme  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  a  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . *Vrcholový priestor*  $\mathcal{V}(G)$  grafu  $G$  je vektorový priestor nad dvojprvkovým poľom  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  všetkých funkcií  $V \rightarrow \mathbb{F}_2$ .

**Definícia 1.1.9.2.** Súčet  $U + U'$  dvoch množín  $U, U' \subseteq V$  je ich symetrická diferenciacia, a  $U = -U$  pre všetky  $U \subseteq V$ .

Nula v  $\mathcal{V}(G)$  je prázdna množina vrcholov  $\emptyset$ .

Keďže  $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$  je *standardnou bázou*  $\mathcal{V}(G)$ , dostávame  $\dim \mathcal{V}(G) = n$ .

**Definícia 1.1.9.3.** Rovnako ako v predchádzajúcej definícii, funkcie  $E \rightarrow \mathbb{F}_2$  tvoria *hranový priestor*  $\mathcal{E}(G)$  grafu  $G$ : jeho prvky sú podmnožiny  $E$ , vektorový súčet je symetrickou diferenciou,  $\emptyset \subseteq E$  je nula a  $F = -F$  pre všetky  $F \subseteq E$ .

Ako predtým,  $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$  je štandardná báza  $\mathcal{E}(G)$  a  $\dim \mathcal{E}(G) = m$ .

**Definícia 1.1.9.4.** Majme dva hranové priestory  $F, F' \in \mathcal{E}(G)$  a ich koeficienty  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  a  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$ . S ohľadom na štandardnú bázu píšeme  $\langle F, F' \rangle := \lambda_1 \lambda'_1 + \dots + \lambda_m \lambda'_m \in \mathbb{F}_2$ .

**Definícia 1.1.9.5.** Majme podpriestor  $\mathcal{F}$  priestoru  $\mathcal{E}(G)$ . Píšeme

$$\mathcal{F}^\perp := \{D \in \mathcal{E}(G) \mid \langle F, D \rangle = 0 \text{ pre všetky } F \in \mathcal{F}\}.$$

Toto je opäť podpriestor  $\mathcal{E}(G)$ , a máme

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m.$$

**Definícia 1.1.9.6.** *Cyklový priestor*  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$  je podpriestor  $\mathcal{E}(G)$  indukovaný všetkými kružnicami v  $G$  - presnejšie ich množinami hrán.

Dimenzia  $\mathcal{C}(G)$  je *cyklomatické číslo* grafu  $G$ .

**Tvrdenie 1.1.9.1.** *Indukované kružnice v  $G$  generujú jeho celý cyklový priestor.*

**Tvrdenie 1.1.9.2.** *Množina hrán  $F \subseteq E$  leží v  $\mathcal{C}(G)$  práve vtedy, ak každý vrchol  $z \in (V, F)$  má párny stupeň.*

**Definícia 1.1.9.7.** Ak  $\{V_1, V_2\}$  je rozklad  $V$ , množina  $E(V_1, V_2)$  všetkých hrán grafu  $G$  *križujúcich* tento rozklad sa nazýva *rez*. Pre  $V_1 = \{v\}$  sa tento rez označuje  $E(v)$ .

**Tvrdenie 1.1.9.3.** *Spolu s  $\emptyset$ , rezy v  $G$  tvoria podpriestor  $\mathcal{C}^*$  priestoru  $\mathcal{E}(G)$ . Tento priestor je generovaný rezi tvaru  $E(v)$  a nazývame ho priestor rezov grafu  $G$ .*

**Lema 1.1.9.4.** *Minimálne rezy v súvislom grafe generujú celý priestor rezov.*

**Veta 1.1.9.5.** *Cyklový priestor  $\mathcal{C}$  a priestor rezov  $\mathcal{C}^*$  v každom grafe spĺňajú*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp} \text{ a } \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^\perp.$$

**Veta 1.1.9.6.** *Každý súvislý graf  $G$  s  $n$  vrcholmi a  $m$  hranami spĺňa*

$$\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1 \text{ a } \dim \mathcal{C}^*(G) = n - 1.$$

**Definícia 1.1.9.8.** Incidenčná matica  $B = (b_{ij})_{n \times m}$  grafu  $G = (V, E)$  s  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  a  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  je definovaná nad  $\mathbb{F}_2$  podľa

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ak } v_i \in e_j \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

**Tvrdenie 1.1.9.7.**

1.  $\ker B = \mathcal{C}(G)$ .
2.  $\text{im } B^t = \mathcal{C}^*(G)$ .

**Definícia 1.1.9.9.** Matica susedností  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  grafu  $G$  je definovaná ako

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ak } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

**Tvrdenie 1.1.9.8.** Nech  $D$  označuje reálnu diagonálnu maticu  $(d_{ij})_{n \times n}$  s  $d_{ii} = d(v_i)$  a  $d_{ij} = 0$  inak. Potom

$$BB^t = A + D.$$

### 1.1.10 Ďalšie grafové pojmy

**Definícia 1.1.10.1.** *Hypergraf* je dvojica  $(V, E)$  disjunktných množín, kde prvky množiny  $E$  sú neprázdne podmnožiny (ľubovoľnej mohutnosti) množiny  $V$ .

**Definícia 1.1.10.2.** *Orientovaný graf* (alebo aj *digraf* - z anglického “directed graph”) je dvojica  $(V, E)$  disjunktných množín (vrcholov a hrán) spolu s dvoma zobrazeniami  $\text{init} : E \rightarrow V$  a  $\text{ter} : E \rightarrow V$  priradujúcimi každej hrane  $e$  počiatočný vrchol  $\text{init}(e)$  a koncový vrchol  $\text{ter}(e)$ . Hrana  $e$  je orientovaná z  $\text{init}(e)$  do  $\text{ter}(e)$ .

Orientovaný graf môže mať niekoľko hrán medzi tými istými dvoma vrcholmi  $x, y$ . Takéto hrany sa nazývajú *násobné hrany*; ak majú rovnaký smer sú *paralelné*. Ak  $\text{init}(e) = \text{ter}(e)$ , hrana  $e$  sa nazýva *slučka*.

**Definícia 1.1.10.3.** Orientovaný graf  $D$  je *orientácia* neorientovaného grafu  $G$  ak  $V(D) = V(G)$  a  $E(D) = E(G)$  a ak  $\{\text{init}(e), \text{ter}(e)\} = \{x, y\}$  pre každú hranu  $e = xy$ .

**Definícia 1.1.10.4.** *Multigraf* je dvojica  $(V, E)$  disjunktných množín spolu so zobrazením  $E \rightarrow V \cup [V]^2$  priradujúcim každej hrane jeden alebo dva vrcholy, jej *konce*. Teda, multigrafy tiež môžu mať slučky a viacnásobné hrany.



## 1.2 Úlohy

**Úloha 1.1.** Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie:

Každý sled medzi dvoma vrcholmi obsahuje cestu medzi týmito vrcholmi.

**Návod.** Treba eliminovať opakujúce sa vrcholy v rámci tohto sledu.

**Úloha 1.2.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v grafe majú spoločný vrchol. Majú spoločnú aj hranu?

**Návod.** Predpokladajme opak a dokážeme spor. Pre spoločnú hranu skúsme nájsť kontrapríklad.

**Úloha 1.3.** Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

1. Každý uzavretý sled párnej dĺžky obsahuje kružnicu párnej dĺžky.
2. Každý uzavretý sled nepárnej dĺžky obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

**Návod.**

1. Čo ak sled pozostáva z dvoch kružníc?
2. Predpokladajme opak a dokážeme spor.

**Úloha 1.4.** Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie: Ak  $e$  je hrana súvislého grafu  $G$ , tak potom  $e$  leží na nejakej kostre grafu  $G$ .

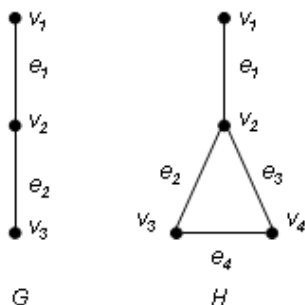
**Návod.** Ak  $e$  je most, tvrdenie triviálne platí. Inak vezmeme ľubovoľnú kosť grafu  $G$ , ktorá neobsahuje  $e$ . Pridaním hrany  $e$  a odobratím inej vhodnej hrany dostaneme novú kosť, ktorá obsahuje  $e$ .

**Úloha 1.5.** Napíšte incidenčné matice a matice susedností pre grafy  $G$  a  $H$  z obrázku 1.1.

**Návod.** Stačí dodržať definície 1.1.9.8 a 1.1.9.9.

**Úloha 1.6.**

1. Koľko hrán má tzv. hviezda, teda bipartitný graf  $K_{1,n}$ ?
2. Graf  $W_n$ , ktorý má  $n+1$  vrcholov  $\{v_0, \dots, v_n\}$ , pričom  $v_0$  je susedný so všetkými ostatnými vrcholmi a ďalšie hrany sú  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ , sa nazýva  $n$ -koleso. Koľko hrán má graf  $W_n$ ?
3. Napíšte matice susedností a incidenčné matice grafov  $K_{1,5}$  a  $W_5$ .



Obrázok 1.1: Grafy  $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{e_1, e_2\})$  a  $H = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$ .

**Návod.** Stačí vychádzať z definície grafov a definícií matice susedností a incidenčnej matice.

**Úloha 1.7.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý.

**Návod.** Vezmime si jeden komponent pôvodného grafu a sledujme hrany z neho vedúce v komplementárnom grafe.

**Úloha 1.8.** Dokážte, že ak  $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$ , potom  $G$  je súvislý.

**Návod.** Ak by nebol súvislý, aké by bolo  $\delta(G)$ ?

**Úloha 1.9.** Dokážte, že ak  $G$  je samokomplementárny graf ( $\overline{G}$  je izomorfný s  $G$ ) rádu  $n$ , tak  $n = 0 \pmod{4}$  alebo  $n = 1 \pmod{4}$ .

Nájdite aspoň 3 samokomplementárne grafy.

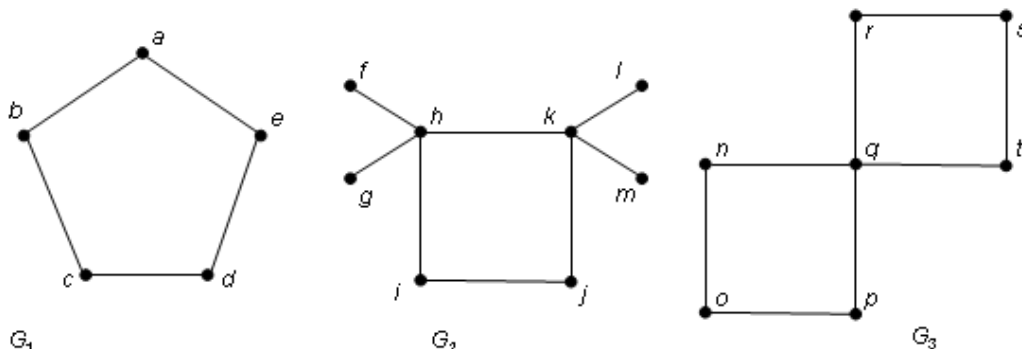
**Návod.** Skúmajte počet hrán samokomplementárneho grafu rádu  $n$ .

**Úloha 1.10.** (+) Nech  $G$  je multigraf, teda môže obsahovať slučky a viacnásobné hrany. Označme  $t(G)$  počet kostier multigrafu  $G$ . Zdôvodnite prečo platí:

$$\forall e \in E(G) : t(G) = t(G - e) + t(G/e)$$

a postupným kontrahovaním hrán vypočítajte  $t(G_1)$ ,  $t(G_2)$  a  $t(G_3)$  pre grafy z obrázku 1.2.

**Návod.** Počet kostier ľubovoľného grafu je predsa rovný súčtu počtu kostier prechádzajúcich hranou  $e$  a počtu kostier neprechádzajúcich hranou  $e$ .



Obrázok 1.2: Aký je počet kostier grafov  $G_1$ ,  $G_2$  a  $G_3$ ?

**Úloha 1.11.** Majme daný graf  $G$ . Paritný podgraf  $P$  grafu  $G$  je taký podgraf  $G$ , že  $\forall v \in V(G): d_G(v) = d_P(v) \pmod{2}$ , teda všetky vrcholy majú v  $P$  stupeň rovnakej parity ako v  $G$ .

Dokážte, že v každej kostre grafu  $G$  je obsiahnutý paritný podgraf.

**Návod.** Stačí nájsť minimálny možný paritný podgraf nejakej danej kostry. Ak je v grafe  $G$  vrchol párneho stupňa, minimálny paritný podgraf obsahuje len jeden vrchol, inak obsahuje práve dva vrcholy.

**Úloha 1.12.** Dokážte, že pre každý graf  $G$  a ľubovoľný vrchol  $v \in V(G)$  platí, že  $\overline{G - v} = \overline{G} - v$ .

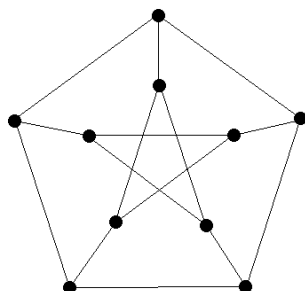
**Návod.** Nezáleží na tom, či najprv z grafu spravíme komplementárny a potom odstránime ľubovoľný vrchol, alebo naopak.

**Úloha 1.13.** Nech  $G$  je bipartitný graf s  $v$  vrcholmi. Dokážte, že  $G$  má najviac  $\frac{v^2}{4}$  hrán.

**Návod.** Maximálny počet hrán obsahuje kompletne bipartitný graf s rovnako veľkými partíciami.

**Úloha 1.14.** Nájdite cykly dĺžky 5, 6, 8 a 9 v Petersenovom grafe zobrazenom na obrázku 1.3.

**Úloha 1.15.** Graf  $G$  obsahuje aspoň dva vrcholy. Práve jeden vrchol má stupeň 1, všetky ostatné vrcholy majú stupeň 2 alebo viac. Dokážte, že graf  $G$  obsahuje kružnicu. Bolo by toto tvrdenie pravdivé aj ak by sme povolili nekonečne veľkú množinu vrcholov?

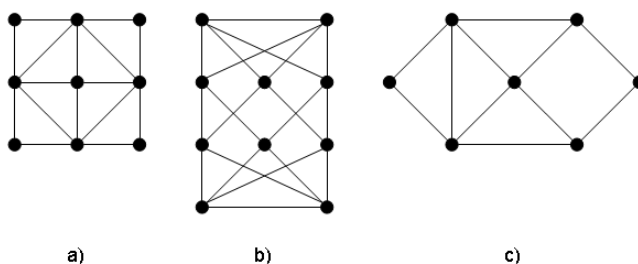


Obrázok 1.3: Petersenov graf.

**Návod.** Aby graf neobsahoval kružnicu (a pritom neobsahoval izolované vrcholy), musí mať každý jeho komponent aspoň dva “konce”.

**Úloha 1.16.** Ktorý z grafov na obrázku 1.4 obsahuje eulerovský ťah? Ak graf eulerovský ťah obsahuje, nájdite aspoň jeden.

**Návod.** Stačí aplikovať Eulerovu vetu 1.1.8.1.



Obrázok 1.4: Povoľujú dané grafy eulerovský ťah?

**Úloha 1.17.** Aký je maximálny počet mostov v grafe s  $v$  vrcholmi?

**Návod.** Maximálny počet mostov má strom.

**Úloha 1.18.** Dokážte, že graf, v ktorom všetky vrcholy majú párny stupeň neobsahuje most.

**Návod.** Predpokladajme opak. Čo by sa stalo ak by sme most odstránili?

**Úloha 1.19.** (+) Označme vrcholy stromu  $T$   $1, 2, \dots, v$ . Nech  $D(i, j)$  označuje vzdialenosť medzi vrcholmi  $i$  a  $j$  v  $T$ . Nech  $M_T^v$  označuje maticu  $v \times v$ , kde  $a_{i,j} = x^{D(i,j)}$ . Dokážte, že determinant matice  $M_T^v$  sa rovná  $(1 - x^2)^{v-1}$ .

**Návod.** Tvrdenie dokážeme indukciou na  $v$ . Prípád  $v = 1$  je triviálny. V prípade  $v = i + 1$  sa pozrieme na to, ako bude vyzeráť riadok a stĺpec  $l$ , kde  $l$  je list stromu  $T$  so susedom  $m$ . Elementárnymi úpravami matice  $M_T^{i+1}$  dokážeme jej determinant vyjadriť pomocou determinantu matice  $M_T^i$ .

**Úloha 1.20.** *Centrum*  $c(G)$  grafu  $G$  zdefinujeme ako množinu jeho centrálnych vrcholov. Dokážte, že

1. centrum kompletneho grafu sa rovná celému grafu,
2. centrum stromu pozostáva z jedného vrchola alebo z dvoch susedných vrcholov.

**Návod.**  $rad(K_n) = 1$  pre ľubovoľné  $n$ . Tvrdenie o centre stromu dokážeme indukciou na počet vrcholov.

**Úloha 1.21.** Dokážte, že každý most v súvislom grafe je súčasťou každej kostry daného grafu.

**Návod.** Predpokladajme opak a prideme k sporu.

**Úloha 1.22.** (+) Počet kostier grafu  $G$  označíme  $t(G)$ .

1. Nech  $v_1, \dots, v_n$  sú dané vrcholy a  $d_1, \dots, d_n$  celé čísla také, že  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ ,  $d_i \geq 1$ . Dokážte, že počet stromov na množine vrcholov  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , kde vrchol  $v_i$  má stupeň  $d_i$  je

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!}.$$

2. Dokážte, že  $t(K_n) = n^{n-2}$ .

**Návod.**

1. Matematickou indukciou vzhľadom na  $n$ . Predpokladajme, že  $d_n = 1$  a odstráňme vrchol  $v_n$ .
2. Použijeme predchádzajúci výsledok a binomickú vetu.

# Kapitola 2

## Párenie

### 2.1 Základné definície a tvrdenia

**Definícia 2.1.1.** Množina  $M$  nezávislých hrán v grafe  $G = (V, E)$  sa nazýva *párenie*.  $M$  je párením  $U \subseteq V$  ak každý vrchol v  $U$  je incidentný s hranou v  $M$ . Vrcholy v  $U$  sa potom nazývajú *spárené* (podľa  $M$ ); vrcholy neincidentné so žiadnou hranou z  $M$  sú *nespárené*.

**Definícia 2.1.2.**  $k$ -regulárny podgraf obsahujúci všetky vrcholy sa nazýva *k-faktor*. Teda podgraf  $H \subseteq G$  je 1-faktor grafu  $G$  práve vtedy, ak  $E(H)$  je párenie  $V$ .

#### 2.1.1 Párenie v bipartitných grafoch

V celej tejto časti nech  $G = (V, E)$  je pevný bipartitný graf s bipartíciou  $\{A, B\}$ . Vrcholy označené ako  $a, a'$  atď. budú ležať v  $A$ , vrcholy označené ako  $b, b'$  atď. budú ležať v  $B$ .

**Definícia 2.1.1.1.** Cesta v grafe  $G$ , ktorá začína v  $A$  nespáreným vrcholom a ktorá obsahuje striedavo hrany z  $E \setminus M$  a z  $M$ , sa nazýva *alternujúca cesta* vzhľadom na  $M$ .

**Definícia 2.1.1.2.** Alternujúca cesta  $P$ , ktorá končí nespárovaným vrcholom z  $B$  sa nazýva *zväčšujúca cesta*.

**Definícia 2.1.1.3.** Množinu  $U \subseteq V$  nazývame *pokrytie  $E$*  (resp. *vrcholové pokrytie  $G$* ) ak každá hrana z  $G$  je incidentná s vrcholom z  $U$ .

**Veta 2.1.1.1** (König, 1931). *Mohutnosť maximálneho párenia v  $G$  je rovná mohutnosti minimálneho vrcholového pokrytia.*

**Veta 2.1.1.2** (Hall, 1935).  $G$  obsahuje párenie  $A$  práve vtedy, ak  $|N(S)| \geq |S|$  pre všetky  $S \subseteq A$ .

**Dôsledok 2.1.1.3.** Ak  $|N(S)| \geq |S| - d$  pre každú množinu  $S \subseteq A$  a nejaké pevné  $d \in \mathbb{N}$ , potom  $G$  obsahuje párenie s mohutnosťou  $|A| - d$ .

**Dôsledok 2.1.1.4.** Ak  $G$  je  $k$ -regulárny s  $k \geq 1$ , tak potom  $G$  má 1-faktor.

**Dôsledok 2.1.1.5** (Petersen, 1891). Každý regulárny graf kladného párneho stupňa obsahuje 2-faktor.

## 2.1.2 Párenie vo všeobecných grafoch

**Veta 2.1.2.1** (Tutte, 1947). Graf  $G$  má 1-faktor práve vtedy, ak  $q(G - S) \leq |S|$  pre všetky  $S \subseteq V(G)$ .

**Definícia 2.1.2.1.** Graf  $G = (V, E)$  sa nazýva *faktorovo-kritický*, ak  $G \neq \emptyset$  a  $G - v$  má 1-faktor pre každý vrchol  $v \in G$ .

**Definícia 2.1.2.2.** Množinu vrcholov  $S \subseteq V$  nazývame *spáriteľnú* s  $G - S$  ak bipartitný graf  $H_S$ , ktorý dostaneme z  $G$  kontrakciou komponentov  $C \in \mathcal{C}_{G-S}$  do jediných vrcholov a odstránením všetkých hrán vnútri  $S$ , obsahuje párenie  $S$ .

**Veta 2.1.2.2.** Každý graf  $G = (V, E)$  obsahuje množinu vrcholov  $S$  s nasledovnými dvoma vlastnosťami:

1.  $S$  je spáriteľná s  $G - S$ ;
2. každý komponent  $G - S$  je faktorovo-kritický.

Keď je daná akákoľvek taká množina  $S$ , graf  $G$  obsahuje 1-faktor práve vtedy, ak  $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ .

**Dôsledok 2.1.2.3** (Petersen, 1891). Každý kubický graf bez mostov má 1-faktor.

**Tvrdenie 2.1.2.4.** Ak graf  $G$  má párny počet vrcholov, tak potom  $G$  nemá 1-faktor práve vtedy, keď existuje  $w$ -množina vrcholov  $W$  taká, že  $G - W$  má najviac  $w + 2$  komponentov nepárnej mohutnosti.

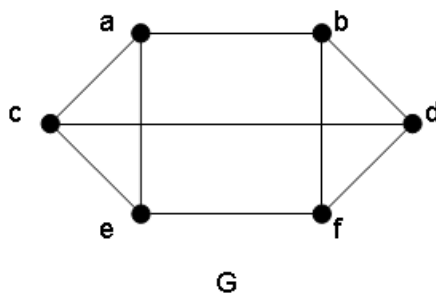
## 2.2 Úlohy

**Úloha 2.1.** Overte, že každý súvislý graf so štyrmi vrcholmi okrem  $K_{1,3}$  obsahuje 1-faktor.

**Návod.** Vzhľadom na izomorfizmus je práve šesť rozdielnych súvislých grafov so štyrmi vrcholmi, teda stačí nájsť v každom z nich (okrem  $K_{1,3}$ ) 1-faktor.

**Úloha 2.2.** Zdefinujeme  $k$ -faktorizáciu grafu  $G$  ako rozklad množiny hrán  $E(G)$  na hranovo disjunktné  $k$ -faktory. Nájdite všetky 1-faktory a 1-faktorizácie grafu  $G$  z obrázku 2.1. Overte, že obsahuje aj 1-faktor, ktorý nie je súčasťou žiadnej 1-faktorizácie.

**Návod.** Keď nájdeme všetky 1-faktory, tak skúsime zjednotením tých hranovo disjunktných z nich získať pôvodný graf  $G$ . Tým získame 1-faktorizáciu.



Obrázok 2.1: Nájdite všetky 1-faktory a 1-faktorizácie grafu  $G$ .

**Úloha 2.3.** Nech  $G$  je súvislý graf s párnym počtom vrcholov a neobsahuje  $K_{1,3}$  ako indukovaný podgraf. Dokážte, že  $G$  má 1-faktor.<sup>1</sup>

**Návod.** Matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov a využitím tvrdenia z úlohy 3.3.

**Úloha 2.4.** Na futbalovom turnaji sa zúčastnilo  $2n$  družstiev. Hrá sa systémom každý s každým. Už boli odohrané dve kompletne kolá, teda v oboch kolách hrali všetky družstvá. Dokážte, že ešte stále sa dajú družstvá rozdeliť do dvoch skupín po  $n$  družstiev tak, že družstvá v rovnakej skupine spolu ešte na turnaji nehrali.

<sup>1</sup>Môžete pri tom použiť tvrdenie “Nech  $G$  je súvislý graf, nie však  $K_1$ , ktorý neobsahuje indukovaný podgraf izomorfny s  $K_{1,3}$ . Potom  $G$  obsahuje dvojicu susedných vrcholov  $v_1$  a  $v_2$  takých, že  $G - \{v_1, v_2\}$  je súvislý.”, ktorého dôkaz tvorí úlohu 3.3



**Návod.** Keďže sa odohrali dve kolá, musia na turnaji byť zúčastnené aspoň štyri družstvá. Turnaj môžeme reprezentovať grafom, kde družstvá budú reprezentované vrcholmi a ich vzájomný zápas hranou medzi týmito vrcholmi. Po dvoch odohratých kolách má každý vrchol stupeň dva.

**Úloha 2.5.** Dokážte, že žiaden bipartitný graf nie je faktorovo-kritický.

**Návod.** Bipartitný graf môže obsahovať párenie iba vtedy, ak obe jeho partície sú rovnako veľké (prečo?). Nedá sa však zaručiť, aby sa odobrátím ľubovoľného vrcholu stali obe partície rovnako veľké.

**Úloha 2.6.** Zdefinujeme  $n$ -rozmernú kocku  $Q_n$  nasledovne.  $Q_1$  pozostáva z dvoch vrcholov a jednej hrany,  $Q_2$  je cyklus  $C_4$  a vo všeobecnosti  $Q_n$  vznikne z dvoch  $Q_{n-1}$  spojením každého vrchola jedného grafu s príslušným vrcholom druhého grafu.

1. Koľko vrcholov má  $Q_n$ ?
2. Dokážte, že  $Q_n$  je regulárny. Akého je stupňa?
3. Dokážte, že  $Q_n$  má 1-faktorizáciu.<sup>2</sup>

**Návod.** Práve z rekurzívnej definície sa ľahko dá zistiť počet vrcholov a tiež ich stupeň. Prítomnosť 1-faktorizácie dokážeme pomocou indukcie vzhľadom na  $n$ .

**Úloha 2.7.** (+) Dokážte, že ak  $G$  je kubický graf bez mostov a  $e$  je ľubovoľná jeho hrana, tak  $G$  má 1-faktor obsahujúci  $e$ .

**Návod.** Dokážeme, že  $G - \{x, y\}; e = xy$  má 1-faktor za pomoci tvrdenia 2.1.2.4.

**Úloha 2.8.** Dokážte, že ak má kubický graf menej ako tri mosty, tak potom má 1-faktor.

**Návod.** Budeme postupovať indukciou vzhľadom na počet vrcholov grafu  $G$  a využijeme úlohu 2.7.

**Úloha 2.9.** Nech  $G$  je kubický graf bez mostov. Dokážte, že ak  $e$  je ľubovoľná hrana grafu  $G$ , tak  $G$  má 1-faktor, ktorý neobsahuje hranu  $e$ .

**Návod.** Použijeme tvrdenie z úlohy 2.7.

**Úloha 2.10.** (+) Dokážte, že počet rôznych 1-faktorov grafu  $K_{2n}$  je  $(2n - 1)!! = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \dots 3 \cdot 1$ .

**Návod.** Matematickou indukciou vzhľadom na  $n$ . Treba si uvedomiť koľko rôznych 1-faktorov grafu  $K_{2n+2}$  vieme “vyrobiť” z jedného 1-faktora grafu  $K_{2n}$ .

<sup>2</sup>1-faktorizácia je zadaná v úlohe 2.2.

# Kapitola 3

## Súvislosť

### 3.1 Základné definície a tvrdenia

#### 3.1.1 Dvojsúvislé grafy a podgrafy

**Definícia 3.1.1.1.** Maximálny súvislý podgraf bez artikulácie sa nazýva *blok*.

**Lema 3.1.1.1.** *B je blok práve vtedy, ak je buď maximálny 2-súvislý podgraf, most, alebo izolovaný vrchol.*

**Definícia 3.1.1.2.** Nech  $A$  označuje množinu artikulácií grafu  $G$  a  $B$  množinu jeho blokov. Prirodzený bipartitný graf na  $A \cup B$  tvorený hranami  $aB$ , kde  $a \in B$  sa nazýva *blokový graf* grafu  $G$ .

**Lema 3.1.1.2.** *Blokový graf súvislého grafu je strom.*

**Lema 3.1.1.3.** *Graf je 2-súvislý práve vtedy, ak môže byť skonštruovaný z kružnice  $H$  postupným pridávaním  $H$ -ciest k už skonštruovanému grafu  $H$ .*

#### 3.1.2 Štruktúra trojsúvislých grafov

**Lema 3.1.2.1.** *Ak  $G$  je 3-súvislý a  $|G| > 4$ , potom  $G$  obsahuje hranu  $e$  takú, že  $G/e$  je opäť 3-súvislý.*

**Veta 3.1.2.2** (Tutte, 1961). *Graf je 3-súvislý práve vtedy, keď existuje postupnosť  $G_0, \dots, G_n$  grafov s nasledujúcimi vlastnosťami:*

1.  $G_0 = K_4$  a  $G_n = G$
2.  $G_{i+1}$  obsahuje hranu  $xy$  s  $d(x), d(y) \geq 3$  a  $G_i = G_{i+1}/xy$  pre každé  $i < n$ .

**Veta 3.1.2.3** (Tutte, 1963). *Cyklový priestor 3-súvislého grafu je generovaný jeho neoddeľujúcimi indukovanými kružnicami.*

### 3.1.3 Mengerova veta

**Veta 3.1.3.1** (Menger, 1927). *Nech  $G = (V, E)$  je graf a  $A, B \subseteq V$ . Potom minimálny počet vrcholov oddeľujúcich  $A$  od  $B$  v  $G$  je rovný maximálnemu počtu disjunktných  $A$ - $B$  ciest v  $G$ .*

**Definícia 3.1.3.1.** Množina  $a$ - $B$  ciest sa nazýva  $a$ - $B$  vejár, ak ľubovoľné dve z tých ciest majú spoločný len vrchol  $a$ .

**Lema 3.1.3.2.** *Pre  $B \subseteq V$  a  $a \in V \setminus B$  je minimálny počet vrcholov rôznych od  $a$  oddeľujúcich  $a$  od  $B$  v  $G$  rovný maximálnemu počtu ciest vytvárajúcich  $a$ - $B$  vejár v  $G$ .*

**Lema 3.1.3.3.** *Nech  $a$  a  $b$  sú dva rôzne vrcholy  $G$ .*

1. *Ak  $ab \notin E$ , potom minimálny počet vrcholov rôznych od  $a$  aj  $b$  oddeľujúcich  $a$  od  $b$  v  $G$  je rovný maximálnemu počtu nezávislých  $a$ - $b$  ciest v  $G$ .*
2. *Minimálny počet hrán oddeľujúcich  $a$  od  $b$  v  $G$  je rovný maximálnemu počtu hranovo-disjunktných  $a$ - $b$  ciest v  $G$ .*

**Veta 3.1.3.4** (Globálna verzia Mengerovej vety).

1. *Graf je  $k$ -súvislý práve vtedy, keď obsahuje  $k$  nezávislých ciest medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi.*
2. *Graf je hranovo  $k$ -súvislý práve vtedy, keď obsahuje  $k$  hranovo-disjunktných ciest medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi.*

### 3.1.4 Hranovo-disjunktné kostry

**Definícia 3.1.4.1.** Hrany, ktorých konce ležia v rôznych partíciách grafu nazývame *križové hrany*.

**Veta 3.1.4.1** (Tutte, 1961; Nash-Williams, 1961). *Multigraf obsahuje  $k$  hranovo-disjunktných kostier práve vtedy, keď každý rozklad  $P$  jeho vrcholovej množiny má aspoň  $k(|P| - 1)$  križových hrán.*

**Lema 3.1.4.2.** *Každý hranovo  $2k$ -súvislý multigraf  $G$  obsahuje  $k$  hranovo-disjunktných kostier.*

**Definícia 3.1.4.2.** Podgrafy  $G_1, \dots, G_k$  grafu  $G$  rozkladajú graf  $G$ , ak ich hranové množiny tvoria rozklad  $E(G)$ .

**Veta 3.1.4.3** (Nash-Williams, 1964). *Multigraf  $G = (V, E)$  môže byť rozložený na najviac  $k$  lesov práve vtedy, keď  $\|G[U]\| \leq k(|U| - 1)$  pre každú neprázdnu množinu  $U \subseteq V$ .*

## 3.2 Úlohy

**Úloha 3.1.** Nech  $G$  má  $v$  vrcholov a  $\delta(G) \geq \frac{v-1}{2}$ . Dokážte, že  $G$  je súvislý.

**Návod.** Stačí ukázať, že ľubovoľné dva nesusedné vrcholy majú spoločného suseda.

**Úloha 3.2.** Dokážte, že regulárny graf nepárneho stupňa nemôže mať komponent s nepárnym počtom vrcholov. Aký dôsledok má toto tvrdenie na počet vrcholov regulárnych grafov nepárneho stupňa?

**Návod.** Predpokladáme opak a zistíme počet hrán v danom komponente s nepárnym počtom vrcholov.

**Úloha 3.3.** (+) Nech  $G$  je súvislý graf, nie však  $K_1$ , ktorý neobsahuje indukovaný podgraf izomorfný s  $K_{1,3}$ . Ukážte, že  $G$  obsahuje dvojicu susedných vrcholov  $v_1$  a  $v_2$  takých, že  $G - \{v_1, v_2\}$  je súvislý.

**Návod.** Nech  $G$  má priemer  $d$ . Vyberme nejaké vrcholy  $x$  a  $y$  vzdialené  $d$ . Nech  $x, \dots, z, y$  je cesta dĺžky  $d$ . Ukážte, že ak  $G - \{x, y\}$  je nesúvislý, tak  $G - \{v_1, v_2\}$  je súvislý pre nejakú inú dvojicu vrcholov.

**Úloha 3.4.** (+) Počet blokov grafu  $G$  označíme  $b(G)$  a počet blokov grafu  $G$  obsahujúcich vrchol  $v$  označíme  $b_G(v)$ . Dokážte, že ak  $G$  je súvislý, tak

$$b(G) - 1 = \sum_{v \in V} (b_G(v) - 1).$$

**Návod.** Nech  $G$  obsahuje  $r$  artikulácií. Použijeme indukciu na  $r$  a zameriame sa na bloky obsahujúce práve jednu artikuláciu grafu  $G$ .

**Úloha 3.5.** Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie. Súvislý graf s aspoň dvoma hranami je blok práve vtedy, keď ľubovoľné dve susedné hrany ležia na kružnici.

**Návod.** Implikácia " $\Rightarrow$ " je zrejímavá. V implikácii " $\Leftarrow$ " stačí dokázať, že vrchol incidentný s oboma hranami je artikulácia.

**Úloha 3.6.** Nájdite príklady grafov, pre ktoré platí:

1.  $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$ ,
2.  $\kappa(G) < \lambda(G) = \delta(G)$ ,
3.  $\kappa(G) = \lambda(G) < \delta(G)$ .

**Úloha 3.7.** Nech  $w_i, 1 \leq i \leq k$  sú rôzne vrcholy  $k$ -súvislého grafu  $G$ . Nech  $H$  je graf, ktorý vznikne z  $G$  pridaním nového vrcholu  $v$  a hrán  $vw_i, 1 \leq i \leq k$ . Dokážte, že  $H$  je  $k$ -súvislý.

**Návod.** Keďže  $G$  je  $k$ -súvislý, tak odstránením menej ako  $k$  vrcholov ho nezniesúvislíme. A vrchol  $v$  v grafe  $H$  má práve  $k$  susedov.

**Úloha 3.8.** Nech  $Q_n$  je  $n$ -rozmerná kocka.<sup>1</sup> Aké je  $\kappa(Q_n)$  a  $\lambda(Q_n)$ ?

**Návod.** Využijeme tvrdenie z úlohy 2.6 a tvrdenie 1.1.4.2.

**Úloha 3.9.** (+) Dokážte, že ak  $\delta(G) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$ , tak potom  $\lambda(G) = \delta(G)$ . Nájdite graf s  $\delta(G) = \lfloor \frac{1}{2}|V(G)| - 1 \rfloor$  a  $\lambda(G) < \delta(G)$ .

**Návod.** Predpokladajme, že v grafe spĺňajúcom danú podmienku platí  $\lambda(G) < \delta(G)$ . Skúmame mohutnosti častí grafu  $G$  na ktoré sa rozpadne odobratím vhodnej množiny  $\lambda(G)$  hrán a dospejeme k sporu.

**Úloha 3.10.** (+) Označme  $c(G)$  počet komponentov grafu  $G$ . Zdefinujeme číslo rozpadu grafu ako  $\zeta(G) = \min\{c(G - E(T)) \mid T \text{ je kostra grafu } G\}$ . Dokážte, že pre súvislý graf  $G$  bez mostov platí:

$$\forall e \in E(G) : \zeta(G) \leq \zeta(G - e) \leq \zeta(G) + 1.$$

**Návod.** Ľavá nerovnosť je triviálna. Pravú nerovnosť môžeme rozdeliť na dva prípady.  $e \notin T$  a  $e \in T$ , kde  $T$  je kostra spĺňajúca zadanie úlohy. Prvý prípad je ľahký, v druhom prípade skúsime nájsť inú kosť  $T'$ , ktorá by hranu  $e$  neobsahovala a zároveň by platilo, že  $c(G - E(T')) \leq c(G - E(T))$ . Ak sa nám to podarí, dôkaz je podaný.

<sup>1</sup> $n$ -rozmerná kocka je zadaná v úlohe 2.6.

# Kapitola 4

## Planárne grafy

### 4.1 Základné definície a tvrdenia

#### 4.1.1 Topologické predpoklady

**Definícia 4.1.1.1.** *Rovná čiara* v euklidovskej rovine je podmnožina  $\mathbb{R}^2$  tvaru  $\{p + \lambda(q - p) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$  pre rozdielne body  $p, q \in \mathbb{R}^2$ .

**Definícia 4.1.1.2.** *Mnohouholník* je podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , ktorá je zjednotením konečného počtu rovných čiar a je homomorfná s jednotkovou kružnicou.

**Definícia 4.1.1.3.** *Polygonálny oblúk* (alebo zjednodušene len *oblúk*) je podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , ktorá je zjednotením konečného počtu rovných čiar a je homomorfná s jednotkovým uzavretým intervalom  $[0, 1]$ .

Obrazy 0 a 1 v tomto homomorfizme sú *koncové body* oblúka, ktorý ich *spája*.

**Definícia 4.1.1.4.** Nech  $P$  je oblúk spájajúci  $x$  a  $y$ . Množinu bodov  $P \setminus \{x, y\}$  nazývame *vnútro*  $P$  a označujeme  $P^\circ$ .

**Definícia 4.1.1.5.** Nech  $O \subseteq \mathbb{R}^2$  je otvorená množina. Byť spojený oblúkom v  $O$  definuje reláciu ekvivalencie na  $O$ . Príslušné triedy ekvivalencie sú opäť otvorené - nazývajú sa *oblasti*  $O$ .

Uzavretá množina  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  *oddeľuje*  $O$ , ak  $O \setminus X$  má viac ako jednu oblasť. *Hranica* množiny  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  je množina  $Y$  všetkých bodov  $y \in \mathbb{R}^2$  takých, že každé okolie  $y$  pretína  $X$  aj  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ .

**Veta 4.1.1.1** (Jordanova veta o krivkách pre mnohouholníky). *Pre každý mnohouholník  $P \subseteq \mathbb{R}^2$ , množina  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  má práve dve oblasti, z ktorých práve jedna je ohraničená. Každá z týchto dvoch oblastí má ako hranicu celý mnohouholník  $P$ .*

**Lema 4.1.1.2.** *Nech  $P_1, P_2, P_3$  sú tri oblúky medzi tými istými dvoma koncami, ale inak disjunktné.*

1.  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$  má práve tri oblasti s hranicami  $P_1 \cup P_2$ ,  $P_1 \cup P_3$  a  $P_2 \cup P_3$ .
2. Ak  $P$  je oblúk medzi bodom v  $P_1^\circ$  a bodom v  $P_3^\circ$ , ktorého vnútro leží v oblasti  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$ , ktorá obsahuje  $P_2^\circ$ , potom  $P^\circ \cap P_2^\circ \neq \emptyset$ .

**Lema 4.1.1.3.** *Nech  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  sú disjunktné množiny, každá zjednotením konečného počtu bodov a oblúkov a nech  $P$  je oblúk medzi bodom v  $X_1$  a bodom v  $X_2$ , ktorého vnútro  $P^\circ$  leží v oblasti  $O \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ . Potom  $O \setminus P^\circ$  je oblasť množiny  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$ .*

**Definícia 4.1.1.6.** Množinu bodov z  $\mathbb{R}^{n+1}$  vo vzdialenosti 1 od počiatku nazývame *n-rozmerná guľa* a označujeme  $S^n$

**Definícia 4.1.1.7.** 2-rozmerná guľa bez severného pólu (bodu so súradnicami  $(0, 0, 1)$ ) je homomorfná s rovinou. Zvoľme si pevný homomorfizmus  $\pi: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (napr. stereografickú projekciu). Ak  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  je mnohouholník a  $O$  je ohraničená oblasť množiny  $\mathbb{R}^2 \setminus P$ , nazveme  $C := \pi^{-1}(P)$  *kružnicu* na  $S^2$  a množiny  $\pi^{-1}(O)$  a  $S^2 \setminus \pi^{-1}(P \cup O)$  oblasti kružnice  $C$ .

**Veta 4.1.1.4.** *Nech  $\varphi: C_1 \rightarrow C_2$  je homomorfizmus medzi dvoma kružnicami na  $S^2$ , nech  $O_1$  je oblasť kružnice  $C_1$  a  $O_2$  oblasť kružnice  $C_2$ . Potom  $\varphi$  môže byť rozšírený na homomorfizmus  $C_1 \cup O_1 \rightarrow C_2 \cup O_2$ .*

## 4.1.2 Rovinné grafy

**Definícia 4.1.2.1.** *Rovinný graf* je dvojica  $(V, E)$  konečných množín s nasledovnými vlastnosťami (prvky množiny  $V$  sa opäť nazývajú vrcholy, prvky  $E$  hrany):

1.  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ;
2. každá hrana je oblúk medzi dvoma vrcholmi;
3. rôzne hrany majú rôzne množiny koncov;
4. vnútro hrany neobsahuje žiaden vrchol ani žiaden bod inej hrany.

**Definícia 4.1.2.2.** V každom rovinnom grafe  $G$  je množina  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  otvorená, jej časti sa nazývajú *oblasti* grafu  $G$ .

**Definícia 4.1.2.3.** Keďže  $G$  je ohraničený - t.j. leží vnútri v nejakom dostatočne veľkom kruhu  $D$  - práve jedna jeho oblasť je neohraničená: práve tá, ktorá obsahuje  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ . Táto oblasť sa nazýva *vonkajšia oblasť* grafu  $G$ . Ostatné oblasti sa nazývajú *vnútorné oblasti* grafu  $G$ .

Množinu oblastí grafu  $G$  označujeme  $F(G)$ .

**Lema 4.1.2.1.** *Nech  $G$  je rovinný graf a  $e$  je hrana z  $G$ .*

1. *Ak  $X$  je hranicou oblasti v  $G$ , tak potom buď  $e \subseteq X$  alebo  $X \cap e^\circ = \emptyset$ .*
2. *Ak  $e$  leží na kružnici  $C \subseteq G$ , tak  $e$  leží na hranici práve dvoch oblastí  $G$  a tieto sú obsiahnuté v disjunktných oblastiach  $C$ .*
3. *Ak  $e$  neleží na kružnici, tak  $e$  leží na hranici práve jednej oblasti v  $G$ .*

**Lema 4.1.2.2.** *Hranica oblasti je vždy množina bodov podgrafu.*

**Definícia 4.1.2.4.** O podgrafe  $G$ , ktorého množina bodov je hranica oblasti  $f$  hovoríme, že *ohraničuje*  $f$  a nazýva sa jej *ohraničenie*. Označujeme to  $G[f]$ .

Hovoríme, že oblasť je *incidentná* s vrcholmi a hranami jej ohraničenia.

**Tvrdenie 4.1.2.3.** *Rovinný les má práve jednu oblasť.*

**Lema 4.1.2.4.** *Ak rovinný graf má rôzne oblasti s tým istým ohraničením, tak potom tento graf je cyklus.*

**Tvrdenie 4.1.2.5.** *V 2-súvislom rovinnom grafe je každá oblasť ohraničená cyklom.*

**Definícia 4.1.2.5.** Rovinný graf  $G$  sa nazýva *maximálne rovinný* (alebo len *maximálny*) ak pridaním ďalšej hrany nemôžeme vytvoriť planárny graf  $G' \supsetneq G$  s  $V(G') = V(G)$ .

**Definícia 4.1.2.6.** Rovinný graf  $G$  nazývame *rovinná triangulácia* ak každá oblasť v  $G$  (aj vonkajšia) je ohraničená trojuholníkom.

**Tvrdenie 4.1.2.6.** *Rovinný graf stupňa aspoň 3 je maximálne rovinný práve vtedy, ak je to rovinná triangulácia.*

**Veta 4.1.2.7** (Eulerov vzorec). *Nech  $G$  je súvislý rovinný graf s  $n$  vrcholmi,  $m$  hranami a  $l$  oblasťami. Potom*

$$n - m + l = 2.$$



**Dôsledok 4.1.2.8.** *Rovinný graf s  $n \geq 3$  vrcholmi má najviac  $3n - 6$  hrán. Každá rovinná triangulácia s  $n$  vrcholmi má práve  $3n - 6$  hrán.*

**Dôsledok 4.1.2.9.** *Planárny graf neobsahuje ani  $K_5$  ani  $K_{3,3}$  ako topologický minor.*

**Tvrdenie 4.1.2.10.** *Ohraničenia oblastí v 3-súvislom grafe sú práve jeho neoddeľujúce indukované kružnice.*

### 4.1.3 Rovinné reprezentácie

**Definícia 4.1.3.1.** *Rovinná reprezentácia (abstraktného) grafu  $G$  je izomorfizmus medzi  $G$  a rovinným grafom  $\tilde{G}$ .*

**Definícia 4.1.3.2.** Nech  $G = (V, E)$  a  $G' = (V', E')$  sú rovinné grafy s množinou oblastí  $F(G) =: F$  a  $F(G') =: F'$ . Predpokladajme, že  $G$  a  $G'$  sú ako abstraktné grafy izomorfné a nech  $\sigma: V \rightarrow V'$  je daný izomorfizmus. Dosadením  $xy \mapsto \sigma(x)\sigma(y)$  môžeme  $\sigma$  prirodzeným spôsobom rozšíriť na bijekciu  $V \cup E \rightarrow V' \cup E'$ , ktorá zobrazuje  $V$  na  $V'$  a  $E$  na  $E'$  a ktorá zachováva incidentnosť (prípadne neincidentnosť) vrcholov a hrán.  $\sigma$  nazývame *topologický izomorfizmus* medzi rovinnými grafmi  $G$  a  $G'$ , ak existuje homomorfizmus  $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$  taký, že  $\psi := \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$  indukuje  $\sigma$  na  $V \cup E$ .  $\pi$  je v tomto prípade homomorfizmus  $\pi: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  z predchádzajúcej kapitoly.

**Definícia 4.1.3.3.** Ak je možné daný izomorfizmus  $\sigma$  medzi abstraktnými grafmi  $G$  a  $G'$  rozšíriť na bijekciu  $\sigma: V \cup E \cup F \rightarrow V' \cup E' \cup F'$ , ktorá zachováva incidentnosť nielen medzi vrcholmi a hranami, ale aj medzi vrcholmi/hranami a oblasťami, nazývame ho *kombinatorický izomorfizmus* medzi rovinnými grafmi  $G$  a  $G'$ .

**Definícia 4.1.3.4.** Izomorfizmus  $\sigma$  medzi abstraktnými grafmi  $G$  a  $G'$  nazývame *grafovo-teoretický izomorfizmus* medzi rovinnými grafmi  $G$  a  $G'$ , ak

$$\{\sigma(G[f]): f \in F\} = \{G'[f']: f' \in F'\}.$$

#### Veta 4.1.3.1.

1. *Každý grafovo-teoretický izomorfizmus medzi dvoma rovinnými grafmi je kombinatorický. Jeho rozšírenie na plošnú bijekciu je jedinečné práve vtedy, ak daný graf nie je cyklus.*

2. Každý kombinatorický izomorfizmus medzi dvoma 2-súvislými rovinnými grafmi je topologický.

**Definícia 4.1.3.5.** Dve rovinné reprezentácie  $\sigma_1, \sigma_2$  grafu  $G$  nazývame *topologicky* (resp. *kombinatoricky*) *ekvivalentné*, ak  $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$  je topologický (resp. kombinatorický) izomorfizmus medzi  $\sigma_1(G)$  a  $\sigma_2(G)$ . Ak  $G$  je 2-súvislý, obe definície sú totožné a hovoríme zjednodušene, že dané rovinné reprezentácie sú *ekvivalentné*.

**Veta 4.1.3.2** (Whitney, 1932). *Ľubovoľné dve rovinné reprezentácie 3-súvislého grafu sú ekvivalentné.*

#### 4.1.4 Planárne grafy: Kuratowského veta

**Definícia 4.1.4.1.** Graf sa nazýva *planárny*, ak pre neho existuje rovinná reprezentácia.

**Definícia 4.1.4.2.** Graf sa nazýva *maximálne planárny* (resp. zjednodušene iba *maximálny*), ak je planárny, ale nemôže byť pridaním ľubovoľnej hrany (nie však vrchola) rozšírený na väčší planárny graf.

**Tvrdenie 4.1.4.1.**

1. Každý maximálne rovinný graf je aj maximálne planárny.
2. Planárny graf s  $n \geq 3$  vrcholmi je maximálne planárny práve vtedy, keď má  $3n - 6$  hrán.

**Tvrdenie 4.1.4.2.** *Graf obsahuje  $K_5$  alebo  $K_{3,3}$  ako minor práve vtedy, keď obsahuje  $K_5$  alebo  $K_{3,3}$  ako topologický minor.*

**Lema 4.1.4.3.** *Každý 3-súvislý graf  $G$ , ktorý neobsahuje  $K_5$  ani  $K_{3,3}$  ako minor je planárny.*

**Lema 4.1.4.4.** *Nech  $\mathcal{X}$  je množina 3-súvislých grafov. Nech  $G$  je graf s  $\kappa(G) \leq 2$  a nech  $G_1, G_2$  sú vlastné indukované podgrafy  $G$  také, že  $G = G_1 \cup G_2$  a  $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$ . Ak  $G$  je hranovo maximálny bez topologického minoru v  $\mathcal{X}$ , tak potom sú také aj  $G_1$  a  $G_2$  a  $G_1 \cap G_2 = K_2$ .*

**Lema 4.1.4.5.** *Ak  $|G| \geq 4$  a  $G$  je hranovo maximálny s  $TK_5, TK_{3,3} \not\subseteq G$ , tak potom  $G$  je 3-súvislý.*

**Veta 4.1.4.6** (Kuratowski, 1930). *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné pre graf  $G$ :*

1.  $G$  je planárny;
2.  $G$  neobsahuje  $K_5$  ani  $K_{3,3}$  ako minor;
3.  $G$  neobsahuje  $K_5$  ani  $K_{3,3}$  ako topologický minor.

**Dôsledok 4.1.4.7.** Každý maximálne planárny graf s aspoň štyrmi vrcholmi je 3-súvislý.

### 4.1.5 Algebraické kritériá planárnosti

**Definícia 4.1.5.1.** Nech  $G = (V, E)$  je graf. Podmnožinu  $\mathcal{F}$  jeho hranového priestoru  $\mathcal{E}(G)$  nazývame *jednoduchá*, ak každá hrana z  $G$  leží v najviac dvoch množinách z  $\mathcal{F}$ .

**Veta 4.1.5.1** (MacLane, 1937). Graf je planárny práve vtedy, keď jeho cyklový priestor má jednoduchú bázu.

**Veta 4.1.5.2** (Tutte, 1963). 3-súvislý graf je planárny práve vtedy, keď každá jeho hrana leží v najviac dvoch (rovnako tak v práve dvoch) neoddeľujúcich indukovaných cykloch.

### 4.1.6 Rovinná dualita

**Definícia 4.1.6.1.** Planárny multigraf je dvojica  $G = (V, E)$  konečných množín (vrcholov a hrán) spĺňajúca nasledujúce podmienky:

1.  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ;
2. každá hrana je buď oblúk medzi dvoma vrcholmi alebo mnohoúhelník obsahujúci práve jeden vrchol (jeho koniec);
3. okrem jej koncov hrana neobsahuje žiaden iný vrchol ani žiaden bod inej hrany.

**Definícia 4.1.6.2.** Nech  $G = (V, E)$  a  $(V^*, E^*)$  sú ľubovoľné dva planárne multigrafy a označme  $F(G) =: F$  a  $F((V^*, E^*)) =: F^*$ .  $(V^*, E^*)$  nazývame *planárne duálny* ku  $G$ , a značíme  $(V^*, E^*) =: G^*$ , ak existujú bijekcie

$$F \rightarrow V^* \quad E \rightarrow E^* \quad V \rightarrow F^* \quad f \mapsto v^*(f) \quad e \mapsto e^* \quad v \mapsto f^*(v)$$

spĺňajúce nasledujúce podmienky:

1.  $v^*(f) \in f$  pre všetky  $f \in F$ ;

2.  $|e^* \cap G| = |e^{o^*} \cap e^o| = |e \cap G^*| = 1$  pre všetky  $e \in E$ ;
3.  $v \in f^*(v)$  pre všetky  $v \in V$ .

**Tvrdenie 4.1.6.1.** *Pre každý súvislý rovinný multigraf  $G$  je množina hrán  $E \subseteq E(G)$  množina hrán cyklu v  $G$  práve vtedy, keď  $E^* := \{e^* \mid e \in E\}$  je minimálny rez v  $G^*$ .*

**Definícia 4.1.6.3.** Multigraf  $G^*$  nazývame *abstraktne duálny* k multigrafu  $G$  ak  $E(G^*) = E(G)$  a minimálne rezy v  $G^*$  sú práve množiny hrán cyklov v  $G$ .

**Tvrdenie 4.1.6.2.** *Ak  $G^*$  je abstraktne duálny graf k grafu  $G$ , tak priestor rezov grafu  $G^*$  je cyklový priestor grafu  $G$ , t.j.*

$$\mathcal{C}^*(G^*) = \mathcal{C}(G).$$

**Veta 4.1.6.3** (Whitney, 1933). *Graf je planárny práve vtedy, ak k nemu existuje abstraktne duálny graf.*

## 4.2 Úlohy

**Úloha 4.1.** Dokážte, že každý strom je planárny graf. Koľko má oblastí?

**Návod.** Strom nemá cykly.

**Úloha 4.2.** Ukážte, že neexistujú rovinné reprezentácie grafov  $K_5$  ani  $K_{3,3}$  (samozrejme bez použitia Kuratowského vety).

**Návod.** Vezmime si rovinné reprezentácie grafov  $K_4$  a  $K_{2,3}$ , ktoré sú planárne a skúsme doplniť nový vrchol do ľubovoľnej ich oblasti.

**Úloha 4.3.** Graf  $G$  nazývame *koplanárny*, ak  $G$  aj  $\overline{G}$  sú planárne grafy.

1. Nech  $G$  je graf s  $n \leq 5$  vrcholmi, ktorý nie je koplanárny. Dokážte, že  $G = K_5$  alebo  $G = \overline{K_5}$ .
2. Zostrojte koplanárny graf  $G$  so šiestimi vrcholmi taký, že  $G$  aj  $\overline{G}$  sú súvislé.

**Návod.**  $K_5$  je najmenší neplanárny graf. Teda všetky grafy menšie od neho (teda tie, ktoré buď majú menej vrcholov, alebo rovnaký počet vrcholov, ale menej hrán) sú planárne.

**Úloha 4.4.** Dokážte, že každé dve rovinné reprezentácie toho istého grafu majú rovnaký počet oblastí.

**Návod.** Dokážeme priamočiarou aplikáciou Eulerovho vzorca.

**Úloha 4.5.** Dokážte, že kompletne bipartitný graf  $K_{2,n}$  je planárny pre všetky  $n$ . Aký má počet oblastí?

**Návod.** Dá sa jednoducho zakresliť do roviny. Počet oblastí sa dá vyrátať pomocou Eulerovho vzorca.

**Úloha 4.6.** Antiregulárny graf s  $n$  vrcholmi je taký, ktorého množina stupňov všetkých vrcholov obsahuje  $n - 1$  rôznych čísel. Zostrojte antiregulárny planárny graf so siedmymi vrcholmi.

**Úloha 4.7.** Dokážte, že každý planárny graf má aspoň jeden vrchol stupňa menšieho ako šesť.

**Návod.** Počet hrán je polovica súčtu stupňov jeho vrcholov. V prípade ak by všetky vrcholy mali stupeň aspoň šesť by podľa vety 4.1.2.8 v grafe bolo priveľa hrán na to, aby bol planárny.

**Úloha 4.8.** (+) Dokážte, že v planárnom grafe s  $n$  hranami a  $l$  oblasťami platí  $3l \leq 2n$ .

**Návod.** Použijeme maticu hranovo-plošných susedností  $A_{n \times l}$ , kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i\text{-ta hrana tvorí hranicu } j\text{-tej oblasti} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Potom porovnáme súčet jej riadkov so súčtom jej stĺpcov a dopracujeme sa k výsledku.

**Úloha 4.9.** Dokážte, že súvislý planárny graf s  $n \geq 3$  vrcholmi má najviac  $2n - 4$  oblastí.

**Návod.** Použijeme vetu 4.1.2.8 a tvrdenie z úlohy 4.8.

**Úloha 4.10.** (+) Dokážte, že v bipartitnom planárnom grafe s  $n$  hranami a  $l$  oblasťami platí  $2l \leq n$ .

**Návod.** Treba si uvedomiť aká je najkratšia možná dĺžka kružnice v bipartitnom grafe. Potom budeme postupovať podobne ako v úlohe 4.8, teda porovnáme súčet riadkov a stĺpcov matice hranovo-plošných susedností.

# Kapitola 5

## Farbenie

### 5.1 Základné definície a tvrdenia

**Definícia 5.1.1.** *Vrcholové farbenie* grafu  $G = (V, E)$  je zobrazenie  $c: V \rightarrow S$  také, že  $c(v) \neq c(w)$  kedykoľvek sú  $v$  a  $w$  susedné.

Prvky množiny  $S$  sa nazývajú dostupné *farby*.

**Definícia 5.1.2.** Hovoríme, že graf  $G$  má  *$k$ -farbenie*, ak pre neho existuje vrcholové farbenie  $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ .

Minimálne také  $k \in \mathbb{N}$ , že graf  $G$  má  $k$ -farbenie nazývame (*vrcholové*) *chromatické číslo* grafu  $G$  a označujeme ho  $\chi(G)$ .

Graf  $G$  s  $\chi(G) = k$  sa nazýva  *$k$ -chromatický*. Ak  $\chi(G) \leq k$  nazývame  $G$   *$k$ -zafarbiteľný*.

**Definícia 5.1.3.** *Hranové farbenie* grafu  $G = (V, E)$  je zobrazenie  $c: E \rightarrow S$  také, že  $c(e) \neq c(f)$  kedykoľvek sú  $v$  a  $w$  incidentné.

**Definícia 5.1.4.** Hovoríme, že graf  $G$  má *hranové  $k$ -farbenie*, ak pre neho existuje hranové farbenie  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ .

Minimálne také  $k \in \mathbb{N}$ , že graf  $G$  má hranové  $k$ -farbenie nazývame *hranové chromatické číslo* alebo *chromatický index* grafu  $G$  a označujeme ho  $\chi'(G)$ .

#### 5.1.1 Farbenie máp a planárnych grafov

**Veta 5.1.1.1** (5CT - Five Colour Theorem). *Každý planárny graf je 5-zafarbiteľný.*

**Veta 5.1.1.2** (4CT - Four Colour Theorem). *Každý planárny graf je 4-zafarbiteľný.*

**Veta 5.1.1.3** (Grötzsch, 1959). *Každý planárny graf neobsahujúci trojuholník je 3-zafarbiteľný.*

### 5.1.2 Farbenie vrcholov

**Tvrdenie 5.1.2.1.** *Pre každý graf  $G$  s  $m$  hranami platí*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

**Tvrdenie 5.1.2.2.** *Každý graf  $G$  spĺňa*

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\}.$$

**Dôsledok 5.1.2.3.** *Každý graf  $G$  obsahuje podgraf minimálneho stupňa aspoň  $\chi(G) - 1$ .*

**Veta 5.1.2.4** (Brooks, 1941). *Nech  $G$  je súvislý graf. Ak  $G$  nie je ani kompletňý graf ani nepárny cyklus, tak potom  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

**Definícia 5.1.2.1.** Pre každé  $k \in \mathbb{N}$  definujeme triedu  $k$ -skonštruovateľných grafov rekurzívne nasledovne:

1.  $K_k$  je  $k$ -skonštruovateľný.
2. Ak  $G$  je  $k$ -skonštruovateľný a  $x, y \in V(G)$  sú nesusedné, potom aj  $(G + xy)/xy$  je  $k$ -skonštruovateľný.
3. Ak  $G_1$  a  $G_2$  sú  $k$ -skonštruovateľné a existujú vrcholy  $x, y_1, y_2$  také, že  $G_1 \cap G_2 = \{x\}$ ,  $xy_1 \in E(G_1)$  a  $xy_2 \in E(G_2)$ , potom aj  $(G_1 \cap G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2$  je  $k$ -skonštruovateľný.

**Veta 5.1.2.5** (Hajós, 1961). *Nech  $G$  je graf a  $k \in \mathbb{N}$ . Potom  $\chi(G) \geq k$  práve vtedy, ak  $G$  obsahuje  $k$ -skonštruovateľný podgraf.*

### 5.1.3 Farbenie hrán

**Veta 5.1.3.1** (König, 1916). *Pre každý bipartitný graf  $G$  platí  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

**Veta 5.1.3.2** (Vizing, 1964). *Každý graf  $G$  spĺňa*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

**Definícia 5.1.3.1.** Vizingova veta rozdeľuje konečné grafy do dvoch tried. Tie, pre ktoré  $\chi'(G) = \Delta(G)$  patria do *triedy 1*, tie, pre ktoré  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$  patria do *triedy 2*.

### 5.1.4 Výberové farbenia

**Definícia 5.1.4.1.** Nech  $(S_v)_{v \in V}$  je rodina množín. Vrcholové farbenie  $c$  grafu  $G$  s  $c(v) \in S_v$  pre všetky  $v \in V$  nazývame farbením *podľa zoznamov*  $S_v$ .

Graf  $G$  sa nazýva *výberovo  $k$ -zafarbiteľný* (alebo  *$k$ -voliteľný*), ak pre každú rodinu  $(S_v)_{v \in V}$  s  $|S_v| = k$  pre všetky  $v$  existuje vrcholové farbenie grafu  $G$  podľa zoznamov  $S_v$ .

Najmenšie také  $k \in \mathbb{N}$ , pre ktoré je  $G$   $k$ -voliteľný je *výberové číslo*  $ch(G)$  grafu  $G$ .

**Definícia 5.1.4.2.** Analogicky k predchádzajúcej definícii je definované *výberové hranové farbenie*. Najmenšie  $k \in \mathbb{N}$  také, že  $G$  má hranové farbenie z rodiny zoznamov veľkosti  $k$  je *výberový chromatický index*  $ch'(G)$  grafu  $G$ ; formálne je  $ch'(G) = ch(L(G))$ , kde  $L(G)$  je hranový graf grafu  $G$ .

**Veta 5.1.4.1** (Alon, 1993). *Existuje funkcia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taká, že  $ch(G) \geq k$  pre všetky  $k \in \mathbb{N}$  a všetky grafy  $G$  s priemerným stupňom  $d(G) \geq f(k)$ .*

**Veta 5.1.4.2** (Thomassen, 1994). *Každý planárny graf je 5-voliteľný.*

**Hypotéza 5.1.4.3.** *Pre každý graf  $G$  platí  $ch'(G) = \chi'(G)$ .*

**Definícia 5.1.4.3.** Množinu nezávislých vrcholov  $U \subseteq V(D)$  nazveme *jadro* orientovaného grafu  $D$  ak pre každý vrchol  $v \in D - U$  existuje hrana v  $D$  orientovaná z  $v$  do vrcholu v  $U$ .

**Lema 5.1.4.4.** *Nech  $H$  je graf a  $(S_v)_{v \in V(H)}$  rodina zoznamov. Ak  $H$  má orientáciu  $D$  s  $d^+(v) < |S_v|$  pre každé  $v$ , pre ktorú platí, že každý indukovaný podgraf  $D$  má jadro, tak potom  $H$  je zafarbiteľný podľa zoznamov  $S_v$ .*

**Veta 5.1.4.5** (Galvin, 1995). *Pre každý bipartitný graf  $G$  platí  $ch'(G) = \chi'(G)$ .*

**Dôsledok 5.1.4.6.** *Pre každý bipartitný graf  $G$  platí  $ch'(G) = \Delta'(G)$ .*

### 5.1.5 Perfektné grafy

**Definícia 5.1.5.1.**  $\alpha(G)$  označíme najväčšiu mohutnosť nezávislej množiny vrcholov v grafe  $G$ .

**Definícia 5.1.5.2.**  $\omega(G)$  označíme najväčšie  $n$  také, že  $K_n \subseteq G$ .

**Definícia 5.1.5.3.** Graf  $G$  nazývame *perfektný*, ak každý indukovaný podgraf  $H \subseteq G$  má chromatické číslo  $\chi(H) = \omega(H)$



**Definícia 5.1.5.4.** Graf  $G$  nazývame *chordálny* (resp. *triangulovaný*), ak každý z jeho cyklov dĺžky  $\geq 4$  obsahuje tetivu, t.j. ak neobsahuje indukované kružnice iné ako trojuholníky.

**Lema 5.1.5.1.** *Graf je chordálny práve vtedy, keď môže byť skonštruovaný rekurzívne vkladáním medzi kompletne podgrafy, začínúc z kompletných grafov.*

**Lema 5.1.5.2.** *Každý chordálny graf je perfektný.*

**Definícia 5.1.5.5.** Nech  $G$  je graf a  $x \in G$  je vrchol a nech  $G'$  získame z  $G$  pridaním vrchola  $x'$  a jeho spojením s  $x$  a všetkými jeho susedmi. Hovoríme, že  $G'$  sme získali z  $G$  *zdvojením* vrchola  $x$ .

**Lema 5.1.5.3.** *Ľubovoľný graf získaný z perfektného grafu zdvojením vrchola je opäť perfektný.*

**Veta 5.1.5.4** (Lovász, 1972). *Graf je perfektný práve vtedy, ak jeho komplement je tiež perfektný.*

**Hypotéza 5.1.5.5** (Berge, 1966). *Graf  $G$  je perfektný práve vtedy, keď ani  $G$  ani  $\bar{G}$  neobsahujú kružnicu nepárnej dĺžky  $\geq 5$  ako indukovaný podgraf.*

## 5.2 Úlohy

**Úloha 5.1.** Aké je chromatické číslo Petersenovho grafu zobrazeného na obrázku 1.3?

**Návod.** Podľa úlohy 1.14 Petersenov graf obsahuje cyklus nepárnej dĺžky (napr. 5) a teda  $\chi(P) > 2$ . Skúsime nájsť jeho zafarbenie tromi farbami.

**Úloha 5.2.** Koleso  $W_n$  bolo zadefinované v úlohe 1.6. Aké je  $\chi(W_n)$ ?

**Návod.** Existuje jednoduchý vzťah medzi  $\chi(W_n)$  a  $\chi(C_n)$ .

**Úloha 5.3.** Nech  $G$  je zjednotenie dvoch grafov  $G_1$  a  $G_2$ , ktoré majú jeden spoločný vrchol. Dokážte, že  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ .

**Návod.** Pri farbení grafu  $G$  sa dá postupovať tak, že ponecháme farbenie  $G_1$  a farby  $G_2$  poposúvame tak, aby sme nepridali žiadnu novú farbu a aby spoločný vrchol mal aj v  $G_2$  tú istú farbu ako v  $G_1$ .

**Úloha 5.4.** Dokážte, že  $\chi(G) = 2$  práve vtedy, keď  $G$  je nenulový, nie je to  $K_1$  a neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

**Návod.** Graf má chromatické číslo 2 práve vtedy, keď je bipartitný.

**Úloha 5.5.** Graf  $G$  obsahuje práve jeden cyklus nepárnej dĺžky. Dokážte, že  $\chi(G) = 3$ .

**Návod.** Využijeme tvrdenie z úlohy 5.4.

**Úloha 5.6.** Nech  $v$  je vrchol grafu  $G$ , ktorého stupeň je menší ako  $n$ . Dokážte, že  $G$  má  $n$ -farbenie práve vtedy, keď aj  $G - v$  má  $n$ -farbenie.

**Návod.** Implikácia “ $\Rightarrow$ ” je triviálna. Pri dokazovaní opačnej implikácie zafarbíme  $G - v$   $n$  farbami. Akou farbou môžeme zafarbiť vrchol  $v$ ?

**Úloha 5.7.** Graf  $G$  zostrojíme z kompletného grafu  $K_n$  odobraním jednej hrany. Dokážte, že  $\chi(G) = n - 1$ .

**Návod.** Jediné dva nesusedné vrcholy zafarbíme rovnakou farbou.

**Úloha 5.8.** <sup>(+)</sup> Označme  $p_G(x)$  počet rôznych spôsobov ako zafarbiť graf  $G$   $x$  farbami. Ďalej označme  $q_G(x)$  počet rôznych spôsobov ako zafarbiť  $G$   $x$  farbami, pričom použijeme všetkých  $x$  farieb. Funkcia

$$p_G(x) = \sum_{k=\chi(G)}^{|V(G)|} \binom{x}{k} q_G(k)$$

sa nazýva *chromatická funkcia* grafu  $G$ .

Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenie. Ľubovoľné dva 2-súvislé grafy s rovnakou chromatickou funkciou sú izomorfné.<sup>1</sup>

**Návod.** Tvrdenie overíme na grafoch zobrazených na obrázku 8.17.

**Úloha 5.9.** Dokážte, že

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ n - 1 & \text{ak } n \text{ je párne.} \end{cases}$$

**Návod.** Jedná sa vlastne o rozdelenie kompletných grafov do triedy 1 a triedy 2. Regulárne grafy ale patria do triedy 1 práve vtedy, ak majú 1-faktorizáciu<sup>2</sup>. Stačí teda dokázať, že kompletné grafy nepárneho stupňa ju majú ale párneho stupňa nie.

**Úloha 5.10.** Dokážte, že ak  $P$  je trieda hrán zafarbených rovnakou farbou pri hranovom farbení grafu  $G$ , tak

$$|P| \leq \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor.$$

<sup>1</sup>Toto tvrdenie sa istú dobu považovalo za pravdivé a ako zistíme vyriešením tejto úlohy, nie je.

<sup>2</sup>1-faktorizácia je zadefinovaná v úlohe 2.2 na strane 17

**Návod.** Inými slovami povedané, dokážte, že počet hrán zafarbených rovnakou farbou je najviac polovica počtu vrcholov. Stačí si uvedomiť, že hrany z tej istej farebnej triedy nemôžu byť susedné.

**Úloha 5.11.** (+) Nech  $G$  je graf  $k$  hranami, kde  $c \geq \chi'(G)$ . Dokážte, že  $E(G)$  sa dá rozložiť na  $c$  párení, každé s  $k$  hranami.

**Návod.** Nech  $\mathcal{C}$  je množina všetkých hranových farbení grafu  $G$   $c$  farbami. Pre  $\pi \in \mathcal{C}$  zdefinujeme  $n(\pi) := \sum_{i=1}^c |e_i - k|$ , kde  $e_i$  je počet hrán zafarbených farbou  $c_i$  pri farbení  $\pi$ . Potom zdefinujeme  $n_0 := \min\{n(\pi) : \pi \in \mathcal{C}\}$ . Ak dokážeme, že  $n_0 = 0$  pre nejaké farbenie  $\pi_0$ , tak potom toto farbenie zjavne spĺňa požadované vlastnosti.

**Úloha 5.12.** Dokážte, že každý regulárny graf s nepárnym počtom vrcholov patrí do triedy 2.

**Návod.** Regulárny graf patrí do triedy 1 práve vtedy, keď má 1-faktorizáciu (prečo?). Graf s nepárnym počtom vrcholov ju však mať nemôže.

**Úloha 5.13.** (+) Hovoríme, že hrana  $e \in E(G)$  je *kritická*, ak  $\chi'(G - e) < \chi'(G)$ . *Hranovo kritický* graf je definovaný ako súvislý graf triedy 2 v ktorom je každá hrana kritická. Navyše ak  $G$  má maximálny stupeň  $\Delta(G) = k$  a je hranovo kritický, tak ho nazývame aj *k-hranovo kritický*. Dokážte, že každý hranovo kritický graf je dvojsúvislý.

**Návod.**  $G$  je dvojsúvislý práve vtedy, ak neobsahuje artikuláciu. Predpokladajme opak, teda že v  $G$  existuje artikulácia  $x$ . Potom  $G$  pozostáva z dvoch podgrafov  $G_1$  a  $G_2$ , ktoré majú jediný spoločný vrchol  $x$ . Ak  $y \in G_1$  a  $z \in G_2$  sú susedia  $x$  v grafe  $G$ , tak potom existujú  $(\chi'(G) - 1)$ -hranové farbenia grafov  $G - xy$  a  $G - xz$ . Z nich sa dá vhodnou permutáciou dostať  $(\chi'(G) - 1)$ -hranové farbenie grafu  $G$ , čo je ale spor.

**Úloha 5.14.** (+) Bez použitia 5CT a 4CT dokážte, že každý planárny graf sa dá zafarbiť šiestimi farbami.

**Návod.** Použijeme výsledok úlohy 4.7, teda že planárny graf musí mať aspoň jeden vrchol stupňa menej ako šesť. Ak predpokladáme, že existuje graf, ktorý nie je zafarbiteľný šiestimi farbami, tak si zvolme najmenší taký. Potom ak odstránime vrchol stupňa menej ako šesť, tak novovzniknutý graf už musí byť zafarbiteľný šiestimi farbami. Teraz už je ľahké ukázať, že aj pôvodný graf musí byť zafarbiteľný šiestimi farbami.

**Úloha 5.15.** (+) Nech  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  je regulárne zafarbenie grafu  $G$   $t$  farbami. Počet rôznych regulárnych  $t$ -zafarbení grafu  $G$  sa nazýva *chromatický polynóm* grafu  $G$  a označujeme ho  $f(G, t)$ .

1. Určite  $f(\overline{K}_n, t)$  a  $f(K_n, t)$ .
2. Dokážte, že ak  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$  je disjunktné zjednotenie grafov, tak  $f(G, t) = \prod_{i=1}^k f(G_i, t)$ .
3. Dokážte, že ak  $G = G_1 \cup G_2$  a  $G_1 \cap G_2 = \{v\}, v \in V(G_1), V(G_2)$ , tak  $f(G, t) = \frac{1}{t} f(G_1, t) \cdot f(G_2, t)$ .
4. Nech  $u$  a  $v$  sú dva nesusedné vrcholy grafu  $G$ . Nech  $G_1 = G + uv$  a nech  $G_2$  vznikne z  $G$  stotožnením vrcholov  $u$  a  $v$ . Dokážte, že  $f(G, t) = f(G_1, t) + f(G_2, t)$ .
5. Dokážte, že chromatický polynóm každého grafu sa rovná súčtu chromatických polynómov istého počtu kompletných grafov, pričom ich rády neprevyšujú rád grafu  $G$ .
6. Dokážte, že chromatický polynóm stromu  $T$  s  $n$  vrcholmi má tvar  $f(G, t) = t(t-1)^{n-1}$ .

**Návod.**

1. V grafe  $\overline{K}_n$  môžeme každý vrchol zafarbiť ľubovoľnou farbou, v grafe  $K_n$  naopak musíme všetky vrcholy zafarbiť rôznymi farbami.
2. Jednotlivé komponenty môžeme zafarbiť ľubovoľne, bez ohľadu na zafarbenie iných komponentov.
3. Ponecháme zafarbenie jedného podgrafu a zafarbenie druhého podgrafu zvolíme podľa farby ich spoločného vrcholu.
4. Keďže  $u$  a  $v$  sú nesusedné, tak počet zafarbení grafu  $G$   $t$  farbami je predsa súčtom počtu zafarbení, pri ktorých zafarbíme  $u$  a  $v$  rovnakou farbou a počtu zafarbení, pri ktorých ich zafarbíme rôznymi farbami.
5. Tvrdenie je jednoduchým dôsledkom predchádzajúceho tvrdenia.
6. Postupovať budeme matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov stromu a využijeme tvrdenie 3 z tejto úlohy.

# Kapitola 6

## Toky

### 6.1 Základné definície a tvrdenia

**Definícia 6.1.1.** Číslo  $k \in \mathbb{N}$  priradíme dvojici  $(x, y)$ , kde  $e = xy$  je hrana grafu  $G$  na vyjadrenie, že *tok* o veľkosti  $k$  jednotiek tečie cez hranu  $e$  smerom z  $x$  do  $y$ , alebo dvojici  $(x, y)$  priradíme hodnotu  $-k$  na vyjadrenie, že cez  $e$  tečie  $k$  jednotiek toku opačnou cestou, teda z  $y$  do  $x$ .

Pre každé takéto priradenie  $f: V^2 \rightarrow H$  ( $H$  je abelovská grupa, najčastejšie  $\mathbb{Z}$ ) teda môžeme položiť  $f(x, y) = -f(y, x)$  vždy, keď  $x$  a  $y$  sú susedné vrcholy v  $G$ .

**Definícia 6.1.2.** V takmer všetkých uzloch grafu (siete)  $G$  (okrem tých, kde tok vstupuje alebo vystupuje zo siete) platí *Kirchhoffov zákon*

$$\sum_{y \in N(x)} f(x, y) = 0.$$

**Definícia 6.1.3.** Ľubovoľnú funkciu  $f: V^2 \rightarrow H$ , kde  $(H, +)$  je abelovská grupa s nulou  $0$ , spĺňajúcu uvedené podmienky nazývame *tok na grafe  $G$* .

#### 6.1.1 Cirkulácie

**Definícia 6.1.1.1.** V sieti  $G = (V, E)$  definujeme hrany ako trojice

$$\vec{E} := \{(e, x, y) \mid e \in E; x, y \in V(G); e = xy\}.$$

Teda hrana  $e = xy$  s  $x \neq y$  má dva smery, a to  $(e, x, y)$  a  $(e, y, x)$ . Slučka  $e = xx$  má len jeden smer  $(e, x, x)$ .

Pre dané  $\vec{e} = (e, x, y) \in \vec{E}$  nech  $\overleftarrow{e} := (e, y, x)$  a pre  $\vec{F} \subseteq \vec{E}$  položíme

$$\overleftarrow{F} := \{\overleftarrow{e} \mid \vec{e} \in \vec{F}\}.$$

Pre  $X, Y \subseteq V$  a  $\vec{F} \subseteq \vec{E}$  nech

$$\vec{F}(X, Y) := \{(e, x, y) \in \vec{F} \mid x \in X, y \in Y, x \neq y\},$$

píšeme  $\vec{F}(x, Y) := \vec{F}(\{x\}, Y)$  a  $\vec{F}(x) := \vec{F}(\{x\}, \overline{\{x\}})$ .

**Definícia 6.1.1.2.** Nech  $(H, +)$  je abelovská grupa s nulou 0. Sú dané množiny vrcholov  $X, Y \subseteq V$  a funkcia  $f: \vec{E} \rightarrow H$ , a nech

$$f(X, Y) := \sum_{\vec{e} \in \vec{E}(X, Y)} f(\vec{e}).$$

Funkciu  $f$  nazývame *cirkulácia* na  $G$  (s hodnotami v  $H$ ) alebo aj *H-cirkulácia*, ak  $f$  spĺňa nasledovné dve podmienky:

(F1)  $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$  pre všetky  $(e, x, y) \in \vec{E}$  s  $x \neq y$ ;

(F2)  $f(v, V) = 0$  pre všetky  $v \in V$ .

Ak  $f$  spĺňa (F1) ale nie nutne (F2), funkciu  $f$  nazveme *tok* na  $G$ . Vrcholy  $v$ , kde  $f(v, V)$  je kladné (záporné) nazývame *zdroje* (*ústia*).

**Lema 6.1.1.1.** Ak  $f$  je cirkulácia, potom  $f(X, \overline{X}) = 0$  pre každú množinu vrcholov  $X \subseteq V$ .

**Dôsledok 6.1.1.2.** Ak  $f$  je cirkulácia a  $e = xy$  je most v grafe  $G$ , potom  $f(e, x, y) = 0$ .

## 6.1.2 Toky v sieťach

**Definícia 6.1.2.1.** Nech  $G = (V, E)$  je multigraf,  $s, t \in V(G)$  sú dva pevne dané vrcholy a  $c: \vec{E} \rightarrow \mathbb{N}$  je zobrazenie;  $c$  nazývame *kapacitná funkcia* na  $G$  a štvoricu  $N := (G, s, t, c)$  *sieť*.

Tok  $f: \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$  na  $G$  nazveme *tok v N*, ak  $f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})$  pre všetky  $\vec{e} \in \vec{E}$  a  $f$  spĺňa Kirchhoffov zákon na každom vrchole rôznom od  $s$  a  $t$ , teda keď spĺňa nasledovné podmienky:

(F1)  $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$  pre všetky  $(e, x, y) \in \vec{E}$  s  $x \neq y$ ;

(F2')  $f(v, V) = 0$  pre všetky  $v \in V - s, t$ ;

(F3)  $f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})$  pre všetky  $\vec{e} \in \vec{E}$ .

**Definícia 6.1.2.2.** Tok  $f$  nazveme *integrálny*, ak všetky jeho hodnoty ležia v  $\mathbb{Z}$ .

**Definícia 6.1.2.3.** Nech  $f$  je tok v  $N$ . Ak  $S \subseteq V$  je taká, že  $s \in S$  a  $t \in \overline{S}$ , nazveme dvojicu  $(S, \overline{S})$  *rez v N* a  $c(S, \overline{S})$  *kapacita* tohto rezu.

**Lema 6.1.2.1.** *Pre každý rez  $(S, \bar{S})$  v  $N$  platí  $f(S, \bar{S}) = f(s, V)$ .*

**Definícia 6.1.2.4.** Hodnota  $f(S, \bar{S})$  z predchádzajúcej lemy sa nazýva *veľkosť toku  $f$*  a označujeme ju  $|f|$ .

**Veta 6.1.2.2** (Ford & Fulkerson, 1956). *V každej sieti sa veľkosť maximálneho toku rovná kapacite minimálneho rezu.*

**Dôsledok 6.1.2.3.** *V každej sieti s integrálnou kapacitnou funkciou existuje integrálny tok maximálnej veľkosti.*

### 6.1.3 Toky s hodnotami v grupách

**Definícia 6.1.3.1.** Nech  $G = (V, E)$  je multigraf a  $H$  je abelovská grupa s nulou 0. Ak  $f$  a  $g$  sú dve  $H$ -cirkulácie, potom  $f + g: \vec{e} \rightarrow f(\vec{e}) + g(\vec{e})$  a  $-f: \vec{e} \rightarrow -f(\vec{e})$  sú tiež  $H$ -cirkulácie.  $H$ -cirkulácie na  $G$  teda prirodzeným spôsobom tvoria grupu.

**Definícia 6.1.3.2.** Tok  $f$  na  $G$  je *nikde-nulový*, ak  $f(\vec{e}) \neq 0$  pre všetky  $\vec{e} \in \vec{E}$ .  $H$ -cirkulácia, ktorá je nikde-nulová sa nazýva  *$H$ -tok*.

**Veta 6.1.3.1** (Tutte, 1954). *Pre každý multigraf  $G$  existuje polynóm  $P$  taký, že pre ľubovoľnú konečnú abelovskú grupu  $H$  je počet  $H$ -tokov na  $G$  rovný  $P(|H| - 1)$ .*

**Definícia 6.1.3.3.** Polynóm  $P$  z predchádzajúcej vety sa nazýva *tokový polynóm grafu  $G$* .

**Dôsledok 6.1.3.2.** *Ak  $H$  a  $H'$  sú dve konečné abelovské grupy rovnakej mohutnosti, tak potom  $G$  má  $H$ -tok práve vtedy, ak  $G$  má  $H'$ -tok.*

**Definícia 6.1.3.4.** Nech  $k \geq 1$  je celé číslo a  $G = (V, E)$  je multigraf.  $\mathbb{Z}$ -tok  $f$  na  $G$  taký, že  $0 < |f(\vec{e})| < k$  pre všetky  $\vec{e} \in \vec{E}$  sa nazýva  *$k$ -tok*.

Najmenšie  $k$  také, že  $G$  umožňuje  $k$ -tok nazývame *tokové číslo grafu  $G$*  a označujeme ho  $\varphi(G)$ . Ak žiadne také  $k$  neexistuje, položíme  $\varphi(G) := \infty$ .

**Veta 6.1.3.3** (Tutte, 1950). *Multigraf umožňuje  $k$ -tok práve vtedy, keď umožňuje  $\mathbb{Z}_k$ -tok.*

### 6.1.4 $k$ -toky pre malé $k$

**Tvrdenie 6.1.4.1.** *Graf má 2-tok práve vtedy, keď všetky jeho stupne sú párne.*

**Tvrdenie 6.1.4.2.** *Kubický graf má 3-tok práve vtedy, keď je bipartitný.*

**Tvrdenie 6.1.4.3.** *Pre všetky párne  $n > 4$  platí  $\varphi(K_n) = 3$ .*

**Tvrdenie 6.1.4.4.** *Každý hranovo 4-súvislý graf má 4-tok.*

**Tvrdenie 6.1.4.5.**

1. *Graf má 4-tok práve vtedy, keď je zjednotením dvoch párných podgrafov.*
2. *Kubický graf má 4-tok práve vtedy, keď je hranovo 3-súvislý.*

**Dôsledok 6.1.4.6.** *Žiaden kubický hranovo 3-zafarbiteľný graf neobsahuje most.*

### 6.1.5 Dualita medzi tokmi a farbeniami

**Definícia 6.1.5.1.** Nech  $G = (V, E)$  a  $G^* = (V^*, E^*)$  sú netriviálne duálne planárne multigrafy bez mostov a slučiek. Pre hranové množiny  $F \subseteq E$  píšeme  $F^* := \{e^* \in E^* \mid e \in F\}$ . Obrátene, ak je daná podmnožina množiny  $E^*$ , budeme ju ihneď písať v tvare  $F^*$ , teda  $F \subseteq E$  definujeme implicitne pomocou zobrazenia  $e \rightarrow e^*$ .

**Definícia 6.1.5.2.** Ak  $C = v_0 \dots v_{l-1} v_0$  je kružnica s hranami  $e_i = v_i v_{i+1}$  (a  $v_l = v_0$ ), nazveme

$$\vec{C} := \{(e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < l\}$$

kružnicou s orientáciou.

**Lema 6.1.5.1.** *Existuje bijekcia  $*$ :  $\vec{e} \rightarrow \vec{e}^*$  z  $\vec{E}$  do  $\vec{E}^*$  s nasledovnými vlastnosťami:*

1. *Základná hrana  $k \vec{e}^*$  je vždy  $e^*$ , t.j.  $\vec{e}^*$  je jedným z dvoch smerov  $\vec{e}^*$ ,  $\overleftarrow{e}^*$  hrany  $e^*$ .*
2. *Ak  $C \subseteq G$  je kružnica,  $F := E(C)$  a ak  $X \subseteq V^*$  je taká, že  $F^* = E^*(X, \bar{X})$ , potom existuje orientácia  $\vec{C}$  kružnice  $C$  s  $\{\vec{e}^* \mid \vec{e} \in \vec{C}\} = \vec{E}^*(X, \bar{X})$ .*

**Definícia 6.1.5.3.** Je daná abelovská grupa  $H$ , nech  $f: \vec{E} \rightarrow H$  a  $g: \vec{E}^* \rightarrow H$  sú dve zobrazenia také, že

$$f(\vec{e}) = g(\vec{e}^*)$$

pre všetky  $\vec{e} \in \vec{E}$ . Pre  $\vec{F} \subseteq \vec{E}$  položíme

$$f(\vec{F}) := \sum_{\vec{e} \in \vec{F}} f(\vec{e}).$$



**Lema 6.1.5.2.**

1. Zobrazenie  $g$  je tok na  $G^*$  práve vtedy, keď  $f$  je tok na  $G$ .
2. Zobrazenie  $g$  je cirkulácia na  $G^*$  práve vtedy, keď  $f$  je tok na  $G$  taký, že  $f(\vec{C}) = 0$  pre každú kružnicu  $\vec{C}$  s orientáciou.

**Definícia 6.1.5.4.** Ak  $P = \{v_0 \dots v_l\}$  je cesta s hranami  $e_i = v_i v_{i+1}$  ( $i < l$ ), položíme množinu (závislú na očíslovaní vrcholov z  $P$ )

$$\vec{P} := \{(e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < l\}$$

a nazveme  $\vec{P}$   $v_0 \rightarrow v_l$  cestu.

**Veta 6.1.5.3** (Tutte, 1954). Pre každú duálnu dvojicu  $G, G^*$  planárnych multigrafov platí

$$\chi(G) = \varphi(G^*).$$

**6.1.6 Tutteove tokové hypotézy**

**Hypotéza 6.1.6.1** (Tutte, 1954). Každý multigraf bez mostov má 5-tok.

**Hypotéza 6.1.6.2** (Tutte, 1954). Každý multigraf bez mostov neobsahujúci Petersenov graf ako minor má 4-tok.

**Hypotéza 6.1.6.3** (Tutte, 1972). Každý multigraf bez rezu pozostávajúceho z práve jednej alebo práve troch hrán má 3-tok.

**Veta 6.1.6.4** (Seymour, 1981). Každý graf bez mostov má 6-tok.

**6.2 Úlohy**

**Úloha 6.1.** Predpokladajme, že sieť  $N$  má  $n$  vnútorných vrcholov, plus jeden zdroj a jedno ústie. Koľko oddeľujúcich rezov má sieť  $N$ ?

**Návod.** Inak povedané, koľkými rôznymi spôsobmi sa dá množina vrcholov  $V(N)$  rozdeliť do dvoch disjunktných podmnožín tak, aby  $s$  a  $t$  nepatrili do jednej podmnožiny. Ak  $s \in S$  a  $t \in T$ , tak potom je výsledok rovný počtu možností ako do  $S$  vybrať nula ostatných vrcholov plus počtu možností ako do  $S$  vybrať jeden z ostatných vrcholov, atď.

**Úloha 6.2.** Cestu  $P$  v sieti  $N$  nazveme zväčšujúca cesta, ak platí:

1. ak  $v_i v_{i+1}$  je hrana s orientáciou  $(v_i, v_{i+1})$ , tak potom  $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$ ,
2. ak  $v_i v_{i+1}$  je hrana s orientáciou  $(v_{i+1}, v_i)$ , tak potom  $f(v_i, v_{i+1}) > 0$ .

Na obrázku 6.1 je zobrazená sieť, pričom pri každej hrane je zobrazená jej kapacita  $c$  a v zátvorke hodnota funkcie  $f$ .

1. overte, či je  $f$  tokom v sieti  $N$ ,
2. zistite veľkosť toku  $f$ ,
3. nájdite v  $N$  zväčšujúcu cestu z  $s$  do  $t$ ,
4. nájdite maximálny tok v sieti  $N$ .

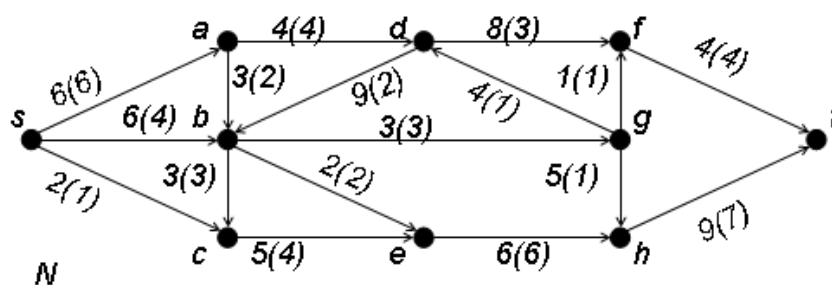
#### Návod.

1. V každom vrchole okrem  $s$  a  $t$  treba zistiť, či súčet “pritekajúcich” tokov je rovný súčtu “odtekajúcich” tokov.
2. Je to napríklad súčet tokov vytekajúcich z  $s$ .
3. Dá sa postupovať backtrackom, teda začať vo vrchole  $s$  a skúšať, či existuje hrana incidentná s daným vrcholom, ktorá by spĺňala podmienky zväčšujúcej cesty.
4. Podľa vety 6.1.2.2 je veľkosť maximálneho toku v sieti rovná kapacite minimálneho rezu. Keď nájdeme hodnotu kapacity minimálneho rezu, je už ľahké zostrojiť maximálny tok s danou hodnotou (napríklad opakovaným hľadaním zväčšujúcich ciest a ich zväčšovaním, až kým už žiadna zväčšujúca cesta v sieti neexistuje).

**Úloha 6.3.** Predpokladajme, že vrchol  $v$  v sieti  $N$  má tú vlastnosť, že cez neho môže prejsť najviac  $d$  jednotiek nejakého materiálu za jednotku času. (Vrchol môže napríklad reprezentovať čerpadlo v kanalizačnom systéme, alebo letisko s maximálnym počtom obslužených klientov za hodinu.) Ako by sa dala táto vlastnosť modelovať v sieti?

**Návod.** Keďže v sieti nemôžeme pridelovať kapacitu vrcholom, musíme vrchol  $v$  nejakým spôsobom nahradiť hranou.

**Úloha 6.4.** Dokážte, že ak v sieti  $N$  neexistuje orientovaná cesta z  $s$  do  $t$ , tak potom hodnota minimálneho rezu a veľkosť maximálneho toku v  $N$  sú obe nulové.

Obrázok 6.1: Sieť  $N$  s danými kapacitami a tokmi hrán.

**Návod.** Množina vrcholov  $N$  sa musí dať rozdeliť na dve časti, pričom z jednej do druhej nesmeruje žiadna hrana. Potom tieto dve časti tvoria minimálny rez.

**Úloha 6.5.** Bez použitia už dokázaných tvrdení nájdite tokové číslo grafu  $K_4$ .

**Návod.** Skúsime zostrojiť 3-tok a 4-tok.

**Úloha 6.6.** (+) Nech  $(S, T)$  a  $(X, Y)$  sú dva minimálne rezy v sieti  $N$ . Dokážte, že  $(S \cup X, T \cap Y)$  aj  $(S \cap X, T \cup Y)$  sú tiež minimálne rezy v  $N$ .

**Návod.** Ľahko sa ukáže, že sú to oddeľujúce rezy. Keď si rozdelíme  $V(N)$  na štyri časti,  $S \cap X, T \cap X, S \cap Y, T \cap Y$  a pozrieme sa na kapacity rezov medzi jednotlivými týmito množinami, môžeme ich porovnaním zistiť, že kapacity dvoch spomínaných rezov sa rovnajú a ich súčet je rovný súčtu kapacít dvoch daných minimálnych rezov. Z minimality týchto rezov potom môžeme odvodiť aj minimalitu nových rezov.

**Úloha 6.7.** (+) Nech  $\vec{G}$  je orientovaný graf. Pre každú hranu  $\vec{vw} \in \vec{E}(\vec{G})$  je pevne daná minimálna kapacita  $l(v, w)$  a maximálna kapacita  $c(v, w)$ , kde  $0 \leq l(v, w) \leq c(v, w)$ . Cirkuláciu  $g$  nazývame *prijateľná*, ak  $l(v, w) \leq g(v, w) \leq c(v, w)$  pre každú hranu  $\vec{vw}$ .

Dokážte, že existuje prijateľná cirkulácia práve vtedy, keď  $l(S, \bar{S}) \leq c(\bar{S}, S)$  pre všetky  $S \subset V$ .

**Návod.** Dopredná implikácia je ľahká. Opačnú implikáciu dokážeme tak, že ku grafu  $\vec{G}$  pridáme dva nové vrcholy  $s$  a  $t$  (zdroj a ústie), ktoré spojíme so všetkými ostatnými vrcholmi a v novom grafe upravíme kapacitnú funkciu tak, aby z existencie toku s potrebnou veľkosťou v ňom vyplývala prijateľnosť cirkulácie v grafe  $\vec{G}$ .

**Úloha 6.8.** Nájdite grafy  $G$  a  $H = G - e$  bez mostov také, že  $2 < \varphi(G) < \varphi(H)$ .

**Návod.** Vezmeme ľubovoľný graf s väčším tokovým číslom (aspoň 4) a pridávaním hrán jeho tokové číslo skúsime znížiť.

**Úloha 6.9.** Dokážte, že každý multigraf bez mostov má 6-tok.

**Návod.** Použijeme tvrdenie 6.1.6.4 a zostrojíme jednoduchý graf s tými istými vlastnosťami.

**Úloha 6.10.** (+) Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenie: Graf  $G$  má nikde-nulový 4-tok práve vtedy, keď  $G$  má rozklad na 3 paritné podgrafy.<sup>1</sup>

**Návod.** Jednoduchšie je dokázať ekvivalentné tvrdenie “Graf  $G$  má  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -tok práve vtedy, keď  $G$  má rozklad na 3 paritné podgrafy.” (Prečo je toto tvrdenie ekvivalentné s pôvodným?) Dané podgrafy sú  $P_1, P_2, P_3$ , pričom do  $P_i$  budú patriť tie hrany, ktorých tok je  $i$  v binárnom zápise.

---

<sup>1</sup>Definícia paritného podgrafu je v úlohe 1.11 na strane 12.

# Kapitola 7

## Hamiltonovské kružnice

### 7.1 Základné definície a tvrdenia

**Definícia 7.1.1.** Uzavretý sled obsahujúci každý vrchol grafu  $G$  práve raz sa nazýva *hamiltonovská kružnica*. Ak  $G$  obsahuje hamiltonovskú kružnicu, nazýva sa *hamiltonovský*.

Podobne, cesta v  $G$  obsahujúca všetky vrcholy sa nazýva *hamiltonovská cesta*.

#### 7.1.1 Jednoduché postačujúce podmienky

**Veta 7.1.1.1** (Dirac, 1952). Každý graf s  $n \geq 3$  vrcholmi a minimálnym stupňom aspoň  $\frac{n}{2}$  obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

**Tvrdenie 7.1.1.2.** Každý graf  $G$  s  $|G| \geq 3$  a  $\kappa(G) \geq \alpha(G)$  obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

**Veta 7.1.1.3** (Tutte, 1956). Každý 4-súvislý planárny graf obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

#### 7.1.2 Hamiltonovské kružnice a postupnosti stupňov

**Definícia 7.1.2.1.** Ak  $G$  je graf s  $n$  vrcholmi a stupňami  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ , potom  $n$ -tica  $(d_1, \dots, d_n)$  sa nazýva *postupnosť stupňov* grafu  $G$ .

**Definícia 7.1.2.2.** Ľubovoľnú celočíselnú postupnosť  $(a_1, \dots, a_n)$  nazývame *hamiltonovskou postupnosťou*, ak každý graf s  $n$  vrcholmi a postupnosťou stupňov po zložkách väčšou ako  $(a_1, \dots, a_n)$  je hamiltonovský.

Postupnosť  $(d_1, \dots, d_n)$  je po zložkách väčšia ako  $(a_1, \dots, a_n)$ , ak  $d_i \geq a_i$  pre všetky  $i$ .

**Veta 7.1.2.1** (Chvátal, 1972). *Celočíselná postupnosť  $(a_1, \dots, a_n)$  taká, že  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < n$  a  $n \geq 3$  je hamiltonovská práve vtedy, keď pre všetky  $i < \frac{n}{2}$  platí*

$$a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n - i.$$

**Definícia 7.1.2.3.** Celočíselnú postupnosť  $(a_1, \dots, a_n)$  nazývame *cestno-hamiltonovská*, ak každý graf s po zložkách väčšou postupnosťou stupňov obsahuje hamiltonovskú cestu.

**Dôsledok 7.1.2.2.** *Celočíselná postupnosť  $(a_1, \dots, a_n)$  taká, že  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < n$  a  $n \geq 2$  je cestno-hamiltonovská práve vtedy, keď pre každé  $i \leq \frac{n}{2}$  platí*

$$a_i < i \Rightarrow a_{n-i+1} \geq n - i.$$

### 7.1.3 Hamiltonovské kružnice vo štvorci grafu

**Definícia 7.1.3.1.** Majme daný graf  $G$  a celé číslo  $d > 0$ .  $G^d$  označíme graf na  $V(G)$  v ktorom sú dva vrcholy susedné práve vtedy, ak ich vzdialenosť v  $G$  je najviac  $d$ .

**Veta 7.1.3.1** (Fleischner, 1974). *Ak  $G$  je 2-súvislý graf, tak  $G^2$  obsahuje hamiltonovskú kružnicu.*

**Hypotéza 7.1.3.2** (Seymour, 1974). *Nech  $G$  je graf s  $n \geq 3$  vrcholmi a  $k > 0$  je celé číslo. Ak  $G$  má minimálny stupeň*

$$\delta(G) \geq \frac{n}{k+1}n,$$

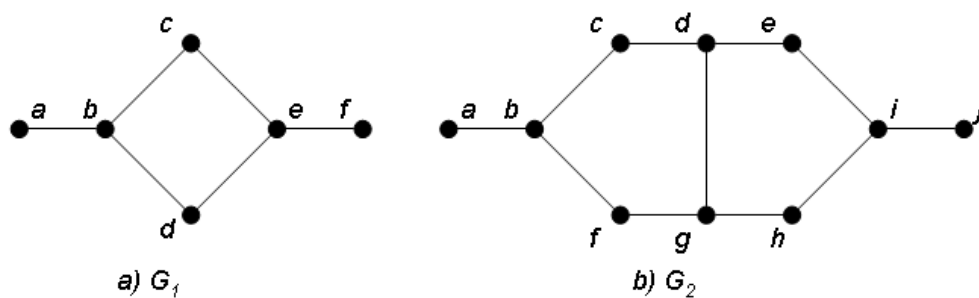
*tak potom  $G$  obsahuje hamiltonovskú kružnicu  $H$  takú, že  $H^k \subseteq G$ .*

## 7.2 Úlohy

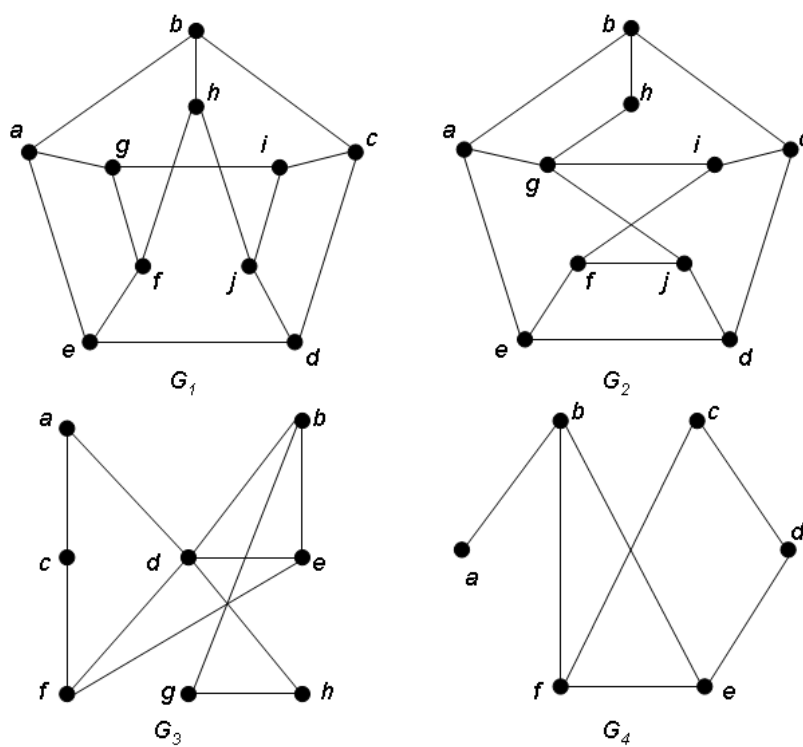
**Úloha 7.1.** Dokážte, že grafy na obrázku 7.1 neobsahujú hamiltonovskú kružnicu ani hamiltonovskú cestu.

**Návod.** To, že neobsahujú hamiltonovskú kružnicu je jasné z toho, že oba grafy obsahujú vrcholy stupňa 1. Neexistenciu hamiltonovskej cesty môžeme ukázať tak, že nájdeme dva vrcholy, ktoré spolu neležia na žiadnej ceste medzi vrcholmi stupňa 1.

**Úloha 7.2.** Ak existuje, nájdite hamiltonovskú kružnicu v grafoch  $G_1, G_2, G_3, G_4$  zobrazených na obrázku 7.2.



Obrázok 7.1: Grafy neobsahujúce hamiltonovskú kružnicu.



Obrázok 7.2: Grafy z úlohy 7.2.

**Úloha 7.3.** Dokážte, že podgraf kompletne bipartitného grafu  $K_{m,n}$  pokrývajúci všetky vrcholy môže obsahovať hamiltonovskú kružnicu iba vtedy, ak  $m = n$ .

**Návod.** Hamiltonovská kružnica v bipartitnom grafe musí obsahovať všetky vrcholy práve raz, a to striedavo z jednej a druhej partície.

**Úloha 7.4.** Obsahuje Petersenov graf zobrazený na obrázku 1.3 hamiltonovskú kružnicu? Ak áno, tak ju ukážte, ak nie, tak to dokážte.

**Návod.** Pomenujme hrany spájajúce vonkajších päť vrcholov s vnútornými piatimi vrcholmi Petersenovho grafu (tak ako je zobrazený na obrázku 1.3) spojnice. Aký počet spojníc by musela obsahovať hamiltonovská kružnica? Je tento počet možné v kružnici obsiahnuť?

**Úloha 7.5.** Dokážte, alebo vyvráťte nasledovné tvrdenia:

1. Ak  $G$  je eulerovský, tak potom  $G$  je hamiltonovský.
2. Ak  $G$  je hamiltonovský, tak potom  $G$  je eulerovský.

**Návod.** Na obe tvrdenia sa dajú nájsť jednoduché kontrapríklady.

**Úloha 7.6.** Pre ktoré grafy je eulerovský ťah zároveň aj hamiltonovskou kružnicou?

**Návod.** V daných grafoch musí eulerovský ťah prechádzať každým vrcholom práve raz.

**Úloha 7.7.** Ukážte, že sa dá zafarbiť tretina hrán grafu  $K_7$  červenou farbou, tretina hrán modrou farbou a tretina hrán zelenou farbou tak, aby množina hrán zafarbených rovnakou farbou tvorila hamiltonovskú kružnicu v  $K_7$ .

**Návod.** Ak si nakreslíme vrcholy  $K_7$  do kruhu a zvolíme si jeden vrchol ako počiatočný, tak potom červenou farbou môžeme ofarbiť hrany spájajúce vrcholy vzdialené o jeden od posledného proti smeru hodinových ručičiek, modrou farbou hrany spájajúce vrcholy vzdialené o dva od posledného proti smeru hodinových ručičiek a zelenou hrany spájajúce vrcholy vzdialené o tri od posledného proti smeru hodinových ručičiek.

**Úloha 7.8.** (+) Nech  $G$  je graf s  $n \geq 3$  vrcholmi. Dokážte, že ak pre všetky nesusedné vrcholy  $v_1$  a  $v_2$  platí, že  $d(v_1) + d(v_2) \geq n$ , tak potom je  $G$  hamiltonovský.

**Návod.** Predpokladajme opak a zvolme si graf  $G$  s  $n$  vrcholmi, ktorý má maximálny počet hrán spomedzi všetkých grafov pre ktoré dané tvrdenie neplatí. Potom ale  $G + pq$  pre nesusedné vrcholy  $p, q$  obsahuje hamiltonovskú kružnicu. Na tejto kružnici si označme ako prvý vrchol  $p$  a posledný vrchol  $q$ . Potom pred susedmi  $p$  nemôže na tejto kružnici byť žiaden sused  $q$ . Z toho dostaneme spor s predpokladom, že  $d(p) + d(q) \geq n$ .



**Úloha 7.9.** (+) Nech  $G$  je graf s  $n$  vrcholmi,  $v_1$  a  $v_2$  sú nesusedné vrcholy také, že  $d(v_1) + d(v_2) \geq n$ . Dokážte, že  $G + v_1v_2$  je hamiltonovský práve vtedy, keď  $G$  je hamiltonovský.

**Návod.** Spätná implikácia je triviálne platná. Dopredná implikácia sa dokáže podobne, ako tvrdenie z úlohy 7.8.

**Úloha 7.10.** Nech  $G$  je graf s  $n \geq 3$  vrcholmi.

1. Dokážte, že ak  $G$  má aspoň  $\frac{n^2-3n+6}{2}$  hrán, tak  $G$  je hamiltonovský.
2. Nájdite nehamiltonovský graf s  $\frac{n^2-3n+6}{2} - 1$  hranami, teda dokážte, že predchádzajúce ohraničenie je najlepšie možné.

**Návod.** Podľa tvrdenia z úlohy 7.8 stačí ukázať, že pri danom počte hrán neexistujú dva nesusedné vrcholy  $v_1$  a  $v_2$  s  $d(v_1) + d(v_2) < n$ .

**Úloha 7.11.** (+) Graf  $G$  s  $n$  hranami nazývame *konzervatívny*, ak existuje taká jeho orientácia s ohodnotením hrán  $1, \dots, n$ , že súčet ohodnotení hrán vstupujúcich do ľubovoľného vrcholu sa rovná súčtu ohodnotení hrán vystupujúcich z toho istého vrcholu.<sup>1</sup>

Dokážte, že ak sa graf  $G$  dá rozložiť na dve hamiltonovské kružnice, tak je konzervatívny.

**Návod.** Najskôr pretraverzujeme jednu hamiltonovskú kružnicu, pričom budeme hrany orientovať v smere traverzovania a hodnoty pridelovať tak, aby v každom vrchole bola výsledná suma  $-2$ , potom budeme traverzovať obdobným spôsobom aj druhú hamiltonovskú kružnicu, ale tak, aby táto prispievala sumou  $+2$ .

---

<sup>1</sup>Dá sa to predstaviť aj tak, že hranám určíme smer a každej hrane priradíme inú hodnotu od 1 do  $n$ , pričom ak hodnotu hrán orientovaných do vrchola pričítame a od vrchola odčítame, tak v každom vrchole musí byť súčet hodnôt hrán nula.

# Kapitola 8

## Riešenia úloh

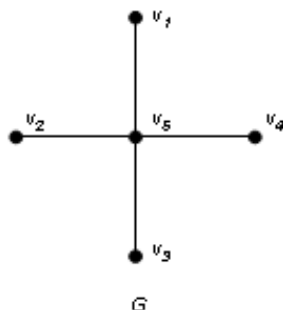
### 8.1 Základy

*Riešenie 1.1.* Ak by sa nám podarilo eliminovať opakujúce sa vrcholy v danom slede, dostali by sme cestu medzi týmito vrcholmi. Nech daný sled je  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Vezmime si vrchol  $v_1$ . Ak pre nejaké  $2 < i < n$  platí, že  $v_1 = v_i$ , tak vezmime najväčšie takéto  $i$  a v danom slede odstránime všetky vrcholy  $v_2, \dots, v_i$ . Tým sme vlastne odstránili kružnicu zo sledu. Ak tento postup budeme opakovať až pokiaľ žiaden vrchol v slede nenájdeme dvakrát, dostaneme cestu medzi danými vrcholmi.  $\square$

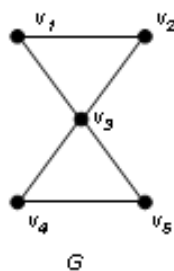
*Riešenie 1.2.* Dokážeme sporom. Majme cesty  $P_a$  a  $P_b$  ktoré sú najdlhšie v grafe  $G$  a nemajú spoločný vrchol. Ďalej si vezmime vrcholy  $v_a \in P_a$  (tento vrchol rozdeľuje cestu  $P_a$  na dve časti, označme tú dlhšiu z nich  $P_a^*$ ) a  $v_b \in P_b$  (podobne rozdeľuje cestu  $P_b$  na dve časti, dlhšiu z nich označíme  $P_b^*$ ). Keďže  $G$  je súvislý, existuje cesta medzi  $v_a$  a  $v_b$ , označme ju  $P_c$ . Spojením ciest  $P_a^*, P_c$  a  $P_b^*$  však vznikla dlhšia cesta ako sú  $P_a$  a  $P_b$ , čo je spor. Graf, v ktorom dve najdlhšie cesty nemajú spoločnú hranu je zobrazený na obrázku 8.1, teda toto tvrdenie neplatí.  $\square$

*Riešenie 1.3.*

1. Tvrdenie neplatí, kontrapríklad je zobrazený na obrázku 8.2.
2. Uvažujme uzavretý sled obsahujúci len kružnice párnej dĺžky. Dĺžka tohto sledu je vždy párna, takže nemôže existovať uzavretý sled nepárnej dĺžky, ktorý by obsahoval iba kružnice párnej dĺžky. Potom ale platí, že každý uzavretý sled nepárnej dĺžky musí obsahovať aspoň jednu kružnicu nepárnej dĺžky, teda tvrdenie platí.  $\square$



Obrázok 8.1: Dve najdlhšie cesty grafu  $G$  ( $v_1v_5v_3$  a  $v_2v_5v_4$ ) nemajú spoločnú hranu.



Obrázok 8.2: Uzavretý sled  $v_3v_1v_2v_3v_4v_5v_3$  dĺžky 6 neobsahuje kružnicu párnej dĺžky.

*Riešenie 1.4.* Ak je  $e$  most, tak musí ležať na všetkých kostrách grafu  $G$ . Inak vezmeme nejakú kosť  $T$  na ktorej  $e$  neleží. Potom graf  $T \cup e$  obsahuje práve jednu kružnicu. Nech  $f \neq e$  je hrana ležiaca na tejto kružnici. Potom graf  $T' = T \cup e - f$  je strom (jedinú kružnicu sme "rozpojili"), obsahuje hranu  $e$  a pokrýva všetky vrcholy grafu  $G$ . Ted  $T'$  je kosť grafu  $G$  obsahujúca  $e$ .  $\square$

*Riešenie 1.5.*  $A$  označuje maticu susedností,  $B$  incidenčnú maticu.

$$G : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

*Riešenie 1.6.*

1. Keďže graf  $K_{1,n}$  má dve partície, pričom jedna má veľkosť 1 a druhá  $n$ , a navyše je každý vrchol z jednej partície susedný so všetkými vrcholmi z druhej partície, počet hrán  $|E(K_{1,n})| = n$ .
2. Vychádzajme priamo z definície  $n$ -kolesa. Vrchol  $v_0$  je susedný so všetkými ostatnými vrcholmi, teda má stupeň  $d(v_0) = n$ . Okrem týchto  $n$  hrán nám ešte ostávajú hrany  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ , a tých je práve  $n$ . Celkovo teda  $|E(W_n)| = 2n$ .
3. Opäť, nech  $A$  označuje maticu susedností,  $B$  incidenčnú maticu.

$$K_{1,n} : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_n : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

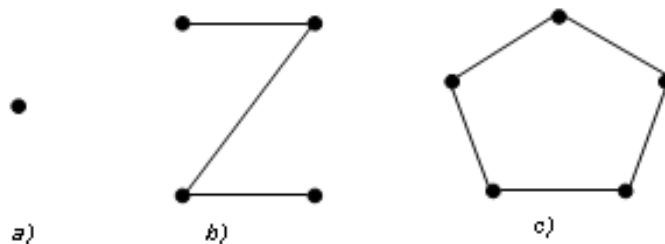
*Riešenie 1.7.* Keďže graf  $G$  je nesúvislý, obsahuje aspoň dva komponenty. Vezmime si ľubovoľný z nich, nech je to  $C$ . Keďže ľubovoľný vrchol  $v \in C$  nemá suseda v  $G \setminus C$ , tak v grafe  $\overline{G}$  musí byť  $v$  susedný s každým vrcholom z  $G \setminus C$ . Ľubovoľný z týchto susedov však musí byť taktiež susedný so všetkými ostatnými vrcholmi v  $C$ . Teda v grafe  $\overline{G}$  existuje cesta z vrchola  $v$  do každého iného vrchola (do vrchola z  $G \setminus C$  cesta dĺžky 1, do vrchola z  $C$  dĺžky najviac 2), teda graf  $\overline{G}$  je spojitý, dokonca vieme povedať, že jeho priemer je 2. □

*Riešenie 1.8.* Nech graf  $G$  nie je súvislý. Vezmime jeho najmenšiu komponentu, nech je to  $C$ . Ten má najviac  $\frac{n}{2}$  vrcholov. Potom ale  $\delta(C) \leq \frac{n}{2} - 1$ . Potom ale zrejme aj  $\delta(G) \leq \frac{n}{2} - 1$ , čím je tvrdenie dokázané.  $\square$

*Riešenie 1.9.* Zoberme si kompletný graf rádu  $n$ ,  $K_n$ . Počet jeho hrán je  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Počet hrán v samokomplementárnom grafe rádu  $n$  musí byť polovičný, teda  $\frac{n(n-1)}{4}$ , no a keďže počet hrán je vždy prirodzené číslo, tak  $\frac{n(n-1)}{4} = 0 \pmod{1}$ , inak povedané  $n(n-1) = 0 \pmod{4}$ . Z toho je zrejmé, že buď  $n = 0 \pmod{4}$ , alebo  $n = 1 \pmod{4}$ .

Príklady samokomplementárnych grafov sú:

1.  $K_1$ , teda graf s jediným vrcholom zobrazený na obrázku 8.3 a), prípadne aj  $\emptyset$ , teda prázdny graf,
2. cesta dĺžky 3 zobrazená na obrázku 8.3 b),
3. kružnica dĺžky 5 zobrazená na obrázku 8.3 c).  $\square$



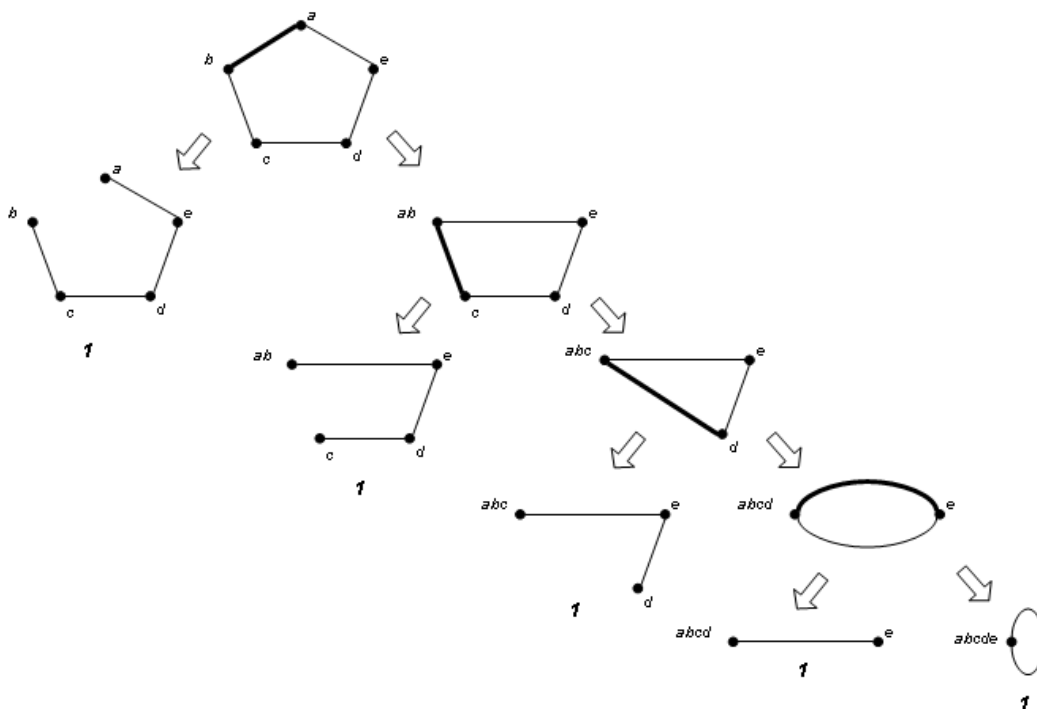
Obrázok 8.3: Samokomplementárne grafy. a)  $K_1$  b) cesta dĺžky 3 c) kružnica dĺžky 5.

*Riešenie 1.10.* Pre všetky hrany  $e \in E(G)$  platí, že počet kostier (multi)grafu  $G$  je rovný súčtu počtu kostier, ktoré obsahujú hranu  $e$  a počtu kostier, ktoré neobsahujú hranu  $e$ . Je tiež zrejmé, že  $t(G-e)$  je počet kostier grafu  $G$ , ktoré neobsahujú hranu  $e$ .  $t(G/e)$  je zas počet kostier multigrafu  $G$  prechádzajúcich cez hranu  $e$  (Hranu  $e$  nahradíme v grafe  $G/e$  vrcholom a ten musí obsahovať každá kostra grafu  $G/e$ ). Pri kontrakcii nám môžu vzniknúť viacnásobné hrany (kontrakciou hrany, ktorá leží na kružnici dĺžky 3), prípadne slučky (kontrakciou jednej z viacnásobných hrán). Slučky už ďalej nie je možné kontrahovať. Pri algoritmickom postupe metódou kontrakcie hrán nám teda na konci ostane jediný vrchol s  $n$  slučkami, pričom  $n$  je práve počet kostier

pôvodného multigrafu  $G$ .

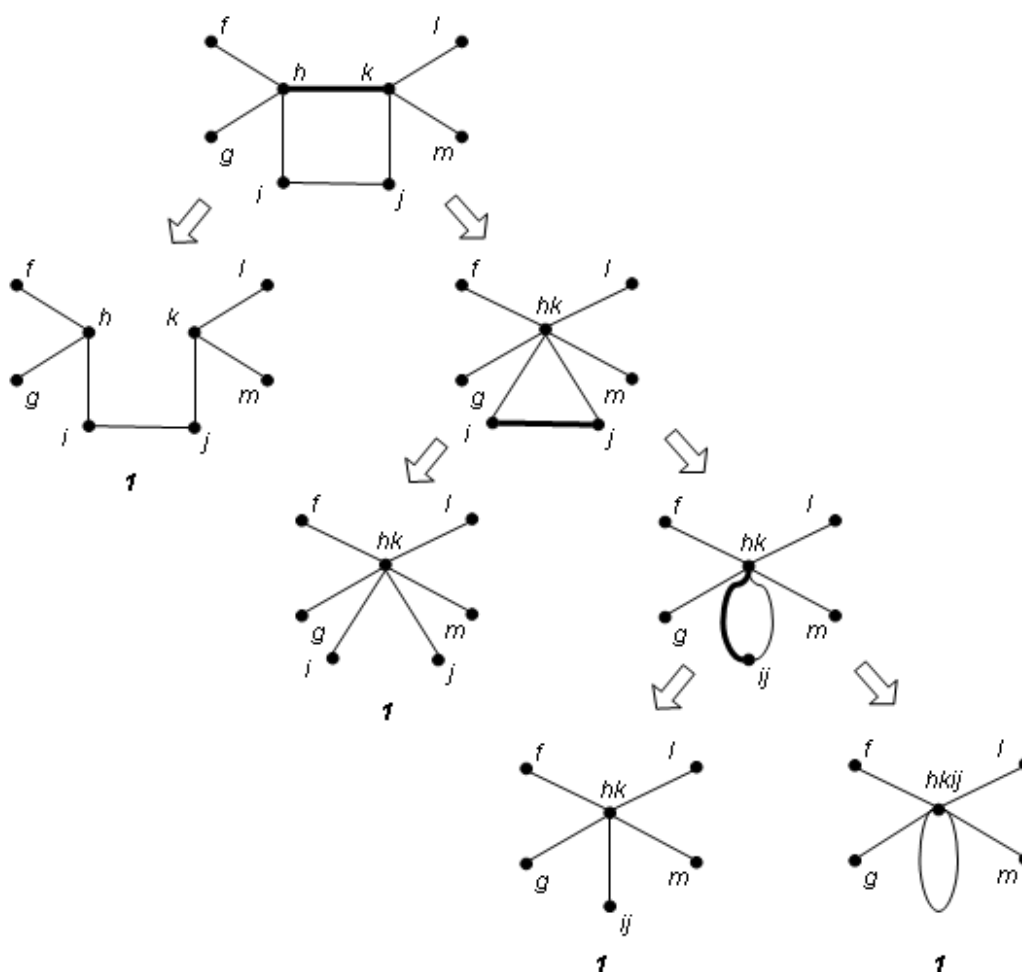
Ukážeme si popísaný algoritmus pri konkrétnych zadaných grafoch. Počet hrán multigrafu nijako neovplyvňujú slučky, nakoľko tieto v žiadnej kostre nie sú obsiahnuté, teda ich nebudeme brať do úvahy. Graf už ďalej nebudeme kontrahovať, pokiaľ je strom, keďže každý strom obsahuje práve jednu kosť.

1.  $t(G_1) = 5$ , postup je zobrazený na obrázku 8.4.
2.  $t(G_2) = 4$ , postup je zobrazený na obrázku 8.5.
3.  $t(G_3) = 16$ , postup je zobrazený na obrázku 8.6. □



Obrázok 8.4: Postup pri zisťovaní počtu kostier grafu  $G_1$  metódou kontrahácie hrán. Hrube je zvýraznená hrana, ktorú v ďalšom kroku kontrahujeme.

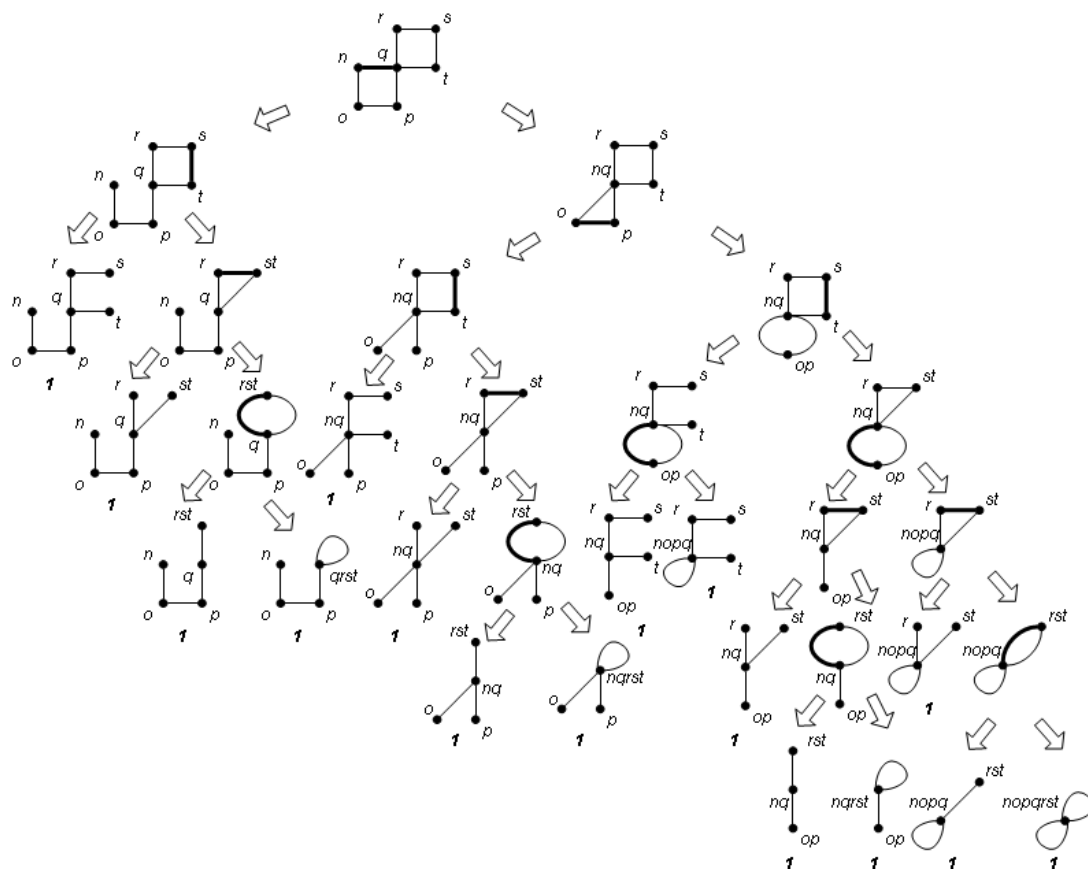
*Riešenie 1.11.* Ak graf  $G$  obsahuje vrchol  $v$  párneho stupňa, potom tento vrchol je súčasťou ľubovoľnej kostry a zároveň podgraf  $P = (\{v\}, \{\})$  je paritný podgraf grafu  $G$  (v  $P$  má vrchol  $v$  stupeň 0, teda párný a aj v  $G$  má párný stupeň). Ak  $G$  neobsahuje vrchol párneho stupňa, potom stačí zobrať ľubovoľné dva susedné vrcholy na danej kostre (nech sú to  $v$  a  $w$ ). Potom



Obrázok 8.5: Postup pri zisťovaní počtu kostier grafu  $G_2$  metódou kontrahcie hrán. Hrube je zvýraznená hrana, ktorú v ďalšom kroku kontrahujeme.

graf  $P = (\{v, w\}, \{vw\})$  tvorí paritný podgraf grafu  $G$  (oba vrcholy majú v  $P$  stupeň 1, teda nepárny, ale zároveň aj v  $G$  majú nepárny stupeň).  $\square$

*Riešenie 1.12.* Zjavne množina vrcholov bude v oboch prípadoch rovnaká,  $V(\overline{G-v}) = V(G) \setminus \{v\} = V(\overline{G-v})$ . Skúmame teda množinu hrán. Ak v  $G$  existuje hrana  $w_1w_2 \in E(G)$  ( $w_1, w_2 \neq v$ ), tak potom  $w_1w_2 \notin E(G-v)$  a tiež  $w_1w_2 \notin E(\overline{G-v})$ . Naopak platí, že ak  $w_1w_2 \notin E(G)$  tak potom  $w_1w_2 \in E(\overline{G-v})$  a taktiež  $w_1w_2 \in E(\overline{G-v})$ . Stačí teda skúmať hrany tvaru  $wv$ , či už existujú v grafe  $G$  alebo  $\overline{G}$ . Vo všeobecnosti platí, že pri odstránení vrcholu  $v$  spolu s ním odstránime všetky s ním incidentné hrany.



Obrázok 8.6: Postup pri zisťovaní počtu kostier grafu  $G_3$  metódou kontrakcie hrán. Hrube je zvýraznená hrana, ktorú v ďalšom kroku kontrahujeme.

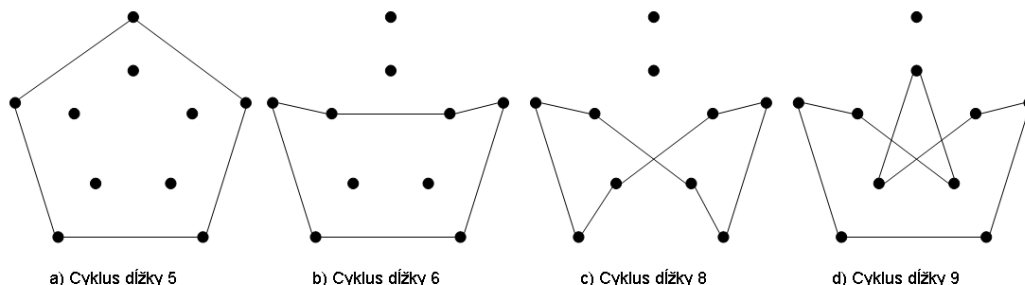
Či už teda vrchol  $v$  odstránime z grafu  $G$  alebo z grafu  $\overline{G}$ , určite platí pre všetky  $w \in V(G) \setminus \{v\}$ , že  $wv \notin E(\overline{G} - v)$  a  $wv \notin E(G - v)$ . Tým sme dokázali, že  $E(\overline{G} - v) = E(G - v)$ , a teda  $\overline{G} - v = G - v$ .  $\square$

*Riešenie 1.13.* Nech dané dve partície grafu  $G$  obsahujú  $p$  respektíve  $q$  vrcholov. Potom  $G$  má najviac  $pq$  hrán (práve  $pq$  ich má v prípade, ak je kompletne bipartitný, teda ak je každý vrchol z jednej partície susedný so všetkými vrcholmi z druhej partície). Navyše  $p + q = v$ . Nech je teda  $p = \frac{v}{2} + \varepsilon$ ,  $q = \frac{v}{2} - \varepsilon$ . Potom  $pq = (\frac{v}{2} + \varepsilon)(\frac{v}{2} - \varepsilon) = \frac{v^2}{4} - \varepsilon^2 \leq \frac{v^2}{4}$ , pričom  $pq = \frac{v^2}{4}$  práve vtedy, ak  $\varepsilon = 0$ , teda keď sú obe partície rovnako veľké, teda ak ide o graf  $K_{\frac{v}{2}, \frac{v}{2}}$ .  $\square$

*Riešenie 1.14.* Cykly s požadovanými dĺžkami sú zobrazené na obrázku 8.7.



□



Obrázok 8.7: Cykly rôznej dĺžky v Petersenovom grafe. a)5 b)6 c)8 d)9.

*Riešenie 1.15.* Aby v grafe nebol žiaden cyklus, musí to byť les. Všetky listy ľubovoľného stromu z lesa však majú stupeň 1. Jediný strom s iba jedným listom však je izolovaný vrchol. Graf  $G$  však obsahuje aspoň dva vrcholy. Teda to nemôže byť les a preto musí obsahovať cyklus.

Ak by sme povolili nekonečnú mohutnosť množiny vrcholov, tvrdenie by neplatilo. Kontrapríklad tvorí nekonečne dlhá cesta s počiatčným vrcholom stupňa 1 a ostatnými vrcholmi stupňa práve 2, tvaru

$$v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}, \dots$$

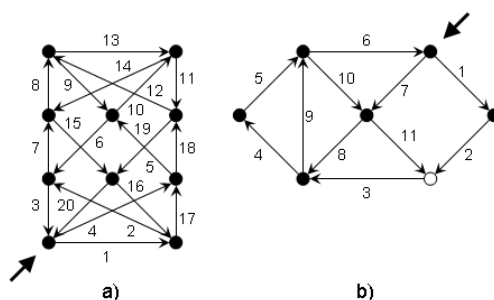
□

*Riešenie 1.16.* a) V grafe sú až štyri vrcholy nepárneho stupňa, preto tento graf nie je eulerovský.

b) Všetky vrcholy v grafe sú párneho stupňa, preto tento graf je eulerovský. Jeden z eulerovských ťahov je zobrazený na obrázku 8.8 a). Na počiatčný a koncový vrchol sledu zároveň ukazuje šípka.

c) Dva z vrcholov v tomto grafe majú nepárny stupeň, preto v ňom síce existuje sled prechádzajúci všetkými hranami (obrázok 8.8 b) - na počiatčný vrchol sledu ukazuje šípka, koncový je zvýraznený), ale tento nie je uzavretý, teda podľa definície 1.1.8.1 to nie je eulerovský ťah. □

*Riešenie 1.17.* Najväčší počet mostov zo všetkých grafov s  $v$  vrcholmi má strom s  $v$  vrcholmi, pretože v ňom nie sú cykly a teda každá hrana je zároveň aj mostom. Podľa vety 1.1.5.3 má strom s  $v$  vrcholmi práve  $v - 1$  hrán. □



Obrázok 8.8: a) Graf povolujući eulerovský ťah. b) Graf s neuzavretým sledom prechádzajúcim všetkými hranami, nie však eulerovským ťahom.

*Riešenie 1.18.* Predpokladajme, že tento graf má most. Ak by sme ho odstránili, vznikli by nám dva komponenty, ktoré by obsahovali práve jeden vrchol nepárneho stupňa. To však nie je možné, lebo súčet stupňov všetkých vrcholov v komponente musí byť párny (je to totiž vždy dvojnásobok počtu hrán). Tým sme dospeli k sporu.  $\square$

*Riešenie 1.19.* Budeme postupovať indukciou vzhľadom na počet vrcholov stromu  $T$ , teda  $v$ .

$v = 1$ : V tomto prípade je  $|M_T^1| = |x^0| = 1 = (1 - x^2)^0$ .

$v = i + 1$ : Nech matica  $M_T^i$  vyzerá nasledovne:

$$\begin{pmatrix} x^{D(1,1)} & x^{D(1,2)} & \dots & x^{D(1,i)} \\ x^{D(2,1)} & x^{D(2,2)} & \dots & x^{D(2,i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{D(i,1)} & x^{D(i,2)} & \dots & x^{D(i,i)} \end{pmatrix}$$

Predpokladáme, že platí  $|M_T^i| = (1 - x^2)^{i-1}$ . Nech v strome  $T$  je  $m$  list, ktorého jediný sused je  $l$ . Bez ujmy na všeobecnosti, nech  $l = i$  a  $m = i + 1$  (je úplne jedno, ktoré riadky matice reprezentujú dané vrcholy, operácie, ktoré budeme používať sú tie isté aj ak by išlo o iné riadky a stĺpce, posledné dva sme vybrali iba kvôli prehľadnejšiemu zobrazeniu). Platí, že vzdialenosť listu  $m$  od ľubovoľného vrchola (okrem seba samého) je o jeden väčšia ako vzdialenosť vrchola  $l$  od toho istého vrchola, teda  $D(x, m) = D(x, l) + 1$  a  $D(m, x) = D(l, x) + 1$ . Tiež platí, že  $D(m, m) = 0$ . Matica  $M_T^{i+1}$  preto

vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
 M_T^{i+1} &= \begin{pmatrix} x^{D(1,1)} & x^{D(1,2)} & \dots & x^{D(1,l)} & x^{D(1,l)+1} \\ x^{D(2,1)} & x^{D(2,2)} & \dots & x^{D(2,l)} & x^{D(2,l)+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{D(l,1)} & x^{D(l,2)} & \dots & x^{D(l,l)} & x^{D(l,l)+1} \\ x^{D(l,1)+1} & x^{D(l,2)+1} & \dots & x^{D(l,l)+1} & x^{D(m,m)} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} x^{D(1,1)} & x^{D(1,2)} & \dots & x^{D(1,l)} & x.x^{D(1,l)} \\ x^{D(2,1)} & x^{D(2,2)} & \dots & x^{D(2,l)} & x.x^{D(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{D(l,1)} & x^{D(l,2)} & \dots & x^{D(l,l)} & x.x^{D(l,l)} \\ x.x^{D(l,1)} & x.x^{D(l,2)} & \dots & x.x^{D(l,l)} & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Determinant matice sa nijako nezmení, ak od ľubovoľného riadku odpočítame  $k$ -násobok iného riadku. To isté platí aj o stĺpcoch. Preto ak od  $(i+1)$ -ho riadku (stĺpca) odpočítame  $x$ -násobok  $i$ -teho, dostávame:

$$\begin{aligned}
 |M_T^{i+1}| &= \begin{vmatrix} x^{D(1,1)} & x^{D(1,2)} & \dots & x^{D(1,l)} & x.x^{D(1,l)} \\ x^{D(2,1)} & x^{D(2,2)} & \dots & x^{D(2,l)} & x.x^{D(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{D(l,1)} & x^{D(l,2)} & \dots & x^0 & x.x^0 \\ x.x^{D(l,1)} & x.x^{D(l,2)} & \dots & x.x^0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} x^{D(1,1)} & x^{D(1,2)} & \dots & x^{D(1,l)} & x.x^{D(1,l)} \\ x^{D(2,1)} & x^{D(2,2)} & \dots & x^{D(2,l)} & x.x^{D(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{D(l,1)} & x^{D(l,2)} & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (1-x^2) \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} x^{D(1,1)} & x^{D(1,2)} & \dots & x^{D(1,l)} & 0 \\ x^{D(2,1)} & x^{D(2,2)} & \dots & x^{D(2,l)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{D(l,1)} & x^{D(l,2)} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (1-x^2) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Podľa Laplacovho rozvoja platí  $|M_T^{i+1}| = (1-x^2)(-1)^{(i+1)+(i+1)}|M_T^i| = (1-x^2)(1-x^2)^{i-1} = (1-x^2)^i$ .  $\square$

*Riešenie 1.20.*

1. Keďže v kompletom grafe má ľubovoľný vrchol za susedov všetky ostatné vrcholy, tak  $rad(K_n) = 1$  pre ľubovoľné  $n$  a teda centrum tvoria všetky vrcholy, ktorých najväčšia vzdialenosť od ľubovoľného iného vrchola je práve 1. To je však prípad všetkých vrcholov kompletného grafu.
2. Budeme postupovať indukciou na počet vrcholov stromu  $T$ .  
 $|V(T)| = 1$ : Centrum zjavne tvorí jediný vrchol.  
 $|V(T)| = 2$ : Centrum zjavne tvoria oba vrcholy stromu, ktoré sú navyše susedné.  
 $|V(T)| = i + 1$ : Predpokladajme, že v strome veľkosti menej ako  $i + 1$  tvorí centrum jeden vrchol, prípadne dva susedné vrcholy. Majme teda daný strom  $T$  s  $i + 1$  vrcholmi. Vymažeme z neho množinu  $L$  všetkých listov, teda vrcholov stupňa 1. O grafe  $T - L$  podľa indukčného predpokladu vieme, že jeho centrum tvorí buď jeden vrchol, alebo dvojica susedných vrcholov. Pre všetky vrcholy v ňom však platí, že najväčšia vzdialenosť od ľubovoľného iného vrchola je práve o jeden menšia ako v strome  $T$ . Zároveň je zrejmé, že žiaden z vrcholov z  $L$  nemá najmenšiu možnú maximálnu vzdialenosť od ľubovoľného iného vrcholu z  $T$  (jeho jediný sused má túto vzdialenosť o jeden menšiu). Centrum stromu  $T$  preto tvoria tie isté vrcholy ako v strome  $T - L$ , teda aj centrum stromu  $T$  tvorí buď jeden vrchol alebo dvojica susedných vrcholov.  $\square$

*Riešenie 1.21.* Nech daným mostom je hrana  $v_1v_2$ . Predpokladajme, že existuje kostra grafu  $G$ , ktorá neobsahuje most  $v_1v_2$ . Táto kostra však musí obsahovať vrcholy  $v_1$  a  $v_2$  a keďže je to strom, musí v nej existovať  $v_1$ - $v_2$ -cesta. Táto cesta však neobsahuje hranu  $v_1v_2$ , ktorá teda nemôže byť most, čo je spor s predpokladom.  $\square$

*Riešenie 1.22.*

1. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na  $n$ . Pre  $n = 1, 2$  je tvrdenie triviálne platné. Keďže  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2 < 2n$ , tak existuje  $d_i = 1$ . Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že  $d_n = 1$  (na poradí v akom vrcholy očísľujeme nezáleží). Odstráňme vrchol  $v_n$ . V ľubovoľnom strome je  $v_n$  susedný s nejakým  $v_j, 1 \leq j \leq n - 1$  a odstránením  $v_n$  dostávame ďalší strom s vrcholmi  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  a stupňami týchto vrcholov  $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$ . Naopak platí, že ak máme daný strom s vrcholmi  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  a stupňami vrcholov  $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$ , tak pridaním vrchola  $v_n$  a

hrany  $v_j v_n$  dostaneme strom s vrcholmi  $\{v_1, \dots, v_n\}$  a stupňami vrcholov  $d_1, \dots, d_n$ . Počet stromov s vrcholmi  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  a stupňami  $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$  je podľa indukčného predpokladu

$$\begin{aligned} & \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)! (d_j-2)! (d_{j+1}-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} = \\ & = \frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)! (1-1)!} = \frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!}. \end{aligned}$$

Toto platí aj v prípade, keď  $d_j = 1$ , lebo v tom prípade sa daný výraz rovná nule, čo je ale samozrejme správne, lebo v danom grafe má  $v_j$  stupeň nula, teda to nie je strom. Teda počet stromov s vrcholmi  $\{v_1, \dots, v_n\}$  a stupňami vrcholov  $d_1, \dots, d_n$  je

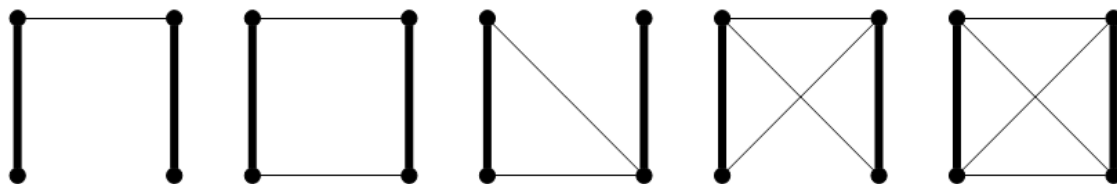
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!} &= \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_j-1) \right) \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!} = \\ &= \frac{(n-2)(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!}. \end{aligned}$$

2. Musíme si uvedomiť, že počet kostier grafu  $K_n$  sa rovná počtu stromov s vrcholmi  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Zároveň podľa vety 1.1.5.3 je počet hrán v strome s  $n$  vrcholmi  $n-1$ , teda súčet stupňov všetkých vrcholov je  $2(n-1) = 2n-2$ . Preto môžeme použiť predchádzajúce tvrdenie, a teda

$$\begin{aligned} t(K_n) &= \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_n = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!} \stackrel{[k_i=d_i-1]}{=} \\ &= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1! \dots k_n!} = \\ &= \underbrace{(1 + \dots + 1)}_n^{n-2} = n^{n-2}. \quad \square \end{aligned}$$

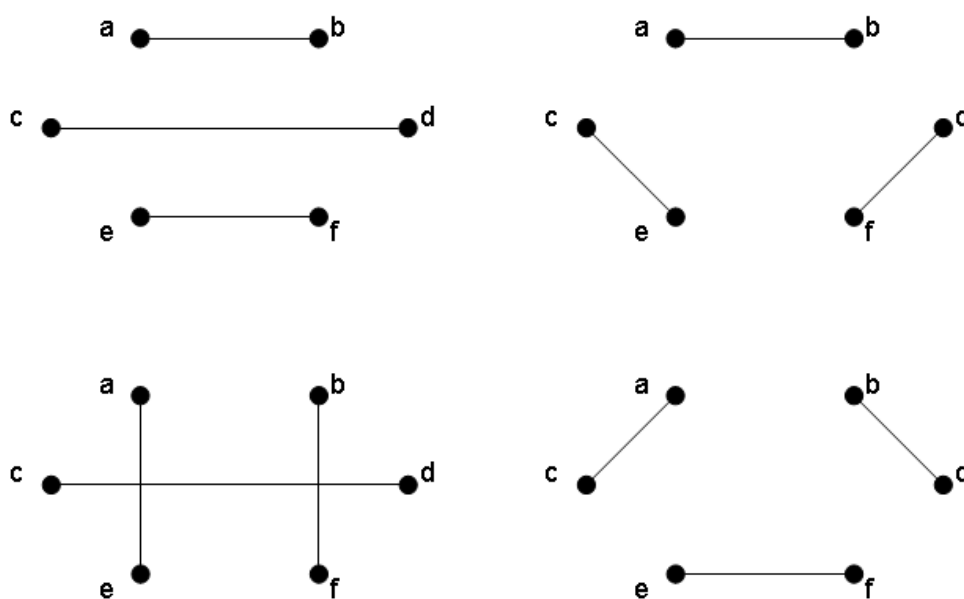
## 8.2 Párenie

*Riešenie 2.1.* Vzhľadom na izomorfizmus existuje práve šesť rôznych súvislých grafov so štyrmi vrcholmi (dva s tromi hranami, dva so štyrmi hranami, jeden s piatimi hranami a jeden so šiestimi hranami). Ak vylúčime  $K_{1,3}$ , zvyšné grafy aj s 1-faktorom sú zobrazené na obrázku 8.9, pričom hrany patriace 1-faktoru sú zvýraznené.  $\square$



Obrázok 8.9: Všetky súvislé grafy so štyrmi vrcholmi obsahujúce párenie.

*Riešenie 2.2.* Ak 1-faktor obsahuje hranu  $ab$ , tak potom nemôže obsahovať hrany  $ac$ ,  $bd$ ,  $ae$  ani  $bf$ . Nech teda ďalej obsahuje hranu  $cd$ . Potom nemôže obsahovať hrany  $ce$  ani  $df$  a teda obsahuje ešte hranu  $ef$ . Ak by však namiesto  $cd$  obsahoval  $ce$ , tak potom by poslednou hranou 1-faktora bola  $df$ . Podobnými úvahami dostávame množinu všetkých 1-faktorov:  $\{ab, cd, ef\}$ ,  $\{ab, ce, df\}$ ,  $\{ae, bf, cd\}$ ,  $\{ac, bd, ef\}$  (všetky sú zobrazené na obrázku 8.10). Je zrejmé, že 1-faktor  $\{ab, cd, ef\}$  má spoločnú hranu so všetkými ostatnými 1-faktormi, teda nemôže patriť do žiadnej 1-faktorizácie. Jediná 1-faktorizácia preto je  $\{\{ab, ce, df\}, \{ae, bf, cd\}, \{ac, bd, ef\}\}$ .  $\square$

Obrázok 8.10: Všetky 1-faktory grafu  $G$  z obrázku 2.1.

*Riešenie 2.3.* Nech  $G$  má  $2n$  vrcholov. Postupovať budeme indukciou vzhľadom na  $n$ . Pre  $n = 2$  výrok zjavne platí. Nech je tvrdenie platné pre  $n \leq N$ .

Predpokladajme, že  $|V(G)| = 2N + 2$ . Podľa cvičenia 3.3  $G$  má hranu  $v_1v_2$  takú, že  $G - \{v_1, v_2\}$  je súvislý graf. Navyše  $G - \{v_1, v_2\}$  neobsahuje  $K_{1,3}$  ako indukovaný podgraf a má  $2N$  vrcholov. Podľa indukčného predpokladu obsahuje 1-faktor. Keď pridáme  $xy$  k tomuto 1-faktoru, získame 1-faktor grafu  $G$ .  $\square$

*Riešenie 2.4.* Keďže sa odohrali dve kolá, musia na turnaji byť zúčastnené aspoň štyri družstvá. Turnaj môžeme reprezentovať grafom, kde družstvá budú reprezentované vrcholmi a ich vzájomný zápas hranou medzi týmito vrcholmi. Po dvoch odohratých kolách má každý vrchol stupeň dva. To znamená, že graf tvoria kružnice. Navyše, keďže hrali v oboch kolách všetky družstvá, tak ani jedna kružnica nemôže byť nepárnej dĺžky, lebo to by znamenalo, že nejaké družstvo na tejto kružnici by muselo v jednom kole čakať. Teda graf je zjednotením kružníc párnej dĺžky. Ak si na všetkých kružniciach zvolíme ľubovoľný počiatočný vrchol a vrcholy rozdelíme do dvoch množín podľa toho, či ich vzdialenosť na kružnici od počiatočného vrcholu je párna alebo nepárna. Potom tieto množiny tvoria partície bipartitného grafu a teda sú to aj požadované skupiny družstiev, ktoré spolu ešte nehrali.  $\square$

*Riešenie 2.5.* Bipartitný graf môže obsahovať párenie iba vtedy, ak obe jeho partície sú rovnako veľké. Totižto každý vrchol z jednej partície môže byť spárený iba s vrcholom z druhej partície (vrcholy v rovnakej partícii nie sú susedné) a ak by neboli rovnako veľké, tak by v tej väčšej ostal aspoň jeden nespárený vrchol.

Nedá sa však zaručiť, aby sa odobratím ľubovoľného vrcholu stali obe partície rovnako veľké. Ak by totiž  $|A| = |B| + 1$ , tak potom odobratím vrcholu z partície  $A$  sa dosiahne rovnaká mohutnosť oboch partícií, ale odobratím vrcholu z partície  $B$  bude partícia  $A$  o dva vrcholy väčšia ako  $B$ . To samozrejme platí aj naopak, teda bipartitný graf nemôže byť faktorovo-kritický.  $\square$

*Riešenie 2.6.*

- Keďže  $Q_n$  vznikne spojením dvoch  $Q_{n-1}$ , tak má zjavne dvojnásobný počet vrcholov. Teda  $|V(Q_n)| = 2 \cdot |V(Q_{n-1})| = 2 \cdot (2 \cdot |V(Q_{n-2})|) = \dots = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{n-1} \cdot |V(Q_1)| = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$ .
- Regulárnosť dokážeme indukciou vzhľadom na  $n$ .  $Q_1$  je zjavne regulárny. Nech aj  $Q_{n-1}$  je regulárny. Keďže  $Q_n$  vznikne z dvoch regulárnych  $Q_{n-1}$  (samozrejme oba grafy sú rovnakého stupňa), pričom ku každému vrcholu pridáme práve jednu hranu, zvýšime tým stupeň každého vrcholu o jeden. Teda aj  $Q_n$  je regulárny. Zároveň si musíme uvedomiť, že  $Q_1$  je 1-regulárny a ak  $Q_{n-1}$  je  $k$ -regulárny, tak

$Q_n$  je  $k + 1$ -regulárny. Teda  $d(Q_n) = d(Q_{n-1}) + 1 = \dots = d(Q_1) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n-1} = 1 + (n - 1) = n$ .

3. Postupujme indukciou vzhľadom na  $n$ .  $Q_1$  obsahuje 1-faktorizáciu, a to konkrétne seba samého, keďže  $Q_1$  je 1-faktor. Predpokladajme, že  $Q_{n-1}$  obsahuje 1-faktorizáciu. Keďže  $Q_n$  vznikne spojením dvoch  $Q_{n-1}$ , ktoré podľa indukčného predpokladu majú rozklad hrán na 1-faktory, tak nám ostáva zistiť, či sa aj novo pridané hrany dajú rozložiť na 1-faktory. (Je zrejmé, že ak zvolíme ľubovoľný 1-faktor z jedného  $Q_{n-1}$  a ľubovoľný 1-faktor z druhého  $Q_{n-1}$ , dokopy tvoria 1-faktor grafu  $Q_n$ .) Zjavne ľubovoľná nová hrana spája práve jeden vrchol z jedného  $Q_{n-1}$  s práve jedným vrcholom z druhého  $Q_{n-1}$ . Zároveň žiadne dve nové hrany nie sú susedné a takisto neexistuje vrchol, ktorý by nebol incidentný so žiadnou novou hranou. Z toho vyplýva, že všetky nové hrany spolu tvoria 1-faktor grafu  $Q_n$  a teda existuje jeho rozklad na hranovo disjunktné 1-faktory, teda má 1-faktorizáciu.  $\square$

*Riešenie 2.7.* Nech  $e = xy$ . Dokážeme, že  $H = G - \{x, y\}$  má 1-faktor. Potom tento faktor spolu s hranou  $xy$  bude tvoriť požadovaný 1-faktor. Predpokladajme opak, teda že  $H$  nemá 1-faktor. Označme  $\Phi_G(W)$  počet nepárnych komponentov grafu  $G - W$ . Potom podľa tvrdenia 2.1.2.4  $\Phi_H(X) \geq |X| + 2$  pre nejakú podmnožinu  $X \subseteq V(H)$ . Teda  $\Phi_G(W) \geq |W|$ , kde  $W$  je podmnožina  $X \cup \{x, y\}$  množiny vrcholov  $V(G)$ . Označme  $z_G(W)$  počet hrán grafu  $G$ , ktorých práve jeden koniec patrí do  $W$ . Je zrejmé, že platí (keďže  $G$  je kubický)  $3|W| = 2|E(W)| + z_G(W)$ , lebo súčet stupňov vrcholov z  $W$  v  $G$  je rovný súčtu stupňov všetkých vrcholov vo  $W$  plus počet všetkých hrán vedúcich von z  $W$ . No a keďže  $W$  obsahuje aspoň jednu hranu  $xy$ , tak platí, že

$$z_G(W) \leq 3|W| - 2. \quad (8.1)$$

Nech  $s$  je nejaký nepárny komponent grafu  $G - W$ , potom  $z_G(s) \geq 3$  a dané tri hrany vychádzajúce z  $s$  musia mať svoj druhý koniec vo  $W$ , teda počet hrán vedúcich do  $w$  zvonku je aspoň trojnásobkom počtu takýchto podmnožín, teda

$$z_G(W) \geq 3\Phi_G(W) \geq 3|W|. \quad (8.2)$$

Ale tvrdenia 8.1 a 8.2 si protirečia, čím sme dospeli k sporu.  $\square$

*Riešenie 2.8.* Ak  $G$  neobsahuje most, tvrdenie priamo vyplýva z vety 2.1.2.3. Nech teda  $G$  obsahuje jeden alebo dva mosty. Je dobré si uvedomiť, že tvrdenie z úlohy 2.7 platí aj pre multigraf, v ktorom hrana  $e$  nie je jediná, ktorá spája vrcholy  $x$  a  $y$ . Postupovať budeme indukciou vzhľadom na počet



vrcholov grafu  $G$ . Pre  $|V(G)| = 4$  (najmenší kubický graf je  $K_4$ ) tvrdenie zjavne platí.

Ak  $G$  obsahuje jeden most, napr.  $xy$ , tak označme  $G_x$  a  $G_y$  komponenty  $G - xy$ , kde  $x \in G_x$  a  $y \in G_y$ . Nech vrcholy incidentné s  $x$  v  $G - xy$  sú  $x_1$  a  $x_2$ . Potom (multi)graf, ktorý vznikne pridaním hrany  $x_1x_2$  do  $G_x - x$  je kubický a neobsahuje most, preto podľa tvrdenia v úlohe 2.7 má 1-faktor, ktorý neobsahuje pridanú hranu  $x_1x_2$  (stačí zvoliť 1-faktor obsahujúci ľubovoľnú inú hranu incidentnú s  $x_1$  alebo  $x_2$ ). To isté platí aj pre graf  $G_y - y + y_1y_2$ . Potom ale pridaním hrany  $xy$  k týmto dvom 1-faktorom dostávame 1-faktor grafu  $G$ .

Ak  $G$  obsahuje dva mosty, tak nemôžu byť susedné (ak by boli, tak aj tretia hrana incidentná s ich spoločným vrcholom by bola most). Nech sú dané mosty  $xy$  a  $zt$  a nech tri komponenty grafu  $G - xy - zt$  sú  $G_x$  (obsahuje vrchol  $x$ ),  $G_y$  (obsahuje vrcholy  $y$  a  $z$ ) a  $G_t$  (obsahuje vrchol  $t$ ). Potom  $G_y$  má párný počet vrcholov, ale ostatné dva komponenty nepárny.<sup>1</sup> Môžeme zostrojiť 1-faktor obsahujúci  $yz$  v (multi)grafe  $G_y + yz$  (ktorý neobsahuje mosty), nech je to  $F_1$  a 1-faktor obsahujúci most  $xt$  v grafe  $G_x \cup G_t + xt$ , nech je to  $F_2$ . Potom  $F_1 \cup F_2 - yz - xt + xy + zt$  tvorí 1-faktor grafu  $G$ .  $\square$

*Riešenie 2.9.* Nech  $e = xy$ . Keďže vrchol  $x$  má stupeň 3, tak existuje vrchol  $z \neq y$  taký, že  $xz \in E(G)$ . Potom podľa tvrdenia z úlohy 2.7 existuje 1-faktor, ktorý obsahuje hranu  $xz$ . Tento 1-faktor teda nemôže obsahovať hranu  $xy$ .  $\square$

*Riešenie 2.10.* Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na  $n$ . Pre  $n = 1$  platí, že počet 1-faktorov grafu  $K_2 = 1 = (2 \cdot 1 - 1)!!$ . Predpokladajme, že tvrdenie platí pre  $K_{2n}$ . Majme daný graf  $K_{2n+2}$ . Vezmime si ľubovoľné dva jeho vrcholy, nech sú to  $v_1, v_2$ . Potom graf  $K_{2n+2} - \{v_1, v_2\} = K_{2n}$ , takže tento graf má  $(2n - 1)!!$  1-faktorov. Vezmime si ľubovoľný 1-faktor grafu  $K_{2n+2} - \{v_1, v_2\}$ . Z neho môžeme 1-faktor grafu  $K_{2n+2}$  dostať jedine nasledovnými spôsobmi:

1. Ľubovoľnú hranu  $w_1w_2$  patriacu 1-faktoru grafu  $K_{2n+2} - \{v_1, v_2\}$  nahradíme dvoma hranami, a to buď  $w_1v_1$  a  $w_2v_2$ , alebo  $w_1v_2$  a  $w_2v_1$ . Keďže ľubovoľný 1-faktor grafu  $K_{2n+2} - \{v_1, v_2\}$  obsahuje práve  $n$  hrán, tak týmto spôsobom dostávame  $2n$  1-faktorov grafu  $K_{2n+2}$ .
2. K danému 1-faktoru grafu  $K_{2n+2} - \{v_1, v_2\}$  pridáme hranu  $v_1v_2$ . Týmto spôsobom dostávame jeden 1-faktor grafu  $K_{2n+2}$ .

<sup>1</sup>Počet hrán komponentu je totiž polovica súčtu stupňov všetkých jeho vrcholov. Ak by  $G_x$  alebo  $G_t$  mali párný počet vrcholov, tak súčet stupňov vrcholov je  $3 \cdot |V(G_x)| - 1$ , čo je nepárne číslo a teda počet hrán nie je celé číslo. Podobne ak by počet vrcholov  $G_y$  bolo nepárne číslo, tak  $3 \cdot |V(G_y)| - 2$  je nepárne číslo.

Z jedného 1-faktoru grafu  $K_{2n+2} - \{v_1, v_2\}$  teda dostaneme  $(2n+1)$  1-faktorov grafu  $K_{2n+2}$ . Keďže ich je ale podľa indukčného predpokladu  $(2n-1)!!$ , tak celkovo graf  $K_{2n+2}$  obsahuje  $(2n+1)(2n-1)!! = (2n+1)!!$  1-faktorov, čím sme tvrdenie dokázali.  $\square$

### 8.3 Súvislosť

*Riešenie 3.1.* Nech vrcholy  $x$  a  $y$  nie sú susedné. Potom každý z nich je susedný s aspoň  $\frac{v-1}{2}$  z ostatných  $v-2$  vrcholov. No a keďže  $2\frac{v-1}{2} = v-1 > v-2$ , tak musia mať spoločného suseda. Nech je to  $z$ , potom  $xyz$  tvorí sled v grafe  $G$ .  $\square$

*Riešenie 3.2.* Predpokladajme, že v  $k$ -regulárnom grafe, kde  $k$  je nepárne existuje komponent s nepárnym počtom vrcholov  $v$ . Je zrejmé, že počet hrán je polovica súčtu stupňov vrcholov, keďže každá hrana zvyšuje stupeň práve dvoch vrcholov (jej koncov) o 1. V našom prípade je súčet stupňov vrcholov daného komponentu  $vk$ . Keďže však  $v$  aj  $k$  sú nepárne, aj  $vk$  je nepárne. Počet hrán, teda  $\frac{vk}{2}$  teda nie je celé číslo, čím sme dospeli k sporu.

Dôsledkom tohto tvrdenia je, že počet vrcholov regulárneho grafu nepárneho stupňa je vždy párny. Ak by bol nepárny, musel by obsahovať aspoň jeden komponent s nepárnym počtom vrcholov, čo je v spore s dokázaným tvrdením.  $\square$

*Riešenie 3.3.* Tvrdenie určite platí, ak je  $G$  kompletný. Predpokladajme teda, že nie je. Nech  $G$  má priemer  $d$  ( $d > 1$ ). Vezmime si dva vrcholy  $a$  a  $t$ , ktorých vzdialenosť je  $d$ . Nech  $a, \dots, r, s, t$  je cesta dĺžky  $d$  z  $a$  do  $t$  v  $G$ . ( $r$  nie je susedný s  $t$ , píšeme aj  $r \approx t$ .)

Nech ďalej  $G^* := G - \{s, t\}$  nie je súvislý. (Ak by bol, tvrdenie by triviálne platilo.) Nech  $A$  je komponent  $G^*$  obsahujúci vrchol  $a$ . Každý vrchol z  $G^* - A$  musí byť susedný s vrcholom  $s$  v grafe  $G$ . (Ak by nebol, tak nech  $z$  je vrchol z  $G^* - A$ , ktorého vzdialenosť od  $s$  je aspoň 2. Potom najkratšia cesta z  $a$  do  $z$  musí mať dĺžku aspoň  $d+1$ , čo nie je možné.) Ak  $G^* - A$  obsahuje ľubovoľnú hranu, napr.  $bc$ , tak  $s$  je stále spojený s každým vrcholom  $G^* - A - \{b, c\}$  a navyše  $s$  je susedný s  $t$  a spojený s každým vrcholom v  $A$  (keďže  $A$  je súvislý a  $s$  je spojený s  $a$ ). Teda  $G - \{b, c\}$  je súvislý.

Treba už len preskúmať prípad, kedy  $G^* - A$  pozostáva z izolovaných vrcholov, všetkých susedných s  $s$ . Ak  $A$  má dva prvky, tieto spolu s  $r$  a  $s$  tvoria indukovaný graf  $K_{1,3}$ . Teda  $|A| = 1$ . Nech  $A = \{w\}$ . Ak  $w \sim t$  vezmeme  $\{v_1, v_2\} = \{w, t\}$  a ak  $b \approx t$ , tak  $r, s, t, w$  tvoria indukovaný graf  $K_{1,3}$ .  $\square$

*Riešenie 3.4.* Nech  $G$  obsahuje  $r$  artikulácií. Postupujeme indukciou na  $r$ . V prípade  $r = 0$  dostávame  $1 - 1 = \sum_{v \in V(G)} (1 - 1)$ , teda  $0 = 0$ . Teraz predpokladajme, že tvrdenie platí pre grafy s  $r$  alebo menej ako  $r$  artikuláciami,  $r \geq 0$ , a  $G$  má  $r + 1$  artikulácií. Zdefinujeme *koncový blok* grafu  $G$  ako blok obsahujúci práve jednu artikuláciu, nech to je  $w$ . Zrejme  $G$  obsahuje koncový blok (ak by každý blok obsahoval viac ako jednu artikuláciu grafu  $G$ , blokový graf grafu  $G$  by obsahoval cyklus, čo podľa lemy 3.1.1.2 nemôže). Vyberieme koncový blok  $E$  grafu  $G$  a vytvoríme graf  $H$  tak, že z  $G$  odstránime všetky hrany a vrcholy z  $E$  okrem artikulácie  $w$ . Potom zrejme  $b(H) = b(G) - 1$ . Pre každý vrchol  $v \in H, v \neq w$  platí, že  $b_H(v) = b_G(v)$  a pre  $w$  platí  $b_H(w) = b_G(w) - 1$ . Všetkých  $|V(E)| - 1$  vymazaných vrcholov patrilo do jedného bloku, teda  $\forall v \in V(E) : b_G(v) = 1$ . Podľa indukčného predpokladu platí  $b(H) - 1 = \sum_{v \in V(H)} (b_H(v) - 1)$ . Dostávame teda

$$\begin{aligned}
 b(G) - 1 &= (b(H) - 1) + 1 = \\
 &= \sum_{v \in V(H)} (b_H(v) - 1) + 1 = \\
 &= \sum_{v \in V(H), v \neq w} (b_H(v) - 1) + (b_H(w) - 1) + 1 = \\
 &= \sum_{v \in V(H), v \neq w} (b_G(v) - 1) + (b_G(w) - 1 - 1) + 1 = \\
 &= \sum_{v \in V(H), v \neq w} (b_G(v) - 1) + (b_G(w) - 1) = \\
 &= \sum_{v \in V(H), v \neq w} (b_G(v) - 1) + \sum_{v \in V(E), v \neq w} (b_G(v) - 1) + (b_G(w) - 1) = \\
 &= \sum_{v \in V(G), v \neq w} (b_G(v) - 1) + (b_G(w) - 1) = \\
 &= \sum_{v \in V(G)} (b_G(v) - 1).
 \end{aligned}$$

□

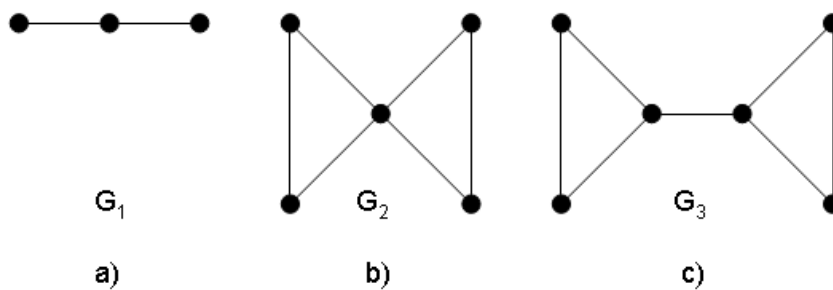
*Riešenie 3.5.* Nech  $G$  je súvislý graf s aspoň dvoma hranami.

“ $\Rightarrow$ ”:  $G$  je súvislý graf s aspoň dvoma hranami (teda nie  $K_2$ ) a zároveň blok, teda neobsahuje žiadne artikulácie. Teda každá hrana je susedná s nejakou inou hranou. Vezmime si ľubovoľné susedné hrany  $v_1w$  a  $wv_2$ . Keďže  $w$  nie je artikulácia, musí existovať cesta z  $v_1$  do  $v_2$  neobsahujúca  $w$ . Potom ale táto cesta spolu s hranami  $v_1w$  a  $wv_2$  tvorí kružnicu na ktorej ležia obe susedné hrany.

$\Leftarrow$ : Nech  $v_1w$  a  $wv_2$  sú susedné hrany, ktoré neležia na spoločnej kružnici. Teda nemôže existovať cesta z  $v_1$  do  $v_2$ , ktorá by neobsahovala  $w$ . Ak by taká totiž existovala, tak potom táto cesta spolu s hranami  $v_1w$  a  $wv_2$  by tvorila kružnicu obsahujúcu obe hrany. Z toho už vyplýva, že  $w$  je artikulácia a teda graf  $G$  nemôže byť blok, čím sme dospeli k sporu.  $\square$

*Riešenie 3.6.* Dané grafy sú zobrazené na obrázku 8.11. Konkrétne platí:

1.  $\kappa(G_1) = \lambda(G_1) = \delta(G_1) = 1$ ,
2.  $\kappa(G_2) = 1 < \lambda(G_2) = \delta(G_2) = 2$ ,
3.  $\kappa(G_3) = \lambda(G_3) = 1 < \delta(G_3) = 2$ .  $\square$



Obrázok 8.11: a)  $\kappa(G_1) = \lambda(G_1) = \delta(G_1)$ . b)  $\kappa(G_2) < \lambda(G_2) = \delta(G_2)$ . c)  $\kappa(G_3) = \lambda(G_3) < \delta(G_3)$ .

*Riešenie 3.7.* Keďže  $G$  je  $k$ -súvislý, tak odstránením menej ako  $k$  vrcholov sa nerozpadne na komponenty. Teda graf  $H$  sa odobratím vrcholu  $v$  a ďalších  $k - 2$  vrcholov taktiež nerozpadne na komponenty. Ďalej vrchol  $v$  v grafe  $H$  má práve  $k$  susedov. Teda ani odobratie  $k - 1$  z jeho susedov nebude znamenať vznik komponentu s jediným vrcholom  $v$ . Z toho vyplýva, že neexistuje žiaden spôsob ako odobratím menej ako  $k$  vrcholov zabezpečiť rozpadnutie grafu  $H$  na komponenty, teda  $H$  je  $k$ -súvislý. Je tiež zrejmé, že aj ak by  $G$  bol  $(k + 1)$ -súvislý, tak pre  $H$  je  $\kappa(H) = k$ , lebo ak odstránime všetkých  $k$  susedov vrcholu  $v$ , tak sa  $H$  rozpadne na dva komponenty, pričom jeden obsahuje iba  $v$ .  $\square$

*Riešenie 3.8.* Podľa tvrdenia z cvičenia 2.6 je  $n$ -rozmerná kocka  $Q_n$   $n$ -regulárna, teda  $\delta(Q_n) = n$ . Podľa tvrdenia 1.1.4.2 je  $\kappa(Q_n) \leq \lambda(Q_n) \leq \delta(Q_n) = n$ . Keďže však v  $Q_n$  existuje medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi  $n$  nezávislých ciest, tak odstránením menej ako  $n$  vrcholov alebo hrán nedosiahneme rozpadnutie grafu  $Q_n$ . Teda  $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$ .  $\square$

*Riešenie 3.9.* Označme počet vrcholov  $|V(G)| = v$ . Predpokladajme, že  $G$  má  $\delta(G) \geq \frac{1}{2}v$ , ale  $\lambda(G) < \delta(G)$ . (Podľa vety 1.1.4.2 platí, že  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ , teda prípadom  $\lambda(G) > \delta(G)$  sa nemusíme zaoberať.) Označme množinu  $S$   $\lambda(G)$  hrán, ktorých odstránením už graf  $G - S$  nebude súvislý. Nech teda graf  $G - S$  pozostáva z dvoch disjunktných častí s množinami vrcholov  $V_1$  a  $V_2$  (nie nutne práve dvoch komponentov). Vieme, že v  $G$  má každý vrchol z  $V_1$  stupeň aspoň  $\delta(G)$ , ale existuje menej ako  $\delta(G)$  hrán, ktoré majú práve jeden svoj koniec vo  $V_1$  (takýchto hrán je práve  $|S| = \lambda(G) < \delta(G)$ ). Teda existuje aspoň jeden vrchol z  $V_1$ , ktorého všetci susedia sú z  $V_1$ . Teda  $|V_1| > \delta(G)$ . To isté však platí aj o  $V_2$ , teda  $|V_2| > \delta(G)$ . Z toho dostávame, že  $v = |V(G)| = |V_1| + |V_2| > 2\delta(G)$ . To je však spor s predpokladom. Graf, pre ktorý  $\delta(G) = \lfloor \frac{1}{2}|V(G)| - 1 \rfloor$  a  $\lambda(G) < \delta(G)$  je napr.  $G_3$  zobrazený na obrázku 8.11 c). Konkrétne platí, že  $|V(G_3)| = 6$ ,  $\delta(G_3) = 2$  a  $\lambda(G_3) = 1$ .  $\square$

*Riešenie 3.10.* Graf  $G - E(T)$ , kde  $T$  je kostra nazveme mäso grafu  $G$ .

$\zeta(G) \leq \zeta(G - e)$ : Je zrejmé, že ak k ľubovoľnému grafu pridáme hranu, minimálny počet komponentov jeho mäsa sa nezväčší, lebo pridaním hrany sa žiaden komponent nerozpadne. Analogicky, ak od ľubovoľného grafu hranu odoberieme, minimálny počet komponentov jeho mäsa sa nezmenší.

$\zeta(G - e) \leq \zeta(G) + 1$ : Zoberme kostru  $T$  grafu  $G$  takú, že  $\zeta(G) = c(G - E(T))$ . Skúmame dva prípady:

1. Ak  $e \notin T$ , tak  $e$  sa nachádza v komponente mäsa grafu  $G$ . Ak  $e$  nie je mostom v tomto komponente, tak jej odstránením sa počet komponentov nezmení ( $\zeta(G - e) = \zeta(G)$ ), v opačnom prípade sa komponent rozpadne na dva a teda počet komponentov sa zväčší o jeden ( $\zeta(G - e) = \zeta(G) + 1$ ).
2. Ak  $e \in T$ , tak stačí nájsť kostru  $T'$  takú, že  $e \notin T'$  a  $c(G - E(T')) \leq c(G - E(T))$ . Nech  $e = uv$ . Hrana  $e$  rozdeľuje kostru  $T$  na dve časti, označme ich  $P$  a  $Q$ . Rozlíšime 2 prípady.
  - (a) Nech  $u$  a  $v$  ležia v rovnakom komponente mäsa  $G - E(T)$  (nazveme ho  $C$ ). Ďalej nech  $u \in P$  a  $v \in Q$ . V komponente  $C$  však musí existovať hrana  $f$ , ktorej konce ležia v  $C \cap P$  a  $C \cap Q$ . Potom ak položíme  $T' = T - e + f$ , tak  $T'$  spĺňa stanovené podmienky: zjavne  $e \notin T'$  a keďže  $e$  spája  $P$  a  $Q$ , tak komponent  $C$  sa nerozpadne a teda  $c(G - E(T)) \leq c(G - E(T'))$ .
  - (b) Ak  $u$  a  $v$  ležia v rôznych komponentoch (nazveme ich  $C_i$  a  $C_j$ ), tak keďže v  $G$  nie sú mosty, tak v  $G$  existuje cesta  $P$  taká, že neobsahuje hranu  $e$ , jej konce ležia v  $C_i$  a  $C_j$  a obsahuje iba jednu hranu  $f \notin T$ . Určite vieme nájsť takú cestu, ktorá neobsahuje

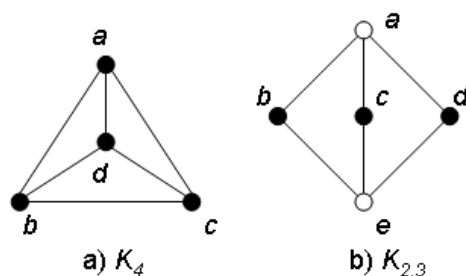
viac ako jednu nekostrovú hranu, keďže kostra pokrýva všetky vrcholy grafu. Ak položíme  $T' = T - e + f$ , tak  $T'$  spĺňa stanovené podmienky: zjavne  $e \notin T'$ . Zároveň pridaním hrany  $f$  ku kostre sa komponent mäsa grafu  $G$ , ktorý ju obsahoval môže rozpadnúť najviac na dva, ale odstránením hrany  $e$  z kostry sa zase spoja komponenty  $C_i$  a  $C_j$ , teda určite platí  $c(G - E(T')) \leq c(G - E(T))$ .  $\square$

## 8.4 Planárne grafy

*Riešenie 4.1.* Žiaden strom nemá cyklus, teda ak ho zakreslíme do roviny, tak ju nerozdelí na dve oblasti. Tým pádom vždy existuje spôsob ako zakresliť dve hrany bez toho, aby sa pretáli. Počet oblastí si môžeme overiť aj pomocou Eulerovho vzorca. V strome s  $n$  vrcholmi je  $n - 1$  hrán, teda ak  $l$  označíme počet oblastí, tak  $n - (n - 1) + l = 2 \Rightarrow l = 1$ .  $\square$

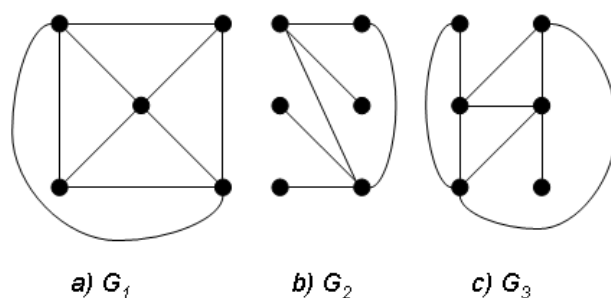
*Riešenie 4.2.* Reprezentácia  $K_3$  ako trojuholníka je veľmi jednoznačná. Nakresliť  $K_3$  tak, aby sa jeho hrany pretínali sa dá iba ak by sme aspoň jednu jeho hranu reprezentovali krivkou.  $K_4$  dostaneme z  $K_3$  pridaním vrcholu a troch hrán. Ak to spravíme v rovinnnej reprezentácii, dostaneme graf zobrazený na obrázku 8.12 a). Táto rovinná reprezentácia je v zásade tiež jedinečná, teda každá iná rovinná reprezentácia je ekvivalentná s touto. Teda ľubovoľná rovinná reprezentácia grafu  $K_5$  by sa dala zostrojiť pridaním vrcholu a štyroch hrán k rovinnnej reprezentácii  $K_4$ . Ak ale nový vrchol  $e$  pridáme dovnútra oblasti  $abd$ , potom reprezentácia hrany  $ce$  musí pretínať niektorú z hrán  $ab$ ,  $ad$  alebo  $bd$ . Podobne je to pri pridaní hrany  $e$  dovnútra oblastí  $acd$  a  $bcd$ . Ak ho pridáme do oblasti  $abc$  (teda do vonkajšej oblasti), tak hrana  $ed$  musí pretínať jednu z hrán  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$ . Vidíme teda, že  $K_5$  nemá rovinnú reprezentáciu, teda nie je planárny.

Podobne budeme postupovať aj pri grafe  $K_{3,3}$ , kde začneme s rovinnou reprezentáciou grafu  $K_{2,3}$ , ktorá je zobrazená na obrázku 8.12 b). Opäť, táto reprezentácia je jedinečná. Z nej dostaneme rovinnú reprezentáciu grafu  $K_{3,3}$  jedine pridaním "prázdneho" vrcholu (vrchol znázornený prázdnu kružnicou) a jeho spojením s "plnými" vrcholmi (znázornené plnými kruhmi). Ak však nový vrchol  $f$  pridáme do oblasti  $abce$ , hrana  $df$  musí pretínať aspoň jednu hranu. Podobne ak tento vrchol pridáme do oblasti  $acde$ , tak hrana  $bf$  musí aspoň jednu hranu pretínať. No a nakoniec ak ho pridáme do oblasti  $abde$ , tak je problematická hrana  $cf$ . Teda neexistuje rovinná reprezentácia grafu  $K_{3,3}$ , ktorý tým pádom nie je planárny.  $\square$

Obrázok 8.12: Rovinné reprezentácie grafov  $K_4$  a  $K_{2,3}$ .

*Riešenie 4.3.*

1. Keďže  $K_4$  je planárny, tak je zrejmé, že každý graf s  $n \leq 4$  vrcholmi je planárny. Jediný neplanárny graf s piatimi vrcholmi je  $K_5$ . Odobratím ľubovoľnej hrany z neho totiž dostaneme planárny graf  $G_1$  zobrazený na obrázku 8.13 a). Je teda zrejmé, že všetky ostatné grafy s piatimi vrcholmi okrem  $K_5$  sú planárne, teda jedine  $K_5$  alebo jeho komplement nie sú koplanárne.
2. Graf  $G_2$  zobrazený na obrázku 8.13 b) je súvislý planárny graf so šiestimi vrcholmi a to isté platí aj o jeho komplemente  $G_3$  z obrázku 8.13 c).  $\square$



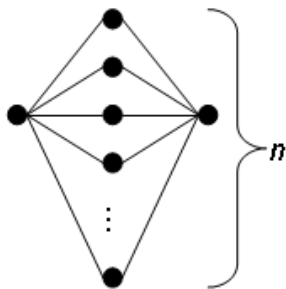
Obrázok 8.13: a) Najväčší (ko)planárny graf s piatimi vrcholmi. b) Súvislý planárny graf so šiestimi vrcholmi c) a jeho súvislý planárny komplement.

*Riešenie 4.4.* Majme dve rôzne rovinné reprezentácie grafu  $G$  s  $n$  vrcholmi a  $m$  hranami. Ich počty oblastí označme  $l$  a  $l'$ . Potom podľa Eulerovho vzorca platí

$$(n - m + l = 2) \wedge (n - m + l' = 2) \Rightarrow l = l'. \quad \square$$

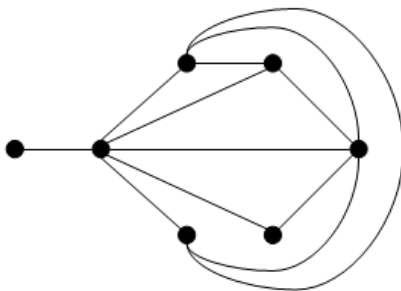
*Riešenie 4.5.*  $K_{2,n}$  sa dá jednoducho zakresliť do roviny ako je to ukázané na obrázku 8.14. Počet oblastí sa dá vyrátať pomocou Eulerovho vzorca.  $K_{2,n}$  má  $n + 2$  vrcholov a  $2n$  hrán. Ak  $l$  je počet oblastí, tak

$$(n + 2) - 2n + l = 2 \Rightarrow l = n. \quad \square$$



Obrázok 8.14: Zakreslenie grafu  $K_{2,n}$  do roviny.

*Riešenie 4.6.* Antiregulárny planárny graf so siedmymi vrcholmi a množinou stupňov vrcholov  $\{1, 2, 3, 3, 4, 5, 6\}$  je zobrazený na obrázku 8.15.  $\square$



Obrázok 8.15: Antiregulárny planárny graf so siedmimi vrcholmi.

*Riešenie 4.7.* V každom grafe je počet hrán rovný polovici súčtu stupňov všetkých vrcholov. Ak by každý vrchol mal stupeň aspoň šesť, tak potom  $|E(G)| \geq \frac{6 \cdot |V(G)|}{2} = 3 \cdot |V(G)|$ . Podľa vety 4.1.2.8 však v každom rovinnom grafe (a teda aj v planárnom) platí, že  $|E(G)| \leq 3 \cdot |V(G)| - 6$ . Tým sa však dostávame k sporu.  $\square$



*Riešenie 4.8.* Použijeme maticu hranovo-plošných susedností  $A_{n \times l}$ , kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i\text{-ta hrana tvorí hranicu } j\text{-tej oblasti} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nech  $\sigma$  je súčet všetkých prvkov matice  $A$ . Každá hrana leží na hranici najviac dvoch oblastí, teda súčet v jednom riadku je najviac 2. Keďže matica má  $n$  riadkov, tak  $\sigma \leq 2n$ . Podobne každá oblasť je ohraničená najmenej tromi hranami, no a keďže máme  $l$  oblastí, tak  $3l \leq \sigma$ . Z toho vyplýva, že  $3l \leq 2n$ .  $\square$

*Riešenie 4.9.* Podľa vety 4.1.2.8 platí, že  $m \leq 3n - 6$ , kde  $m = |E(G)|$  a  $n = |V(G)|$ . Ďalej podľa tvrdenia v úlohe 4.8 platí, že  $3l \leq 2m$ , kde  $l$  je počet oblastí grafu  $G$ . Dostávame teda

$$3l \leq 2m \leq 2(3n - 6) = 6n - 12 \Rightarrow l \leq 2n - 4. \quad \square$$

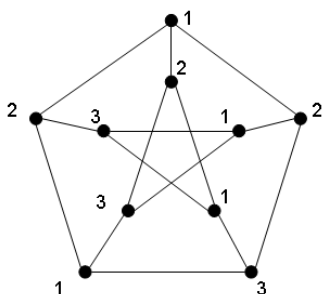
*Riešenie 4.10.* V bipartitnom grafe je najmenšia možná dĺžka kružnice 4. Preto aj každá oblasť v jeho rovinnej reprezentácii musí byť ohraničená najmenej štyrmi hranami. Preto ak sa pozrieme na jeho maticu hranovo-plošných susedností<sup>2</sup>, tak zistíme, že súčet prvkov v jednom riadku je najviac 2 (jedna hrana tvorí hranicu najviac dvoch oblastí), zatiaľ čo súčet v jednom stĺpci je aspoň 4 (jednu oblasť oddeľujú od ostatných aspoň štyri hrany). Teda ak  $\sigma$  je súčet všetkých prvkov matice, tak  $\sigma \leq 2n$  a zároveň  $\sigma \geq 4l$ . Z toho vyplýva, že  $2n \geq 4l$  a teda  $2l \leq n$ .  $\square$

## 8.5 Farbenie

*Riešenie 5.1.* Podľa úlohy 1.14 Petersenov graf obsahuje cyklus dĺžky 5 a teda nemôže byť zafarbený menej ako tromi farbami (ak by sme ľubovoľný vrchol zafarbili jednou farbou, potom jeho susedov v tomto cykle musíme zafarbiť druhou farbou, ich susedov zas prvou farbou, ale posledné dva zafarbené vrcholy sú susedia a sú zafarbené rovnakou farbou, čo je spor). Farbenie Petersenovho grafu tromi farbami je zobrazené na obrázku 8.16.  $\square$

*Riešenie 5.2.* Keďže koleso  $W_n$  tvorí cyklus  $C_n$  a jeden ďalší vrchol, ktorý je susedný so všetkými vrcholmi  $C_n$ , tak zjavne potrebujeme na zafarbenie  $W_n$  o jednu farbu viac ako je potrebných na zafarbenie  $C_n$ . Teda  $\chi(W_n) =$

<sup>2</sup>Matica hranovo-plošných susedností je zadaná v úlohe 4.8



Obrázok 8.16: Farbenie Petersenovho grafu tromi farbami

$\chi(C_n) + 1$ . O  $C_n$  platí, že ak  $n$  je párne, tak  $\chi(C_n) = 2$  a ak nepárne, tak  $\chi(C_n) = 3$ . Preto

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{ak } n \text{ je párne} \\ 4 & \text{ak } n \text{ je nepárne.} \end{cases} \quad \square$$

*Riešenie 5.3.* Bez ujmy na všeobecnosti, nech  $\chi(G_1) \leq \chi(G_2)$ , pričom farby grafu  $G_1$  sú z množiny  $C_1 := \{0, \dots, k\}$  a farby grafu  $G_2$  z množiny  $C_2 := \{0, \dots, n\}$ . Ďalej nech  $V(G_1) \cap V(G_2) = v$ , pričom  $c_{G_1}(v) = i$  a  $c_{G_2}(v) = j$ . Ak  $i = j$ , tak všetkým vrcholom v  $G$  ponecháme pôvodnú farbu. Ak  $i \neq j$ , tak v grafe  $G$  ponecháme vrcholom z grafu  $G_1$  pôvodné farby. Ľubovoľný vrchol  $w \in G_2$  zafarbíme farbou  $c_G(w) := c_{G_2}(w) + (i - j) \pmod{n + 1}$ . Konkrétne pre vrchol  $v$  to znamená, že  $c_G(v) = j + i - j = i$ , čo je naozaj farba akú sme mu pôvodne priradili. Všimnime si, že ostatné vrcholy z grafu  $G_2$  zmenili farby, ale všetky vrcholy, ktoré boli v grafe  $G_2$  zafarbené rovnakou farbou sú aj v grafe  $G$  zafarbené (inou) rovnakou farbou a tiež vrcholy, ktoré boli v  $G_2$  zafarbené rôznymi farbami sú aj v  $G$  zafarbené rôznymi farbami. Teda aj toto nové zafarbenie vrcholov spĺňa definíciu farbenia a navyše sme pri ňom použili práve  $n$  farieb. Teda  $\chi(G) = n = \chi(G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ .  $\square$

*Riešenie 5.4.* Prázdny graf zjavne nemôžeme zafarbiť.  $\chi(K_1) = 1$ . Pre netriviálne prípady platí, že graf je zafarbiteľný dvoma farbami práve vtedy, keď je bipartitný (jednu partíciu zafarbíme jednou farbou, druhú druhou farbou). Podľa tvrdenia 1.1.6.1 je však graf bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.  $\square$

*Riešenie 5.5.* Keďže graf obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, tak  $\chi(G) \geq 3$ . Zvolíme si ľubovoľný vrchol  $v$  ležiaci na danej kružnici nepárnej dĺžky. Podľa tvrdenia z úlohy 5.4 je  $\chi(G - v) = 2$ . Nájdeme teda také farbenie dvoma farbami a vrchol  $v$  zafarbíme treťou farbou. Teda  $\chi(G) = 3$ .  $\square$

*Riešenie 5.6.* Implikácia “ $\Rightarrow$ ” je triviálna. Zafarbíme graf  $G - v$   $n$  farbami. Keďže  $v$  má v  $G$  menej ako  $n$  susedov, tak aj keby boli všetci jeho susedia zafarbený rôznymi farbami, musí existovať aspoň jedna farba, ktorou nie je zafarbený žiaden jeho sused. Touto farbou zafarbíme  $v$  a dostaneme farbenie grafu  $G$   $n$  farbami.  $\square$

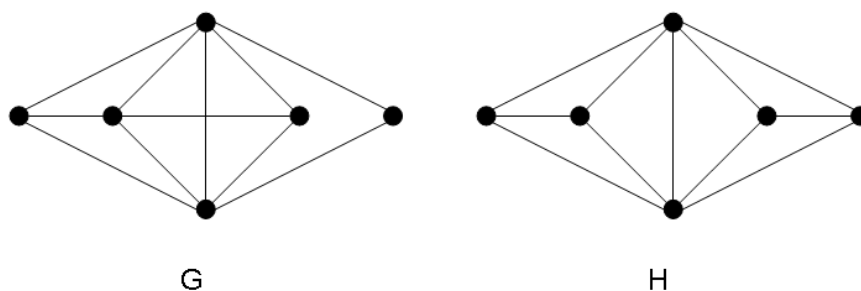
*Riešenie 5.7.* Nech odobraná hrana je  $v_1v_2$ . Vrcholy grafu  $G - \{v_1, v_2\}$  zafarbíme každý inou farbou, použijeme teda  $n - 2$  farieb. Vrcholy  $v_1$  a  $v_2$  zafarbíme tou istou farbou, teda celkovo použijeme  $n - 1$  farieb. Keďže jediné dva vrcholy zafarbené tou istou farbou nie sú susedné, tak je to platné farbenie grafu  $G$ . Teda  $\chi(G) \leq n - 1$ . Keďže  $\chi(K_n) = n$  a odobraním jednej hrany nemôže chromatické číslo grafu klesnúť o viac ako o jeden, tak  $\chi(G) \geq n - 1$ . Dokopy dostávame, že  $\chi(G) = n - 1$ .  $\square$

*Riešenie 5.8.* Grafy  $G$  a  $H$  zobrazené na obrázku 8.17 zjavne nie sú izomorfné (v grafe  $G$  je vrchol stupňa 2, zatiaľ čo v grafe  $H$  je minimálny stupeň vrchola 3). Oba sú dvojsúvislé, lebo odstránením žiadneho vrchola sa ani jeden graf nerozpadne na viac komponentov, ale odstránením oboch vrcholov stupňa päť sa oba grafy rozpadnú na dva komponenty. Keďže oba grafy obsahujú  $K_4$  ako indukovaný podgraf, tak  $\chi(G) \geq 4$  a  $\chi(H) \geq 4$ . Ľahko sa dá skonštruovať zafarbenie oboch grafov štyrmi farbami (ako neskôr ukážeme), teda  $\chi(G) = \chi(H) = 4$ .

Keďže dva vrcholy v oboch grafoch majú stupeň 5, teda sú susedné so všetkými ostatnými vrcholmi, je zrejmé, že tieto vrcholy musia byť zafarbené každý inou farbou a navyše týmito farbami už nemôže byť zafarbený žiaden iný vrchol (toto platí pre oba grafy). Preto pri farbení s použitím práve štyroch farieb dve farby priradíme daným dvom vrcholom (na obrázku sú to horný a dolný vrchol) a ostatným vrcholom musíme priradiť ostávajúce dve farby. To sa dá aj v grafe  $G$  aj  $H$  urobiť práve štyrmi spôsobmi (ak zoradíme tieto štyri vrcholy zľava doprava, tak v grafe  $G$  sú možné priradenia farieb vrcholom  $(1, 2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1, 2)$ ,  $(2, 1, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 2, 2)$  a v grafe  $H$   $(1, 2, 1, 2)$ ,  $(1, 2, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 2)$ ,  $(2, 1, 2, 1)$ ), teda  $c_G(4) = c_H(4) = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ . Pri použití práve piatich farieb podobnou úvahou dospejeme k tomu, že  $c_G(5) = c_H(5) = 5 \cdot 4 \cdot 24 = 480$ . V prípade použitia práve šiestich farieb je jasné, že každý vrchol musí byť zafarbený inou farbou, teda celkový počet možností je  $c_G(6) = c_H(6) = 6! = 720$ . Keďže všetky zložky chromatickej funkcie sú pre oba grafy rovnaké, je zrejmé, že majú rovnakú chromatickú funkciu. Teda sme ukázali, že dané tvrdenie neplatí. Konkrétne pre grafy  $G$

a  $H$  vyzerá ich chromatická funkcia nasledovne:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=4}^6 \binom{x}{k} q(k) = \binom{x}{4} q(4) + \binom{x}{5} q(5) + \binom{x}{6} q(6) = \\ &= \frac{x!}{4!(x-4)!} 2 \cdot 4! + \frac{x!}{5!(x-5)!} 4 \cdot 5! + \frac{x!}{6!(x-6)!} 6! = \\ &= x^6 - 11x^5 + 47x^4 - 97x^3 + 96x^2 - 36x. \quad \square \end{aligned}$$



Obrázok 8.17: Neizomorfné dvojsúvislé grafy s rovnakou chromatickou funkciou.

*Riešenie 5.9.* Keďže  $\Delta(K_n) = n-1$ , tak vlastne chceme dokázať, že kompletne grafy nepárneho stupňa patria do triedy 1 ( $\chi'(G) = \Delta(G)$ ) a kompletne grafy párneho stupňa patria do triedy 2 ( $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ). Pre regulárne grafy ale platí, že patria do triedy 1 práve vtedy, keď majú 1-faktorizáciu, teda keď existuje rozdelenie ich množiny hrán do hranovo-disjunktných 1-faktorov (zrejme všetky hrany incidentné s nejakým vrcholom budú patriť do rôznych 1-faktorov, teda ak priradíme hranám v  $i$ -tom 1-faktore farbu  $i$ , dostaneme platné hranové farbenie s požadovaným počtom hrán). Dokážeme teda ekvivalentné tvrdenie, že  $K_n$  má 1-faktorizáciu práve vtedy, keď  $n$  je párne.

Je zrejmé, že ak  $n$  je nepárne, tak  $K_n$  nemôže obsahovať 1-faktorizáciu, keďže nemôže obsahovať ani 1-faktor (každá hrana 1-faktora spája dva vrcholy, ale žiadne dve hrany v 1-faktore nemôžu byť susedné, teda jeden vrchol vždy ostane nespárený).

Tvrdenie, že ak  $n$  je párne, tak  $K_n$  obsahuje 1-faktorizáciu priamo vyplýva z úlohy 2.10 (kde je dokonca uvedený presný počet 1-faktorizácií grafu  $K_n$ ).  $\square$

*Riešenie 5.10.* Keďže  $P$  je trieda hrán zafarbených tou istou farbou, tak žiadne dve hrany z  $P$  nemôžu byť v grafe  $G$  susedné. Keďže každá hrana spája práve dva vrcholy, tak v  $P$  je najviac  $\frac{|V(G)|}{2}$  hrán. Keďže počet hrán je vždy celé číslo, dostávame

$$|P| \leq \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor. \quad \square$$

*Riešenie 5.11.* Nech  $G$  je graf s  $c.k$  hranami,  $c \geq \chi'(G)$ . Nech  $\mathcal{C}$  je množina všetkých hranových farbení grafu  $G$   $c$  farbami. Pre  $\pi \in \mathcal{C}$  zdefinujeme

$$n(\pi) := \sum_{i=1}^c |e_i - k|,$$

kde  $e_i$  je počet hrán zafarbených farbou  $c_i$  pri farbení  $\pi$ . Potom zdefinujeme  $n_0 := \min\{n(\pi) : \pi \in \mathcal{C}\}$ . Dokážeme, že  $n_0 = 0$ , teda že existuje  $\pi_0$  - rozklad grafu  $G$  na  $c$  párení, každé s  $k$  hranami.

Predpokladajme opak, teda že  $n(\pi_0) > 0$ . Teda existuje párenie (t.j. farebná trieda)  $M_i$ , pre ktorú  $e_i = |M_i| \neq k$ . Keďže  $G$  má  $c.k$  hrán, tak existujú párenia  $M_1$  a  $M_2$  také, že  $e_1 = |M_1| < k$  a  $e_2 = |M_2| > k$ . Nech  $H$  je podgraf grafu  $G$  s  $E(H) = M_1 \cup M_2$ . Potom  $H$  je zjednotením ciest a cyklov. Keďže  $e_2 > e_1$ , tak  $H$  musí obsahovať ako komponent cestu  $P$ , ktorej počiatočný aj koncový vrchol sú z  $M_2$ . Teraz navzájom vymeníme farby v  $P$ . Párenia, ktoré zodpovedajú tejto zmene nazvime  $M'_1$  a  $M'_2$ . Týmto vznikne nové farbenie  $\pi'_0$  grafu  $G$  s páreniami  $M'_1, M'_2, M_3, \dots, M_c$ . Navyše  $e'_1 = |M'_1| = e_1 + 1$  a  $e'_2 = |M'_2| = e_2 - 1$ . Keďže  $e_1 < k$  a  $e_2 > k$ , tak dostávame, že  $|e'_1 - k| < |e_1 - k|$  a  $|e'_2 - k| < |e_2 - k|$ . Odtiaľ dostávame, že  $n(\pi'_0) < n(\pi_0)$ , čo je spor s minimálnosťou  $n(\pi_0)$ . Tiež z toho vyplýva, že  $n_0 = 0$ , čo dokazuje pôvodné tvrdenie.  $\square$

*Riešenie 5.12.* Regulárne grafy patria do triedy 1 práve vtedy, keď majú 1-faktorizáciu, teda keď sa ich množina hrán dá rozložiť na hranovo disjunktné 1-faktory. Toto tvrdenie ľahko dokážeme. Zrejme všetky hrany incidentné s nejakým vrcholom budú patriť do rôznych 1-faktorov, teda ak priradíme hranám v  $i$ -tom 1-faktore farbu  $i$ , dostaneme platné hranové farbenie, ktoré používa práve  $\Delta(G)$  farieb. Naopak, ak máme dané nejaké farbenie regulárneho grafu  $G$   $\Delta(G)$  farbami, tak potom je zrejmé, že každý vrchol je incidentný s najviac jednou hranou zafarbenou ľubovoľnou farbou (z definície hranového farbenia), ale tiež, že neexistuje vrchol, ktorý by nebol incidentný s hranou nejakej farby (z regulárnosti grafu). Teda hrany zafarbené rovnakou farbou tvoria 1-faktor a všetky takéto 1-faktory sú navzájom hranovo-disjunktné a ich zjednotením je  $E(G)$ , teda tvoria 1-faktorizáciu.

Je ale zrejmé, že žiaden graf s nepárnym počtom vrcholov nemôže obsahovať 1-faktor, pretože sa nedá spáriť nepárny počet vrcholov. Teda neobsahuje ani 1-faktorizáciu a teda patrí do triedy 2.  $\square$

*Riešenie 5.13.*  $G$  je dvojsúvislý práve vtedy, ak neobsahuje artikuláciu. Predpokladajme opak, teda nech  $G$  obsahuje artikuláciu  $x$  a je hranovo kritický s chromatickým indexom  $\chi'(G) = n$ . Teda  $G$  sa skladá z dvoch podgrafov  $G_1$  a  $G_2$  takých, že  $G_1 \cup G_2 = G$  a  $G_1 \cap G_2 = x$ . Ďalej nech  $y, z \in N_G(x)$  a  $y \in V(G_1)$ ,  $z \in V(G_2)$ . Potom existujú hranové zafarbenia  $\pi_1$  grafu  $G - xy$  a  $\pi_2$  grafu  $G - xz$  ( $n - 1$ ) farbami (pretože  $G$  je hranovo kritický). Konkrétne farby  $z$  farbenia  $\pi_2$  môžeme permutovať tak, že farby hrán incidentných s  $x$  v grafe  $G_2$  (pri farbení  $\pi_2$ ) budú rôzne ako farby hrán incidentných s  $x$  v grafe  $G_1$  (pri farbení  $\pi_1$ ). Toto sa dá, pretože  $G$  z definície hranovej kritickosti patrí do triedy 2, teda stupeň vrchola  $x$  je najviac  $n - 1$ . Teraz ak graf  $G$  zafarbíme nasledovne - hrany z  $G_1$  zafarbíme podľa  $\pi_1$  a hrany z  $G_2$  podľa  $\pi_2$  - tak dostávame  $(n - 1)$ -hranové farbenie grafu  $G$ , čo je v spore s predpokladom, že  $\chi'(G) = n$ .  $\square$

*Riešenie 5.14.* Použijeme výsledok úlohy 4.7, teda že planárny graf musí mať aspoň jeden vrchol stupňa menej ako šesť. Ak predpokladáme, že existuje graf, ktorý nie je zafarbitelný šiestimi farbami, tak si zvolíme najmenší taký - nech je to  $G$ . Potom ak odstránime vrchol  $v$  stupňa menej ako šesť, tak novovzniknutý graf  $G - v$  už musí byť zafarbitelný šiestimi farbami. Keďže však  $v$  v grafe  $G$  má menej ako šesť susedov, tak musí existovať farba, ktorou nie je zafarbený žiaden jeho sused. Ak touto farbou zafarbíme vrchol  $v$ , tak potom dostaneme zafarbenie grafu  $G$  šiestimi farbami, čo je spor s predpokladom.  $\square$

*Riešenie 5.15.*

1. Keďže graf  $\overline{K_n}$  neobsahuje žiadne hrany a preto žiadne dva vrcholy nie sú susedné, farby všetkých vrcholov možno vybrať nezávisle z množiny  $\{1, \dots, t\}$ . Preto  $f(\overline{K_n}, t) = t^n$ .  
Pri farbení grafu  $K_n$  prvý vrchol môžeme zafarbiť ktoroukoľvek z  $t$  farieb, na druhý vrchol môžeme použiť len zvyšných  $t - 1$  farieb a v každom ďalšom kroku vždy o jednu farbu menej. Pri týchto zafarbeniach však môžeme farby nezávisle kombinovať, preto

$$f(K_n, t) = \begin{cases} t(t-1) \dots (t-n+1) = (t)_n & \text{ak } t \geq n \\ 0 & \text{ak } t < n. \end{cases}$$

2. Keďže farbenie v každom komponente môžeme vybrať nezávisle od farbení v iných komponentoch, tak potom počet  $t$ -zafarbení grafu  $G$  je

súčinom počtu  $t$ -zafarbení jednotlivých jeho komponentov, teda  $f(G, t) = \prod_{i=1}^k f(G_i, t)$ .

3. Zvoľme ľubovoľné regulárne  $t$ -zafarbenie grafu  $G_1$ . Aby sme toto zafarbenie rozšírili na zafarbenie celého grafu  $G$  treba zvoliť také zafarbenie grafu  $G_2$ , v ktorom  $v$  dostane farbu  $f_1(v)$ . Keďže počet  $t$ -zafarbení grafu  $G_2$ , v ktorých má vrchol  $v$  fixovanú farbu je  $\frac{f(G_2, t)}{t}$  nezávisle od farby  $f_1(v)$ , a zafarbenie  $f_1$  sme volili ľubovoľne, tak dostávame, že počet regulárnych  $t$ -zafarbení grafu  $G$  je

$$\frac{1}{t} f(G_1, t) \cdot f(G_2, t).$$

4. Počet regulárnych  $t$ -zafarbení grafu  $G$ , v ktorých  $u$  a  $v$  majú rôzne farby je ten istý, ako počet  $t$ -zafarbení grafu  $G + uv = G_1$ . Podobne, počet  $t$ -zafarbení grafu  $G$ , v ktorých  $u$  a  $v$  majú rovnaké farby je ten istý ako počet  $t$ -zafarbení grafu  $G_2$ . Ak tieto čísla sčítame, dostaneme počet všetkých  $t$ -zafarbení grafu  $G$ .
5. Predchádzajúce tvrdenie dovoľuje redukovať výpočet  $f(G, t)$  na výpočet chromatického polynómu grafov s väčším počtom hrán alebo menším počtom vrcholov a teda opakovaním tohto procesu koniec koncov na výpočet chromatických polynómov istého počtu kompletných grafov, ktorých rád však nikdy nepresiahne rád grafu  $G$  (vrcholy nepridávame). Ich počet však môže byť katastroficky obrovský. Keďže  $f(K_n, t)$  je polynóm v premennej  $t$ , tak z tohto tvrdenia jasne vyplýva, že funkciu  $f(G, t)$  sme správne pomenovali *polynóm*.
6. Nech  $T$  je strom rádu  $n$ . Použijeme indukciu vzhľadom na  $n$ . Ak  $n = 1$ , tak  $T = K_1$  a  $f(T, t) = f(K_1, t) = t$ , takže tvrdenie platí. Pri  $n = 2$  máme  $T = K_2$  a  $f(G, t) = f(K_2, t) = t(t - 1)$ . Teda pri  $n \leq 2$  tvrdenie platí. Nech teraz tvrdenie platí pre všetky stromy rádu  $m$ , kde  $2 \leq m \leq n - 1$ , a nech  $T$  je strom rádu  $n$ . Nech  $u$  je list stromu  $T$ , ktorého jediný sused je  $v$ . Nech  $T_1 = uv$  a  $T_2 = T - u$ . Keďže  $T_1 = K_2$ , tak  $f(T_1, t) = t(t - 1)$  a podľa indukčného predpokladu máme  $f(T_2, t) = t(t - 1)^{n-2}$ . Keďže  $T = T_1 \cup T_2$  a  $T_1 \cap T_2 = \{v\}$ , tak môžeme použiť tvrdenie 3 z tejto úlohy, odtiaľ

$$f(T, t) = \frac{1}{t} f(T_1, t) \cdot f(T_2, t) = \frac{1}{t} \cdot t \cdot (t - 1) \cdot t(t - 1)^{n-2} = t(t - 1)^{n-1}. \quad \square$$

## 8.6 Toky

*Riešenie 6.1.* Zisťujeme, koľkými rôznymi spôsobmi sa dá množina vrcholov  $V(N)$  rozdeliť do dvoch disjunktných podmnožín tak, aby  $s$  a  $t$  nepatrili do tej istej podmnožiny. Nech  $s \in S$  a  $t \in T$ . Počet možností ako do  $S$  vybrať  $i$  spomedzi ostatných  $n$  vrcholov je  $\binom{n}{i}$ . Celkový počet možností je však súčtom počtu možností výberu od nula až po  $n$  ostatných vrcholov. Dostávame teda, že celkový počet oddeľujúcich rezov siete  $N$  je

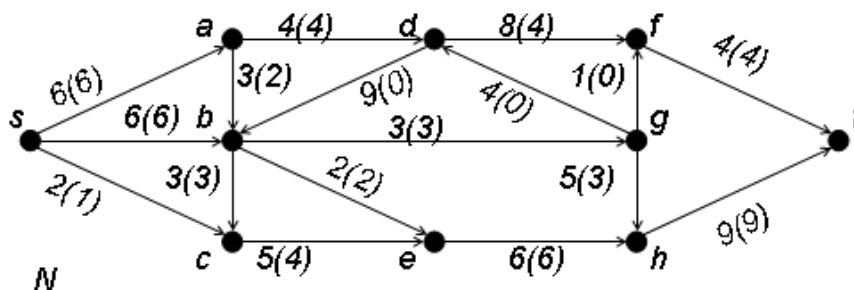
$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^{n-1}. \quad \square$$

*Riešenie 6.2.*

- (F1) Už zo spôsobu akým je zobrazená sieť  $N$  je jasné, že  $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$  pre všetky  $(e, x, y) \in \vec{E}$ .  
(F2') V každom vrchole okrem  $s$  a  $t$  je súčet "pritekajúcich" tokov rovný súčtu "odtekajúcich" tokov, formálne  $\forall v \in V(N) - \{s, t\} : f(v, V) = 0$ .  
(F3) Ľahko vidieť, že čísla v zátvorke (toky hrán) sú vždy menšie alebo rovné ako čísla pred zátvorkami (kapacity hrán). Teda  $f(\vec{e}) \leq c(\vec{e})$  pre všetky  $\vec{e} \in \vec{E}$ .  
Takže zobrazená funkcia je naozaj tok v sieti  $N$ .
- Veľkosť toku je  $f(S, \bar{S})$  pre ľubovoľné  $S$  také, že  $s \in S$  a  $t \notin S$ . Vezmime si teda napríklad  $S = \{s\}$ , potom  $f(S, \bar{S}) = 11$ , čo je aj veľkosť zobrazeného toku v  $N$ .
- Začneme v  $s$  a budeme hľadať hranu incidentnú s daným vrcholom, ktorá by spĺňala podmienku zväčšujúcej cesty, teda ak je to hrana "vychádzajúca" z daného vrcholu, tak jej tok musí byť menší ako kapacita, ak je to hrana "vchádzajúca" do daného vrcholu, tak jej tok musí byť väčší ako nula. Týmto spôsobom môžeme nájsť napríklad aj nasledovné zväčšujúce cesty:  $s b d f g h t$ ,  $s c b a s b d g h t$ ,  $s b d g h t$  (dá sa ich nájsť aj viac).
- Podľa vety 6.1.2.2 je veľkosť maximálneho toku v sieti rovná kapacite minimálneho rezu. V prípade siete  $N$  je minimálny rez napr.  $(V - \{t\}, \{t\})$  a jeho kapacita je  $c(V - \{t\}, \{t\}) = 13$ .  
Veľkosť toku môžeme zväčšovať tak, že v zväčšujúcej ceste meníme hodnotu nasledovným spôsobom: dopredu orientovaným hranám tok zväčšíme o jeden, dozadu orientovaným hranám tok zmenšíme o jeden. Toto spravíme pre všetky hrany a opakujeme až dovtedy, kým daná cesta nie je zväčšujúca. Potom nájdeme ďalšiu zväčšujúcu cestu a postup



opakujeme až pokým nedosiahneme maximálnu veľkosť toku. V tomto prípade môžeme zväčšiť cestu  $sbdght$  o jeden a potom cestu  $sbdfght$  tiež o jeden. Výsledný tok s maximálnou veľkosťou je zobrazený na obrázku 8.18.  $\square$

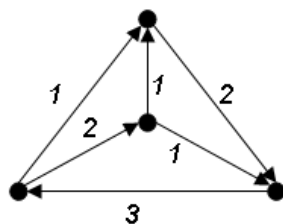


Obrázok 8.18: Maximálny tok siete  $N$  z obrázku 6.1.

*Riešenie 6.3.* Nahradíme vrchol  $v$  dvoma vrcholmi  $v_1$  a  $v_2$ . Každá hrana orientovaná do vrcholu  $v$  sa stane hranou orientovanou do vrcholu  $v_1$ , každá hrana orientovaná z vrcholu  $v$  sa stane hranou orientovanou z vrcholu  $v_2$  a ešte pridáme hranu  $v_1v_2$  s kapacitou  $c(v_1v_2) = d$ .  $\square$

*Riešenie 6.4.* Keďže v  $N$  neexistuje orientovaná cesta z  $s$  do  $t$ , musí to znamenať, že v  $N$  existuje množina  $S \subset V(N)$  taká, že  $s \in S, t \notin S$  a neexistuje žiadna orientovaná hrana smerujúca von z  $S$ . Potom ale zrejme platí, že kapacita  $c(S, \bar{S}) = 0$ . To ale musí byť aj kapacita minimálneho rezu a podľa vety 6.1.2.2 sa táto rovná veľkosti maximálneho toku v  $N$ , teda obe sú nulové.  $\square$

*Riešenie 6.5.* 4-tok grafu  $K_4$  je zobrazený na obrázku 8.19. Keď skúšame skonštruovať 3-tok, tak tok jednotlivých hrán môže nadobúdať hodnoty 1 a 2. Keďže  $K_4$  je 3-regulárny, tak buď vo vrchole dve hrany smerujú do vrcholu a jedna von, alebo naopak. V oboch prípadoch platí, že dve hrany orientované tým istým smerom (vzhľadom na daný vrchol) musia mať tok 1 a tretia hrana tok 2. Teda ak nejaká hrana je jediná orientovaná smerom z nejakého vrcholu, tak musí byť zároveň jedinou orientovanou smerom do jej druhého konca. To sa však v  $K_4$  nedá dosiahnuť. Vezmime si  $K_3$  a hrany orientujme tak, aby vytvorili orientovanú kružnicu. Potom ak pridáme štvrtý vrchol a nové tri hrany orientujeme ľubovoľným spôsobom, vždy sa stane, že v nejakom vrchole táto podmienka platiť nebude.  $K_4$  teda nemá 3-tok.  $\square$

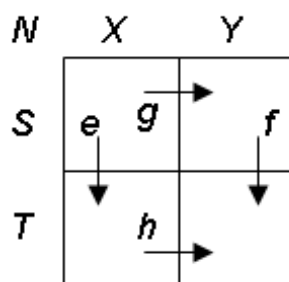
Obrázok 8.19: 4-tok v grafe  $K_4$ .

*Riešenie 6.6.* Najskôr dokážeme, že sú to oddeľujúce rezy.

$$\begin{aligned} T \cap Y &= \overline{S} \cap \overline{X} = \overline{S \cup X} \\ T \cup Y &= \overline{S} \cup \overline{X} = \overline{S \cap X} \\ s \in S, s \in X &\Rightarrow s \in S \cup X, s \in S \cap X \\ t \in T, t \in Y &\Rightarrow t \in T \cup Y, t \in T \cap Y. \end{aligned}$$

Označíme kapacity medzi jednotlivými skupinami vrcholov nasledovne:  $c(S \cap X, T \cap X) = e$ ,  $c(S \cap Y, T \cap Y) = f$ ,  $c(S \cap X, S \cap Y) = g$ ,  $c(T \cap X, T \cap Y) = h$ . Toto je prehľadne zobrazené na obrázku 8.20.

Potom  $c(S, T) = e + f$  a  $c(X, Y) = g + h$ . Podľa minimality  $e + f = g + h = m$ , kde  $m$  je veľkosť kapacity minimálneho rezu. Teda  $e + f + g + h = 2m$ . Ale na základe minimality  $c(S \cup X, T \cap Y) = f + h \leq m$  a tiež  $c(S \cap X, T \cup Y) = e + g \leq m$ . Z toho však vyplýva, že obe kapacity sú rovné  $m$ , teda sú to minimálne rezy.  $\square$

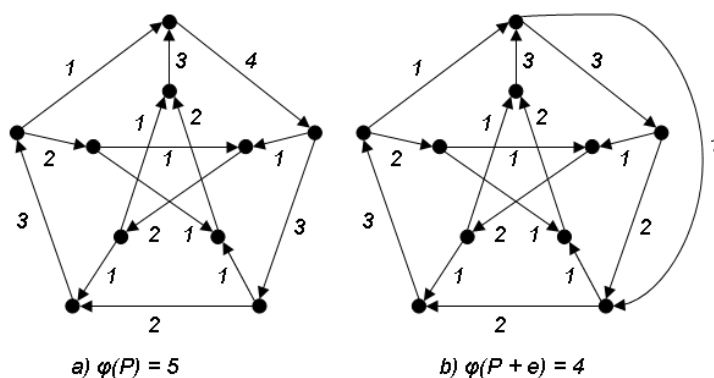
Obrázok 8.20: Diagram kapacít medzi vybranými množinami vrcholov v  $N$ .

*Riešenie 6.7.* Dopredná implikácia zrejme platí, keďže v prijateľnej cirkulácii funkcia  $l$  pretlačí aspoň  $l(S, \overline{S})$  toku z  $S$  do  $\overline{S}$  a funkcia  $c$  vždy najviac  $c(\overline{S}, S)$

toku z  $\bar{S}$  naspäť do  $S$ .

Pre dôkaz opačnej implikácie pridáme do  $\vec{G}$  zdroj  $s$  a ústie  $t$  a pridáme hranu z  $s$  do každého vrcholu  $\vec{G}$  a hranu z každého vrcholu  $\vec{G}$  do  $t$ . Zadefinujeme kapacitnú funkciu  $c'$  pre hrany novovzniknutého grafu  $\vec{G}'$  tak, že  $c'(v, w) = c(v, w) - l(v, w)$ ,  $c'(s, v) = l(V, v)$  a  $c'(v, t) = l(v, V)$ . Potom relácia  $f(v, w) = g(v, w) - l(v, w)$  určuje jednoznačnú korešpondenciu medzi prijateľnou cirkuláciou  $g$  v  $\vec{G}$  a tokom  $f$  v  $\vec{G}'$  z  $s$  do  $t$  a veľkosťou toku  $l(V, V)$ . Podľa vety 6.1.2.2 však tok s takouto kapacitou v grafe  $\vec{G}'$  existuje, teda  $g$  je prijateľná cirkulácia.  $\square$

*Riešenie 6.8.* Vezmime si napríklad Petersenov graf zobrazený na obrázku 1.3. Tento graf umožňuje 5-tok (zobrazený na obrázku 8.21 a)), neumožňuje však 4-tok. Ak však pridáme jednu hranu, nový graf už 4-tok umožňuje (obrázok 8.21 b)). Teda  $H = P$  a  $G = P \cup \{e\}$ .  $\square$



Obrázok 8.21: a) 5-tok Petersenovho grafu  $P$ . b) 4-tok grafu  $P \cup \{e\}$ .

*Riešenie 6.9.* Majme daný multigraf  $M$  bez mostov. Graf  $G$  zostrojíme z  $M$  tak, že každú hranu  $\vec{vw}$  nahradíme novým vrcholom  $x_{vw}$  a hranami  $\vec{vx_{vw}}$  a  $\vec{x_{vw}w}$ . Je zrejmé, že  $G$  je jednoduchý graf bez mostov a zároveň platí, že ak  $G$  umožňuje  $k$ -tok, tak potom aj  $M$  umožňuje  $k$ -tok. Podľa tvrdenia 6.1.6.4 však  $G$  umožňuje 6-tok, teda aj  $M$  umožňuje 6-tok.  $\square$

*Riešenie 6.10.* Podľa vety 6.1.3.3 platí, že  $G$  má nikde-nulový 4-tok práve vtedy, keď má  $\mathbb{Z}_4$ -tok. Ďalej podľa vety 6.1.3.2  $G$  má  $\mathbb{Z}_4$ -tok práve vtedy, keď má  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -tok. Dokážeme teda ekvivalentné tvrdenie:

Graf  $G$  má  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -tok práve vtedy, keď má rozklad na tri paritné podgrafy. “ $\Rightarrow$ ”: Majme daný  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -tok, teda ak  $\vec{e} \in \vec{E}(G)$ , tak tok  $f(\vec{e}) \in$

$\{01, 10, 11\}$ . Položme  $P_i := \{\vec{e} \in \vec{E} \mid f(\vec{e}) =_{\text{bin}} i\}$ . Zjavne  $P_1, P_2, P_3$  sú po dvoch hranovo disjunktné a  $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = G$ . Treba ešte dokázať, že sú to paritné podgrafy. Vezmime si ľubovoľný vrchol  $v \in V(G)$  a skúmame súčet tokov hrán *vchádzajúcich* do  $v$  (teda všetkých hrán  $(e, x, v)$ , kde  $e \in E(G)$  a  $x \in V(G)$ ). Tento súčet je podľa definície  $H$ -toku rovný súčtu tokov hrán *vychádzajúcich* z  $v$  (teda formálne hrán tvaru  $(e, v, x)$ , kde opäť  $e \in E(G)$  a  $x \in V(G)$ ). Označme súčet tokov (myslíme súčet v grupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ) vchádzajúcich hrán do  $v$   $\sum^{\text{in}}(v)$  a súčet tokov hrán vychádzajúcich z  $v$   $\sum^{\text{out}}(v)$ . Pre zjednodušenie ďalej označme  $P_i^{\text{in}}(v) := \{\vec{e} = (e, x, v) \mid e \in E(P_i), x \in V(P_i)\}$  a  $P_i^{\text{out}}(v) := \{\vec{e} = (e, v, x) \mid e \in E(P_i), x \in V(P_i)\}$ . Vezmime si ľubovoľný vrchol  $v \in V(G)$  a pozrime sa na všetky možné prípady  $\sum^{\text{in}}(v)$ .

1.  $\sum^{\text{in}}(v) = 00$ : Tento prípad môže nastať iba vtedy, keď  $|P_1^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 0 \pmod{2}$  a zároveň  $|P_2^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 0 \pmod{2}$ . Z toho je zrejmé, že  $|P_1^{\text{in}}| = |P_3^{\text{in}}| = |P_2^{\text{in}}| \pmod{2}$ . Keďže rovnaká úvaha platí aj o vychádzajúcich hranách, je zrejmé, že  $d_{P_1}(v) = d_{P_2}(v) = d_{P_3}(v) \pmod{2}$ . Ak je tento stupeň párny, tak aj  $d_G(v)$  je párny, ak je nepárny, je aj  $d_G(v)$  je nepárny.
2.  $\sum^{\text{in}}(v) = 01$ : Tento prípad môže nastať iba vtedy, keď  $|P_1^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 1 \pmod{2}$  a zároveň  $|P_2^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 0 \pmod{2}$ . Z toho je zrejmé, že  $|P_1^{\text{in}}| \neq |P_3^{\text{in}}| = |P_2^{\text{in}}| \pmod{2}$ . Keďže rovnaká úvaha opäť platí aj o vychádzajúcich hranách, je zrejmé, že  $d_{P_1}(v) = d_{P_2}(v) = d_{P_3}(v) \pmod{2}$ . Teda znovu, ak je tento stupeň párny, tak aj  $d_G(v)$  je párny, ak je nepárny, je aj  $d_G(v)$  je nepárny.
3.  $\sum^{\text{in}}(v) = 10$ : Tento prípad môže nastať iba vtedy, keď  $|P_1^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 0 \pmod{2}$  a zároveň  $|P_2^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 1 \pmod{2}$ . Z toho je zrejmé, že  $|P_1^{\text{in}}| = |P_3^{\text{in}}| \neq |P_2^{\text{in}}| \pmod{2}$ . Rovnakou úvahou ako v predchádzajúcich prípadoch dostaneme, že parita stupňa  $v$  v  $G$  ako aj všetkých troch podgrafoch je rovnaká.
4.  $\sum^{\text{in}}(v) = 11$ : Tento prípad môže nastať iba vtedy, keď  $|P_1^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 1 \pmod{2}$  a zároveň  $|P_2^{\text{in}}| + |P_3^{\text{in}}| = 1 \pmod{2}$ . Z toho je zrejmé, že  $|P_1^{\text{in}}| = |P_2^{\text{in}}| \neq |P_3^{\text{in}}| \pmod{2}$ . Tak isto ako v predchádzajúcich prípadoch dostávame, že stupne vrchola  $v$  majú vo všetkých podgrafoch aj samotnom grafe  $G$  rovnakú paritu.

“ $\Leftarrow$ ”: Máme dané tri paritné podgrafy  $P_1, P_2, P_3$  grafu  $G$ , ktoré zároveň tvoria jeho rozklad. Hranám  $\vec{e} \in P_1$  priradíme tok  $f(\vec{e}) := 01$ , a podobne pre všetky  $\vec{e} \in P_2$ ,  $f(\vec{e}) := 10$  a pre všetky  $\vec{e} \in P_3$ ,  $f(\vec{e}) := 11$ . Treba dokázať, že takéto priradenie toku hranám v grafe  $G$  tvorí  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -tok na

grafe  $G$ , teda že  $f(v, V) = 0$  pre všetky  $v \in V(G)$ . (Zjavne, ak toto platí, tak tok na danej  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -cirkulácii je nikde-nulový.)

Vezmime si ľubovoľný vrchol  $v \in V(G)$ . Ak jeho stupeň je párný v grafe  $G$ , je párný aj v daných troch podgrafoch. Teda počet hrán incidentných s vrcholom  $v$  z podgrafov  $P_1$  (tok na hranách má hodnotu 01) a  $P_3$  (tok na hranách má hodnotu 11) je párný, čo zaručuje, že súčet tokov hrán incidentných s  $v$  má tvar  $x0$ , kde  $x \in \{0, 1\}$ . Treba si uvedomiť, že nezáleží na tom, či hrana vchádza do  $v$  (teda tok treba pripočítať), alebo vychádza z  $v$  (teda tok treba odpočítať), ale iba na párnosti počtu hrán, keďže v  $\mathbb{Z}_2$  je  $1 + 1 = 1 - 1 = 0$  a  $0 + 1 = 0 - 1 = 1$ . Tiež si treba uvedomiť, že počet hrán z podgrafu  $P_2$  nemá vplyv na najpravejšiu cifru, keďže k nej pripočítava (odpočítava) nulu. Podobne počet hrán incidentných s vrcholom  $v$  z podgrafov  $P_2$  (tok na hranách má hodnotu 10) a  $P_3$  (tok na hranách má hodnotu 11) je párný, teda súčet tokov hrán incidentných s  $v$  má tvar  $0x$ , kde  $x \in \{0, 1\}$ . Celkovo teda dostávame, že súčet tokov hrán incidentných s  $v$  je  $00$ , teda  $f(v, V(G)) = 0$ .

Ak je stupeň  $v$  vo všetkých podgrafoch nepárny, tak súčet tokov hrán z  $P_1$  a  $P_3$  je párný a takisto aj súčet tokov hrán z  $P_2$  a  $P_3$  je párný. Rovnakou úvahou dostaneme, že súčet tokov hrán incidentných s  $v$  je  $00$ , inak povedané  $f(v, V(G)) = 0$ . Tým sme ale dokázali dané tvrdenie.  $\square$

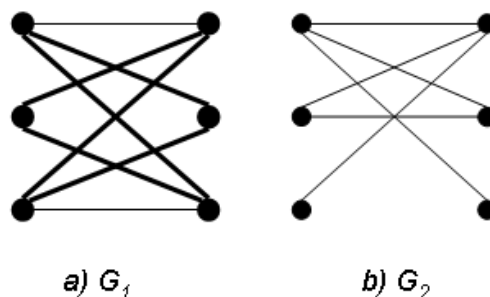
## 8.7 Hamiltonovské kružnice

*Riešenie 7.1.* Keďže oba grafy obsahujú dva vrcholy stupňa jeden, tak v nich neexistuje uzavretý sled obsahujúci tieto vrcholy (napr. vrchol  $a$  v oboch grafoch). Tým pádom nemôžu obsahovať ani hamiltonovskú kružnicu.

Ak by v grafe boli viac ako dva vrcholy stupňa jeden, tak by nemohla existovať ani cesta obsahujúca všetky tieto vrcholy. Keďže však v oboch grafoch sú práve dva takéto vrcholy (v  $G_1$  sú to  $a$  a  $f$ , v  $G_2$   $a$  a  $j$ ), tak potenciálna hamiltonovská cesta musí byť cestou medzi týmito dvoma vrcholmi. V  $G_1$  však existujú len dve  $a - f$ -cesty, konkrétne  $(a, b, c, e, f)$  a  $(a, b, d, e, f)$ . Ani jedna z nich však neobsahuje vrcholy  $c$  aj  $d$ . V  $G_2$  existujú štyri  $a - j$ -cesty, konkrétne  $(a, b, c, d, e, i, j)$ ,  $(a, b, c, d, g, h, i, j)$ ,  $(a, b, f, g, h, i, j)$  a  $(a, b, f, g, d, e, i, j)$ . Ani jedna z nich neobsahuje vrcholy  $c$  aj  $f$ . Z toho vyplýva, že ani jeden graf neobsahuje hamiltonovskú cestu.  $\square$

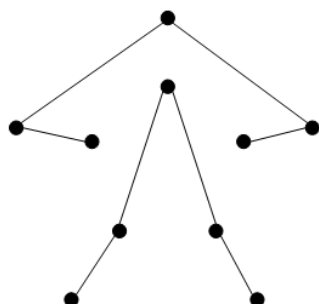
*Riešenie 7.2.* V grafe  $G_1$  je hamiltonovská kružnica napr.  $(a, b, c, d, e, f, h, j, i, g)$ , v  $G_2$  napr.  $(a, b, h, g, j, f, i, c, d, e)$ , v  $G_3$  napr.  $(a, c, f, e, b, g, h, d)$ . Graf  $G_4$  hamiltonovskú kružnicu neobsahuje, lebo vrchol  $a$  má stupeň jeden, teda nie je súčasťou žiadneho uzavretého sledu. Hamiltonovská cesta v  $G_4$  je napr.  $(a, b, f, e, d, c)$ .  $\square$

*Riešenie 7.3.* Hamiltonovská kružnica v bipartitnom grafe musí obsahovať striedavo vrcholy z jednej a druhej partície a zároveň musí obsahovať všetky vrcholy. Podľa definície hamiltonovskej kružnice nemôže obsahovať žiaden vrchol viac než raz. Teda vrcholov z jednej partície musí byť v hamiltonovskej kružnici práve toľko, ako vrcholov z druhej partície. Z toho dostávame, že  $m = n$ . Samozrejme to neznamená, že každý podgraf  $K_{n,n}$  pokrývajúci všetky vrcholy obsahuje hamiltonovskú kružnicu. Na obrázku 8.22 sú zobrazené dva podgrafy grafu  $K_{3,3}$  pokrývajúce všetky vrcholy, pričom  $G_1$  obsahuje hamiltonovskú kružnicu (tvoria ju zvýraznené hrany) a  $G_2$  hamiltonovskú kružnicu neobsahuje, lebo sú v ňom vrcholy stupňa jeden.  $\square$



Obrázok 8.22: Podgrafy  $K_{3,3}$ , ktoré a) obsahujú b) neobsahujú hamiltonovskú kružnicu.

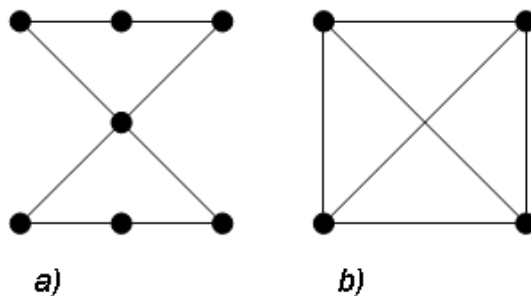
*Riešenie 7.4.* Pomenujme hrany spájajúce vonkajších päť vrcholov s vnútornými piatimi vrcholmi Petersenovho grafu (tak ako je zobrazený na obrázku 1.3) spojnice. Potom každá hamiltonovská kružnica by musela obsahovať párny počet spojnic, teda dve alebo štyri. Nie je možné, aby to boli dve spojnice, lebo potom by hamiltonovská kružnica musela obsahovať štyri hrany medzi vnútornými vrcholmi a štyri hrany medzi vonkajšími vrcholmi. Lepšie povedané, medzi vnútornými koncami spojnic aj medzi vonkajšími koncami spojnic by musela existovať cesta dĺžky štyri. To je však zjavne nemožné. Takisto nie je možné, aby to boli štyri spojnice. Je zrejmé, že všetkých päť spojnic si je rovnocenných. Ak teda vyberieme nejaké štyri spojnice, potom vonkajší koniec piatej spojnice musí na kružnici byť susedný s dvoma vonkajšími vrcholmi a vnútorný koniec piatej spojnice zase s dvoma vnútornými vrcholmi. Teda dostávame graf zobrazený na obrázku 8.23. Tento je rozdelený na dva komponenty. Pridanie ľubovoľnej hrany z Petersenovho grafu, ktorá by tieto komponenty spojila by však malo za následok, že aspoň jeden vrchol by bol stupňa tri. Tým sme dokázali, že Petersenov graf nie je hamiltonovský.  $\square$



Obrázok 8.23: Dôkaz, že Petersenov graf neobsahuje hamiltonovskú kružnicu.

*Riešenie 7.5.* Ani jedno tvrdenie nie je pravdivé.

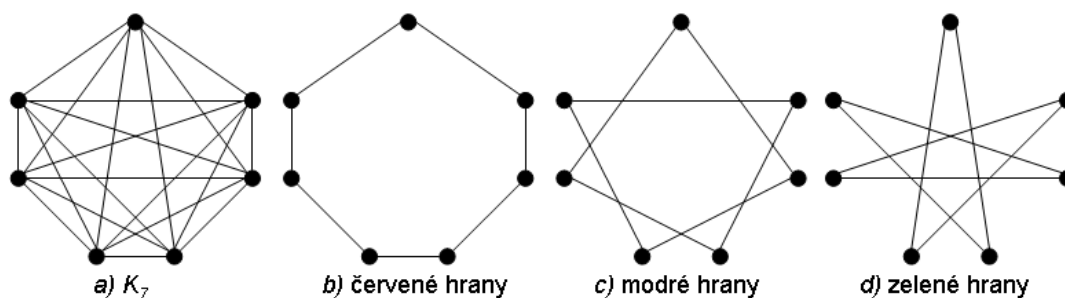
1. Eulerovský graf, ktorý nie je hamiltonovský je zobrazený na obrázku 8.24 a).
2. Hamiltonovský graf, ktorý nie je eulerovský je zobrazený na obrázku 8.24 b). □



Obrázok 8.24: a) Eulerovský graf, ktorý nie je hamiltonovský. b) Hamiltonovský graf, ktorý nie je eulerovský.

*Riešenie 7.6.* V daných grafoch musí eulerovský ťah prechádzať každým vrcholom práve raz. To je možné len vtedy, ak každý vrchol je stupňa 2. Ale dvojregulárny spojitý graf je predsa kružnica, teda tvrdenie platí pre grafy  $C_n$ , kde  $n \geq 3$ . □

*Riešenie 7.7.* Na obrázku 8.25 a) je zobrazený graf  $K_7$ . Hamiltonovské kružnice zafarbené danými farbami sú zobrazené na obrázkoch 8.25 b), c) a d). □



Obrázok 8.25: Hamiltonovské kružnice grafu a)  $K_7$ . b) Hrany zafarbené červenou farbou. c) Hrany zafarbené modrou farbou. d) Hrany zafarbené zelenou farbou.

*Riešenie 7.8.* Predpokladajme, že tvrdenie neplatí. Zvoľme teda graf  $G$  s  $n$  vrcholmi, ktorý má maximálny počet hrán spomedzi všetkých grafov s  $n$  vrcholmi, pre ktoré tvrdenie neplatí. Zvoľme dva nesusedné vrcholy  $p$  a  $q$ . Potom podľa maximality  $G$ ,  $G + pq$  je hamiltonovský. Navyše  $pq$  musí byť hrana každej hamiltonovskej kružnice grafu  $G + pq$ , lebo inak by musela existovať hamiltonovská kružnica aj v grafe  $G$ . Podľa predpokladu  $d(p) + d(q) \geq n$ . Pozrime sa na ľubovoľnú hamiltonovskú kružnicu grafu  $G + pq$ , nech je to  $(p, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, q)$ . Ak  $v_i \in N(p)$ , tak potom  $v_{i-1} \notin N(q)$ , lebo ak by to platilo, tak potom postupnosť

$$p, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, q, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3}, \dots, v_i$$

by tvorila hamiltonovskú kružnicu v  $G$ . Teda každý z  $d(p)$  vrcholov susedných s  $p$  v  $G$  musí na kružnici predchádzať vrchol nesusedný s  $q$  (a žiaden z týchto vrcholov nemôže byť  $q$ ). Teda existuje aspoň  $d(p) + 1$  vrcholov v  $G$ , ktoré nie sú susedné s  $q$ . Takže v  $G$  je aspoň  $d(q) + d(p) + 1$  vrcholov, teda

$$d(p) + d(q) \leq n - 1,$$

čo je spor s predpokladom. □

*Riešenie 7.9.* Opačná implikácia, teda že ak  $G$  je hamiltonovský graf, tak aj  $G + v_1v_2$  je hamiltonovský je zrejmé. Dokážeme teda doprednú implikáciu. Predpokladajme, že tvrdenie neplatí, teda že  $G + v_1v_2$  je hamiltonovský, ale  $G$  je nehamiltonovský. Teda  $v_1v_2$  musí byť hrana každej hamiltonovskej kružnice grafu  $G + v_1v_2$ , lebo inak by musela existovať hamiltonovská kružnica aj v grafe  $G$ . Podľa predpokladu  $d(v_1) + d(v_2) \geq n$ . Pozrime sa na ľubovoľnú hamiltonovskú kružnicu grafu  $G + v_1v_2$ , nech je to  $(v_1, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, v_2)$ .



Ak  $w_i \in N(v_1)$ , tak potom  $w_{i-1} \notin N(v_2)$ , lebo ak by to platilo, tak potom postupnosť

$$v_1, w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, v_2, w_{n-1}, w_{n-2}, w_{n-3}, \dots, w_i$$

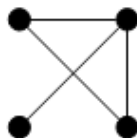
by tvorila hamiltonovskú kružnicu v  $G$ . Teda každý z  $d(v_1)$  vrcholov susedných s  $v_1$  v  $G$  musí na kružnici predchádzať vrchol nesusedný s  $v_2$  (a žiaden z týchto vrcholov nemôže byť  $v_2$ ). Teda existuje aspoň  $d(v_1) + 1$  vrcholov v  $G$ , ktoré nie sú susedné s  $v_2$ . Takže v  $G$  je aspoň  $d(v_1) + d(v_2) + 1$  vrcholov, teda

$$d(v_1) + d(v_2) \leq n - 1,$$

čo je spor s predpokladom. □

*Riešenie 7.10.*

1. Podľa tvrdenia z úlohy 7.8 stačí ukázať, že pri danom počte hrán neexistujú dva nesusedné vrcholy  $v_1$  a  $v_2$  s  $d(v_1) + d(v_2) < n$ . Ak by platilo, že  $d(v_1) + d(v_2) < n$ , tak z pomedzi  $(n - 2) + (n - 2) = 2n - 4$  párov  $v_1w$  a  $v_2w$ , kde  $w \in V(G)$  je najviac  $n - 1$  hrán. Teda  $G$  má najviac  $\binom{n}{2} - (n - 2) = \frac{n!}{2!(n-2)!} - (n - 2) = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$  hrán.
2. Graf s  $n = 4$  vrcholmi a  $\frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 6}{2} - 1 = 4$  hranami neobsahujúci hamiltonovskú kružnicu je zobrazený na obrázku 8.26. □



Obrázok 8.26: Graf so štyrmi vrcholmi a štyrmi hranami neobsahujúci hamiltonovskú kružnicu.

*Riešenie 7.11.* Nech  $G$  má  $n$  vrcholov. Potom zvolíme vrchol  $v$  a traverzujeme hamiltonovskú kružnicu na ktorej leží, pričom hrany budeme orientovať v smere traverzovania. Hranám budeme postupne priradovať ohodnotenie  $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ . Keď takto ohodnotíme všetky hrany danej hamiltonovskej kružnice, tak rovnako budeme orientovať aj hrany druhej hamiltonovskej kružnice, ale budeme ich ohodnocovať  $2n, 2n - 2, 2n - 4, \dots, 4, 2$ . Teda prvá hamiltonovská kružnica bude v každom vrchole prispievať k súčtu hodnôt  $-2$ , zatiaľ čo druhá hamiltonovská kružnica  $+2$ . V každom vrchole teda bude výsledný súčet rovný nule. □

# Záver

Cieľom našej práce bolo vytvoriť zbierku riešených úloh z teórie grafov. Táto zbierka bola primárne zameraná na najväčšiu cieľovú skupinu, a to študentov Informatiky na FMFI UK, konkrétne poslucháčov predmetu Teória grafov. Samozrejme sme predpokladali aj širšie možnosti využitia, a to najmä preto, že na Slovesku doteraz podobná zbierka z danej oblasti chýbala.

Myslíme si, že tento cieľ sa nám vo veľkej miere podarilo splniť. Zbierka ponúka širokú škálu tématických oblastí, ako i úrovne náročnosti úloh. Veríme, že bude slúžiť, ako vhodný doplnkový materiál pri štúdiu tejto modernej a vzhľadom na svoje široké možnosti uplatnenia aj veľmi populárnej matematickej disciplíny. Pri riešení problémov si čitateľ upevňuje nadobudnuté poznatky, precvičuje si základné operácie s grafmi a najmä si zautomatizuje niektoré štandardné postupy, často využívané či už pri dokazovaní tvrdení, ale aj pri zostrojovaní efektívnych algoritmov na grafoch.

Vzhľadom na veľmi široký záber disciplíny akou je teória grafov nebolo možné v zbierke obsiahnuť všetky jej skúmané odvetvia. Myslíme si však, že ich výber prezentovaný v tejto zbierke zahŕňa väčšinu z najpodstatnejších, najviac prebádaných a najvyužívanejších tématických okruhov, akými sú párenie, farbenie, skúmanie planárnych grafov, alebo štúdium tokov v grafoch a sieťach.

Samozrejme si uvedomujeme, že existuje ešte množstvo ďalších tém, ktoré sa do zbierky nezmestili a tiež ich nemôžeme označiť za nepodstatné. Takými sú napr. náhodné grafy, skúmanie podštruktúr v hustých, či riedkych grafoch, teória ramseyho čísel a mnohé iné. Práve tu vidíme najväčší priestor pre pokračovanie v našej práci. Zbierka by sa mohla rozrásť o ďalšie kapitoly so spomínanými, ale aj ďalšími odvetviami. Pribudnúť by mohli kapitoly venujúce sa praktickému využitiu nadobudnutých poznatkov a zostrojovaniu efektívnych grafových algoritmov. Taktiež je možné už existujúce kapitoly rozšíriť o ďalšie úlohy z daných oblastí.

# Literatúra

- [1] BIGGS, N.L., LLOYD, E.K., WILSON, R.J. *Graph Theory*, 1736 - 1936. Oxford: Clarendon Press, 1976. ISBN 0-19-853916-9.
- [2] BOLLOBÁS, B., *Modern Graph Theory*. New York: Springer Science + Business Media, 1998. ISBN 0-387-98491-7.
- [3] BONA, M. *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*. Singapore: World Scientific Publishing, 2002. ISBN 9810249004.
- [4] BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. *Graph Theory with Applications*. London: Macmillan, 1976. ISBN 0-444-19451-7. <<http://www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/bondy/books/gtwa/pdf/GTWA.pdf>>.
- [5] BOROS, E., JUNGnickEL, D., VANSTONE, S.A. The existence of non-trivial hyperfactorizations of  $K_{2n}$ . In *Combinatorica*. Berlin: Springer Berlin / Heidelberg, 1991. Vol. 11, s.9-15. ISSN 0209-9683.
- [6] CACCETTA, L., MARDIYONO, S. On maximal sets of one-factors. In *Australian Journal of Combinatorics*. Queensland: The University of Queensland, 1990. Vol. 1, s.5-14. ISSN 1034-4942. <<http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/1/ajc-v1-p5.pdf>>.
- [7] CVETKOVIĆ, D., JOVANOVIĆ, A., RADOSAVLJEVIĆ, Z., SIMIĆ, S. Coplanar graphs. In *Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerziteta Beograd*. 1991. Vol. 2, s.67-81. ISSN 0522-8441.
- [8] DIESTEL, R. *Graph Theory*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000. ISBN 0-378-98976-5. <<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/GraphTheoryII.pdf>>.
- [9] HARARY, F. An elementary theorem on graphs. In *American Mathematical Monthly*. 1959. Vol. 66, s.405-407.

- 
- [10] HARTSFIELD, N., RINGEL, G. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. Mineola: Dover Publications, 1990. ISBN 0-486-43232-7.
- [11] LOVÁSZ, L. *Combinatorial Problems and Exercises*. 2nd ed. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1993. ISBN 0-444-81504-X.
- [12] MERRIS, R. *Graph Theory*. New York: Wiley Interscience Publication, 2001. ISBN 0-471-38925-0.
- [13] SCHÖNBERGER, T. Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes. In *Acta Universitatis Szegediensis Acta Scientiarum Mathematicarum*. Szeged: Bolyai Institute, University of Szeged, 1934. Vol. 7. s.51-57.
- [14] SUMNER, D.P. Graphs with 1-factors. In *Proceedings of the American Mathematical Society*. Boston, 1974. Vol. 42. s.8-12.
- [15] SUMNER, D.P. On Tutte's factorization theorem. In *Graphs and Combinatorics, Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1974. Vol. 405. s.350-355.
- [16] *Univertity of Zimbabwe Bsc Honours Part II, General Part II/III Mathematics*. Harare, 1998. <<http://faculty.uccb.ns.ca/jpreen/mt21597s.pdf>>.
- [17] WALLIS, W.D. *A Beginner's Guide to Graph Theory*. Boston: Birkhäuser, 2000. ISBN 0-8176-4176-9.
- [18] WALLIS, W.D. The smallest regular graphs without one-factors. In *Ars Combinatoria*. Winnipeg: The Charles Babbage Research Centre, 1981. Vol. 11. s.295-300.
- [19] WEST, D.B. *Introduction to Graph Theory*. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000. ISBN 01-301-44002.