

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V
BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ALGORITMICKÉ VLASTNOSTI VNORENÍ
GRAFOV DO PLŔCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2015

BC. PETER SCHMIDT

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V
BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ALGORITMICKÉ VLASTNOSTI VNORENÍ
GRAFOV DO PLŔCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: Mgr. Michal Kotrbčik, PhD.

BRATISLAVA, 2015

BC. PETER SCHMIDT



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Peter Schmidt
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Algoritmické vlastnosti vnorenia grafov do plôch.

Cieľ: Implementovať vybrané algoritmy pre vnorenia grafov a preskúmať ich praktické správanie. Pomocou uvedených implementácií a teoretických výsledkov skúmať vzťah štruktúry vnorenia a iných grafových parametrov na konkrétnych otvorených problémoch v oblasti.

Vedúci: Mgr. Michal Kotrbčík
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
Dátum zadania: 16.10.2012

Dátum schválenia: 18.10.2012

prof. RNDr. Branislav Rován, PhD.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Pod'akovanie

Chcel by som poďakovať vedúcemu bakalárskej práce, Mgr. Michalovi Kotrbčíkovi, PhD., za pomoc pri výbere témy práce a cenné rady pri jej spracovávaní.

Abstrakt

Autor:	Bc. Peter Schmidt
Názov diplomovej práce:	Algoritmické vlastnosti vnorenia grafov do plôch
Škola:	Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra informatiky
Vedúci diplomovej práce:	Mgr. Michal Kotrbčík, PhD.
Rozsah práce:	52 strán

Bratislava, máj 2015

Táto práca sa venuje algoritmickým vlastnostiam vnorenia grafov do plôch. Naším cieľom je určiť rod vybraných tried grafov. V prvej časti práce sa zameriavame na rody karteziánskych súčinov grafov s grafom K_2 . S pomocou dosiahnutých teoretických výsledkov určíme rod súčinov kompletných grafov $K_n \square K_2$ pre $n \leq 164$. Zvlášť dôležitý je výsledok pre K_9 , ktorý ukazuje, že tento graf nedosahuje teoretický dolný odhad, ktorý uvádza Ringel. Druhá časť práce sa zameriava na konštrukciu protipríkladov k Tuttovej hypotéze. V práci určíme rod najmenšieho známeho protipríkladu. Zároveň sformulujeme postačujúce podmienky, za ktorých je možné známou konštrukciou zostrojiť triedu protipríkladov nižšieho rodu.

Kľúčové slová: vnorenie grafu, rod grafu, karteziánsky súčin, kompletný graf, Barnettova hypotéza, Tuttova hypotéza

Abstract

Author:	Bc. Peter Schmidt
Thesis title:	Algorithmic properties of graph embeddings into surfaces
University:	Comenius University, Bratislava
Faculty:	Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department:	Department of Computer Science
Advisor:	Mgr. Michal Kotrbčík, PhD.
Page count:	52 pages

Bratislava, May 2015

This thesis deals with algorithmic properties of graph embeddings. Our main goal is to determine genus of chosen classes of graphs. In the first part we focus on genera of cartesian products of graphs with K_2 . Using novel theoretical results we determine genera of cartesian products of complete graphs $K_n \square K_2$ for $n \leq 164$. Of a particular significance is the result for K_9 , which disproves Ringel's conjecture. The second part of the thesis focuses on counterexamples to Tutte's conjecture; in particular, we determine genus of the smallest known counterexample. Finally, we derive a sufficient condition for existence of a counterexample with lower genus.

Keywords: graph embedding, graph genus, cartesian product, complete graph, Barnette's conjecture, Tutte's conjecture

Obsah

Úvod	1
1 Úvod do topológie grafov	4
1.1 Topologická teória grafov	5
1.2 Vnorenie grafu do plochy	6
1.3 Eulerov vzťah	7
1.4 Rotačná schéma grafu	8
1.5 Algoritmus Face-Trace	11
1.6 Minimálny rod grafu	11
2 Operácie na vnoreniach	14
2.1 Pokrytie vrcholov oblasťami	14
2.2 Pridávanie hrany do vnorenia	15
2.3 Hrany medzi dvojicou oblastí	16
2.4 Hrany medzi disjunktnými komponentmi grafmi	18
3 Karteziánsky súčin grafu s K_2	20
3.1 Rod karteziánskeho súčinu s K_2	22
3.2 Dolný odhad rodu $G \square K_2$	24
3.3 Tesnosť dolného ohraničenia	25
4 Rod súčinu $K_n \square K_2$	27
4.1 Generovanie trojuholníkových vnorení K_n	28
4.2 Rod grafu $K_9 \square K_2$	30
4.3 Generovanie náhodných vnorení K_n	33

<i>OBSAH</i>	vii
4.4 Rod grafov $K_{17}\square K_2$ a $K_{21}\square K_2$	35
4.5 Generovanie minimálnych vnorení K_n	39
5 Tuttova a Barnettova hypotéza	42
5.1 Konštrukcia J. P. Georgesca	45
5.2 Rod grafu G_B	46
5.3 Protipríklad menšieho rodu	48
Záver	52

Úvod

Minimálnemu rodu grafov sa venuje mnoho pozornosti už od polovice osemnásteho storočia (Euler). Najzaujímavejšie výsledky sa však objavujú až v druhej polovici dvadsiateho storočia. Patria medzi ne najmä konštrukcia minimálnych vnorení kompletých grafov [Rin74], neskôr kompletých bipartitných grafov [Bou78] a výsledky o zložitosti tohto problému.

Na rozdiel od maximálneho rodu grafu, ktorý je možné určiť v polynomiálnom čase, problém rozhodnúť, či všeobecný graf pripúšťa buncé vnorenie do plochy rodu k , je NP-úplný problém [Tho89]. Pre niektoré triedy grafov je možné ukázať $O(1)$ -aproximovateľnosť rodu daného grafu. Hoci nie je vylúčené, že existuje $O(1)$ -aproximačný polynomiálny algoritmus aj vo všeobecnom prípade, známy je iba $O(\sqrt{n})$ -aproximačný algoritmus [CS13]. V nedávnom článku [KS14] autori zostrojili polynomiálny algoritmus, ktorý pre graf G rodu k skonštruuje vnorenie rodu $k^{O(1)}$.

Skúmanie vnorení grafov z teoretického hľadiska ponúka nový pohľad na štrukturálne vlastnosti grafu. Pre niektoré, vo všeobecnosti ťažké problémy, existujú efektívnejšie algoritmy pre grafy, ktorých rod vieme ohaničiť konštantou, resp. ak na vstupe dostanú vnorenie minimálneho rodu.

Ako príklad uveďme dôležitý problém izomorfizmu grafov. Napriek mnohým snahám stále nie je známe, či tento problém patrí do zložitostnej triedy P. Je však známy polynomiálny algoritmus pre problém izomorfizmu planárnych grafov. Akési zovšeobecnenie tohoto výsledku priniesol článok [Mil80]. Autor popisuje algoritmus, ktorý pre graf rodu k rozhoduje problém izomorfizmu v čase $n^{O(k)}$.

Z najnovších súčasných výsledkov spomeňme napríklad asymetrický prob-

lém obchodného cestujúceho. Tento problém je NP-ťažký, pre graf rodu k je však známy $O(\log k / \log \log k)$ -aproximačný algoritmus s polynomiálnou časovou zložitou. Tento algoritmus však potrebuje vnorenie daného grafu rodu k na vstupe. Túto požiadavku sa podarilo odstrániť v relatívne nedávnom článku [CS13] pre grafy s ohraničeným stupňom.

Poznatky získané štúdiom vnorenia grafov majú aj praktické využitie, uplatnenie nachádzajú napríklad pri návrhu VLSI obvodov [DLT83].

V našej práci sa budeme venovať najmä minimálnym rodom niektorých grafov. S využitím získaných teoretických výsledkov ukážeme, ako za pomoci počítača určiť rod vybraných tried grafov.

Obsahovo je práca rozdelená na 5 kapitol. V prvej kapitole zavedieme základné pojmy a označenia, ktoré nám umožnia detailne študovať vlastnosti vnorenia grafov. Zdefinujeme pojem vnorenia grafu do plochy a uvedieme najdôležitejšie doterajšie teoretické výsledky z topologickej teórie grafov.

V druhej kapitole popíšeme základné operácie na vnorenie grafu. Najmä nás bude zaujímať, ako sa mení rod vnorenia pri pridávaní hrán v niektorých špeciálnych prípadoch. Poukážeme na súvis medzi rodom výsledného grafu a veľkosťou pokrytia oblasťami. Tieto pozorovania nám umožnia študovať vnorenia konkrétnych grafov v ďalších kapitolách.

Vlastné výsledky sú rozdelené na dve časti. Prvá zahŕňa kapitoly 3 a 4 a týka sa karteziánskych súčinov grafov s K_2 . Naším cieľom bolo charakterizovať rod takýchto grafov. Najskôr v kapitole 3 odvodíme potrebné všeobecné vlastnosti týchto grafov. Následne sa v kapitole 4 pokúsime aplikovať dosiahnuté výsledky na konkrétnych triedach grafov, pričom sa zameriame na kompletne grafy. Týmto problémom sa zaoberá [Rin77], dodnes však nie je úplne vyriešený. S využitím dosiahnutých teoretických výsledkov skonštruujeme efektívne algoritmy, pomocou ktorých budeme schopní skonštruovať minimálne vnorenia súčinu K_n s grafom K_2 pre n až po 164.

Druhá časť výsledkov, uvedených v kapitole 5, sa týka nehamiltonovských kubických grafov. Barnettova hypotéza hovorí, že každý planárny 3-súvislý kubický bipartitný graf je hamiltonovský. Rovnaké tvrdenie pre neplanárne grafy, známe aj ako Tuttova hypotéza, ale neplatí. Známym je protipríklad

na 54 vrchoch rodu 4. Najmenší protipríklad má 50 vrcholov, pričom sa vie, že rod tohoto grafu je 4 alebo 5 [Ča02]. V kapitole 5 určíme rod tohoto grafu. Zároveň sa pokúsime vysloviť podmienky, za ktorých je možné známou konštrukciou, popísanou v [Geo89], zostrojiť protipríklad menšieho rodu.

Kapitola 1

Úvod do topológie grafov

Pod pojmom graf G rozumieme dvojicu (V, E) , kde V je konečná množina vrcholov a $E \subseteq V \times V$ je množina hrán. Nech u a v sú vrcholy a hrana $e = uv$, potom vrcholom u a v hovoríme koncové vrcholy hrany e . Zároveň takéto vrcholy voláme susedné.

Postupnosť vrcholov a hrán grafu G tvaru $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n$, kde vrcholy v_i a v_{i+1} sú koncové vrcholy hrany e_i , nazývame sled. Pod pojmom dĺžka sledu rozumieme počet hrán v slede. Ak $v_0 = v_n$, potom sled nazývame uzavretý.

Pod pojmom cesta v grafe rozumieme sled, ktorý prechádza každým vrcholom grafu najviac raz. Graf voláme súvislý, ak pre každú dvojicu vrcholov u a v grafu G existuje cesta, ktorá začína vrcholom u a končí vrcholom v . Graf G voláme k -súvislý, ak po odstránení menej ako k vrcholov ostane súvislý.

Uzavretý sled, ktorý prechádza každým vrcholom grafu najviac raz, voláme kružnica. Zvláštny význam má pre nás kružnica, ktorá prechádza každým vrcholom grafu práve raz. Takúto kružnicu voláme hamiltonovská a graf, ktorý obsahuje takúto kružnicu, voláme hamiltonovský. Určiť, či je graf na vstupe hamiltonovský, je vo všeobecnosti NP-úplný problém.

Graf, ktorý neobsahuje kružnicu, voláme acyklický. V opačnom prípade definujeme obvod grafu ako dĺžku najkratšej kružnice v grafe. Graf voláme bipartitný, ak existujú disjunktné podmnožiny vrcholov A a B také, že graf

neobsahuje žiadnu hranu, ktorej obidva koncové vrcholy ležia v jednej z týchto množín.

Graf, ktorý obsahuje hranu medzi každou dvojicou vrcholov, nazývame úplný. Úplný graf na n vrcholoch označujeme K_n . Úplný bipartitný graf $K_{m,n}$ je bipartitný graf s partíciami vrcholov veľkosti m a n , ktorý obsahuje hranu medzi každou dvojicou vrcholov v rôznych partíciách.

1.1 Topologická teória grafov

Predmetom štúdia topologickej teórie grafov sú reprezentácie grafov na plochách. V tejto časti uvedieme najdôležitejšie pojmy z topológie, ktoré budeme neskôr používať. Formálne definície a dôkazy uvedených tvrdení je možné nájsť v [GT87], mierne odlišný prístup k vybudovaniu formálnych základov ponúka [Whi01].

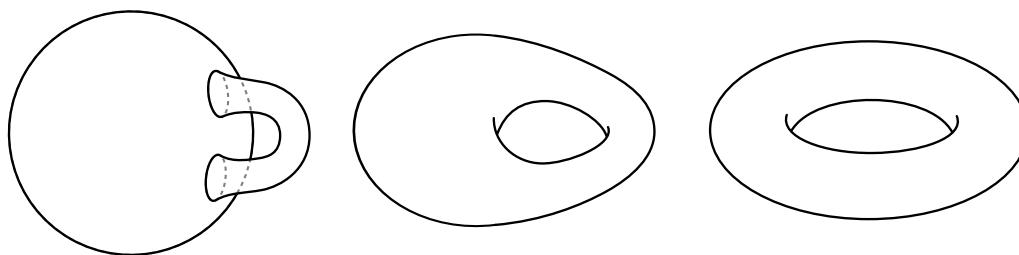
Pojmom homeomorfizmus označujeme spojité zobrazenie medzi topologickými priestormi, pre ktoré existuje inverzné zobrazenie. Pod pojmom plocha budeme rozumieť 2-varietu, teda spojitý topologický priestor, ktorého každý bod má okolie homeomorfné otvorenému disku.

Plochy rozlišujeme orientovateľné a neorientovateľné. Orientovateľné sú tie plochy, pre ktoré je možné v každom bode zvoliť orientáciu, pričom ak po ľubovoľnej uzavretej krivke v ploche prejdeme naspäť do tohto bodu, orientácia sa nezmení. V opačnom prípade hovoríme o neorientovateľnej ploche. Príkladom orientovateľných plôch sú rovina, povrch gule alebo povrch torusu. Príkladom neorientovateľných plôch sú Möbiov pás alebo Kleinova fľaša.

Štandardne nás zaujímajú plochy, ktoré sú uzavreté, teda kompaktné plochy, ktoré nemajú ohraničenie. V tejto práci sa venujeme výhradne orientovateľným plochám, preto tieto prívlastky budeme spravidla vynechávať.

Dá sa ukázať, že každá orientovateľná uzavretá plocha je homeomorfná guli s k pridanými rúčkami [Bra21]. Na obrázku 1.1 je znázornené, ako pridaním rúčky do gule vznikne torus.

Plochy môžeme charakterizovať ich rodom. Nech orientovateľná plocha



Obr. 1.1: Pridaním rúčky k ploche gule vznikne torus.

S je homeomorfná guli s k pridanými rúčkami, potom číslo k nazývame rod plochy. Rod plochy S budeme označovať $\gamma(S)$. Guľa teda predstavuje plochu rodu 0, torus rodu 1 atp.

1.2 Vnorenie grafu do plochy

Definícia 1.2.1. Pod pojmom vnorenie grafu G do plochy S budeme rozumieť reprezentáciu grafu G , v ktorej každému vrcholu grafu G prislúcha bod S a každej hrane G prislúcha jednoduchá krivka (homeomorfný obraz uzavretého intervalu $[0, 1]$) v S , pričom tieto spĺňajú nasledujúce podmienky:

- (i) rôznym vrcholom G prislúchajú rôzne body S ;
- (ii) konce krivky prislúchajúcej hrane ležia v bodoch, ktoré prislúchajú koncovým vrcholom danej hrany, pričom okrem bodov prislúchajúcich koncovým vrcholom na tejto krivke neležia žiadne ďalšie;
- (iii) krivky prislúchajúce hranám sa nepretínajú v iných ako koncových bodoch.

Rovina nie je uzavretá plocha, dá sa ale ľahko ukázať, že rovina je homeomorfná guli bez jedného bodu. Preto vnorenie grafu v rovine existuje práve vtedy, ak existuje vnorenie tohto grafu v guli. Grafy rodu 0 sú teda práve planárne grafy.

Keďže každú orientovateľnú plochu je možné zostrojiť z gule pridaním k rúčok, je zrejmé, že pre každý (konečný) graf existuje plocha S taká,

že graf G je možné nakresliť na plochu S bez pretínania hrán. Najskôr nakreslíme graf G na povrch gule, následne pre každú dvojicu hrán e a e' , ktoré sa pretínajú, pridáme rúčku, po ktorej bude viesť hrana e' (dostatočne malú a dostatočne blízko priesečníka s e , aby nepretla žiadne iné hrany). Využívame pri tom fakt, že nakreslenie grafu na guľu má iba konečne veľa dvojíc krížiacich sa hrán.

Komponenty plochy S po odstránení vnorenia grafu G nazývame oblasti vnorenia. Bunečné vnorenia sú také, v ktorých je každá oblasť homeomorfná otvorenému disku (2-bunka). V nasledujúcom texte budeme uvažovať výlučne bunečné vnorenia.

Uzavretý sled v grafe, ktorý ohraničuje oblasť vnorenia grafu, nazývame hraničný sled danej oblasti. Pod veľkosťou oblasti rozumieme dĺžku jej hraničného sledu. Oblastiam veľkosti 3 budeme hovoriť trojuholníkové, veľkosti 4 štvoruholníkové atď. Trojuholníkové vnorenia (triangulácie) budú potom tie, ktoré obsahujú iba trojuholníkové oblasti.

Definícia 1.2.2. Hovoríme, že grafy G a H sú navzájom homeomorfné, ak existujú subdivízie G' a H' grafov G resp. H také, že G' a H' sú navzájom izomorfné.

Dá sa ukázať, že grafy sú homeomorfné práve vtedy, keď sú ich topologické reprezentácie homeomorfné v zmysle homeomorfizmu topologických priestorov.

1.3 Eulerov vzťah

Euler v roku 1750 dokázal formulu

$$n - m + f = 2,$$

ktorá dáva do súvisu počet vrcholov n , hrán m a stien f mnohostena. Táto formula platí ale iba v prípade, ak každá stena je 2-bunka a mnohosten neobsahuje „diery“.

Lahko sa dá ukázať, že rovnaký vzťah platí pre počet vrcholov, hrán a

oblastí vnorenia grafu do gule. Začiatkom 19. storočia sa podarilo tento vzťah zovšeobecniť (Lhuilier, 1811) pre všetky uzavreté plochy. Výsledkom bola nasledujúca veta. Tá hovorí o tom, že rod daného bunečného vnorenia súvislého grafu závisí od počtu oblastí a naopak.

Veta 1.3.1 (Euler-Poincaré). *Nech G je graf s n vrcholmi a m hranami. Nech Π je bunečné vnorenie grafu G do orientovateľnej plochy S rodu k , pričom počet oblastí vnorenia Π grafu G je f . Potom*

$$n - m + f = 2 - 2k.$$

Použitím Euler-Poincarého vety je možné ľahko ukázať, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú planárne. Pod operáciou kontrakcie hrany $e = uv$ v grafe G rozumieme odstránenie hrany e a následné zľúčenie vrcholov u a v do jedného. Odstránenie hrany ani kontrakcia hrany nezvýši rod grafu [GT87].

Definícia 1.3.2. Hovoríme, že graf H je minorom grafu G , ak je možné z grafu G zostrojiť graf H pomocou operácií subdivízie, kontrakcie a odstránenia hrany.

Veta 1.3.3 (Kuratowski). *Graf G je planárny vtedy a len vtedy, keď neobsahuje ako minor graf H homeomorfný s K_5 alebo $K_{3,3}$.*

Toto tvrdenie je možné zovšeobecniť pre plochy ľubovoľného rodu. Robertson a Seymour ukázali, že pre každú plochu (v zmysle našej definície) je množina takýchto tzv. zakázaných minorov konečná.

1.4 Rotačná schéma grafu

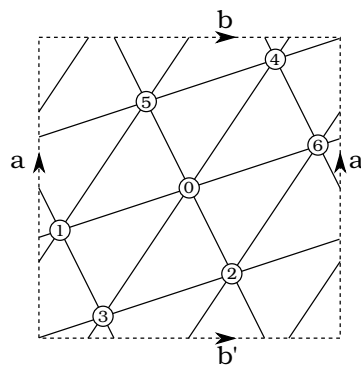
Ľubovoľné vnorenie grafu je možné reprezentovať spojitou funkciou, ktorá mapuje ľubovoľnú pevnú topologickú reprezentáciu grafu do bodov plochy. Takéto reprezentácie sú ale pre prácu s vnoreniami príliš nepraktické. Navyše neumožňujú jednoducho určiť, či je dvojica vnorení homeomorfná. V tejto časti si ukážeme vhodnejšiu reprezentáciu vnorenia grafu.

Majme vrchol v grafu G . Označme $N(v)$ množinu vrcholov u_1, u_2, \dots, u_k susedných s vrcholom v . Zvolíme pevnú orientáciu na ploche (v smere resp. proti smeru hodinových ručičiek). Pod rotáciou na vrchole v budeme rozumieť cyklickú permutáciu ρ_v hrán incidentných s vrcholom v . Pre jednoduché grafy definujeme rotáciu na vrchole ekvivalentne ako cyklickú permutáciu susedných vrcholov. Potom n -ticu rotácií $\Pi = (\rho_{v_1}, \rho_{v_2}, \dots, \rho_{v_n})$ budeme nazývať rotačná schéma grafu.

Pri zapisovaní rotačnej schémy budeme vrcholy spravidla označovať prirodzenými číslami. Potom pre graf G rádu n budeme schému reprezentovať tabuľkou s n riadkami, pričom i -ty riadok zodpovedá rotácii na i -tom vrchole. V tabuľke 1.2a je znázornená rotačná schéma grafu K_7 .

0:	1	3	2	6	4	5
1:	2	4	3	0	5	6
2:	3	5	4	1	6	0
3:	4	6	5	2	0	1
4:	5	0	6	3	1	2
5:	6	1	0	4	2	3
6:	0	2	1	5	3	4

(a) Rotačná schéma K_7



(b) Vnorenie K_7 do torusu.

Obr. 1.2: Trojuholníkové vnorenie grafu K_7 a prislúchajúca rotačná schéma.

Vzťah medzi rotačnými schémami a vnoreniami grafov poprvýkrát pozorovali a použili vo svojej práci Dyck (1888) a Heffter (1891). Tento jednoznačný vzťah neskôr formalizoval a dokázal Edmonds (1960).

Veta 1.4.1 (Edmonds-Heffter). *Každému vnoreniu grafu G do orientovanej plochy S zodpovedá práve jeden rotačný systém $\Pi(G)$. Naopak, každému rotačnému systému $\Pi(G)$ zodpovedá práve jedno vnorenie G do orientovanej plochy S .*

Množinu všetkých rotačných schém grafu G budeme označovať Γ_G . Pred-

chádzajúca veta nám umožňuje určiť kardinalitu množiny Γ_G .

Dôsledok 1.4.2. *Nech G je ľubovoľný graf. Potom počet vnorení grafu G je*

$$|\Gamma_G| = \prod_{v \in V(G)} (\deg(v) - 1)!,$$

kde $\deg(v)$ označuje stupeň vrchola v .

Na obrázku 1.2b je znázornené trojuholníkové vnorenie úplného grafu K_7 do torusu (stačí zlúčiť stranu obdĺžnika a so stranou a' a následne stranu b so stranou b' , čím vznikne torus). K tomuto vnoreniu prislúcha rotačná schéma znázornená v 1.2a. Vidno, že rotácia na vrchole zodpovedá poradiu, v ktorom pri zvolenej orientácii v ploche „vychádzajú“ incidentné hrany z vrchola.

Veta 1.4.3. *Majme rotačnú schému Π reprezentujúcu vnorenie jednoduchého súvislého grafu G . Potom uzavretý sled tvaru $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$, kde $v_n = v_0$, $e_i = v_{i-1}v_i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ je hraničný sled oblasti práve vtedy, keď pre každé $i = 1, 2, \dots, n - 1$ platí $v_{i+1} = \rho_{v_i}(v_{i-1})$.*

Pojmom roh oblasti F_0 budeme označovať usporiadanú trojicu (e_1, v, e_2) takú, že (e_1, v, e_2) sa v tomto poradí nachádza v hraničnom slede oblasti F_0 . Ekvivalentne pre jednoduché grafy môžeme definovať roh oblasti ako trojicu (u_1, v, u_2) takú, že päťica $(u_1, u_1v, v, u_2v, u_2)$ je obsiahnutá v hraničnom slede oblasti F_0 . Hrany, ktoré v rotácii na vrchole v nasledujú po sebe, zrejme tvoria spolu s vrcholom v roh oblasti.

Pod vložení konca hrany $e = u_0v$ do rohu (u_1, v, u_2) budeme rozumieť pridané u_0 do rotácie na vrchole v tak, že u_0 sa bude v rotácii nachádzať bezprostredne za vrcholom u_1 a pred vrcholom u_2 . Budeme hovoriť, že vnorenie $\Pi'(G)$ vzniklo z vnorenia $\Pi(G)$ vložení hrany e do oblasti F_0 práve vtedy, keď oba konce hrany e boli vložené do rohov oblasti F_0 .

1.5 Algoritmus Face-Trace

Podľa Euler-Poincarého vety je možné určiť rod vnorenia, ak poznáme počet oblastí. Algoritmus 1 popisuje funkciu, ktorá nájde hraničné sledy všetkých oblastí, ak máme danú rotačnú schému grafu. Časová zložitosť algoritmu je lineárna od počtu hrán grafu.

Algoritmus 1 Nájdenie hraničných sledov oblastí rotácie Π .

```

1: function FACETRACE( $G, \Pi, \vec{vu}$ )
2:    $(v', u') \leftarrow (v, u)$ 
3:    $F \leftarrow$  prázdny sled
4:   repeat
5:      $(v'u') \leftarrow (u', \rho_{u'}(v'))$ 
6:     pridaj hranu  $\vec{v'u'}$  do sledu  $F$ 
7:     označ hranu  $\vec{v'u'}$  v tomto smere ako obsiahnutú v slede
8:   until  $(v', u') = (v, u)$ 
9:   return  $F$ 
10: end

11: function GETFACES( $G, \Pi$ )
12:    $\mathcal{F} = \emptyset$ 
13:   for each  $\vec{vu} \in E(G)$  do
14:     if  $\vec{vu}$  nie je v tomto smere obsiahnutá v slede oblasti then
15:        $F \leftarrow$  FACETRACE( $G, \Pi, \vec{vu}$ )
16:       pridaj oblasť  $F$  do množiny  $\mathcal{F}$ 
17:     end if
18:   end for
19:   return  $\mathcal{F}$ 
20: end

```

1.6 Minimálny rod grafu

Pri štúdiu vnorenia grafu nás spravidla zaujímajú iba vnorenia so špecifickými vlastnosťami, napríklad vnorenia minimálneho rodu, alebo vnorenia s danou štruktúrou oblastí. Keďže na základe vety 1.4.2 priestor všetkých

rôznych vnorení je konečný, je teoreticky možné ich všetky prehľadať.

Z praktického hľadiska však nie je možné pracovať so všetkými vnoreniami už pomerne malých grafov – ako príklad uveďme úplný graf na 8 vrcholoch. Počet vnorení tohto grafu je $(6!)^8$ (viac ako 10^{22}), čo na bežne dostupnom hardvéri znemožňuje využitie takéhoto postupu.

V nasledujúcich kapitolách budeme určovať rod niektorých vybraných grafov. Budeme sa snažiť využiť niektoré štrukturálne vlastnosti skúmaných grafov na to, aby sme výrazne zredukovali počet vnorení, ktoré je potrebné prehľadať.

Nech G je jednoduchý graf, minimálne k také, že G má bunečné vnorenie do plochy rodu k , voláme rod grafu G a označujeme $\gamma(G)$. Podobne maximálne k také, že G má bunečné vnorenie do plochy rodu k , voláme maximálny rod grafu G a označujeme $\gamma_M(G)$.

Keďže počet vnorení grafu je konečný, vnorenie minimálneho aj maximálneho rodu zrejme vždy existuje. Navyše tiež platí, že pre každé k , pričom $\gamma(G) \leq k \leq \gamma_M(G)$, existuje bunečné vnorenie G do plochy rodu k .

Nasledujúca veta hovorí, že rod grafu je aditívny, vzhľadom na komponenty súvislosti grafu.

Veta 1.6.1. *Nech graf $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ je zjednotenie disjunktných grafov. Potom*

$$\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + \dots + \gamma(G_k).$$

Pri práci s vnoreniami budeme často využívať operáciu pridania resp. odstránenia hrany. Platí, že odstránenie hrany z vnorenia rod nezvýši. Za určitých okolností môže rod vnorenia ale znížiť. Naopak, pridanie hrany rod vnorenia nezníži, môže ho však zvýšiť. Vždy ale platí, že rod vnorenia sa zmení najviac o 1. V kapitole 2 presnejšie popíšeme, ako sa pri týchto operáciách mení rod vnorenia a hranice oblastí.

Rozhodnúť, či pre daný graf existuje bunečné vnorenie do plochy rodu k , je vo všeobecnosti NP-ťažký problém [Tho89]. Môžeme ale odvodiť niektoré jednoduché odhady.

Všimnime si najskôr, že hraničný sled oblasti nemôže byť kratší, ako dĺžka najkratšej kružnice v grafe. Potom keďže každá hrana sa v sledoch

nachádza práve dvakrát, dostávame nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.6.2. *Majme vnorenie cyklického grafu G obvodu g s m hranami, pričom vnorenie má f oblastí, potom $2m \geq g \cdot f$.*

Toto pozorovanie nám po dosadení do Eulerovho vzťahu umožňuje sformulovať nasledujúci odhad rodu grafu.

Veta 1.6.3. *Nech G je graf obvodu g s n vrcholmi a m hranami. Potom*

$$\gamma(G) \geq 1 - \frac{1}{2}n + \frac{g-2}{2g}m.$$

Tento dolný odhad dosahujú napríklad úplné grafy. Známy je nasledujúci výsledok, dokázaný v [Rin74]. V knihe autor zároveň popisuje konštrukciu minimálnych vnorení úplných grafov.

Veta 1.6.4. *Pre graf K_n platí*

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

V nasledujúcej kapitole ukážeme, ako sa mení rod vnorenia.

Kapitola 2

Operácie na vnoreniach

V tejto kapitole uvidíme najdôležitejšie operácie na vnoreniach grafu. Ukážeme, ako sa zmení rod vnorenia pri pridávaní hrán v niektorých špeciálnych prípadoch.

2.1 Pokrytie vrcholov oblasťami

V tejto kapitole budeme používať označenie zavedené v [Moh01]. Nech G je graf, Π jeho vnorenie a nech $W \subseteq V(G)$ je množina vrcholov grafu G . Budeme hovoriť, že oblasť vnorenia pokrýva vrcholy množiny W , ak sa všetky vrcholy množiny W nachádzajú v hraničnom slede danej oblasti. Ďalej budeme hovoriť, že množina oblastí C vnorenia grafu pokrýva vrcholy množiny W , ak sa každý vrchol množiny W nachádza v hraničnom slede aspoň jednej oblasti z C .

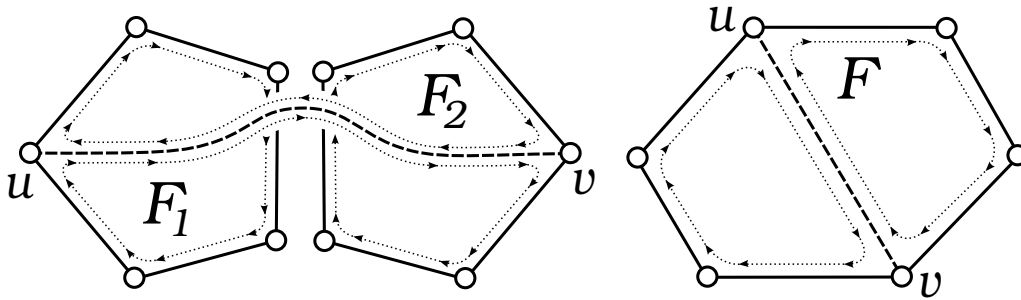
Definícia 2.1.1. Nech G je graf, Π jeho vnorenie a $W \subseteq V(G)$ je podmnožina vrcholov grafu G . Označíme $\tau(W, G, \Pi)$ kardinalitu najmenej množiny C oblastí vnorenia Π takej, že C pokrýva W .

Definícia 2.1.2. Nech G je graf a Π jeho vnorenie. Veľkosť minimálneho pokrytia všetkých vrcholov grafu oblasťami vnorenia Π označíme $\tau(G, \Pi)$, pričom platí $\tau(G, \Pi) = \tau(V(G), G, \Pi)$.

Štúdiu minimálnych pokrytí na planárnych grafoch sa zaoberá [BM88],

kde autori ukázali, že problém pokrytia množiny vrcholov oblasťami v planárnom grafe je NP-ťažký. V [Moh01] autor študoval súvislosť medzi veľkosťou najmenšieho pokrytia oblasťami a rodom apex-grafu. Zároveň v článku ukázal, že problém minimálneho pokrytia je NP-ťažký aj pre triedu planárnych triangulácií. V nasledujúcom texte budeme pod pokrytím vždy rozumieť pokrytie oblasťami.

2.2 Pridávanie hrany do vnorenia



Obr. 2.1: Sledy oblastí po pridaní hrany uv do vnorenia.

Veta 2.2.1. *Nech G je graf, vrcholy $u, v \in G$, hrana $uv \notin G$. Nech $G' = G \cup \{uv\}$. Majme dané vnorenie Π grafu G a vnorenie Π' grafu G' také, že Π je zúženie Π' na G . Potom*

- (i) $g(\Pi'(G')) = g(\Pi(G))$ práve vtedy, ak oba konce hrany uv sú vložené do rohov rovnakej oblastí $\Pi(G)$. V takom prípade je hraničný sled tejto oblasti rozdelený na dva nové.
- (ii) $g(\Pi'(G')) = g(\Pi(G)) + 1$ práve vtedy, ak konce hrany uv sú vložené do rohov rôznych oblastí $\Pi(G)$. V takom prípade sú hraničné sledy týchto dvoch oblastí spojené do jednej.

Formálny dôkaz tohoto tvrdenia uvádza napríklad [GT87]. Načrtneme, ako vyzerajú hraničné sledy po pridaní hrany.

Nech existuje oblasť F , ktorá pokrýva oba vrcholy u a v . Nech hraničný sled F má tvar (u, α, v, β, u) . Nech hrana uv je vložená do oblasti F , vzniknú dve oblasti s hraničnými sledmi (u, α, v, uv, u) resp. (v, β, u, uv, v) . Počet hrán aj počet oblastí sa týmto zvýšil o 1. Dosadením do Eulerovho vzťahu dostávame, že rod výsledného vnorenia sa nezmení.

Ak sú naopak konce hrany uv pridané do rôznych oblastí, sledy týchto oblastí sa spoja do jednej. Konkrétne, nech F_u je oblasť tvaru (u, α, u) a F_v tvaru (v, β, v) , pridanie hrany uv do týchto oblastí ich spojí do jednej oblasti, ktorej hraničný sled bude tvaru $(u, \alpha, u, uv, v, \beta, v, uv, u)$. Počet hrán sa zvýšil o 1, počet oblastí sa naopak znížil o 1. Dosadením do Eulerovho vzťahu dostávame, že výsledný rod takéhoto vnorenia sa zvýši o 1.

Dôsledok 2.2.2. *Nech G je graf, vrcholy $u, v \in G$, $uv \notin G$. Nech $G' = G \cup \{uv\}$. Potom $\gamma(G') = \gamma(G)$ práve vtedy, keď existuje vnorenie $\Pi(G)$ minimálneho rodu také, že $\tau(\{u, v\}, G, \Pi) = 1$.*

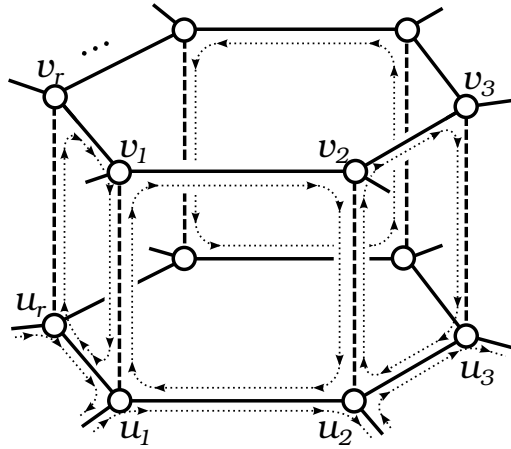
Veta 2.2.3. *Nech G_1 a G_2 sú dva disjunktné grafy rodu $\gamma(G_1)$ resp. $\gamma(G_2)$, vrchol $v_1 \in G_1$ a vrchol $v_2 \in G_2$. Potom graf $G = G_1 \cup G_2 \cup \{v_1v_2\}$ je rodu $\gamma(G_1) + \gamma(G_2)$. Navyše platí, že distribúcia rodov G je konvolúcia distribúcií rodov grafov G_1 a G_2 .*

Dôkaz tohoto tvrdenia nájdeme v [GF85]. Nás bude zaujímať všeobecnejší prípad, aký bude výsledný rod grafu pri spojení disjunktných komponentov viacerými hranami.

2.3 Hrany medzi dvojicou oblastí

Lema 2.3.1. *Nech Π je vnorenie súvislého grafu G a F_1 resp. F_2 sú ľubovoľné dve jeho disjunktné oblasti. Nech u_1, u_2, \dots, u_r sú vrcholy, ktoré sa v tomto poradí nachádzajú v hraničnom slede oblasti F_1 a nech v_r, v_{r-1}, \dots, v_1 sú vrcholy, ktoré sa v tomto poradí nachádzajú v hraničnom slede oblasti F_2 . Potom pre graf $G' = G \cup \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_rv_r\}$ existuje vnorenie Π' s nasledujúcimi vlastnosťami:*

$$(i) \quad g(\Pi'(G')) = g(\Pi(G)) + 1$$



Obr. 2.2: Sledy oblastí po pridaní hrán $u_i v_i$ do vnorenia.

(ii) všetky oblasti vnorenia $\Pi(G)$, okrem F_1 a F_2 , sú oblasťami aj vo vnorení $\Pi'(G')$

Dôkaz. Nech hraničný sled F_1 je tvaru (u_1, α, u_1) a hraničný sled F_2 nech je tvaru (v_1, β, v_1) , a nech sled $\alpha = (\alpha_1, u_2, \alpha_2, u_3, \dots, u_r, \alpha_r)$ a nech sled $\beta = (\beta_r, v_r, \beta_{r-1}, v_{r-1}, \dots, v_2, \beta_1)$.

Pridaním hrany $u_1 v_1$ do rohov oblastí F_1 a F_2 vznikne z F_1 a F_2 jedna oblasť ohraničená sledom $(u_1, \alpha, u_1, u_1 v_1, v_1, \beta, v_1, u_1 v_1, u_1)$. Toto vnorenie má podľa druhej časti vety 2.2.1 rod $g(\Pi(G)) + 1$.

Označme oblasť, ktorá takto vznikla, F_{12} . Hraničný sled oblasti F_{12} má tvar $u_1, \alpha_1, u_2, \dots, u_r, \alpha_r, u_1, u_1 v_1, v_1, \beta_r, v_r, \beta_{r-1}, v_{r-1}, \dots, v_2, \beta_1, v_1, u_1 v_1, u_1$.

Do oblasti F_{12} pridáme hrany $u_2 v_2, \dots, u_r v_r$. Opakovaným aplikovaním prvej časti vety 2.2.1 takto rozdelíme oblasť F_{12} na r oblastí, pričom rod vnorenia sa nezmení. \square

Lema 2.3.2. *Nech G_1 a G_2 sú disjunktné grafy, majme vnorenia Π_1 grafu G_1 a Π_2 grafu G_2 . Nech F_1 je oblasť vnorenia $\Pi_1(G_1)$ a F_2 je oblasť vnorenia $\Pi_2(G_2)$. Nech u_1, u_2, \dots, u_r sú vrcholy, ktoré sa v tomto poradí nachádzajú v hraničnom slede oblasti F_1 a nech v_r, v_{r-1}, \dots, v_1 sú vrcholy, ktoré sa v tomto poradí nachádzajú v hraničnom slede F_2 . Potom pre graf $G = G_1 \cup G_2 \cup \{u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_r v_r\}$ existuje vnorenie Π s nasledujúcimi vlastnosťami:*

$$(i) \quad g(\Pi(G)) = g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2))$$

(ii) všetky oblasti vnorenia $\Pi_1(G_1)$ a $\Pi_2(G_2)$, okrem F_1 a F_2 , sú oblasťami aj vo vnorenia $\Pi(G)$

Dôkaz. Využijeme rovnakú konštrukciu, ako v prípade dvoch oblastí súvislého grafu. Pridanie prvej hrany spojí F_1 a F_2 do jednej oblasti a zároveň spojí disjunktné komponenty grafu, teda podľa vety 2.2.3 bude rod vnorenia $g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2))$. Ostatné hrany, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, rod nezvýšia. \square

2.4 Hrany medzi disjunktými komponentmi grafmi

Veta 2.4.1. *Nech G_1 a G_2 sú disjunktné grafy a nech $W_1 = u_1, \dots, u_k$ je podmnožina vrcholov G_1 a $W_2 = v_1, \dots, v_k$ je podmnožina vrcholov G_2 . Nech $G = G_1 \cup G_2 \cup \{u_1v_1, \dots, u_kv_k\}$. Majme vnorenie Π grafu G . Nech Π_1 , resp. Π_2 je zúženie vnorenia Π na graf G_1 , resp. G_2 . Označme $\tau_i = \tau(W_i, G_i, \Pi_i)$ pre $i \in \{1, 2\}$. Potom*

$$g(\Pi(G)) \geq g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2)) + \max\{\tau_1, \tau_2\} - 1.$$

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $\tau_1 \geq \tau_2$, teda $\tau_1 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$. Nech $C = \{F_1, F_2, \dots, F_c\}$ je množina tých oblastí vnorenia Π_1 grafu G_1 , ktorých hraničné sledy nie sú hraničným sledom žiadnej oblasti vnorenia Π grafu G . Jej kardinalitu označíme $c = |C|$.

Každý vrchol u množiny W_1 je v grafe G incidentný s aspoň jednou hranou, s ktorou nebol v grafe G_1 . Preto aspoň jedna oblasť incidentná s u v $\Pi_1(G_1)$ neexistuje v $\Pi(G)$, čo znamená, že C je pokrytie množiny vrcholov W_1 v grafe G_1 .

Ak $F_i \in C$ nie je oblasťou v $\Pi(G)$, tak zrejme existuje hrana z G_1 do G_2 , ktorá bola pridaná do oblasti F_i tak, že v rotácii na niektorom vrchole oblasti F_i sa nachádza medzi dvoma hranami F_i , ktoré v rotácii Π_1 na danom

vrcholy nasledovali po sebe. Nech e_i je ľubovoľná takáto hrana, pre každé i (zrejme pre $i \neq j$ platí $e_i \neq e_j$). Nech $G' = G_1 \cup G_2 \cup \{e_1, e_2, \dots, e_c\}$ a nech Π' je zúženie vnorenia Π na graf G' . Matematickou indukciou ukážeme, že platí

$$g(\Pi'(G')) = g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2)) + c - 1.$$

Označme $G'_t = G_1 \cup G_2 \cup \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ a nech Π'_t je zúženie vnorenia Π na graf G'_t . Ukážeme, že $g(\Pi'_t(G'_t)) = g(\Pi_1) + g(\Pi_2) + t - 1$ a zároveň, že pre všetky $s > t$ sú oblasti F_s oblasťami vnorenia $\Pi'(G'_t)$.

Ak $t = 1$, potom tvrdenie vyplýva priamo z vety 2.2.3. Máme dva disjunktne grafy G_1 a G_2 , Pridaním hrany e_1 sa rod vnorenia nezmení, teda $g(\Pi'_1(G'_1)) = g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2))$. Zároveň sme hranu e_1 pridali do oblasti F_1 , teda ostatné oblasti $\Pi_1(G_1)$ sa nezmenili (keďže druhý koniec hrany e_1 leží v G_2).

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre G'_{t-1} . Ukážeme, že platí aj po pridaní hrany e_t . Z indukčného predpokladu F_t je oblasť v $\Pi'_{t-1}(G'_{t-1})$. Hrana e_t ju spojí s inou oblasťou, čím sa podľa vety 2.2.1 rod zvýši o 1. Zároveň e_t vkladáme do oblasti F_t a druhý vrchol e_t leží v G_2 , preto oblasť, do ktorej sme vložili druhý koniec e_t nemôže byť žiadna z oblastí F_s , $s > t$, keďže tie neobsahujú v hraničnom slede vrcholy grafu G_2 . Zvyšné oblasti vnorenia $\Pi'_{t-1}(G'_{t-1})$ sa teda nezmenia.

Tým sme ukázali tvrdenie pre $G' = G'_c$. Keďže $\Pi(G)$ vznikne z G' pridaním hrán do rotácie Π' , platí $g(\Pi(G)) \geq g(\Pi'(G'))$. Zároveň keďže C je pokrytie množiny W_1 v G_1 , platí $|C| \geq \tau_1$. Dosadením dostávame $g(\Pi(G)) \geq g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2)) + \tau_1 - 1$, čím sme ukázali platnosť tvrdenia. \square

Kapitola 3

Karteziánsky súčin grafu s K_2

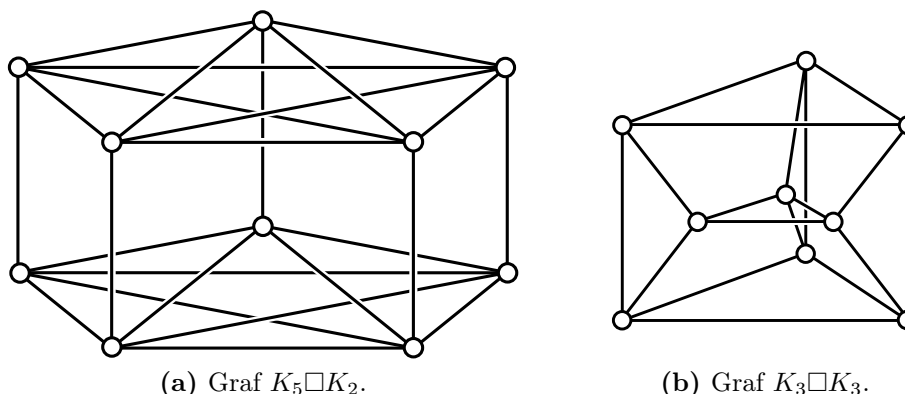
V tejto kapitole charakterizujeme rod grafov, ktoré vzniknú operáciou karteziánskeho súčinu z K_2 , pomocou minimálnych pokrytí oblasťami. Následne ukážeme odhady pre rod takýchto grafov.

Definícia 3.0.2. Majme grafy G a H . Karteziánsky súčin grafov G a H , ktorý označujeme $G \square H$, je graf definovaný nasledovne:

- (i) $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$
- (ii) $E(G \square H) = (E(G) \times V(H)) \cup (V(G) \times E(H))$
- (iii) ak $(e, v) \in E(G \square H)$ a u_1, u_2 sú koncové vrcholy hrany e , potom koncové vrcholy hrany (e, v) sú (u_1, v) a (u_2, v)
- (iv) ak $(v, e) \in E(G \square H)$ a u_1, u_2 sú koncové vrcholy hrany e , potom koncové vrcholy hrany (v, e) sú (v, u_1) a (v, u_2)

Nech H je graf rádu n , potom graf $G \square H$ obsahuje n disjunktných kópií G . Zároveň platí, že operácia \square je symetrická, teda platí $G \square H \simeq H \square G$.

Rod karteziánskeho súčinu grafov bol určený pre viaceré triedy grafov. Ako príklad spomeňme prácu Whitea, ktorý ukázal, že pre súčin párnych cyklov platí $\gamma(C_{n_1} \square C_{n_2} \square \cdots \square C_{n_r}) = 1 + n(r - 2)/4$, kde $n = n_1 + \cdots + n_r$ a že súčin bipartitných grafov spĺňa $\gamma(K_{2m,2m} \square K_{2m,2m}) = 1 + 8m^2(m - 1)$ [Whi70].



Obr. 3.1: Príklad karteziánskych súčinov grafov.

Hyperkocky sú grafy tvaru $K_2 \square \dots \square K_2$. Ringel ukázal, že $\gamma(Q_n) = 1 + 2^{n-3}(n - 4)$ [Rin55]. Pisanski v [Pis80] zase ukázal, že pre regulárne r -valentné bipartitné grafy G a H obvodu viac ako 3, ktoré majú 1-faktor, platí $\gamma(G \square H) = 1 + mn(r - 2)/4$.

Pri dokazovaní týchto tvrdení autori využívajú skutočnosť, že výsledný graf neobsahuje trojuholníky. Následne konštruujú štvoruholníkové vnorenia týchto grafov.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať špeciálnym prípadom karteziánskeho súčinu grafov, kedy jeden z grafov je K_2 . Pre ľubovoľný graf G skonštruujeme $G \square K_2$ tak, že vezmeme dve disjunktné kópie grafu G a pridáme hrany medzi tie vrcholy, ktoré zodpovedajú rovnakému vrcholu pôvodného G . Zaujímať nás bude rod takýchto grafov.

V článku [Whi71a] autor ukázal platnosť nasledujúcich všeobecných odhadov pre rod karteziánskeho súčinu dvoch grafov.

Veta 3.0.3. *Nech G_1 je graf rádu n_1 a G_2 je graf rádu n_2 . Potom platí*

$$(i) \quad \gamma(G_1 \square G_2) \geq \max\{n_1\gamma(G_2) + \gamma(G_1), n_2\gamma(G_1) + \gamma(G_2)\};$$

$$(ii) \quad \gamma(G_1 \square G_2) \leq n_1\gamma(G_2) + n_2\gamma(G_1) + \beta(K_{n_1, n_2}),$$

kde pre súvislý graf s n vrcholmi a m hranami platí $\beta(G) = m - n + 1$.

Špeciálne pre súčin grafu G rádu n s K_2 dostávame použitím tejto vety

nasledovný odhad:

$$2\gamma(G) \leq \gamma(G \square K_2) \leq 2\gamma(G) + n.$$

V článku [Whi71b] autor ukázal, že ak G je vonkajšovnoriteľný graf, potom jeho rod dosahuje dolný odhad. Tento výsledok vyplýva priamo z tvrdení, uvedených v tejto kapitole. Autor sa v článku ďalej venuje aj iným ako karteziánskym súčinom s K_2 .

V tejto kapitole charakterizujeme rod $G \square K_2$. Využijeme na to definíciu pokrytia oblasťami a tvrdenia dokázané v predchádzajúcej kapitole. Následne ukážeme tesnejší dolný odhad rodu $G \square K_2$ pre daný graf G .

3.1 Rod karteziánskeho súčinu s K_2

Veta 3.1.1. *Nech G je súvislý graf. Potom*

$$\gamma(G \square K_2) \leq \min_{\Pi \in \Gamma_G} \{2g(\Pi(G)) + \tau(G, \Pi) - 1\}.$$

Dôkaz. Majme vnorenie Π grafu G . K vnoreniu Π skonštruujeme vnorenie Π' , v ktorom sú rotácie na vrcholoch presne opačné, ako v Π . Majme dve kópie grafu G s vnoreniami Π , resp. Π' . Nech množina oblastí F_1, F_2, \dots, F_τ v Π je pokrytie minimálnej veľkosti, Π' obsahuje zodpovedajúce oblasti $F'_1, F'_2, \dots, F'_\tau$, pričom v hraničnom slede F'_i je poradie vrcholov vždy opačné, ako v F_i .

Pridaním hrán medzi vrcholy oblastí F_0 a F'_0 vznikne súvislý graf a podľa lemy 2.3.2 existuje vnorenie tohto grafu rodu $2g(\Pi(G))$.

Následne postupne pre každú oblasť F_i pridáme hrany do F'_i medzi vrcholy, ktorých hrany ešte neboli pridané. Opakovaným aplikovaním lemy 2.3.1 konštruujeme vnorenie výsledného grafu, pričom v každom kroku zvýšime rod vnorenia najviac o 1.

Popísanou konštrukciou teda dostaneme vnorenie grafu $G \square K_2$, ktorého rod je $2g(\Pi(G)) + \tau(G, \Pi) - 1$. \square

Veta 3.1.2. *Nech G je súvislý graf. Potom*

$$\gamma(G \square K_2) \geq \min_{\Pi \in \Gamma_G} \{2g(\Pi(G)) + \tau(G, \Pi) - 1\}.$$

Dôkaz. Majme minimálne vnorenie Π grafu $G \square K_2$. Nech Π_1 , resp. Π_2 , sú indukované vnorenia na dvoch kópiách grafu G .

Bez ujmy na všeobecnosti nech $g(\Pi_1(G)) \leq g(\Pi_2(G))$. Keď pomocou konštrukcie z dôkazu vety 3.1.1 zostrojíme použitím Π_1 vnorenie grafu $G \square K_2$, dostaneme vnorenie rodu $2g(\Pi_1(G)) + \tau(G, \Pi_1) - 1$. Keďže $g(\Pi_1(G)) \leq g(\Pi_2(G))$, tak zrejme platí

$$g(\Pi_1(G)) + g(\Pi_2(G)) + \max\{\tau(G, \Pi_1), \tau(G, \Pi_2)\} - 1 \geq 2g(\Pi_1(G)) + \tau(G, \Pi_1) - 1.$$

Zároveň podľa vety 2.4.1 rod vnorenia Π je aspoň

$$g(\Pi(G \square K_2)) \geq g(\Pi_1(G)) + g(\Pi_2(G)) + \max\{\tau(G, \Pi_1), \tau(G, \Pi_2)\} - 1.$$

Z uvedeného vyplýva $g(\Pi(G \square K_2)) \geq 2g(\Pi_1(G)) + \tau(G, \Pi_1) - 1$. \square

Nasledujúca veta je dôsledkom predchádzajúcich tvrdení.

Veta 3.1.3. *Nech G je súvislý graf. Potom*

$$\gamma(G \square K_2) = \min_{\Pi \in \Gamma_G} \{2g(\Pi(G)) + \tau(G, \Pi) - 1\}.$$

Z dôkazu vety 3.1.2 navyše vyplýva, že pre vnorenie Π grafu $G \square K_2$ minimálneho rodu existuje vnorenie Π_1 grafu G , z ktorého je možné pomocou konštrukcie z dôkazu vety 3.1.1 zostrojiť vnorenie $G \square K_2$ taktiež minimálneho rodu.

Túto skutočnosť budeme využívať v ďalších kapitolách pri určovaní rodu súčinov $G \square K_2$. Namiesto hľadania minimálneho vnorenia celého grafu sa sústredíme na hľadanie vhodného vnorenia G . To nám v niektorých prípadoch umožní omnoho efektívnejšie prehľadávanie priestoru vnorení grafov, ktoré nás zaujímajú.

3.2 Dolný odhad rodu $G \square K_2$

V tejto časti ukažeme dolný odhad pre počet oblastí v pokrytí a následne aj dolný odhad rodu výsledného vnorenia.

V predchádzajúcej časti sme videli, ako rod súčinu závisí od veľkosti pokrytia. Keďže sa snažíme minimalizovať veľkosť pokrytia, budeme sa usilovať, aby v pokrytí bolo čo najmenej zbytočných hrán – teda aby jeden vrchol nebol pokrytý príliš veľa oblasťami. V ideálnom prípade je pre každý vrchol v pokrytí práve jedna polhrana.

Keďže pre dané vnorenie je počet oblastí pevný, minimálna veľkosť pokrytia zároveň znamená, že mimo pokrytia je maximálny možný počet oblastí. V ideálnom prípade sú mimo pokrytia iba trojuholníkové oblasti (resp. všeobecnejšie oblasti dĺžky rovnej obvodu grafu).

Lema 3.2.1. *Nech G je súvislý graf s n vrcholmi, m hranami a obvodom g . Nech Π je vnorenie grafu G rodu k . Potom*

$$\tau(G, \Pi) \geq \frac{(1-g)n + (g-2)m + 2g}{g} - 2k.$$

Dôkaz. Nech r je počet oblastí vnorenia $\Pi(G)$ a nech množina oblastí C tvorí pokrytie minimálnej veľkosti. Označme f_i počet oblastí vnorenia $\Pi(G)$ s hraničným sledom dĺžky i . Keďže každá hrana grafu G sa nachádza v hraničných sledoch oblastí práve dvakrát, platí $2m = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots$.

Podobne označme f'_i počet oblastí vnorenia dĺžky i , ktoré patria do pokrytia C . Keďže oblasť dĺžky i pokryje najviac i rôznych vrcholov, v pokrytí musí byť aspoň n polhrán, teda $n \leq 3f'_3 + 4f'_4 + 5f'_5 + \dots$.

Pozrime sa na oblasti, ktoré nepatria do pokrytia C . Počet polhrán v sledoch týchto oblastí je $\sum_{i \geq 3} i(f_i - f'_i) = \sum_{i \geq 3} i f_i - \sum_{i \geq 3} i f'_i$. Po dosadení predchádzajúcich výsledkov dostávame vzťah $\sum_{i \geq 3} i f_i - \sum_{i \geq 3} i f'_i \leq 2m - n$.

Zároveň keďže obvod grafu je g , pre $i < g$ platí $f_i = 0$. Počet všetkých oblastí vnorenia Π je $r = f_g + f_{g+1} + f_{g+2} + \dots$. Rovnako vyjadríme počet oblastí pokrytia C , teda $\tau(G, \Pi) = f'_g + f'_{g+1} + f'_{g+2} + \dots$.

Oblastí mimo pokrytia C je teda $r - \tau(G, \Pi)$, súčet ich dĺžok je aspoň $g(r - \tau(G, \Pi))$. Dosadením predchádzajúcich vzťahov dostaneme nasledu-

júce:

$$\begin{aligned} g(r - \tau(G, \Pi)) &= g\left(\sum_{i \geq g} f_i - \sum_{i \geq g} f'_i\right) = \left(\sum_{i \geq g} g(f_i - f'_i)\right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{i \geq g} i(f_i - f'_i)\right) = \left(\sum_{i \geq 3} i f_i - \sum_{i \geq 3} i f'_i\right) \leq 2m - n \end{aligned}$$

Po úprave dostávame $\tau(G, \Pi) \geq \frac{1}{g}(n - 2m) + r$. Z Eulerovho vzťahu pre súvislý graf platí $r = m - n + 2 - 2(g(\Pi(G)))$. Dosadením dostávame tvrdenie lemy. \square

Veta 3.2.2. *Nech G je súvislý graf s n vrcholmi, m hranami a obvodom g . Potom*

$$\gamma(G \square K_2) \geq \frac{(1-g)n + (g-2)m + g}{g}.$$

Dôkaz. Dosadením odhadu pre veľkosť pokrytia z lemy 3.2.1 do tvrdenia vety 3.1.3 dostávame nasledujúci vzťah:

$$\begin{aligned} \gamma(G \square K_2) &= \min_{\Pi \in \Gamma_G} \{2g(\Pi(G)) + \tau(G, \Pi) - 1\} \geq \\ &\geq \min_{\Pi \in \Gamma_G} \left\{ 2g(\Pi(G)) + \frac{(1-g)n + (g-2)m + 2g}{g} - 2g(\Pi(G)) - 1 \right\} = \\ &= \min_{\Pi \in \Gamma_G} \left\{ \frac{(1-g)n + (g-2)m + 2g}{g} - 1 \right\} = \\ &= \frac{(1-g)n + (g-2)m + g}{g}. \end{aligned}$$

\square

3.3 Tesnosť dolného ohraničenia

Nasledujúce tvrdenia sú dôsledkami vety 3.2.2 pre obvod 3 a 4.

Dôsledok 3.3.1. *Nech G je graf obvodu 3. Potom*

$$\gamma(G \square K_2) \geq \frac{m - 2n + 3}{3}.$$

Dôsledok 3.3.2. *Nech G je graf obvodu 4. Potom*

$$\gamma(G \square K_2) \geq \frac{2m - 3n + 4}{4}.$$

Z dôkazu vety je zrejmé, že rovnosť nastane v prípade, keď sa každý vrchol grafu nachádza v hraničných sledoch oblastí minimálneho pokrytia práve raz a zároveň všetky oblasti mimo pokrytia majú hranicu dĺžky rovnej obvodu daného grafu.

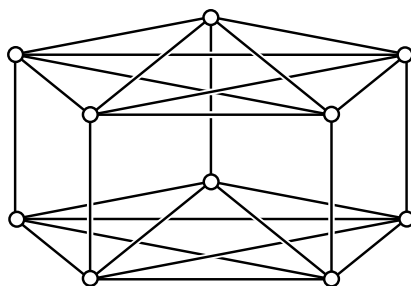
Tento odhad teda dosahujú napríklad mriežky so stranami párnej dĺžky. Netriviálnym príkladom pre obvod 4 sú napríklad hyperkocky [Rin55].

Pre obvod grafu 3 tento odhad zase dosahujú napríklad úplné grafy [Rin77]. Práve vnoreniam karteziánskych súčinov úplných grafov s K_2 sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole, kde zároveň uvedieme príklady takýchto optimálnych vnorení.

Kapitola 4

Rod súčiny $K_n \square K_2$

V tejto kapitole sa budeme bližšie venovať vnoreniam $K_n \square K_2$, pričom využijeme výsledky z predchádzajúcej kapitoly.



Obr. 4.1: Graf $K_5 \square K_2$ je rodu 2.

V článku [Rin77] autor ukázal nasledujúce tvrdenia:

Veta 4.0.3. *Pre každé $n \not\equiv 5, 9 \pmod{12}$ pre graf $K_n \square K_2$ platí*

$$\gamma(K_n \square K_2) = \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil. \quad (4.1)$$

Pre každú triedu kongruencie $n \not\equiv 5, 9 \pmod{12}$ článok uvádza konštrukciu vnorenia daného rodu. Z uvedeného tvrdenia vyplýva, že tieto grafy dosahujú dolný odhad z vety 3.2.2. Pre zvyšné dve triedy $n \equiv 5, 9 \pmod{12}$ článok uvádza nasledovné odhady:

Veta 4.0.4. *Pre každé $n \equiv 5, 9 \pmod{12}$ pre graf $K_n \square K_2$ platí*

$$\left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil \leq \gamma(K_n \square K_2) \leq \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil + 1. \quad (4.2)$$

Autor navyše v rovnakom článku vyslovil hypotézu, že pre všetky n , okrem jedinej výnimky $n = 5$ (pre ktorú je výsledný rod 2), je rod $K_n \square K_2$ rovný dolnému odhadu z 4.2. Platnosť tejto hypotézy ale nebola overená pre ostatné hodnoty $n \equiv 5, 9 \pmod{12}$.

Pre $n = 5$ rovnosť s dolným odhadom v 4.2 zrejme platiť nemôže. Úplný graf na 5 vrchoch má rod 1. Keďže $K_5 \square K_2$ obsahuje dva disjunktné podgrafy izomorfné s K_5 , platí $\gamma(K_5 \square K_2) \geq 2$, čo by bolo v rozpore s tvrdením.

V tejto kapitole ukážeme, že hypotéza vyslovená v [Rin77] neplatí ani pre prípad $n = 9$. Následne s využitím efektívnych prehľadávacích algoritmov overíme jej platnosť pre všetky hodnoty n také, že $n \equiv 5, 9 \pmod{12}$ a $9 < n \leq 164$,

4.1 Generovanie trojuholníkových vnorení K_n

Vnorení úplných grafov je príliš veľa, už pre K_8 nie je možné na bežne dostupnom hardvéri efektívne pracovať so všetkými [Sch12]. Nás ale budú zaujímať iba vnorenia nízkeho rodu, teda také, v ktorých väčšina oblastí sú trojuholníky. Pri ich konštrukcii je možné využiť nasledujúce tvrdenie, uvedené v [Rin74].

Lema 4.1.1. *Nech Π je vnorenie, v ktorom všetky oblasti sú trojuholníky. Potom ak sa v rotácii na vrchole i nachádza dvojica $\dots j k \dots$, tak v rotácii na vrchole k sa nachádza dvojica $\dots i j \dots$ a v rotácii na vrchole j sa nachádza dvojica $\dots k i \dots$.*

Lahko nahliadneme, že dvojice susedných hrán v rotácii, uvedené v leme 4.1.1, zodpovedajú trom rohom trojuholníkovej oblasti, ktorej sled prechádza vrcholmi označenými i, k, j v tomto poradí. Podobné tvrdenie je možné sformulovať aj v prípade, kedy nie všetky oblasti sú trojuholníky. Stačí, aby bola trojuholníková tá oblasť, ktorej roh dané vrcholy vytvárajú.

Lema 4.1.2. *Nech Π je vnorenie, v rotácii na vrchole i sa nachádza dvojica $\dots j k \dots$ a (j, i, k) je roh trojuholníkovej oblasti. Potom v rotácii na vrchole k sa nachádza dvojica $\dots i j \dots$ a v rotácii na vrchole j sa nachádza dvojica $\dots k i \dots$*

Popíšeme dátovú štruktúru, ktorá bude reprezentovať neúplnú rotačnú schému a bude v nej možné efektívne pridávať a odstraňovať oblasti.

Ak pre dva rohy (u_1, v, u_2) a (u_2, v, u_3) platí, že tretí vrchol prvého rohu je rovnaký, ako prvý vrchol druhého rohu a prostredný vrchol majú rovnaký, potom tieto rohy definujú hrany, ktoré vo výslednej rotácii na vrchole v musia nasledovať po sebe. Takéto rohy nazveme susedné v danom vnorení.

Konkrétne v prípade dvojice rohov (u_1, v, u_2) a (u_2, v, u_3) dostávame, že vo výslednej rotácii na vrchole v sa bude nachádzať trojica po sebe idúcich vrcholov $\dots u_1 u_2 u_3 \dots$

Postupnosťami susedných rohov budeme hovoriť fragmenty rotácie na spoločnom prostrednom vrchole. Fragment rotácie teda definuje vzájomné usporiadanie vrcholov, ktoré obsahuje, v rotácii. Konkrétne majme fragment obsahujúci rohy $(u_1, v, u_2), (u_2, v, u_3), \dots, (u_{n-1}, v, u_n)$, potom v zápise rotácie na vrchole v sa musí nachádzať postupnosť po sebe idúcich vrcholov $\dots u_1 u_2 \dots u_n \dots$

V navrhovanej dátovej štruktúre reprezentujeme roh na danom vrchole dvojicou jeho krajných vrcholov. Fragmenty rotácie potom reprezentujeme spájaným zoznamom dvojíc krajných vrcholov susedných rohov.

Označíme vrcholy grafu $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Pre každý vrchol i bude štruktúra obsahovať nasledovné:

- (i) množinu fragmentov rotácie – teda spájaných zoznamov dvojíc reprezentujúcich susedné rohy
- (ii) pre každý vrchol j susedný s vrcholom i referencie na dva rohy v predchádzajúcej množine, ktoré ho obsahujú na prvom resp. na druhom mieste
- (iii) množinu začiatočných a koncových rohov fragmentov – tie bude možné použiť na iteráciu fragmentov.

Popísaná štruktúra potom predstavuje rotačnú schému, v ktorej je pevné vzájomné usporiadanie niektorých vrcholov, dané fragmentami rotácie. Pridaním rohu (u_1, v, u_2) do tejto štruktúry zafixujeme vzájomné poradie vrcholov u_1 a u_2 v rotácii na vrchole v . Pri pridávaní aj pri odstránení rohu z vrchola i je možné aktualizovať štruktúru v čase $O(\log \Delta)$, kde Δ je maximálny stupeň grafu.

Pri pridávaní dvojice (j, k) do rotácie vrchola i potom môže nastať jedna z nasledujúcich situácií:

- (i) j je prvý alebo k je druhý vrchol niektorého rohu v rotácii na i – v takom prípade (j, k) nie je možné pridať do rotácie
- (ii) j je druhý vrchol niektorého rohu a k nie je prvý vrchol žiadneho rohu v rotácii na i – (j, k) sa pripojí na koniec fragmentu, ktorý končí vrcholom j
- (iii) k je prvý vrchol niektorého rohu a j nie je druhý vrchol žiadneho rohu v rotácii na i – (j, k) sa pripojí na začiatok fragmentu, ktorý začína vrcholom k
- (iv) j je druhý vrchol niektorého rohu a k je prvý vrchol niektorého rohu v rotácii na i – ak sa jedná o rôzne fragmenty, (j, k) ich spojí do jedného. Ak sa naopak jedná o dva konce toho istého fragmentu, potom po spojení (j, k) vznikne cyklus. Ak tento cyklus obsahuje všetky vrcholy susedné s i , potom je to celá rotácia na vrchole i . Môže sa ale stať, že tento cyklus neobsahuje všetky vrcholy – v takom prípade (j, k) nie je možné pridať do rotácie vrchola i .
- (v) vrcholy j a k nepatria do žiadneho rohu v rotácii na i – vznikne nový fragment

4.2 Rod grafu $K_9 \square K_2$

Z vety 4.0.4 vyplýva, že $7 \leq \gamma(K_9 \square K_2) \leq 8$. Ak existuje vnorenie $K_9 \square K_2$ rodu 7, potom by sme ho pomocou výsledkov uvedených v predchádzajúcich

častiach vedeli zostrojiť. Prehľadáním všetkých možností ale ukážeme, že takéto vnorenie neexistuje.

Lema 4.2.1. *Pre graf K_9 platí $\gamma(K_9 \square K_2) = 7$ práve vtedy, ak existuje vnorenie Π grafu K_9 , ktoré má zároveň všetky nasledujúce vlastnosti:*

- (i) Π je vnorenie minimálneho rodu, teda $g(\Pi(K_9)) = 3$
- (ii) Π obsahuje dvojicu disjunktných oblastí, ktoré pokrývajú všetky 9 vrcholov, pričom tieto oblasti majú dĺžky 3 a 6 alebo 4 a 5
- (iii) každá zo zvyšných 21 oblastí je trojuholníková.

V opačnom prípade $\gamma(K_9 \square K_2) = 8$.

Dôkaz. Predpokladajme, že $\gamma(K_9 \square K_2) = 7$. Podľa dôsledku vety 3.1.2 je možné zostrojiť minimálne vnorenie $K_9 \square K_2$ použitím konštrukcie z dôkazu lemy 3.1.1 z vnorenia Π grafu K_9 . Minimálny rod K_9 je 3. Ak by sme v konštrukcii použili vnorenie K_9 väčšieho rodu, potom rod výsledného vnorenia by bol aspoň 8. Preto je nutné použiť vnorenie Π grafu K_9 minimálneho rodu. Z vety 3.1.3 vyplýva, že veľkosť pokrytia v tomto vnorení musí byť najviac 2.

Graf K_9 má 9 vrcholov a 36 hrán. Dosadením do Eulerovho vzťahu dostávame, že minimálne vnorenie K_9 má 23 oblastí. Keďže každá oblasť má dĺžku aspoň 3, existujú iba tri možnosti, ako môžu tieto oblasti vyzerať:

- (i) jedna oblasť dĺžky 6, 22 oblastí dĺžky 3
- (ii) jedna oblasť dĺžky 5, jedna oblasť dĺžky 4 a 21 oblastí dĺžky 3
- (iii) tri oblasti dĺžky 4 a 20 oblastí dĺžky 3

V tretej z uvedených možností zrejme nie je možné pokryť všetky vrcholy dvoma oblasťami. Pre obe z prvých dvoch možností platí, že ak pokrytie veľkosti dva existuje, potom nutne obsahuje všetky netrojuholníkové oblasti.

Opačná implikácia vyplýva priamo z vety 3.1.3. V prípade, ak vnorenie s danými vlastnosťami neexistuje, tak priamo z vety 4.0.4 vyplýva $\gamma(K_9 \square K_2) = 8$. □

0: 5 1 * * * * * *	0: 4 1 * * * * * *
1: 0 2 * * * * * *	1: 0 2 * * * * * *
2: 1 3 * * * * * *	2: 1 3 * * * * * *
3: 2 4 * * * * * *	3: 2 4 * * * * * *
4: 3 5 * * * * * *	4: 3 0 * * * * * *
5: 4 0 * * * * * *	5: 8 5 * * * * * *
6: 8 7 * * * * * *	6: 5 7 * * * * * *
7: 6 8 * * * * * *	7: 6 8 * * * * * *
8: 7 6 * * * * * *	8: 7 5 * * * * * *
(a) Oblasti K_9 dĺžky 6 a 3	(b) Oblasti K_9 dĺžky 5 a 4

Tabuľka 4.1: Dve možnosti pre rotačné schémy K_9 s pokrytím veľkosti 2.

Veta 4.2.2. *Pre graf K_9 platí*

$$\gamma(K_9 \square K_2) = 8.$$

Dôkaz. Predpokladajme, že $\gamma(K_9 \square K_2) = 7$. Pokúsime sa skonštruovať vnorenie K_9 , ktoré spĺňa predpoklady lemy 4.2.1, teda vnorenie s dvojicou oblastí F_1 a F_2 pokrývajúcich všetkých 9 vrcholov, pričom všetky ostatné oblasti sú trojuholníkové.

Nech oblasti F_1 a F_2 majú dĺžky 6 resp. 3. Keďže tieto oblasti musia byť disjunktné a zároveň obsahujú každý vrchol práve raz, môžeme si bez ujmy na všeobecnosti očíslovať vrcholy grafu tak, že hraničný sled oblasti F_1 bude prechádzať vrcholmi $0, 1, \dots, 5$ v tomto poradí a hraničný sled oblasti F_2 bude prechádzať vrcholmi $6, 7, 8$, tiež v tomto poradí. Tieto oblasti sú znázornené v prvej rotácii v tabuľke 4.1.

Potom už stačí doplniť ostatné vrcholy do rotácií tak, aby všetky ostatné oblasti boli trojuholníkové. Pomocou algoritmu spätného prehľadávania skúsime postupne všetky možnosti, ako doplniť trojuholníkové oblasti. Na reprezentáciu rotácie využijeme dátovú štruktúru popísanú v časti 4.1. V každom kroku algoritmu skúsime postupne pridávať všetky možné dvojice (j, k) do rotácie na prvom vrchole i , ktorého rotácia nie je kompletná (teda neobsahuje jediný cyklus dĺžky 8). Keďže dvojica (j, k) na vrchole

i reprezentuje roh trojuholníkovej oblasti, tak podľa lemy 4.1.2 pridávame zároveň dvojice (i, j) do rotácie na k a (k, i) do rotácie na j . Iba ak sa podarilo pridať všetky tri dvojice, pokračujeme v rekurzii. V opačnom prípade môžeme túto vetvu ukončiť a pokračovať inou dvojicou.

Rovnaký algoritmus spustíme pre F_1 dĺžky 5 a F_2 dĺžky 4. Keďže tieto oblasti musia byť tiež disjunktné, môžeme si bez ujmy na všeobecnosti očíslovať vrcholy grafu tak, že hraničný sled oblasti F_1 bude prechádzať vrcholmi 0, 1, 2, 3, 4 v tomto poradí a hraničný sled oblasti F_2 bude prechádzať vrcholmi 5, 6, 7, 8, tiež v tomto poradí. Tieto oblasti sú znázornené v druhej rotácii v tabuľke 4.1.

Takýmto spôsobom vyskúšame všetky možnosti, ako pridať trojuholníkové oblasti. Keďže ale takýmto spôsobom nebolo možné doplniť celú schému, je z predchádzajúcich tvrdení zrejmé, že pre vnorenie grafu K_9 neexistuje vnorenie minimálneho rodu, ktoré spĺňa požiadavky lemy 4.2.1. Z tvrdenia lemy teda vyplýva, že neexistuje vnorenie $K_9 \square K_2$ rodu 7. Z vety 4.0.4 potom vyplýva $\gamma(K_9 \square K_2) = 8$. \square

4.3 Generovanie náhodných vnorení K_n

Z Eulerovho vzťahu vyplýva, že rod vnorenia grafu je tým nižší, čím viac oblastí obsahuje. Pre vnorenia nízkeho rodu je teda intuitívne očakávať, že veľkosti oblastí sa budú blížiť obvodu daného grafu. Pre úplné grafy skutočne platí, že väčšina oblastí minimálneho vnorenia sú trojuholníky [Rin74].

V tejto časti popíšeme náhodný algoritmus, ktorý bude optimalizovať rod vnorenia úplného grafu. Úplné grafy majú tú vlastnosť, že medzi každými dvomi vrcholmi je hrana. To nám umožní každú dlhú oblasť rozdeliť hranou.

Nasledujúci algoritmus v každej iterácii vyberie náhodnú oblasť F dĺžky viac, ako 3. V tejto oblasti zvolí náhodne dva rôzne vrcholy u a v , ktoré nie sú susedné v hraničnom slede danej oblasti. Následne vloží hranu uv do oblasti F .

Lema 4.3.1. *Opakované aplikovanie algoritmu 2 generuje postupnosť vno-*

Algoritmus 2 Rozdelenie náhodnej oblasti rotácie Π grafu K_n

```

1: function SPLITFACE( $K_n, \Pi$ )
2:    $F \leftarrow$  náhodná netrojuholníková oblasť vnorenia
3:    $l \leftarrow$  dĺžka oblasti  $F$ 
4:   repeat
5:      $i \leftarrow$  náhodné číslo z množiny  $\{0 \dots l - 1\}$ 
6:      $d \leftarrow$  náhodné číslo z množiny  $\{2 \dots l - 4\}$ 
7:      $u \leftarrow$  vrchol v slede  $F$  na indexe  $i$ 
8:      $v \leftarrow$  vrchol v slede  $F$  na indexe  $(i + d) \bmod l$ 
9:   until  $u \neq v$  and  $uv \notin F$ 
10:   $v' \leftarrow$  vrchol v slede  $F$  na indexe  $(i + 1) \bmod l$ 
11:   $u' \leftarrow$  vrchol v slede  $F$  na indexe  $(i + d + 1) \bmod l$ 
12:  premiestni  $u$  v rotácii na  $v$  pred vrchol  $u'$ 
13:  premiestni  $v$  v rotácii na  $u$  pred vrchol  $v'$ 
14:  return  $\Pi$ 
15: end

```

rení úplného grafu s nerastúcim rodom.

Dôkaz. Časť algoritmu, ktorá modifikuje rotačnú schému Π , pozostáva z dvoch krokov. V prvom kroku je odstránená hrana z vnorenia – rod vnorenia sa tým nezvyší (môže sa však znížiť). Keďže u a v nie sú susedné v hraničnom slede oblasti F , potom sa ani hrana uv nenachádza v slede F . Teda oblasť F sa nachádza vo vnorení aj po odstránení hrany uv .

V druhom kroku je hrana uv vložená do oblasti F , čo oblasť F rozdelí na dve oblasti. Podľa vety 2.2.1 sa tým rod vnorenia nezmení. \square

Použitie tohoto algoritmu nezaručuje, že nájdeme vnorenie minimálneho rodu. Pri testovaní na náhodných vnoreniach kompletných grafov sa však ukázalo, že týmto algoritmom je skutočne možné nájsť vnorenie minimálneho rodu. V našej implementácii sme ako pravdepodobnosť vybratia oblasti F_i dĺžky l_i zvolili $p_i = l_i/s$, kde s je súčet dĺžok sledov oblastí veľkosti viac ako 3.

4.4 Rod grafov $K_{17} \square K_2$ a $K_{21} \square K_2$

V tejto časti popíšeme postup, ktorým sa nám podarilo nájsť vnorenie minimálneho rodu pre dva najmenšie grafy triedy $K_n \square K_2$, ktorých rod nie je známy. Rovnaký postup nie je možné aplikovať na väčšie grafy z tejto triedy, keďže takéto prehľadávanie by trvalo príliš dlho. Pozorovania z tejto časti nám ale umožnia navrhnúť efektívnejší prístup k tomuto problému, ktorý využívame v poslednej časti tejto kapitoly.

Lema 4.4.1. $\gamma(K_{17} \square K_2) = 35$ práve vtedy, ak existuje vnorenie Π grafu K_{17} , ktoré má zároveň všetky nasledujúce vlastnosti:

1. $16 \leq g(\Pi(K_{17})) \leq 17$
2. $\Pi(K_{17})$ obsahuje $36 - 2g(\Pi(K_{17}))$ disjunktných oblastí, pričom každý vrchol K_{17} sa v ich sledoch nachádza práve raz
3. ostatné oblasti sú trojuholníky.

V opačnom prípade $\gamma(K_{17} \square K_2) = 36$.

Dôkaz. Podľa vety 3.1.2 je možné zostrojiť minimálne vnorenie $K_{17} \square K_2$ použitím konštrukcie z dôkazu lemy 3.1.1 z vnorenia Π grafu K_{17} . Podľa vety 1.6.4, minimálny rod K_{17} je 16. Zrejme teda vnorenie Π z konštrukcie má rod 16 alebo rod 17.

Z vety 3.1.3 vyplýva, že na to, aby bol výsledný rod 35, veľkosť pokrytia v Π musí byť najviac $36 - 2g(\Pi(K_{17}))$. Graf K_{17} má 17 vrcholov a 136 hrán. Z Eulerovho vzorca dostaneme, že počet oblastí vnorenia Π je $121 - 2g(\Pi(K_{17}))$. Teda mimo pokrytia sa nachádza vždy 85 oblastí.

Keďže sled každej oblasti mimo pokrytia obsahuje aspoň tri polhrany, v sledoch oblastí mimo pokrytia sa nachádza aspoň 255 polhrán. V oblastiach pokrytia je teda polhrán najviac 17. V takomto prípade sa každý vrchol v pokrytí nachádza práve raz.

Zároveň ak by niektorá oblasť mimo pokrytia nebola trojuholníková, potom v pokrytí ostáva menej ako 17 polhrán, teda nemôže pokryť 17 vrcholov.

Opačná implikácia vyplýva z lemy 3.1.1.

Ak takéto vnorenie neexistuje, potom podľa vety 4.0.4 je rod grafu 36. \square

Lema 4.4.2. $\gamma(K_{21} \square K_2) = 57$ práve vtedy, ak existuje vnorenie Π grafu K_{21} , ktoré má zároveň všetky nasledujúce vlastnosti:

1. $26 \leq g(\Pi(K_{21})) \leq 28$
2. $\Pi(K_{21})$ obsahuje $58 - 2g(\Pi(K_{21}))$ disjunktných oblastí, pričom každý vrchol K_{21} sa v ich sledoch nachádza práve raz
3. ostatné oblasti sú trojuholníky.

V opačnom prípade $\gamma(K_{21} \square K_2) = 58$.

Dôkaz. Podľa vety 3.1.2 je možné zostrojiť minimálne vnorenie $K_{21} \square K_2$ použitím konštrukcie z dôkazu lemy 3.1.1 z vnorenia Π grafu K_{21} . Podľa vety 1.6.4, minimálny rod K_{21} je 26. Zrejme teda vnorenie Π z konštrukcie má rod 26, 27 alebo 28.

Z vety 3.1.3 vyplýva, že na to, aby bol výsledný rod 57, veľkosť pokrytia v Π musí byť najviac $58 - 2g(\Pi(K_{21}))$. Graf K_{21} má 21 vrcholov a 210 hrán. Z Eulerovho vzorca dostaneme, že počet oblastí vnorenia Π je $191 - 2g(\Pi(K_{21}))$. Teda mimo pokrytia sa nachádza vždy 133 oblastí.

Keďže sled každej oblasti mimo pokrytia obsahuje aspoň tri polhrany, v sledoch oblastí mimo pokrytia sa nachádza aspoň 399 polhrán. V oblastiach pokrytia je teda polhrán najviac 21. V takomto prípade sa každý vrchol v pokrytí nachádza práve raz.

Zároveň ak by niektorá oblasť mimo pokrytia nebola trojuholníková, potom v pokrytí ostáva menej ako 21 polhrán, teda nemôže pokryť 21 vrcholov.

Opačná implikácia vyplýva z lemy 3.1.1.

Ak takéto vnorenie neexistuje, potom podľa vety 4.0.4 je rod grafu 58. \square

Pokúsime sa nájsť vnorenia, ktoré vyhovujú uvedeným leмам. Začneme s ľubovoľným náhodným vnorením grafu. Použijeme znáhodnený algoritmus, popísaný v predchádzajúcej časti, ktorým budeme generovať postupnosť vnorení K_{17} , resp. K_{21} . Ak sa nám takto podarí nájsť vnorenie s

dostatočne nízkym rodom, skontrolujeme, či obsahuje pokrytie s potrebnými vlastnosťami.

Uvedené lemy pre oba grafy hovoria, že oblasti pokrytia musia byť disjunktné a zároveň všetky ostatné oblasti budú trojuholníky. To je možné využiť pri overovaní existencie takéhoto pokrytia. Najskôr overíme, či sú všetky netrojuholníkové oblasti disjunktné a obsahujú každý vrchol práve raz – tieto oblasti musia byť vo vnorení. Následne pomocou spätného prehľadávania zistíme, či je možné ostatné vrcholy pokryť podmnožinou disjunktných trojuholníkových oblastí.

Aplikovaním tohoto postupu sme našli vnorenia, ktoré umožnili dokázať nasledujúce tvrdenia.

Veta 4.4.3. *Pre graf $K_{17} \square K_2$ platí*

$$\gamma(K_{17} \square K_2) = 35.$$

Dôkaz. Tabuľka 4.2 obsahuje rotačnú schému vnorenia grafu K_{17} rodu 16. V tomto vnorení sa nachádzajú štyri disjunktné oblasti s hraničnými sledmi $(0, 12, 2, 9, 13, 3)$, $(1, 8, 16, 15)$, $(4, 10, 14, 7)$ a $(5, 11, 6)$. Tieto oblasti zrejme tvoria pokrytie všetkých vrcholov grafu. Podľa vety 3.1.1 je možné z tohoto vnorenia skonštruovať vnorenie $K_{17} \square K_2$ rodu 35, čo podľa 4.0.4 musí byť vnorenie minimálneho rodu. \square

Veta 4.4.4. *Pre graf $K_{21} \square K_2$ platí*

$$\gamma(K_{21} \square K_2) = 57.$$

Dôkaz. Tabuľka 4.3 obsahuje rotačnú schému vnorenia grafu K_{21} rodu 26. V tomto vnorení sa nachádza šesť disjunktných oblastí s hraničnými sledmi $(1, 9, 18, 10, 8)$, $(0, 6, 17, 12)$, $(2, 7, 3)$, $(4, 15, 14)$, $(5, 11, 19)$ a $(13, 20, 16)$. Tieto oblasti zrejme tvoria pokrytie všetkých vrcholov grafu. Podľa vety 3.1.1 je možné z tohoto vnorenia skonštruovať vnorenie $K_{21} \square K_2$ rodu 57, čo podľa 4.0.4 musí byť vnorenie minimálneho rodu. \square

0:	10	13	2	7	16	6	9	1	11	4	15	3	12	14	5	8
1:	0	9	16	10	14	6	3	12	7	2	15	8	13	4	5	11
2:	10	6	12	9	8	15	1	7	0	13	3	5	16	11	14	4
3:	11	10	12	1	6	16	9	4	14	7	8	5	2	13	0	15
4:	8	16	7	10	2	14	3	9	5	1	13	12	6	15	0	11
5:	0	14	15	6	11	1	4	9	12	13	7	10	16	2	3	8
6:	1	14	8	7	13	11	5	15	4	12	2	10	9	0	16	3
7:	10	5	13	6	8	3	14	4	16	0	2	1	12	9	11	15
8:	5	3	7	6	14	13	1	16	4	11	12	15	2	9	10	0
9:	4	3	16	1	0	6	10	8	2	13	15	14	11	7	12	5
10:	7	15	12	3	11	13	0	8	9	6	2	4	14	1	16	5
11:	10	3	15	7	9	14	2	16	12	8	4	0	1	5	6	13
12:	2	6	4	13	5	9	7	1	3	10	15	8	11	16	14	0
13:	2	0	10	11	6	7	5	12	4	1	8	14	16	15	9	3
14:	3	4	2	11	9	15	5	0	12	16	13	8	6	1	10	7
15:	5	14	9	13	16	1	2	8	12	10	7	11	3	0	4	6
16:	8	15	13	14	12	11	2	5	10	1	9	3	6	0	7	4

Tabuľka 4.2: Schéma vnorenia K_{17} rodu 16 s pokrytím veľkosti 4.

0:	13	18	8	20	3	14	2	19	7	4	16	17	10	9	5	12	6	15	1	11
1:	9	11	0	15	2	4	7	6	12	10	16	13	17	3	19	5	20	18	14	8
2:	0	14	12	6	10	17	5	9	3	7	18	13	8	11	20	4	1	15	16	19
3:	13	19	1	17	8	4	12	5	7	2	9	16	18	11	6	14	0	20	10	15
4:	15	10	13	12	3	8	18	19	6	5	16	0	7	1	2	20	17	11	9	14
5:	19	11	16	4	6	8	15	18	10	7	3	12	0	9	2	17	13	14	20	1
6:	7	8	5	4	19	13	9	20	15	0	17	18	16	14	3	11	10	2	12	1
7:	16	9	13	11	8	6	1	4	0	19	17	15	14	18	2	3	5	10	12	20
8:	13	20	0	18	4	3	17	9	10	1	14	16	12	19	15	5	6	7	11	2
9:	13	7	16	3	2	5	0	10	8	17	14	4	11	1	18	12	15	19	20	6
10:	17	2	6	11	14	13	4	15	3	20	19	16	1	12	7	5	18	8	9	0
11:	15	20	2	8	7	13	0	1	9	4	17	12	16	5	19	14	10	6	3	18
12:	14	19	8	16	11	17	0	5	3	4	13	15	9	18	20	7	10	1	6	2
13:	4	10	14	5	17	1	16	20	8	2	18	0	11	7	9	6	19	3	15	12
14:	11	19	12	2	0	3	6	16	8	1	18	7	15	4	9	17	20	5	13	10
15:	5	8	19	9	12	13	3	10	4	14	7	17	16	2	1	0	6	20	11	18
16:	14	6	18	3	9	7	20	13	1	10	19	2	15	17	0	4	5	11	12	8
17:	12	11	4	20	14	9	8	3	1	13	5	2	10	0	16	15	7	19	18	6
18:	12	9	10	5	15	11	3	16	6	17	19	4	8	0	13	2	7	14	1	20
19:	6	4	18	17	7	0	2	16	10	20	9	15	8	12	14	11	5	1	3	13
20:	12	18	1	5	14	17	4	2	11	15	6	9	19	10	3	0	8	13	16	7

Tabuľka 4.3: Schéma vnorenia K_{21} rodu 26 s pokrytím veľkosti 6.

4.5 Generovanie minimálnych vnorení K_n

V predchádzajúcej časti sme videli, že minimálne vnorenia grafov $K_{17} \square K_2$ a $K_{21} \square K_2$, ktorých konštrukciu sme popísali, obsahovali v oboch prípadoch minimálne vnorenie K_{17} resp. K_{21} . Dokonca ani pri viacnásobnom opakovaní postupu sa nám nepodarilo nájsť vnorenie väčšieho, ako minimálneho rodu, z ktorého by bolo možné zostrojiť vnorenie súčiny minimálneho rodu. To však nemusí platiť vo všeobecnosti. Dá sa ukázať, že pre ľubovoľný graf G nemusí platiť, že existuje minimálne vnorenie $G \square K_2$, ktoré obsahuje minimálne vnorenie pôvodného grafu G [CS93]. Aj v pôvodnom článku [Rin77] autor pre konštrukciu minimálneho vnorenia $K_n \square K_2$ v prípade $n \equiv 1, 4 \pmod{12}$ použil vnorenia K_n vyšších rodov (konkrétne také, kde jediná oblasť obsahuje až $n - 1$ vrcholov).

V tejto časti ale budeme naopak predpokladať, že pre každé $n \equiv 5, 9 \pmod{12}$, $n \neq 5, 9$ existuje minimálne vnorenie $K_n \square K_2$, obsahujúce minimálne vnorenie K_n .

Lema 4.5.1. *Nech $n = 12s + 5$, $s \geq 2$ a nech existuje vnorenie Π grafu K_n , ktoré má zároveň všetky nasledujúce vlastnosti:*

- (i) Π je vnorenie minimálneho rodu pre K_n
- (ii) Π obsahuje pokrytie veľkosti $4s$

$$\text{Potom } \gamma(K_n \square K_2) = \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil$$

Dôkaz. Majme vnorenie Π spĺňajúce podmienky lemy. Podľa vety 1.6.4 je rod tohoto vnorenia $g(\Pi(K_n)) = 12s^2 + 3s + 1$. Konštrukciou z vety 3.1.1 použitím Π zostrojíme vnorenie Π' grafu $K_n \square K_2$, ktorého rod bude $g(\Pi'(K_n \square K_2)) = 2g(\Pi(K_n)) + \tau(K_n, \Pi) - 1 = 24s^2 + 10s + 1$. Keďže rod tohto vnorenia je rovný dolnému odhadu z vety 4.0.4, platí rovnosť. \square

Lema 4.5.2. *Nech $n = 12s + 9$, $s \geq 2$ a nech existuje vnorenie Π grafu K_n , ktoré má zároveň všetky nasledujúce vlastnosti:*

- (i) Π je vnorenie minimálneho rodu pre K_n

(ii) Π obsahuje pokrytie veľkosti $4s + 2$

$$\text{Potom } \gamma(K_n \square K_2) = \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil$$

Dôkaz. Majme vnorenie Π spĺňajúce podmienky lemy. Podľa vety 1.6.4 je rod vnorenia $g(\Pi(K_n)) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil = 12s^2 + 11s + 3$. Konštrukciou z vety 3.1.1 z neho zostrojíme vnorenie Π' grafu $K_n \square K_2$, ktorého rod bude $g(\Pi'(K_n \square K_2)) = 2g(\Pi(K_n)) + \tau(K_n, \Pi) - 1 = 24s^2 + 26s + 7$. Keďže rod tohto vnorenia je rovný dolnému odhadu z vety 4.0.4, platí rovnosť. \square

Majme vnorenie grafu K_n minimálneho rodu, Konštrukcia minimálnych vnorení kompletných grafov je popísaná v [Rin74]. Opakovaným aplikovaním algoritmu 2 generujeme nové vnorenia K_n . Podľa tvrdenia lemy 4.3.1 sú tieto vnorenia taktiež minimálneho rodu. Po každom skonštruovaní nového vnorenia otestujeme vnorenie na prítomnosť pokrytia veľkosti, akú vyžaduje lema 4.5.1 resp. 4.5.2. Ak vnorenie spĺňa podmienky príslušnej lemy, potom sme určili rod grafu $K_n \square K_2$ pre dané n .

Pomocou tohto postupu sa nám podarilo nájsť príslušné vnorenia pre grafy K_{12s+5} pre všetky hodnoty $s \leq 14$ a pre grafy K_{12s+9} pre všetky hodnoty $s \leq 12$. Limitujúcim faktorom pre väčšie hodnoty n bolo testovanie veľkosti pokrytia.

Veta 4.5.3. *Nech $n = 12s + 5$, $1 < s \leq 14$. Potom existuje vnorenie grafu K_n , ktoré spĺňa požiadavky lemy 4.5.1.*

Dôkaz. V prílohe k práci uvádzame vnorenia K_n pre každé $n = 12s + 5$, $1 < s \leq 14$, ktoré spĺňa podmienky lemy 4.5.1. \square

Veta 4.5.4. *Nech $n = 12s + 9$, $1 < s \leq 12$. Potom existuje vnorenie grafu K_n , ktoré spĺňa požiadavky lemy 4.5.2.*

Dôkaz. V prílohe k práci uvádzame vnorenia K_n pre každé $n = 12s + 9$, $1 < s \leq 12$, ktoré spĺňa podmienky lemy 4.5.2. \square

Veta 4.5.5. *Pre graf K_n pre $n \leq 164$, platí*

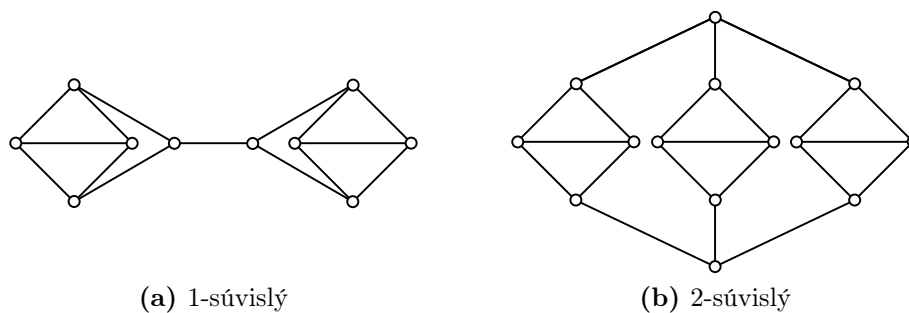
$$\gamma(K_n \square K_2) = \begin{cases} 2 & \text{ak } n = 5 \\ 8 & \text{ak } n = 9 \\ \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil & \text{inak} \end{cases}$$

Dôkaz. Prípady $n = 5$ a $n \not\equiv 5, 9 \pmod{12}$ sú vyriešené v [Rin77]. Prípád $n = 9$ uvádza veta 4.2.2. Prípád $n \equiv 5 \pmod{12}$ pre $5 < n \leq 164$ vyplýva priamo z lemy 4.5.1 a vety 4.5.3. Prípád $n \equiv 9 \pmod{12}$ pre $9 < n \leq 164$ vyplýva priamo z lemy 4.5.2 a vety 4.5.4. \square

Kapitola 5

Tuttova a Barnettova hypotéza

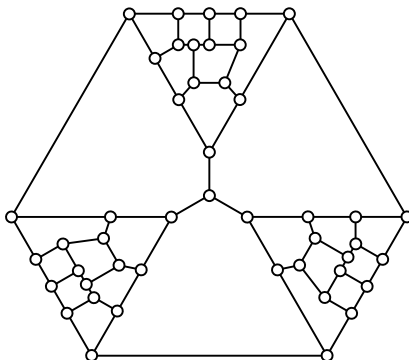
V tejto kapitole sa budeme zaoberať hamiltonovskými kružnicami v kubických grafoch. Tait v roku 1880 vyslovil hypotézu, ktorá tvrdila, že každý 3-súvislý kubický planárny graf je hamiltonovský. Ak by sa táto hypotéza bola ukázala ako pravdivá, umožnila by konštrukciu jednoduchého dôkazu vety o štyroch farbách. Je ľahké ukázať, že predpoklad 2-súvislosti nestačí. Na obrázku 5.1 je znázornený 1-súvislý a 2-súvislý nehamiltonovský kubický planárny graf.



Obr. 5.1: Príklad nehamiltonovských kubických planárnych grafov.

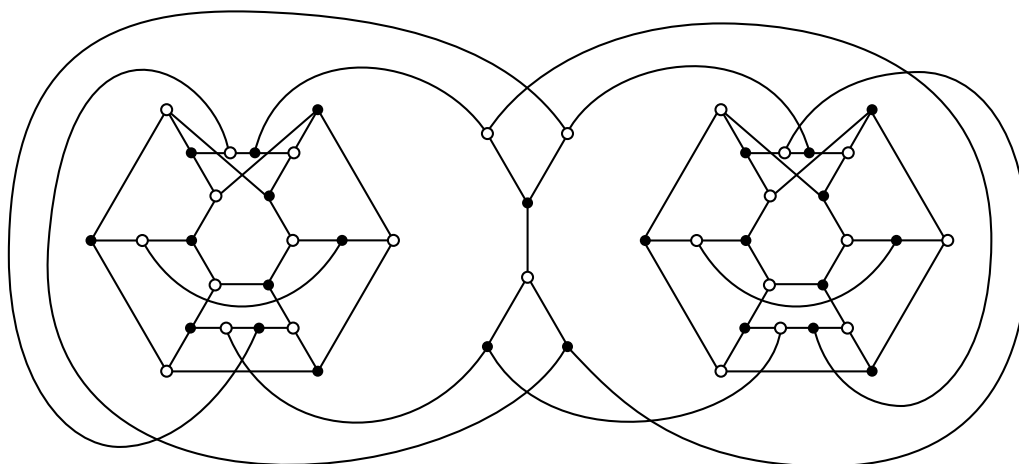
Až v roku 1946 sa podarilo túto hypotézu vyvrátiť, keď Tutte skonštruoval protipríklad na 46 vrcholoch. V súčasnosti je známych všetkých 6 protipríkladov rádu 38, pričom bolo dokázané, že menšie neexistujú [HM88].

V roku 1971 Tutte vyslovil hypotézu, ktorá tvrdila, že všetky 3-súvislé



Obr. 5.2: Nehamiltonovský kubický 3-súvislý planárny graf (Tutte).

kubické bipartitné grafy sú hamiltonovské. Prvý protipríklad rádu 96 a neskôr rádu 92 objavil Horton [BM76]. Ellingham neskôr popísal konštrukciu nekonečnej triedy nehamiltonovských 3-súvislých kubických bipartitných grafov, pričom najmenší mal 78 vrcholov. Neskôr Ellingham a Horton popísali nekonečnú triedu s najmenším grafom rádu 54 [EH83]. Doteraz najmenší známy protipríklad na 50 vrchoch našiel Georges [Geo89], znázornený na obrázku 5.3.



Obr. 5.3: Bipartitný kubický 3-súvislý nehamiltonovský graf (Georges).

V roku 1960 Barnette vyslovil nasledujúcu hypotézu [Bar69].

Hypotéza (Barnette). *Každý 3-súvislý bipartitný planárny graf je hamiltonovský.*

Za pomoci počítača bola overená platnosť hypotézy pre barnettovské grafy na najviac 64 vrchoch [HMM85]. Najnovšie výsledky ukazujú, že najmenší protipríklad k Barnettovej hypotéze, ak existuje, má aspoň 86 vrcholov a oblasť dĺžky aspoň 8 [Her05].

Barnettova hypotéza naďalej ostáva otvorená. Boli vyslovené viaceré silnejšie tvrdenia, ktoré sú ekvivalentné tvrdeniu Barnettovej hypotézy. Najdôležitejšie je nasledujúce tvrdenie, ktorého ekvivalenciu ukázal Kelmans [Kel94].

Veta 5.0.6. *Barnettova hypotéza platí vtedy a len vtedy, ak pre každý 3-súvislý bipartitný kubický planárny graf G platí, že pre ľubovoľné dve hrany e_1 a e_2 , ktoré ležia na hranici spoločnej oblasti, existuje hamiltonovská cesta, ktorá prechádza hranou e_1 a zároveň neprechádza hranou e_2 .*

Nasledujúce tvrdenie uvádza [Her05].

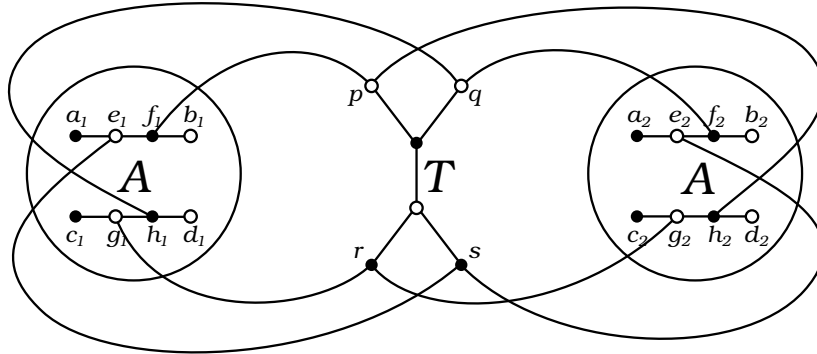
Veta 5.0.7. *Barnettova hypotéza platí vtedy a len vtedy, ak pre každý 3-súvislý bipartitný kubický planárny graf G platí, že pre ľubovoľnú cestu P dĺžky 3, ktorá leží na hranici niektorej oblasti grafu G , existuje hamiltonovská kružnica, ktorá prechádza prostrednou hranou P a zároveň neprechádza dvomi krajnými hranami P .*

Tvrdenie Barnettovej hypotézy sa od Tuttovej líši v predpoklade planárnosti grafu. Za predpokladu, že Barnettova hypotéza je pravdivá, vzniká otázka, aký je najmenší rod protipríkladu k Tuttovej hypotéze. Tomuto problému sa venuje [Ča02]. V práci autorka ukázala, že rod protipríkladu uvedeného v [EH83] je 4. Takisto ukazuje, že pre najmenší známy protipríklad, uvedený v [Geo89] platí, že jeho rod je aspoň 4, ale najviac 5.

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať konštrukcii z článku [Geo89]. Najskôr pomocou výsledkov z druhej kapitoly určíme rod najmenšieho z grafov, ktorý vieme zostrojiť popísanou konštrukciou. Následne sa pokúsime sformulovať podmienky, za akých by sme vedeli zostrojiť protipríklad menšieho rodu.

5.1 Konštrukcia J. P. Georgesa

V tejto časti uvádzame konštrukciu nehamiltonovského 3-súvislého bipartitného kubického grafu tak z [Geo89].

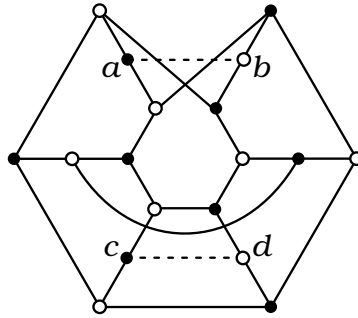


Obr. 5.4: Všeobecná konštrukcia nehamiltonovského 3-súvislého bipartitného kubického grafu (ostatné vrcholy susedné s a_i , b_i , c_i , a d_i nie sú zobrazené).

Definícia 5.1.1. Nech H je 3-súvislý bipartitný kubický graf, ktorý obsahuje dvojicu nesusedných hrán ab a cd , pričom platí, že žiadna hamiltonovská kružnica v H neprechádza súčasne hranou ab aj hranou cd . Označme H' graf, ktorý vznikne dvojnásobnou subdivíziou hrany ab a cd , nové vrcholy označíme e , f resp. g , h . Nech T je ternárny strom na šiestich vrcholoch, jeho listy označíme p , q , r , s . Majme dve kópie grafu H' , označme ich H_1 a H_2 . Označíme graf $G_A = H_1 \cup H_2 \cup T \cup \{e_1s, f_1p, g_1r, h_1q, e_2s, f_2g, g_2r, h_2p\}$. Konštrukcia je znázornená na obrázku 5.4.

Veta 5.1.2. Graf G_H , ktorý vznikne konštrukciou z definície 5.1.1, je 3-súvislý bipartitný kubický graf, ktorý nemá hamiltonovsku kružnicu.

Dôkaz vety je možné nájsť v [Geo89]. Najmenší známy príklad grafu, ktorý spĺňa podmienky definície, uvádzajú autori v [EH83]. Znázornený je na obrázku 5.5. Tento graf, označíme ho B , má 18 vrcholov. Pomocou konštrukcie z definície 5.1.1 je teda možné skonštruovať nehamiltonovský 3-súvislý bipartitný kubický graf G_B rádu 50, znázornený na obrázku 5.3. Tento graf predstavuje najmenší známy protipríklad k Tuttovej hypotéze.

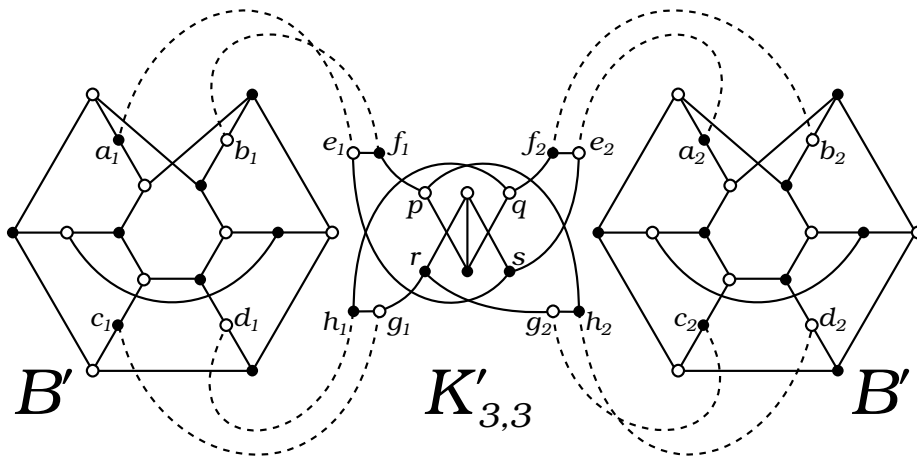


Obr. 5.5: 3-súvislý bipartitný kubický graf, v ktorom žiadna hamiltonovská kružnica neprechádza súčasne hranou ab a bc .

5.2 Rod grafu G_B

V tejto časti ukážeme rod grafu G_B . Nasledujúce tvrdenie uvádza [Ča02], spolu s hypotézou, že rod daného grafu je rovný hornému ohraničeniu.

Veta 5.2.1. Pre graf G_B platí $4 \leq \gamma(G_B) \leq 5$.



Obr. 5.6: Konštrukcia G_B s vyznačenou trojicou disjunktných podgrafov.

Označme $B' = B - \{ab, cd\}$. Na obrázku 5.6 sú znázornené 3 disjunktné podgrafy Georgesovho grafu. Všetky tri sú grafy rodu 1 – dva izomorfné B' a tretí izomorfný subdivízii $K_{3,3}$, označíme ho $K'_{3,3}$.

Lema 5.2.2. *Nech Π je vnorenie grafu B' minimálneho rodu 1. Označme $W = \{a, b, c, d\}$, potom $\tau(W, G, \Pi) \geq 2$.*

Dôkaz. Všetkých rotácií grafu B' je iba 2^{14} , teda môžeme prehľadať všetky a overiť platnosť uvedeného tvrdenia. Medzi nimi nájdeme 24 vnorení minimálneho rodu 1, čo je minimálny rod daného grafu, z nich 16 obsahuje pokrytie vrcholov a, b, c a d dvomi oblasťami. Avšak v žiadnom vnorení minimálneho rodu nie sú tieto vrcholy pokryté jednou oblasťou. \square

Veta 5.2.3. *Pre graf G_B platí*

$$\gamma(G_B) = 5.$$

Dôkaz. Majme minimálne vnorenie Π grafu G_B . Označme G_1 podgraf izomorfný subdivízii $K_{3,3}$ a G_2 a G_3 podgrafy izomorfné s B' tak, ako sú znázornené na obrázku 5.6. Označme $W = \{a, b, c, d\}$ v grafe B' a W_2 a W_3 nech sú kópie daných vrcholov v G_2 resp. G_3 . Označme Π_i zúženie rotácie Π na graf G_i . Pre každé $i = 1, 2, 3$ zrejme platí $g(\Pi_i(G_i)) \geq 1$.

Označme G' podgraf G_B indukovaný vrcholmi podgrafu $G_1 \cup G_2$ a Π' nech je zúženie vnorenia Π na G' . Najskôr zdola ohraničíme rod $\Pi'(G')$. Môžu nastať dva prípady

- (i) $g(\Pi_2(G_2)) = 1$, potom podľa lemy 5.2.2 je veľkosť pokrytia množiny W_2 vo vnorení $\tau(W_2, G_2, \Pi_2)$ aspoň 2. Potom podľa vety 2.4.1 platí $\Pi'(G') \geq g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2)) + \tau(W_2, G_2, \Pi_2) - 1 \geq 3$
- (ii) $g(\Pi_2(G_2)) > 1$, potom keďže G_1 a G_2 sú disjunktné, tak pre rod platí $\Pi'(G') \geq g(\Pi_1(G_1)) + g(\Pi_2(G_2)) \geq 3$.

V oboch prípadoch teda platí $g(\Pi'(G')) \geq 3$. Rovnakú úvahu zopakujeme vzhľadom na $\Pi_3(G_3)$.

- (i) $g(\Pi_3(G_3)) = 1$, potom podľa lemy 5.2.2 je veľkosť pokrytia množiny W_3 vo vnorení $\tau(W_3, G_3, \Pi_3)$ aspoň 2. Potom podľa vety 2.4.1 platí $\Pi(G_B) \geq g(\Pi'(G')) + g(\Pi_3(G_3)) + \tau(W_3, G_3, \Pi_3) - 1 \geq 5$

- (ii) $g(\Pi_3(G_3)) > 1$, potom keďže G' a G_3 sú disjunktné, tak pre rod platí $\Pi(G_B) \geq g(\Pi'(G')) + g(\Pi_3(G_3)) \geq 5$.

Tým sme ukázali, že platí $g(\Pi(G_B)) \geq 5$. Opačná nerovnosť je ukázaná v [Ča02]. □

5.3 Protipríklad menšieho rodu

Zaujímá nás, či existuje, resp. či vieme zostrojiť 3-súvislý bipartitný nehamiltonovský graf rodu menej ako 4. V tejto časti sa pokúsime popísať graf C , z ktorého by bolo možné konštrukciou z definície 5.1.1 zostrojiť graf G_C rodu 3.

Nech Π je vnorenie takto skonštruovaného grafu G_C , nech Π_C je vnorenie indukované na podgrafe C . Zrejme vo vnorení $\Pi(C)$ sa zmenia iba oblasti incidentné s hranami ab a cd . V prípade G_B sa ukázalo, že ak sa vrcholy a , b , c a d nachádzali v rôznych oblastiach, rod výsledného grafu bol 5.

V nasledujúcej vete ukážeme rod grafu G_C , zostrojeného konštrukciou 5.1.1 v prípade, že existuje vnorenie C minimálneho rodu, ktoré obsahuje hrany ab a bc v hraničnom slede jednej oblasti. Podľa vety 5.0.6 by planárne vnorenie s danými vlastnosťami bolo v rozpore s Barnettovou hypotézou. Ak by ale existoval graf C s vnorením rodu 1, v ktorom je možné hrany ab a cd pokryť jednou oblasťou, potom vieme zostrojiť kubický 3-súvislý bipartitný nehamiltonovský graf rodu 3. Graf C s danými vlastnosťami ale zatiaľ nepoznáme.

Veta 5.3.1. *Nech C je 3-súvislý bipartitný kubický graf obsahujúci dvojicu nesusedných hrán ab a cd takých, že každá hamiltonovská kružnica v C prechádza najviac jednou z nich a nech existuje vnorenie C minimálneho rodu, v ktorom hrany ab a cd sa nachádzajú v jednej oblasti. Potom graf G_C zostrojený z grafu C konštrukciou z definície 5.1.1 má rod*

$$\gamma(G_C) \leq 2\gamma(C) + 1.$$

$e_1: f_1 \ 5$	$e_1: f_1 \ 5$
$f_1: e_1 \ 0$	$f_1: e_1 \ 0$
$g_1: h_1 \ 3$	$g_1: h_1 \ 3$
$h_1: g_1 \ 2$	$h_1: g_1 \ 2$
$e_2: f_2 \ 5$	$e_2: f_2 \ 5$
$f_2: e_2 \ 2$	$f_2: e_2 \ 2$
$g_2: h_2 \ 3$	$g_2: h_2 \ 3$
$h_2: g_2 \ 0$	$h_2: g_2 \ 0$
$0: f_1 \ 4 \ h_2$	$0: f_1 \ h_2 \ 4$
$1: 3 \ 5 \ 4$	$1: 3 \ 5 \ 4$
$2: h_1 \ 4 \ f_2$	$2: h_1 \ 4 \ f_2$
$3: g_1 \ g_2 \ 1$	$3: g_1 \ g_2 \ 1$
$4: 0 \ 2 \ 1$	$4: 0 \ 2 \ 1$
$5: e_1 \ e_2 \ 1$	$5: e_1 \ 1 \ e_2$
(a)	(b)

Tabuľka 5.1: Dve vnorenia $K'_{3,3}$.

Dôkaz. Nech pre C existuje vnorenie Π s oblasťou F_0 takou, že hrany ab a cd sa nachádzajú v hraničnom slede tejto oblasti. Nech Π' je vnorenie, v ktorom sú rotácie na vrcholoch presne opačné, ako v Π . Označme F'_0 oblasť v $\Pi'(C)$, ktorá zodpovedá oblasti F_0 v $\Pi(C)$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech v slede F_0 sa hrana ab nachádza v orientácii, v ktorej b nasleduje za vrcholom a (ak sú v opačnom poradí, vymeníme vnorenia Π a Π' , sledy oblastí sú v nich presne opačné).

Následne máme dve možnosti, ako môže vyzerat' orientácia hrany cd v tomto slede.

(i) Nech hraničný sled oblasti F_0 obsahuje dané vrcholy v cyklickom poradí a, b, c, d . V tabuľke 5.1a je znázornené vnorenie $K'_{3,3}$ rodu 1, obsahujúce dvojicu oblastí, kde prvá, označme ju F_1 , obsahuje vrcholy h_1, g_1, f_1 a e_1 v tomto poradí a druhá, označme ju F_2 , obsahuje vrcholy h_2, g_2, f_2 a e_2 v tomto poradí.

Nech $G' = K'_{3,3} \cup C_1 \cup C_2$, kde C_1 a C_2 sú kópie grafu C . Majme vnorenie grafu G' , ktoré je zjednotením vnorení 5.1a pre $K'_{3,3}$ a vnorení Π pre obe kópie C . Zrejme rod takéhoto vnorenia je $2\gamma(C) + 1$. Toto vnorenie obsahuje

oblasti F_1 a F_2 a dve kópie oblasti F_0 , označíme ich F_3 a F_4 .

Keďže oblasť F_1 a oblasť F_3 sa nachádzajú v rôznych komponentoch a cyklické poradie zodpovedajúcich vrcholov v ich sledoch je opačné, potom podľa vety 2.3.2 je možné pridať hrany a_1e_1 , b_1f_1 , c_1g_1 a d_1h_1 tak, že rod vnorenia ani ostatné oblasti sa nezmenia.

Následne keďže oblasť F_2 a oblasť F_4 sa nachádzajú v rôznych komponentoch a cyklické poradie zodpovedajúcich vrcholov v ich sledoch je opačné, potom podľa vety 2.3.2 je možné pridať hrany a_2e_2 , b_2f_2 , c_2g_2 a d_2h_2 tak, že rod vnorenia ostane $2\gamma(C) + 1$.

Takto sme skonštruovali vnorenie grafu $G_C \cup \{ab, cd\}$. Odstránením hrán ab a cd získame vnorenie G_C rodu najviac $2\gamma(C) + 1$.

(ii) Nech hraničný sled oblasti F_0 obsahuje dané vrcholy v cyklickom poradí a, b, d, c . V tabuľke 5.1b je znázornené vnorenie $K'_{3,3}$ rodu 1, ktoré obsahuje jednu oblasť, v ktorej slede sa vrcholy $e_1, f_1, h_1, g_1, g_2, h_2, f_2, e_2$ nachádzajú v tomto poradí. Vložením novej hrany e_1g_2 do rohov danej oblasti rozdelíme túto oblasť, čím sa rod nezvýši. Vzniknú tak dve oblasti, pričom prvá, označme ju F_1 , obsahuje vo svojom slede vrcholy e_1, f_1, h_1 a g_1 , v tomto poradí a druhá, označme ju F_2 , obsahuje vrcholy f_2, e_2, g_2 a h_2 , v tomto poradí.

Nech $G' = K'_{3,3} \cup \{e_1g_2\} \cup C_1 \cup C_2$, kde C_1 a C_2 sú kópie grafu C . Majme vnorenie grafu G' , ktoré je zjednotením upraveného vnorenia 5.1a pre $K'_{3,3} \cup \{e_1g_2\}$, vnorenia Π' pre komponent C_1 a Π pre komponent C_2 . Zrejme rod takéhoto vnorenia je $2\gamma(C) + 1$. Toto vnorenie obsahuje oblasti F_1, F_2 v komponente $K'_{3,3} \cup \{e_1g_2\}$ a oblasti F'_0 a F_0 v komponentoch C_1 resp. C_2 .

Keďže oblasť F_1 a oblasť F'_0 sa nachádzajú v rôznych komponentoch a cyklické poradie zodpovedajúcich vrcholov v ich sledoch je opačné, potom podľa vety 2.3.2 je možné pridať hrany a_1e_1 , b_1f_1 , c_1g_1 a d_1h_1 tak, že rod vnorenia ani ostatné oblasti sa nezmenia.

Následne keďže oblasť F_2 a oblasť F_0 sa nachádzajú v rôznych komponentoch a cyklické poradie zodpovedajúcich vrcholov v ich sledoch je opačné, potom podľa vety 2.3.2 je možné pridať hrany a_2e_2 , b_2f_2 , c_2g_2 a d_2h_2 tak,

že rod vnorenia sa nezmení.

Takto sme skonštruovali vnorenie grafu $G_C \cup \{ab, cd, e_1g_2\}$ rodu $2\gamma(C)+1$.
Odstránením hrán ab, cd a e_1g_2 získame vnorenie G_C rodu najviac $2\gamma(C)+1$.

□

Záver

V práci sme sa venovali minimálnym vnoreniam grafov, ktorých rod nebol známy. Zaujímali nás najmä spôsoby, ako využiť výpočtovú silu dnešných počítačov na určenie rodu niektorých grafov.

V prvej časti práce sme dokázali niektoré dôležité vlastnosti operácií na grafoch, ktoré sme neskôr využili pri riešení konkrétnych problémov. Následne sme implementáciou efektívnych algoritmov študovali vlastnosti vnorenia niektorých grafov, ktorých rod nebol známy.

Ako prvým sme sa venovali vnoreniam karteziánskych súčinov grafov. Zamerali sme sa na súčiny úplných grafov s K_2 . Podarilo sa nám dosiahnuť teoretické výsledky, ktoré nám umožnili charakterizovať rod súčinov s K_2 . To nám umožnilo testovať platnosť hypotézy vyslovenej v [Rin77]. Ukázalo sa, že táto hypotéza neplatí pre K_9 , čo je najmenší z grafov, pre ktoré nebola overená. Následne sme platnosť hypotézy potvrdili pre ďalších 26 grafov, pre ktoré nebola dokázaná.

V druhej časti sme sa venovali nehamiltonovským kubickým 3-súvislým bipartitným grafom. Aplikovaním výsledkom z druhej kapitoly sme dokázali rod najmenšieho známeho protipríkladu k Tutteho hypotéze. Zároveň sme zadefinovali postačujúce podmienky, za ktorých je možné konštrukciou uvedenou v [Geo89] zostrojiť protipríklad menšieho rodu.

Literatúra

- [Bar69] David W. Barnette. Conjecture 5. recent progress in combinatorics. In William T. Tutte, editor, *Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics*. Academic Press New York, 1969.
- [BM76] John A. Bondy and Uppaluri S. R. Murty. *Graph theory with applications*. Macmillan London, 1976.
- [BM88] Daniel Bienstock and Clyde L. Monma. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM Journal on Computing*, 17(1):53–76, 1988.
- [Bou78] André Bouchet. Orientable and nonorientable genus of the complete bipartite graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(1):24–33, 1978.
- [Bra21] H. R. Brahana. Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *The Annals of Mathematics*, 23(2):144–168, 1921.
- [CS93] D. L. Craft and A. J. Schwenk. The genus imbedding of the cartesian product $G \times K_2$ need not include a genus imbedding of its factor G . *Ars Combin. A*, 35:29–34, 1993.
- [CS13] Chandra Chekuri and Anastasios Sidiropoulos. Approximation algorithms for euler genus and related problems. In *Foundations of Computer Science (FOCS), 2013 IEEE 54th Annual Symposium on*, pages 167–176. IEEE, 2013.

- [DLT83] Danny Dolev, Frank T. Leighton, and Howard Trickey. Planar embedding of planar graphs. Technical report, DTIC Document, 1983.
- [EH83] Mark N. Ellingham and Joseph D. Horton. Non-hamiltonian 3-connected cubic bipartite graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 34(3):350–353, 1983.
- [Geo89] John P. Georges. Non-hamiltonian bicubic graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 46(1):121–124, 1989.
- [GF85] Jonathan L. Gross and Merrick L. Furst. Hierarchy for imbedding-distribution invariants of a graph. *J. Graph Theory* 11, pages 205–220, 1985.
- [GT87] Jonathan L. Gross and Thomas W. Tucker. *Topological graph theory*. Wiley, 1987.
- [Her05] Alexander Hertel. A survey & strengthening of barnette’s conjecture. Unpublished manuscript. Available at <http://www.cs.toronto.edu/~ahertel/WebPageFiles/Papers/StrengtheningBarnette’sConjecture10.pdf>, 2005.
- [HM88] Derek A. Holton and Breandan D. McKay. The smallest non-hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 45(3):305–319, 1988.
- [HMM85] Derek A. Holton, B. Manvel, and Breandan D. McKay. Hamiltonian cycles in cubic 3-connected bipartite planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38(3):279–297, 1985.
- [Kel94] Alexander K. Kelmans. Constructions of cubic bipartite 3-connected graphs without hamiltonian cycles. *Selected Topics in Discrete Mathematics (Moscow, 1972–1990)*, pages 127–140, 1994.

- [KS14] Ken-ichi Kawarabayashi and Anastasios Sidiropoulos. Beyond the euler characteristic: Approximating the genus of general graphs. *CoRR*, abs/1412.1792, 2014.
- [Mil80] Gary Miller. Isomorphism testing for graphs of bounded genus. In *Proceedings of the twelfth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 225–235. ACM, 1980.
- [Moh01] Bojan Mohar. Face covers and the genus problem for apex graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 82(1):102–117, 2001.
- [Pis80] Tomaž Pisanski. Genus of cartesian products of regular bipartite graphs. *Journal of Graph Theory*, 4(1):31–42, 1980.
- [Rin55] Gerhard Ringel. Über drei kombinatorische probleme am n -dimensionalen würfel und würfelgitter. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 20, pages 10–19. Springer, 1955.
- [Rin74] Gerhard Ringel. *Map color theorem*, volume 209. Springer New York, 1974.
- [Rin77] Gerhard Ringel. On the genus of the graph $K_n \times K_2$ or the n -prism. *Discrete Mathematics*, 20(0):287–294, 1977.
- [Sch12] Peter Schmidt. Algorithmic properties of graph embeddings into surfaces. Bachelor’s thesis, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava, 2012.
- [Tho89] Carsten Thomassen. The graph genus problem is NP-complete. *Journal of Algorithms*, 10(4):568–576, 1989.
- [Whi70] Arthur T. White. The genus of repeated cartesian products of bipartite graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 151(2):393–404, 1970.

- [Whi71a] Arthur T. White. The genus of the cartesian product of two graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 11(2):89–94, 1971.
- [Whi71b] Arthur T. White. On the genus of products of graphs. In M. Capobianco, J.B. Frechen, and M. Krolík, editors, *Recent Trends in Graph Theory*, volume 186 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 217–219. Springer Berlin Heidelberg, 1971.
- [Whi01] Arthur T. White. *Graphs of Groups on Surfaces*. North Holland, Amsterdam, NL, 2001.
- [Ča02] Miroslava Čajková. Embeddings of cubic non-hamiltonian graphs. Master's thesis, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava, 2002.