



UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

Radoslav Fulek

Konvexné priesečníkové čísla
vybraných tried grafov

Diplomová práca
Diplomový školiteľ: RNDr. Ondrej Sýkora, DrSc.

BRATISLAVA

2005

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s odbornou pomocou školiteľa.

Bratislava, apríl 2005

Radoslav Fulek

Obsah

1	Úvod	6
1.1	Motivácia	6
1.2	Definície	7
2	Všeobecné dolné odhady $\nu_1(G)$	9
3	Všeobecný horný odhad $\nu_1(G)$	12
4	$\nu_1(G)$ pre špecifické triedy grafov	13
4.1	Známe výsledky	13
4.2	Halinov graf	13
4.3	Mriežky	25
4.4	Planárne grafy	33
5	Algoritmus simulovaného žihania pre hľadanie $\nu_1(G)$	35
5.1	Popis algoritmu	35
5.2	Halinove grafy	38
5.3	Mriežky	39
5.4	Hyperkocky	40
5.5	Rôzne triedy grafov	41
5.6	Záver	43
6	Iné druhy nakreslení grafov	45
6.1	Horný odhad počtu priesečníkov pre 3 úrovňové nakreslenie kompletného binárneho stromu	46
7	Záver	54

Pod'akovanie

K napísaniu mojej diplomovej práce prispeli títo ľudia, ktorým týmto ďakujem. Môjmu diplomovému školiteľovi Ondrejovi Sýkorovi a Imrichovi Vrťovi za podnetné diskusie a pripomienky, ktoré ma v mnohom inšpirovali a Róbertovi Fulekovi za realizáciu obrázkov.

Abstrakt

FULEK, Radoslav: *Konvexné priesečníkové čísla vybraných tried grafov*, Diplomová práca, Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra informatiky, diplomový vedúci: RNDr. Ondrej Sýkora, DrSc., Bratislava, 2005, 56 strán

Konvexné priesečníkové číslo grafu nám udáva minimálny počet dvojíc pretínajúcich sa hrán grafu, ak je nakreslený tak, že jeho vrcholy umiestníme na kružnicu a hrany kreslíme ako úsečky medzi nimi (konvexné nakreslenie grafu). V mojej práci podám jeho všeobecný dolný odhad, pre planárne grafy a mriežky $M \times N$ jeho horný odhad, pre niektoré triedy grafov (Halinov graf, mriežku $3 \times N$) presné výsledky konvexných priesečníkových čísel, všeobecný prehľad dosiahnutých výsledov v tejto oblasti a uvediem konvexné nakreslenie grafu do kontextu iných grafových nakreslení a algoritmov na získavanie konvexných nakreslení grafov s čo najmenším počtom priesečníkov.

Kľúčové slová: graf, konvexné priesečníkové číslo grafu, konvexné nakreslenie grafu, Halinov graf, mriežky, simulované žíhanie

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivácia

Kreslenia grafov spĺňajúce isté estetické alebo optimalizačné kritéria sa vyskytujú v mnohých disciplínach. Tieto kritéria môžu byť rôzne a závisia od použitia a požiadaviek daného grafového znázornenia. Psychologické experimenty zhrnuté v [16] ukázali významnosť znižovania počtu priesečníkov pre zrozumiteľnosť a rýchlosť pochopenia súvislostí znázornených v nakreslenom grafe. Išlo o porovnanie vplyvu viacerých estetických kritérií na čitateľnosť grafu, a to okrem spomínaného, maximalizácie uhlov medzi hranami, znižovanie počtu ohybov hrán, kladenie vrcholov do ortogónalnej mriežky a zvyšovanie symetrie, z ktorých víťazne vyšlo práve znižovanie počtu priesečníkov. Znižovanie počtu priesečníkov v nakreslení grafu bolo tiež študované v súvislosti VLSI designom a evidentne malý počet priesečníkov v grafe prispieva k jeho prehľadnosti a čitateľnosti.

Medzi známe typy kreslení grafov patria aj úrovňové kreslenia (angl. layered drawings), pri ktorých sú vrcholy grafu položené na geometrické úrovne reprezentujúce hierarchiu. Sú uplatnené v tradičných aj v novorozvíjajúcich sa oblastiach, v softvérovom inžinierstve (znázornenie diagramov modelovacích jazykov), v bioinformatike (vizualizácia biochemických sietí), kybergeo- grafii (vizualizácia internetových prepojení). V prípade konvexného kreslenia sú úrovne obmedzené na jednu kružnicu alebo akúkoľvek konvexnú krivku a hrany kreslené ako úsečky. V súvislosti s jednostránkovým kreslením blíz- kym ku konvexnému kresleniu (vrcholy sú umiestnené na priamke a hrany sú kreslené ako oblúky) sa v informatike študovali problémy lineárneho usporia- dania (entity z danej množiny umiestnené v jednej línii a pospájané podľa špecifikácie) modelované práve týmto spôsobom. Jedno použitie konvexného kreslenia je pri klastrovom kreslení grafov. Pri klastrovom kreslení grafu má-

me množinu vrcholov grafu rozdelenú na klastre, pričom v klastri je hustota hrán väčšia ako medzi klastrami. Vrcholy každého klastra sú potom kreslené na konvexnú krivku, napr. kružnicu.

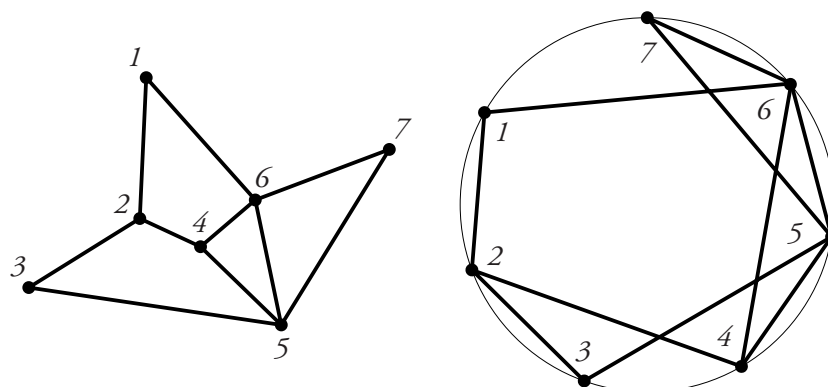
Presné výsledky priesečníkových čísel grafov sú vzácne, majú veľký teoretický význam, napr. pre posudzovanie optimálnosti výstupov kresliacich algoritmov so snahou o minimalizovanie počtu priesečníkov.

1.2 Definície

Označme graf $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G)$ je konečná množina vrcholov grafu G a $E(G)$ množina hrán grafu G , pričom $E(G) \subseteq [V(G)]^2$, pričom $[A]^2$ sa rozumie množina 2-prvkových podmnožín množiny A . Ak $\{u, v\} \in E$, potom u je susedom v . Orientovaním hrany $e = uv$ sa bude rozumieť bijekcia $d : e \rightarrow \{0, 1\}$, $d(u) = 0$, $d(v) = 1$, usporiadaná dvojica (e, d) sa nazve orientovaná hrana a v skrátenej tvare sa označí ako \overrightarrow{uv} alebo \vec{e} . Na označenie vrcholov sa budú používať písmená $u, v, w \dots$, na označenie hrán $e, f, g \dots$ alebo uv , kde $u, v \in V(G)$ sú koncové vrcholy hrany, $V(G)$ sa bude v skrátenej tvare písať len ako V a $E(G)$ ako E . Počet prvkov množiny $|V|$ sa označí n a počet prvkov množiny $|E|$ sa označí m . Pre počet susedov vrchola v sa použije označenie d_v a nazve sa stupeň vrchola v . Podgrafom G sa rozumie $G' = (V(G'), E(G'))$, $V(G') \subseteq V(G)$, $E(G') \subseteq E(G)$.

Konvexné nakreslenie grafu G je také nakreslenie grafu G do roviny, v ktorom vrcholy grafu G sú body na kružnici, resp. konvexnej krivke a hrany úsečky, ktoré spájajú dva vrcholy. Priesečník je vnútorný spoločný bod dvoch hrán. Konvexné priesečníkové číslo grafu G , $\nu_1(G)$, je potom minimálny počet priesečníkov obsiahnutých v konvexnom nakreslení grafu G spomedzi všetkých konvexných nakreslení grafu G . $\nu_k(G)$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, sa označuje k -stránkové priesečníkové, ktoré označuje minimálny počet priesečníkov obsiahnutých v k -stránkovom nakreslení grafu G spomedzi všetkých k -stránkových nakreslení grafu G . k -stránkové nakreslenie grafu G je také nakreslenie, v ktorom vrcholy G sú body priamky a hrany sú oblúky spájajúce dva vrcholy, pričom ku každej hrane e priradíme číslo stránky $P(e)$, $1 \leq P(e) \leq k$. Priesečník v tomto prípade bude vnútorný spoločný bod dvoch hrán, e, f , takých, že $P(e) = P(f)$ (Viac intuitívnejšie sa jedná o nakreslenie, v ktorom vrcholy ako keby ležali na chrbáte knihy reprezentovanom priamou čiarou a hrany boli kreslené do k stránok knihy ako oblúky.). Evidentne 1-stránkové priesečníkové číslo je ekvivalentné konvexnému priesečníkovému číslu, preto zdanlivo nekonzistentné označenie je preň korektné.

Pre každé konvexné nakreslenie sa dá definovať bijekcia $o : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ zodpovedajúca usporiadaniu vrcholov na kružnici v smere hodinových ručič-



Obrázok 1.1: Príklad konvexného nakreslenia grafu

čiek.

Pomocou o zavedieme reláciu $<_o$ (\leq_o) na množine vrcholov nasledovne, $u <_o v$ ($u \leq_o v$) $\Leftrightarrow o(u) < o(v)$ ($o(u) \leq o(v)$).

Funkcia $l : E \rightarrow \mathbb{Z}$, definovaná $l(uv) = \min\{|o(v) - o(u)|, n - |o(v) - o(u)|\}$, bude počítat dĺžku hrany v konvexnom nakreslení.

Priesečníkovým číslom grafu G , $cr(G)$, sa rozumie minimálny počet priesečníkov obsiahnutých v planárnom nakreslení grafu G spomedzi všetkých planárnych nakreslení grafu G .

Cestou $u_1 P u_k$ medzi u_1 a u_k v grafe G sa nazve postupnosť vrcholov z V , u_1, \dots, u_k , taká, že $(\{u_i, u_{i+1}\} \in E) \wedge (\forall (u_i, u_j)(i \neq j) u_i \neq u_j)$. Hranou cesty je $u_i u_{i+1}$. Vrchol u_i sa nazve i -ty vrchol cesty. Dĺžka cesty bude $k - 1$. Cestu, ktorej prvý a posledný vrchol sú totožné nazveme cyklus. Cyklom C_i rozumieme cyklus, ktorý obsahuje práve i vrcholov. Ak C je cesta resp. cyklus, $E(C)$ sa rozumie množina jeho hrán. Takže cestou resp. cyklom

sa dá chápať podgraf G , ktorý obsahuje hrany a vrcholy cesty resp. cyklu. Hamiltonovský cyklus grafu G je taký cyklus, ktorý obsahuje všetky vrcholy z G .

Graf sa nazve súvislým práve vtedy, keď medzi každými dvomi vrcholmi existuje cesta.

Graf, ktorý neobsahuje ako svoj podgraf cyklus sa nazve les. Súvislý les bude strom. Jeden z vrcholov stromu je koreň r . Potom hĺbka vrchola v , $depth(v)$, je dĺžka cesty $r P v$. Synovia vrchola v sú všetci jeho susedia s hĺbkou $depth(v) + 1$. Otec vrchola v je jeho sused s hĺbkou $depth(v) - 1$. List je vrchol, ktorý nemá synov.

Kapitola 2

Všeobecné dolné odhady $\nu_1(G)$

Veta 2.0.1. *Pre ľubovoľný graf G platí*

$$\nu_1(G) \geq |E| - 2|V| + 3 \quad (2.1)$$

Dôkaz. Ukáže sa, že v akomkoľvek usporiadaní hrán grafu G , ktoré určuje poradie v akom budú nakreslené, môže byť maximálne prvých $2|V| - 3$ hrán nakreslených bez priesečníka, po ktorých každá hrana v usporiadaní pridá po svojom nakreslení aspoň jeden priesečník, teda každá z $|E| - 2|V| + 3$ hrán pridá aspoň jeden priesečník.

Nech p_i je postupnosť, ktorej i -ty člen, $i \geq 2$, je maximálny počet hrán ľubovoľného grafu o i vrchoch nakreslených bez priesečníka. Po nakreslení prvej hrany e dĺžky k sa kruh rozdelí na dve časti, potom sa môže bez priesečníka ešte nakresliť $p_{k+1} - 1$ nových hrán do prvej časti a $p_{i-k+1} - 1$ hrán do druhej, pretože hrana e sa môže počítať iba raz.

Pre p_i platí

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 \\ p_3 &= 3 \\ p_i &= p_{k+1} + p_{i-k+1} - 1 \quad 1 \leq k \leq i - 1 \end{aligned}$$

Dá sa ľahko ukázať, že pre p_i potom platí $p_i = 2i - 3$. □

Veta 2.0.1. vyplýva tiež z Eulerovho polyhedralného vzorca. Ako bolo ukázané v [18]. Lepší dolný odhad, používajúci izoperimetrickú funkciu, bol nájdený v [19] a vyzerať nasledovne.

Izoperimetrickou funkciou grafu G sa rozumie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že pre každú k -prvkovú $U \subseteq V$, $k = |U| \leq \frac{n}{2}$ je medzi V a $V \setminus U$ aspoň $f(k)$ hrán.

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i) \quad 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$$

$$\Delta^2 f(i) = \Delta(\Delta f(i)) \quad 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 2$$

Veta 2.0.2. *Nech f je izoperimetrická funkcia grafu G a $\Delta f(i)$ neklesajúca a nezáporná, potom pre $\nu_1(G)$ platí*

$$\nu_1(G) \geq -\frac{n}{8} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} \Delta f(i) \Delta^2 f(i) - \sum_{v \in V} d_v^2 \quad (2.2)$$

Odhad vo Vete 2.0.2. bol vylepšený v [6], aby sa dal použiť aj pre grafy, ktorých izoperimetrické funkcie nie sú neklesajúce na celom intervale $[0, \frac{n}{2}]$. Vylepšená verzia môže dávať odhady pre grafy, ktorých izoperimetrické funkcie boli vyhovujúce, lepšie maximálne o multiplikatívny faktor v porovnaní s (2.2).

Vylepšená verzia vyžaduje, aby bola diferenciacia izoperimetrickej funkcie Δf nezáporná a klesajúca po isté $s \in [0, \frac{n}{2} - 1]$ a aby na intervale $[s, \frac{n}{2} - 1]$ f neklesla pod $f(s_0)$, kde $0 \leq s_0 \leq s$, pričom s n idúcim do nekonečna $ns_0 = o(|E(G)|)$. Nech

$$m_{f,s}(l) = \frac{f(l)}{f(\max\{\lfloor l/2 \rfloor + 1, s + 1\})} \quad \kappa(f, s_0, s) = \min_{s_0 \leq l \leq n/2} m_{f,s}(l)$$

, potom vylepšený dolný odhad vyzerá

$$\nu_1(G) \geq -\kappa(f, s_0, s)(1 - o(1)) \frac{n}{8} \sum_{i=1}^{s-1} \Delta f(i) \Delta^2 f(i) - \sum_{v \in V} d_v^2 \quad (2.3)$$

Pomocou izoperimetrických funkcií sa dá teda stanoviť dolný odhad $\nu_1(G)$ pre mnohé triedy grafov, aj keď špecifické odhady pre jednotlivé triedy sú oveľa tesnejšie a taktiež sú triedy grafov, pre ktoré izoperimetrické funkcie s požadovanými vlastnosťami neexistujú.

Pre k -rozmernú hyperkocku Q_k bola nájdená v [4] izoperimetrická funkcia $f(x) = x(k - \log_2 x)$. Z nej vyplývajúci dolný odhad pre Q_k získaný z vylepšeného odhadu v [6] vyzerá $(0.1914 + o(1))4^k$.

Pre mriežky $P_k \times P_k$ našli v [3] izoperimetrickú funkciu $f(x) = \sqrt{2x}$, ktorá pre všeobecnejšie mriežky $P_m \times P_k$, $m \geq k$ vyzerá nasledovne

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \leq \frac{k^2}{2} \\ k & \frac{k^2}{2} < x \leq \frac{mk}{2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Z (2.4) sa dá získať dolný odhad $\Omega(k^2 \log k)$ pre mriežky $P_k \times P_k$, ktorý je asymptoticky optimálny.

Ďalšie izoperimetrické funkcie pre rôzne typy mriežok s pridanými hranami (napr. $P(n, k) \times P(n, k)$, kde $P(n, k)$ je cesta dĺžky n s hranami medzi vrcholmi, ktorých vzdialenosť je najviac k alebo 6-uholníkové mriežky) sa dajú nájsť v [6].

Kapitola 3

Všeobecný horný odhad $\nu_1(G)$

Veta 3.0.3. *Pre ľubovoľný graf G platí*

$$\nu_1(G) = O\left(\left(\text{cr}(G) + \sum_{v \in V} d_v^2\right) \log |V|\right) \quad (3.1)$$

Odhad (3.1) bol získaný v [19] stratégiou rozdeľuj a panuj (rozdeliť graf podľa hranového rezu a získané dve polovice kresliť vedľa seba) splanárnením grafu (t.j. v planárnom nakreslení sa priesečníky medzi hranami nahradili novými vrcholmi) a použitím vety z [8], že každý plárny graf G má $(1/3, 2/3)$ hranový rez veľkosti najviac

$$1.6 \sqrt{\sum_{v \in V} d_v^2}$$

, ak $\forall v \in V w(v) \leq 2/3$, kde $w(v) = \frac{d_v^2}{\sum_{y \in V} d_y^2}$.

Z dôkazu Vety 3.0.3. tiež vyplýva, že ak máme nový graf, získaný splanárnením G , usporiadanie vrcholov na kružnici spĺňajúce tento odhad sa dá algoritmicky získať v čase $O((\text{cr}(G) + n) \log(n))$, pretože spomínaný hranový rez môže byť vypočítaný v lineárnom čase vzhľadom na n a počet vnorení bude vzhľadom naň logaritmický.

Kapitola 4

$\nu_1(G)$ pre špecifické triedy grafov

4.1 Známe výsledky

Veta 4.1.1. Pre K_n platí

$$\nu_1(K_n) = \binom{n}{4} \quad (4.1)$$

Veta 4.1.2. Pre $K_{m,n}$ (kompletný bipartitný graf s m a n prvkovými partíciami) platí

$$\nu_1(K_{m,n}) = n(m-1)(2mn-3m-n)/12 \quad (4.2)$$

Výsledok bol publikovaný v [17].

Veta 4.1.3. Pre kompletný p -partitný graf s partíciami veľkosti n , $K_n(p)$, platí

$$\nu_1(K_n(p)) = n^4 \binom{p}{4} + \frac{1}{2} n^2 (n-1)(2n-1) \binom{p}{3} + n \binom{n}{3} \binom{p}{2} \quad (4.3)$$

Výsledok bol publikovaný v [7] a dôkaz je postavený na (4.2).

4.2 Halinov graf

Halinovým grafom sa rozumie strom s listami spojenými v cykle so všetkými vrcholmi okrem koreňa stupňa aspoň tri. Stromom Halinovho grafu sa chápe podgraf Halinovho grafu s takým istým počtom vrcholov, ale bez hrán medzi listami. List Halinovho grafu bude potom list stromu Halinovho grafu, stromová hrana analogicky.

Koreň stromu bude r . Otec vrchola v v strome sa označí $a(v)$, synovia vrchola v budú označení $s_1(v), \dots$, listy budú l_0, \dots , Najľavejší resp. najpravejší list stromu s koreňom v sa označí $l(v)$ resp. $r(v)$. Cyklus, ktorý spája

listy sa označí ako C . $Subtree(u)$ sa rozumie podstrom s koreňom u .

!!! Dohodnime sa, že všetky cesty typu uPv v dôkazoch budú obsahovať len stromové hrany, preto budú určené jednoznačne. !!!

Cesta stromu G , uPv , taká, že obsahuje práve tri vrcholy u, v, s , pričom $d(s) = 2 \wedge s \neq r$ sa označí $u\pi v$.

Znak $\#$ bude znamenať počet.

Veta 4.2.1. *Pre ľubovoľný Halinov graf G platí*

$$\nu_1(G) \geq \#_{listov}(G) - 2 \quad (4.4)$$

Dôkaz. Pre ľubovoľné konvexné nakreslenie Halinovho grafu G s k listami sa môže listom priradiť označenie z $\{l_0, \dots, l_{k-1}\}$ (nie nutne tak, ako za sebou nasledujú v C) tak, že postupnosť $[r, l_0, \dots, l_{k-1}]$, kde r je koreň, je poradie v akom sú usporiadané listy a koreň na kružnici v smere hodinových ručičiek.

Priradíme injektívne ku každému listu l_i , $i \neq 0, k-1$, jeden priesečník, ktorý urobia hrany z cesty l_iPr s hranami cyklu C , ktorý spája listy. Ak pre prvú hranu l_iv na tejto ceste platí

- 1. prípad :

$$v <_o l_{i-1} \vee l_{i+1} <_o v$$

, potom hrana l_iv iste urobí priesečník, ktorý môžeme priradiť listu l_i .

- 2. prípad :

$$l_{i-1} <_o v <_o l_i$$

, nech u je prvý vrchol na ceste vPr , pre ktorý

$$u <_o l_{i-1} \vee l_i <_o u$$

, potom posledná hrana na ceste vPu , urobí aspoň dva priesečníky, ktoré môžeme priradiť listu l_i a prípadne listu l_{i-1} , ak sa naň nevzťahuje prípad 1.

- 3. prípad :

$$l_i <_o v <_o l_{i+1}$$

, sa rieši analogicky ako prípad 2.

Keďže sa vie injektívne každému listu okrem dvoch priradiť priesečník, dôkaz je skončený. □

Situácia sa zmení v prípade, že povolíme v strome Halinovho grafu vrcholy stupňa dva rôzne od koreňa.

Veta 4.2.2. *Pre ľubovольnú subdivíziu G Halinovho grafu G' , ktorá vznikne pridaním jedného vrchola na každú stromovú hranu hranu platí*

$$\nu_1(G) \geq \lceil \frac{3}{2}(\#_{listov}(G) - 2) \rceil \quad (4.5)$$

Dôkaz. Nech $[l_0, \dots, l_{k-1}, r]$ je opäť poradie v akom sú usporiadané listy a koreň na kružnici. Bez újmy na všeobecnosti predpokladajme, že $o(l_0) = 1$. Cesta u_1Pu_3 , ozn. $u_1\varpi u_3$, vrcholov u_1, u_2, u_3 bude pre konvexné nakreslenie G , ktorému zodpovedá bijekcia o typu (i_1, i_2, i_3) , ak

$$(\forall j = 1, 2, 3) (l_{i_j} \leq_o u_j \wedge (u_j <_o l_{i_j+1} \vee i_j = k - 1))$$

Ukáže sa, že dvojiciam listov (nebudú medzi nimi listy l_0 a l_{k-1}) sa dajú injektívne priradiť po 3 priesečníky a zvyšným listom (opäť okrem listov l_0 a l_{k-1}), ktoré nie sú súčasťami žiadnej dvojice po 2 priesečníky. Zmienené dvojice a trojice priesečníc a dvojice listov budú po dvoch disjunktné.

Rozoberieme tri prípady.

Nech $l_i, i \neq 0, k - 1$ je list, $l_i\varpi v$ je typu (i_1, i_2, i_3)

- **1.** $i_2 \neq i_3$
- **2.** $i_1, i_1 - 1 \neq i_2 \wedge i_2 = i_3$
- **3.** $(i_1 = i_2 \vee i_1 - 1 = i_2) \wedge i_2 = i_3$

1. $l_i\varpi v$ urobí 2 priesečníky s hranami cyklu, ktoré sa priradia l_i .

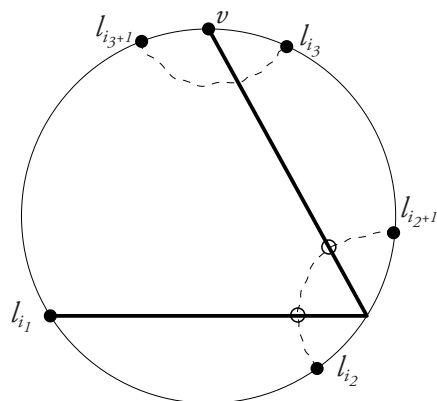
2. Nech $i_1 = i, i_2 = i_3 = j$.

Ak $l_{k-1} <_o v$, potom $l_i\varpi v$ urobí 1 priesečník s nejakou hranou cyklu a 1 priesečník s cestou l_0Pr alebo $l_{k-1}Pr$. Takže opäť sa získali 2 priesečníky pre l_i .

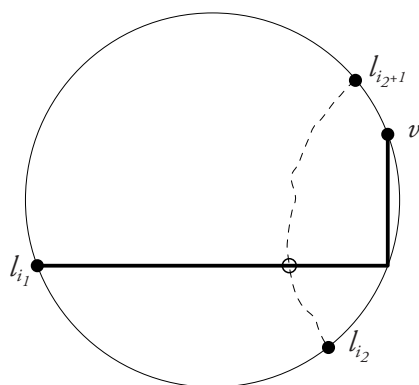
Inak nech $vPw, v \in Subtree(w)$ je cesta taká, $(\forall u \in vPw) (l_j <_o u <_o l_{j+1}) \wedge (a(a(w)) <_o l_j \vee l_{j+1} <_o a(a(w)))$. Zatiaľ sa získal pre l_i 1 priesečník.

Každá cesta $z\varpi u$ typu $(i', j, j), (i' \neq j \vee z = l_j \vee z = l_{j+1}) \wedge u \in vPw$, musí urobiť jeden priesečník s hranami vPw alebo s inou $z'\varpi u', u' \in vPw$, okrem maximálne dvoch prípadov, keď platí $z = l_j \vee z = l_{j+1} \vee o(u) = \max\{o(u') | u' \in vPw\} \vee o(u) = \min\{o(u') | u' \in vPw\}$.

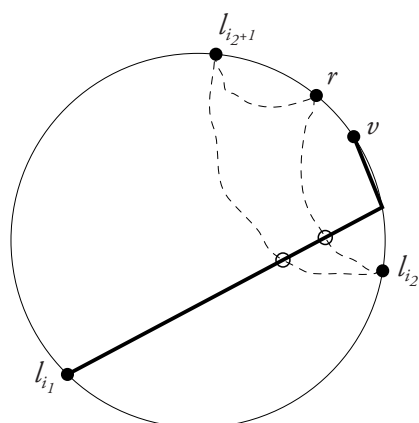
Z uvedeného je zrejmé, že sa stačí zaoberať prípadom, keď $o(v) = \max$ resp. $\min\{o(u') | u' \in vPw\}$ a zároveň nesmie platiť, že $(\exists l_j\varpi u') u' \in vPw \wedge (\exists l_{j+1}\varpi u') u' \in vPw$, lebo inak sa vie priradiť l_i ďalší priesečník.



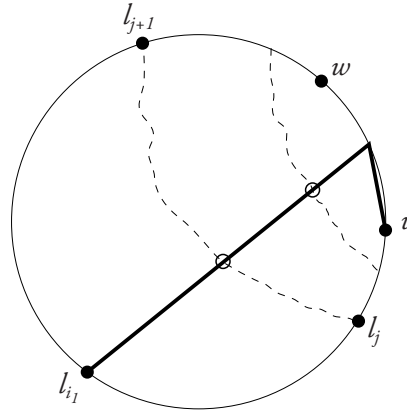
Obrázok 4.1: Prípád 1.



Obrázok 4.2: Prípád 2.



Obrázok 4.3: Prípád 2. $l_{k-1} <_o v$


 Obrázok 4.4: Prípád **2.**, keď nenastane (i),(ii) a ani (iii)

Ostávajú teda tieto možnosti :

(i) $(\exists l_j \varpi u) u \in vPw$. Potom sa môžu listom l_i a l_j spolu s 2 priesečníkmi, ktoré urobí cesta $w\varpi a(a(w))$ s hranami cyklu, priradiť 3 priesečníky.

(ii) $(\exists l_{j+1} \varpi u) u \in vPw$. Ukáže sa analogicky ako 1.

(iii) $(\neg \exists l_{j+1} \varpi u) u \in vPw \wedge (\neg \exists l_j \varpi u) u \in vPw$. Teraz sa môže nájsť ešte jedna cesta $l_t \varpi u$, $u \in vPw$, typu (i'', j, j) resp. cesta $w' \varpi a(a(w'))$, $a(a(w')) \in vPw$, (prípád **3.**(ii)). Potom sa vedú listom l_t a l_i resp. dvojici listov z **3.**(ii) (pozri ďalej) a l_i spolu s 2 priesečníkmi, ktoré urobí $w\varpi a(a(w))$ s hranami cyklu, priradiť 4 resp. 5 priesečníkov.

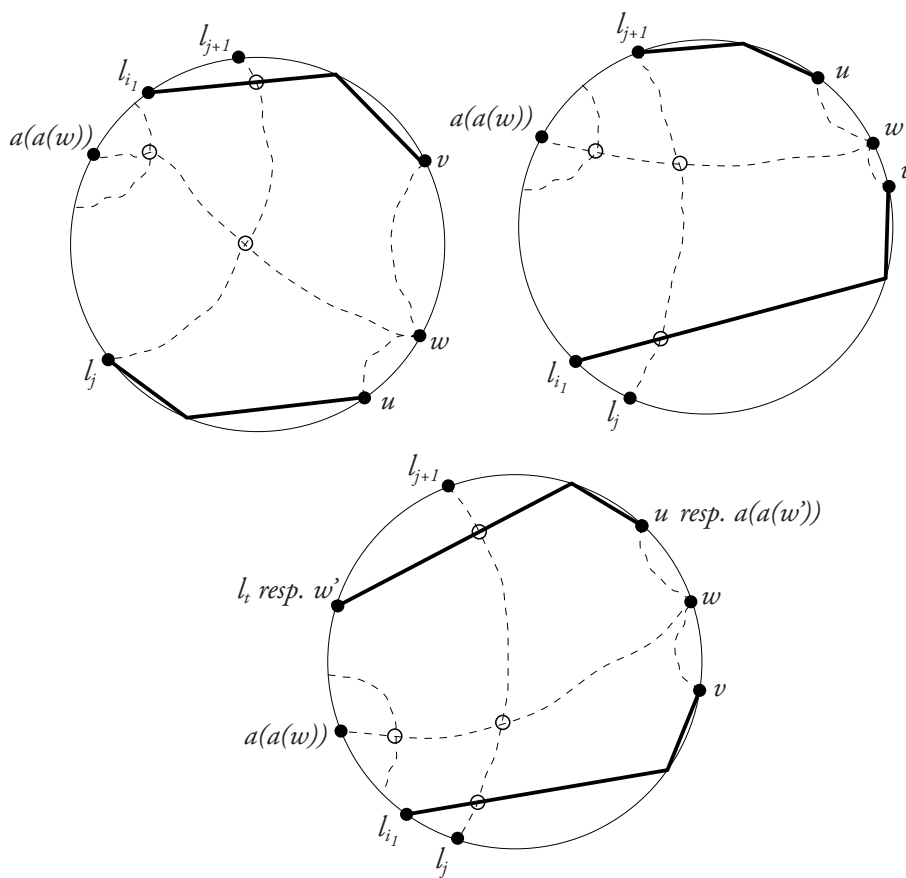
3. Nech $i_1 = i_2 = i_3 = i$ (Druhý prípad, keď $i_1 - 1 = i_2$ je analogický.)

Nech vPw , $v \in Subtree(w)$ je opäť cesta taká, $(\forall u \in vPw) (l_i <_o u <_o l_{i+1}) \wedge (a(a(w)) <_o l_j \vee l_{j+1} <_o a(a(w)))$.

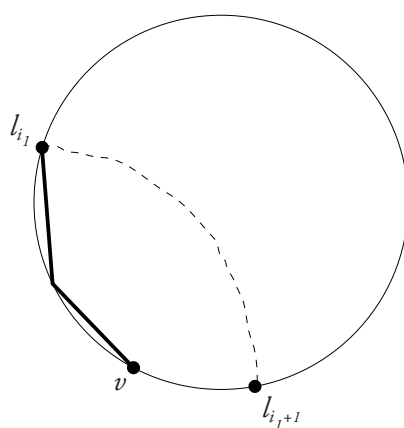
Teraz sa môže previesť dôkaz na prípady (i), (ii) z predchádzajúcej možnosti (pre $j := i$) alebo môže ešte nastať situácia $(\exists l_{i+1} \varpi u') u' \in vPw$. Potom ak $l_{k-1} <_o a(a(w))$, $w\varpi a(a(w))$ urobí aspoň 3 priesečníky (argument ako v **2.**), ktoré sa môžu priradiť listom l_i a l_{i+1} . Ak $a(a(w)) <_o l_{k-1}$, v prípade, že cesta

(i) $w\varpi a(a(w))$ je typu (i, i, j) , urobí $w\varpi a(a(w))$ aspoň 3 priesečníky, ktoré sa vedú priradiť listom l_i a l_{i+1} .

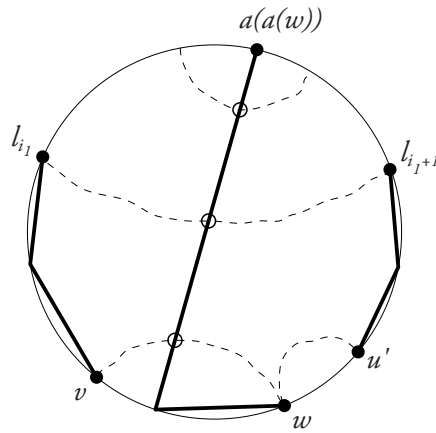
(ii) $w\varpi a(a(w))$ je typu (i, i', j') , $i \neq i'$ (zatiaľ sa isto získali 2 priesečníky



Obrázok 4.5: Prípád 2. (i),(ii) a (iii)



Obrázok 4.6: Prípád 3.


 Obrázok 4.7: Prípád **3.** (i)

a potrebujeme 3 pre listy l_i a l_{i+1} , teda chýba nám 1 priesečník), tak sa môže situácia previesť na **1.** prípad ($l_i := w$), ktorý nám dá ešte 1 priesečník alebo na **2.** prípad ($l_i := w$) pričom, ak nenastane prípad **2.**(i) alebo **2.**(ii) (pre $j := j'$ resp. $j := j' + 1$), môže sa priradiť listom l_i a l_{i+1} ešte 1 vzniknutý priesečník (v prípade **2.**(iii) vzniknú navyše ešte 3, takže 2 priesečníky ostanú pre zostávajúci list, inak vznikne 1 priesečník). V opačnom prípade môže chýbať 1 priesečník (Nakoľko list $l_{j'}$ resp. $l_{j'+1}$ teraz potrebuje 2.). Ak naozaj chýba, nastala analogická situácia (prípád **3.**(ii) ($l_i := a(a(w))$)), a keďže tento prípad sa nedá aplikovať do nekonečna, nakoľko sa niekedy musí dôjsť ku koreňu, niekde sa musí vyskytnúť chýbajúci priesečník. \square

Teraz sa zadefinuje kreslenie Halinovho grafu, o ktorom sa ukáže, že je vzhľadom na počet priesečníkov optimálne.

Majme Halinov graf G s koreňom r , pre ktorý $d_r \geq 2$ (Ak $d_r = 1$, tak sa odstráni cesta od koreňa po prvý vrchol stupňa aspoň 3 a je ľahké vidieť, že takto získaný graf sa môže nakresliť s tým istým množstvom priesečníkov ako G). Jeho vrcholom nasledovne priradíme typ z množiny $\{pre, in, post\}$ nasledujúcim spôsobom:

- koreň bude typu *pre*
- najľavejší syn koreňa bude typu *pre*

- najpravejší syn koreňa bude typu *post*
- všetci ostatní synovia koreňa budú typu *in*

Typ k synov vrchola v , $s_1(v), \dots, s_k(v)$ rôzneho od koreňa sa určí nasledovne :

- v je typu *in*, potom
 $s_1(v), \dots, s_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}(v)$ a $s_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}(v), \dots, s_k(v)$ sú typu *in*
 $s_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(v)$ je typu *post*
 $s_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}(v)$ je typu *pre*
- v je typu *pre*, potom
 $s_2(v), \dots, s_k(v)$ sú typu *in*
 $s_1(v)$ je typu *pre*
- $s_k(v)$ je typu *post*, potom
 $s_1(v), \dots, s_{k-1}(v)$ su typu *in*
 $s_k(v)$ je typu *post*

Definujme si usporiadanie vrcholov $p(v)$ podstromu s koreňom vo vrchle v nasledovne :

- v je typu *pre*

$$p(v) = v, p(s_1(v)), p(s_2(v)), \dots, p(s_k(v)) \quad (4.6)$$

- v je typu *post*

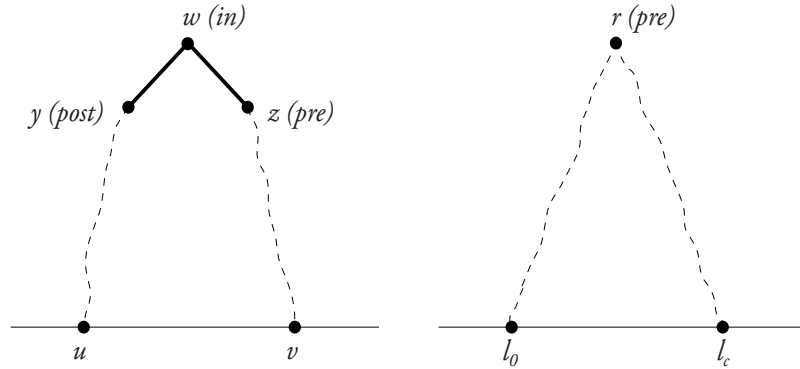
$$p(v) = p(s_1(v)), p(s_2(v)), \dots, p(s_k(v)), v \quad (4.7)$$

- v je typu *in*

$$p(v) = p(s_1), \dots, p(s_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(v)), v, p(s_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}(v)), \dots, p(s_k(v)) \quad (4.8)$$

Usporiadanie $p(r)$ (skrátene p) určí poradie vrcholov na kružnici zodpovedajúce konvexnému nakresleniu D Halinovho grafu G (usporiadanie listov v $p(r)$ bude zhodné s ich usporiadaním v cykle C (usp. v cykle je intuitívne l_1, l_2, \dots), teda $l_i <_o l_{i+1}$), v ktorom bude $\#_{listov}(G) - 2$ priesečníkov, čo sa dokáže indukciou vzhľadom na štruktúru grafu.

O nakreslení D platia nasledujúce tvrdenia.



Obrázok 4.8: Lema 4.2.4. Prípád (i) a (ii)

Lema 4.2.1. *V nakreslení D nie sú žiadne priesečníky medzi stromovými hranami.*

Dôkaz. Je zrejmé, že pre každú dvojicu stromových hrán jedna z tejto dvojice, $e = uv$ (u je bližšie ku koreňu), je taká, že druhú hranu, $f = wz$, neobsahuje podstrom s koreňom u . Potom z definície p je jasné, že w ani z sa nemôže nachádzať v usporiadaní p medzi u a v resp. v a u , pretože všetky vrcholy ľubovlného podstromu nasledujú v usporiadaní p tesne za sebou. □

Lema 4.2.2. *V nakreslení D nie sú žiadne priesečníky medzi hranami spájajúcimi listy.*

Dôkaz. Listy za sebou nasledujú v p v tom istom poradí ako v C . □

Lema 4.2.3. *V nakreslení D sú priesečníky len medzi stromovými hranami a hranami cyklu, ktorý spája listy.*

Dôkaz. Vyplýva priamo z Lem 4.2.1. a 4.2.2. □

Lema 4.2.4. *V nakreslení D pre jednu z dvoch pretínajúcich sa hrán, $e = uv$, $u <_o v$, u, v sú listy, platí (i) alebo (ii).*

(i) *w taký, že $uPr \cap vPr = wPr$, je typu in, pričom vrchol y na ceste $wyPu$ je typu post a vrchol z na ceste $wzPv$ je typu pre.*

(ii) *$\forall (l_i \neq u, v) u \leq_o l_i \leq_o v$, teda u, v sú dva krajné listy.*

Dôkaz. Lema 4.2.3. nám umožní obmedziť sa na priesečníky medzi cyklovými a stromovými hranami.

Rozobratím všetkých prípadov typov vrcholov w, y, z z podmienky (i), ktoré môžu nastať sa zistí, že vo všetkých ostatných prípadoch okrem prípadu (i) a (ii) bude vždy platiť, že

$$(\forall(x \in \text{Subtree}(y), x \neq u) x <_o u) \wedge (\forall(x \in \text{Subtree}(z), x \neq v) v <_o x)$$

a navyiac

$$\begin{aligned} & (\forall x \in (\text{Subtree}(y) \cup \text{Subtree}(z)) w <_o x) \vee \\ & (\forall x \in (\text{Subtree}(y) \cup \text{Subtree}(z)) x <_o w) \end{aligned}$$

, čo teda znamená, že

$$\neg \exists(x \in V) u <_o x <_o v$$

a to zase popiera vznik priesečníka hrany uv . □

Lema 4.2.5. *Ak pre dva listy, u, v , $u <_o v$, $\{u, v\} \in E$, v nakreslení D neplatí (i) alebo (ii) z Lemy 4.2.4, potom $\neg \exists(x \in V) u <_o x <_o v$*

Dôkaz. Pozri dôkaz Lemy 4.2.4. □

Veta 4.2.3. *Pre ľubovoľný Halinov graf G platí*

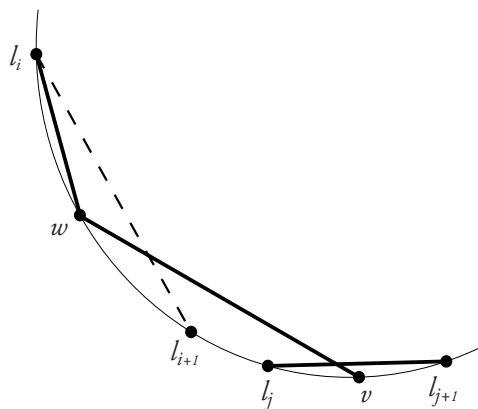
$$\nu_1(G) \leq \#\text{listov}(G) - 2 \tag{4.9}$$

Dôkaz. Ak G je Halinov graf, ktorého strom je hviezda (strom s výškou jedna), potom D očividne obsahuje $\#\text{listov}(G) - 2$ priesečníkov.

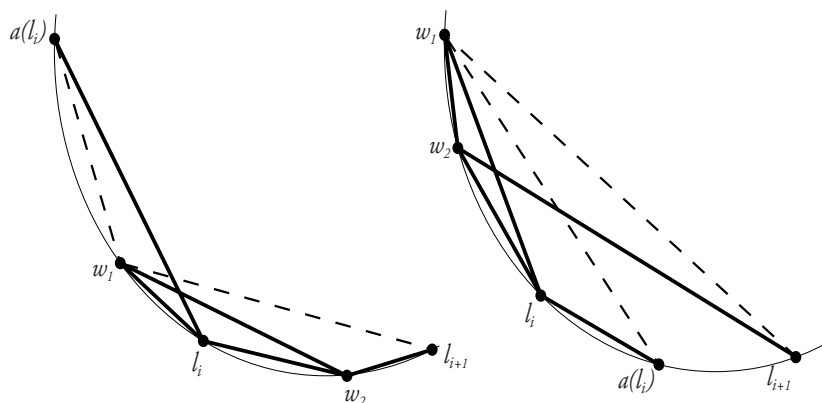
Nech D obsahuje $c - 2$ priesečníkov pre každý Halinov graf G s c listami (IP), ukáže sa, že D bude obsahovať $c - 1$ priesečníkov pre každý Halinov graf G' , ktorý má $c + 1$ listov, t.j. stačí ukázať, že zväčšením počtu listov o jedna sa zväčší aj počet priesečníkov o jedna. Zväčšenie počtu listov o jedna tak, aby nový Halinov graf spĺňal predpoklady vety sa dosiahne buď pridaním jedného listu ako syna nelistovému vrcholu alebo pridaním dvoch synov listovému vrcholu. Ak by sme listovému vrcholu pridali iba jedného syna, potom by sme dostali vrchol stupňa dva rôznych od koreňa.

Pridanie nového jedného listu w nelistovému vrcholu v :

Nový list w bude ležať na cyle C , preto musia $\exists(l_i, l_{i+1}) (l_i <_o w <_o l_{i+1})$, ktoré vyhovujú usporiadaniu $p(r)$. Pridanie teda vyzerá tak, že sa vytvorí subdivízia G pridaním vrchola w na hranu $l_i l_{i+1}$ a potom sa následne pridá hrana vw .



Obrázok 4.9: Pridanie jedného listu w nelistovému vrcholu v (Čiarkovaná čiara znázorňuje situáciu pred pridaním.)



Obrázok 4.10: Pridanie dvoch listov w_1, w_2 listu l_i , naľavo: l_i je typu *in*, na-pravo: l_i je typu *post*. (Čiarkované čiary znázorňujú situáciu pred pridaním.)

Pridanie dvoch listov w_1, w_2 listu l_i :

Vytvorí sa subdivízia G pridaním vrchola v na hranu $a(l_i)l_i$ a w_2 na $l_i l_{(i+1) \bmod c}$, potom sa pridá hrana vw_2 . l_i sa preznačí na w_1 a v na l_i .

Keďže každý Halinov graf sa dá skonštruovať z Halinovho grafu, ktorého strom je hviezda spôsobom vyššie uvedeným, indukčný prepoklad (IP) je korektný.

- Pridanie jedného listu w nelistovému vrcholu v s k synmi medzi listy $l_i l_{i+1}$
 - Ak v je typu *in* :
Ak je k párne, bude w po pridaní $s_{k+1}(v)$ inak $s_1(v)$. Keďže w je aspoň tretí syn vrchola v , hrana vw urobí priesečník s hranou $e = r(s_{\lfloor k/2 \rfloor}(v))l(s_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}(v))$. Vznik ďalších priesečníc popiera Lema 4.2.5. (aplikovaná na l_i, l_{i+1}), a taktiež fakt, že existuje práve jedno j také, že $l_j <_o v <_o l_{j+1}$.
 - Ak v je typu *post* (analog. prípad *pre*) :
Nech z je prvý vrchol na ceste vPr typu *in*, z má l synov, potom hrana vw urobí priesečník s hranou $e = r(s_{\lfloor l/2 \rfloor}(v))l(s_{\lfloor l/2 \rfloor + 1}(v))$. Ďalšie úvahy by boli podobné ako v prípade, keď v je typu *in*. Ak taký vrchol z neexistuje, hrana vw urobí priesečník s hranou $l_0 l_c$. Dôvod prečo sa pridá len jeden priesečník je podobný ako vyššie.
- Pridanie dvoch listov w_1, w_2 (w_1 vľavo, w_2 vpravo) listu l_i .
 - Ak v je typu *in* :
Nový priesečník vznikne medzi hranami $a(l_i)l_i$ a $w_1 w_2$. Z Lemy 4.2.5. pre $l_i, l_{(i+1) \bmod c}$, vyplýva, že operácia pridanía dvoch listov urobí maximálne jeden priesečník.
 - Ak v je typu *post* (analog. prípad *pre*) :
Nech z je prvý vrchol na ceste vPr typu *in*, z má l synov, potom hrana vw_1 urobí priesečník s hranou $e = w_2 l(s_{\lfloor l/2 \rfloor + 1}(v))$ ($l(s_{\lfloor l/2 \rfloor + 1}(v)) = l_{i+1}$) a všetky bývalé priesečníky hrany $l_i l_{i+1}$ nahradia priesečníky hrany $w_2 l_{i+1}$. Ak taký vrchol z neexistuje, hrana vw_1 urobí priesečník s hranou $l_0 l_c$.

□

Veta 4.2.4. *Pre ľubovoľný Halinov graf G platí*

$$\nu_1(G) = \#_{listov}(G) - 2 \quad (4.10)$$

Dôkaz. Vyplýva priamo z Viet 4.2.1. a 4.2.3.

□

4.3 Mriežky

Mriežka $P_N \times P_M$ je karteziánskym produktom grafov P_N a P_M (P_N je cesta s N vrcholmi), M ciest dĺžky N nazveme riadky a N ciest dĺžky M stĺpce.

Hrebeňom sa nazve podgraf mriežky, ktorý tvoria vrcholy prvých alebo posledných dvoch stĺpcov a hrany s ním incidentné

Veta 4.3.1. *Pre mriežky $P_N \times P_3$, $N \geq 3$.*

$$\nu_1(P_N \times P_3) \geq \begin{cases} 2N - 3 & N \bmod 2 = 1 \\ 2N - 4 & N \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Dôkaz. Dôkaz sa spraví matematickou indukciou na N , pre N párne a nepárne samostatne.

1. Prípady $N = 4, 3, 5$ sa dokážu algoritmom, ktorý prejde všetky možné usporiadania vrcholov.

2. Nech N je párne a veta platí pre všetky párne čísla po $N - 2$ vrátane (IP). Po odstránení hrán 4. až $(N - 1)$. stĺpca získame graf H homeomorfný s $P_4 \times P_3$. Keďže sa dá preveriť algoritmom, že hrany hrebeňa $P_4 \times P_3$ sa zúčastňujú v každom nakreslení $P_4 \times P_3$ na vytvorení aspoň 4-och priesečníkov, urobia sa tieto priesečníky aj v kreslení grafu H a teda aj v $P_N \times P_3$, čo znamená, že pre N párne, $N \geq 6$, využitím indukčného predpokladu platí

$$\nu_1(P_N \times P_3) \geq \nu_1(P_{N-2} \times P_3) + 4 = 2(N - 2) - 4 + 4 = 2N - 4$$

Pre párne N je dôkaz analogický. □

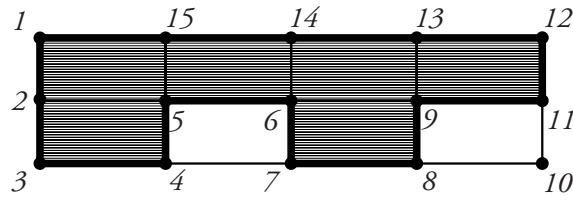
Veta 4.3.2. *Pre mriežky $P_N \times P_3$, $N \geq 3$.*

$$\nu_1(P_N \times P_3) \leq \begin{cases} 2N - 3 & N \bmod 2 = 1 \\ 2N - 4 & N \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

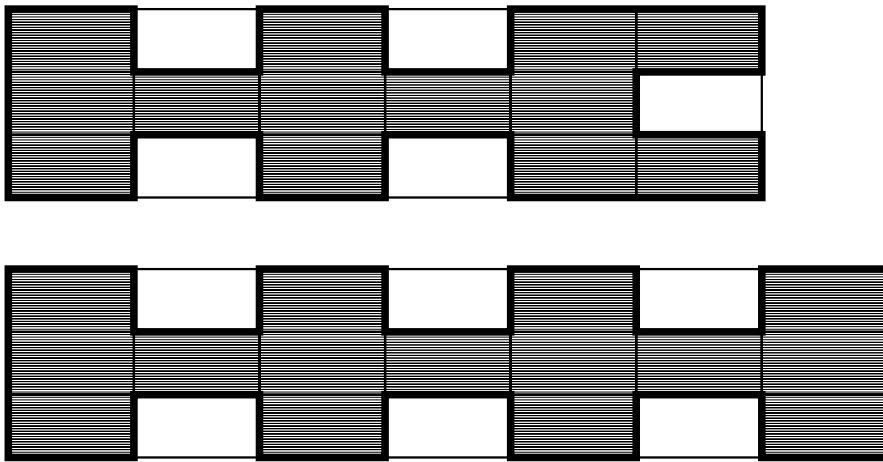
Dôkaz. Usporiadanie vrcholov zodpovedajúce nakresleniu s požadovaným množstvom priesečníkov je určené Hamiltonovským cyklom v prípade, keď N je párne. Inak je usporiadanie bez jedného z rohových vrcholov v určené Hamiltonovským cyklom na podgrafe, ktorý neobsahuje v a rohový vrchol je umiestnený medzi svojich susedov. □

Veta 4.3.3. *Pre mriežky $P_N \times P_3$, $N \geq 3$.*

$$\nu_1(P_N \times P_3) = \begin{cases} 2N - 3 & N \bmod 2 = 1 \\ 2N - 4 & N \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$



Obrázok 4.11: Usporiadanie vrcholov určené kvázi Hamiltonovským cyklom pre $P_5 \times P_3$



Obrázok 4.12: Usporiadanie vrcholov určené Hamiltonovským cyklom pre $P_7 \times P_4$ a $P_8 \times P_4$

Dôkaz. Vyplýva priamo z Viet 4.3.1. a 4.3.2. □

Veta 4.3.4. Pre mriežky $P_N \times P_4$, $N \geq 3$.

$$\nu_1(P_N \times P_4) \leq 4N - 8 \quad (4.14)$$

Dôkaz. Opäť sú vrcholy usporiadané na Hamiltonovskom cykle ako na Obrázku 4.12. Tentokrát sa dá Hamiltonovský cyklus konštruovať aj pre nepárne N . Toto nakreslenie je s veľkou pravdepodobnosťou aj optimálnym. □

Veta 4.3.5. Pre mriežky $P_N \times P_4$, $N \geq 4$

$$\nu_1(P_N \times P_4) \geq \begin{cases} 3N - 5 & N \bmod 2 = 1 \\ 3N - 4 & N \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Dôkaz. Párne N :

Pre párne N sa postupuje analogicky ako v dôkaze Vety 4.3.1. Algoritmickým zistením vieme, že hrebeň mriežky $P_4 \times P_4$ sa zúčastňuje na vytvorení aspoň 6-tich priesečníkov a pre $N = 4$ tvrdenie platí.

Nepárne N :

Pre $N = 5$ začína byť problematické v znesiteľnom čase prejsť algoritmicky všetky usporiadania vrcholov, preto pre $N = 5$ sa zvolí dolný odhad $\nu_1(P_5 \times P_4) \geq 10$, pretože mriežku $P_5 \times P_4$ vieme rozložiť na hrebeň (prispieje 6-imi priesečníkmi) a $P_3 \times P_4$ (prispieje 4-mi priesečníkmi (Veta 4.3.3.)). \square

Pre mriežky $P_N \times P_M$, $M \geq 4, N \geq 5$, sa teda ukazuje, že stanoviť presnú hodnotu konvexného priesečníkového čísla a k nemu zodpovedajúce nakreslenie nie je jednoduché, aj keď ešte pre malé N, M by sa mal dať použiť prehľadávací algoritmus, ten však musí prehľadávací priestor značne obmedziť.

Z dôkazov Viet 4.3.2. a 4.3.4. by sa mohol nadobudnúť dojem, že pre veľké mriežky bude usporiadanie zodpovedajúce optimálnemu nakresleniu určené nejakým Hamiltonovským cyklom (popr. "skoro" Hamiltonovským cyklom). Ukáže sa však, že pre mriežky $P_N \times P_M$ bude nakreslenie určené Hamiltonovským cyklom vždy obsahovať aspoň $\Omega(M^2 \times N)$ priesečníkov, pričom bude zistený horný odhad pre $P_N \times P_N$, ktorý je asymptoticky rovný $O(N^2 \log N)$. Nakreslenie, ktoré mu zodpovedá vychádza z rozdeľuj a panuj stratégie (osobná komunikácia Sýkora O.), ktorá sa ukázala byť v tomto prípade výhodná.

Veta 4.3.6. *Pre mriežky $P_{2^N} \times P_{2^N}$, $N \geq 3$, platí*

$$\nu_1(P_{2^N} \times P_{2^N}) \leq 4^{N-1} \left(\frac{35}{3}N - \frac{236}{9} \right) + 15 \times 2^{N-2} - \frac{4}{9} \quad (4.16)$$

Dôkaz. Najskôr sa popíše usporiadanie vrcholov a potom sa vysvetlí princíp rátania priesečníkov v nakreslení určenom týmto usporiadaním, ktorý dá (4.16).

Použijeme štvorkovú sústavu na očíslovanie vrcholov $P_{2^N} \times P_{2^N}$, toto očíslovanie určí poradie vrcholov v našom kreslení. $P_{2^N} \times P_{2^N}$, $N \geq 1$, rozdelíme na štyri mriežky $P_{2^{N-1}} \times P_{2^{N-1}}$, pričom podľa smeru hodinových ručičiek ich označíme G_0, G_1, G_2, G_3 . Ďalej rekurzívne tak isto každú mriežku G_{i_0, \dots, i_k} , $k < N - 1$, rozdelíme na štyri mriežky $G_{i_0, \dots, i_k, 0}, G_{i_0, \dots, i_k, 1}, G_{i_0, \dots, i_k, 2}, G_{i_0, \dots, i_k, 3}$, každý vrchol mriežky sa týmto spôsobom stane nejakým $G_{i_0, \dots, i_{N-1}}$ a označí sa $v_{(i_0 \dots i_{N-1})_4}$ (4 značí, že index sa chápe ako číslo v štvorkovej sústave). Index určí poradie vrchola v nakreslení.

Hrana $e = v_i v_j$ je potom na $(N - k)$ -tej úrovni, ak

$$\begin{aligned} i &= (i_0 \dots i_{k-1} i_k^{(0)} \dots i_{N-1}^{(0)})_4 \\ j &= (i_0, \dots, i_{k-1} i_k^{(1)} \dots i_{N-1}^{(1)})_4 \\ 0 &\leq k \leq N - 1 \wedge i_k^{(0)} \neq i_k^{(1)}. \end{aligned}$$

Navyše hrana e na $(N - k)$ -tej úrovni ($2 \leq N - k \leq N$) je typu $T_{i_k^{(0)}, i_k^{(1)}, a, b}$, $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$, ak $i_{k+1}^{(0)} = a \wedge i_{k+1}^{(0)}, \dots, i_{N-1}^{(0)} \in \{a, b\}$. Hrán toho istého typu na k -tej ($2 \leq k \leq N$) úrovni bude 0 alebo 2^{k-2} .

V našom nakreslení sú teraz dva druhy priesečníkov:

1. medzi hranami, ktoré sú na tej istej úrovni.
2. medzi hranami, ktoré sú na rôznych úrovniach.

1. Počet priesečníkov na k -tej, $1 < k \leq N$, úrovni okrem najnižšej, ktorá je degenerovaným prípadom a keďže ju tvorí len cyklus dĺžky 4, neobsahuje priesečníky, sa jednoducho vyčíslí (Zoskúpenie členov v súčte vysvetľuje Obrázok 4.13.):

$$\underbrace{12 \times 4^{k-2} - 2}_1 + 4 \times \underbrace{\frac{1}{2}(4^{k-2} - 2^{k-2})}_2 + \underbrace{\frac{2}{3}(4^{k-2} - 1)}_3 \quad (4.17)$$

2. Počet priesečníkov medzi hranami na k -tej, $3 \leq k \leq N$, úrovni s hranami na nižších úrovniach.

- Počet priesečníkov hrán typu $T_{0,1,1,2}$, $T_{0,1,2,1}$, $T_{3,2,1,2}$ a $T_{3,2,2,1}$ na k -tej úrovni :

1. s hranami typu $T_{0,1,2,1}$, $T_{3,2,1,2}$, $T_{0,3,3,2}$ a $T_{0,3,2,3}$ na i -tej úrovni

$$= \begin{cases} 2 \times 3 \times 2^{i-1} 2^{i-2} 2^{k-i} & 2 \leq i < k \leq N \\ 2 \times 2^{k-1} & 1 = i < k \leq N \end{cases}$$

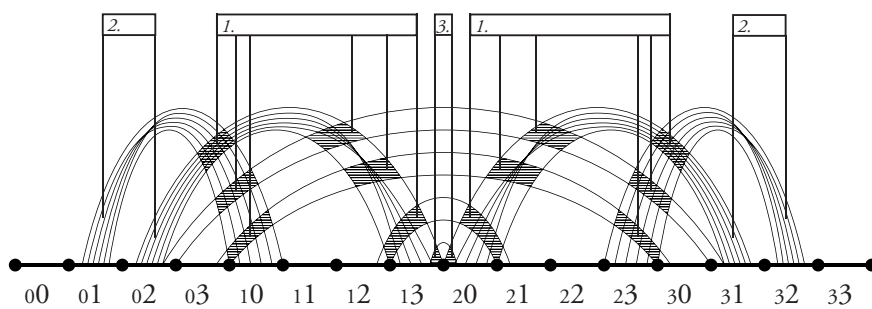
- Počet priesečníkov hrán typu $T_{0,3,2,3}$, $T_{0,3,3,2}$, $T_{1,2,2,3}$ a $T_{1,2,3,2}$ na k -tej úrovni :

1. s hranami typu $T_{0,1,2,1}$, $T_{0,3,2,3}$, $T_{0,3,3,2}$ a $T_{3,2,1,2}$ na i -tej úrovni

$$= \begin{cases} 4 \times 3 \times 2^{i-1} 2^{i-2} 2^{k-i-1} & 2 \leq i < k \leq N \\ 4 \times 2^{k-2} & 1 = i < k \leq N \end{cases}$$

$P_{2^k} \times P_{2^k}$:

22	23	32	33
2		3	
21	20	31	30
12	13	02	03
1		0	
11	10	01	00



Obrázok 4.13: Situácia na k -tej úrovni

2. s hranami typu $T_{1,0,0,3}$ a $T_{2,3,3,0}$ na i -tej úrovni

$$= 4 \times \sum_{j=0}^{i-4} (2^{i-3-j} 2^{i-4-j}) 2^{k-i-1} \quad 3 \leq i < k \leq N$$

• Počet priesečníkov hrán typu $T_{1,0,3,0}$, $T_{1,0,0,3}$, $T_{2,3,3,0}$ a $T_{2,3,0,3}$ na k -tej úrovni :

1. s hranami typu $T_{0,1,1,2}$, $T_{0,1,2,1}$, $T_{3,2,1,2}$, $T_{3,2,2,1}$ a $T_{0,3,2,3}$ na i -tej úrovni

$$= \begin{cases} 2 \times 3 \times 2^{i-2} 2^{i-2} 2^{k-i} & 2 \leq i < k \leq N \\ 0 & i = 1 < k \leq N \end{cases}$$

2. s hranami typu $T_{0,3,3,2}$ na i -tej úrovni

$$= 2 \times \sum_{j=0}^{i-4} (2^{i-j-4} 2^{i-j-4}) 2^{k-i} \quad 3 \leq i < k \leq N$$

Sumáciou vyššie uvedených výrazov v bodoch 1. a 2. cez všetky vyhovujúce i získame

$$\underbrace{2^k \left(\frac{15}{8} 2^k - \frac{11}{2} \right)}_{\mathbf{1.}} + \underbrace{4 \times (2^{2k-5} - 3 \times 2^{k-3} + 1)}_{\mathbf{2.}} \quad (4.18)$$

Počet priesečníkov $cr(k)$ v našom kreslení pre $P_{2^k} \times P_{2^k}$ sa teda dá vyčísliť pomocou (4.17) a (4.18) takto :

$$\begin{aligned} cr(2) &= 18 \\ cr(k) &= (4.17) + (4.18) + 4 \times cr(k-1) \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami a vyriešením postupnosti sa dospeje k tomu, že $cr(N)$ sa rovná pravej strane z (4.16).

□

Z dolného odhadu získaného z izoperimetrickej funkcie (2.4) a z predchádzajúcej vety vyplýva teda, že $\nu_1(P_N \times P_N) = \Theta(n \log n)$ a že $\exists N_1, \forall N > N_1$

$$\nu_1(P_{2^N} \times P_{2^N}) \leq 3n^2 \log n = 3 \times N 4^N$$

Vylepšiť tento odhad sa vo všeobecnosti iste nepodarí žiadnym nakreslením podľa Hamiltonovskej kružnice, čo sa bude prejednávať v nasledujúcej časti

textu.

Pre daný Hamiltonovský cyklus C_{ham} sa môže množina hrán mriežky E rozdeliť na tri disjunktné podmnožiny $E_{ham} = E(C_{ham})$, E_{in} a E_{out} .

Mriežku možno nakresliť do roviny ortogonálne a cyklus C_{ham} resp. hrany cyklu sa môžu orientovať v smere pohybu hodinových ručičiek, potom

$$\vec{f} \quad E_{in} = \{e \in E \setminus E_{ham} \mid e = uv, f = uv \in E_{ham}, \text{ orientovaný uhol medzi } \vec{f} \text{ a } e \text{ je záporný} \}$$

$$\vec{f} \quad E_{out} = \{e \in E \setminus E_{ham} \mid e = uv, f = uv \in E_{ham}, \text{ orientovaný uhol medzi } \vec{f} \text{ a } e \text{ je kladný} \}.$$

Lema 4.3.1. Pre mriežku $G = P_N \times P_M$ sa $|E_{out}| = \frac{1}{2}M \times N - M - N + 2$.

Dôkaz. Definuje sa (prip. C_4 je cyklus dĺžky 4) :

$$C_{in} = \{C_4 \mid C_4 \text{ je podgraf } G, E(C_4) \cap E_{in} \neq \emptyset\}$$

$$C_{out} = \{C_4 \mid C_4 \text{ je podgraf } G, E(C_4) \cap E_{out} \neq \emptyset\}$$

Je zrejmé, že $\forall(e \in E_{ham} \cap E(C_{out}) \exists!(C \in C_{out},) e \in E(C)$. To znamená, že ľubovoľná hrana cyklu C_{ham} nie je nikdy spoločná dvom cyklom z C_{out} . To isté platí aj pre C_{in} . Tento fakt sa použije pri nasledujúcich úvahách.

Nech $G' = (V' = V(G'), E' = E(G'))$ je taký graf, že existuje bijekcia h medzi V' a C_{in} a hrana $uv \in E' \Leftrightarrow E(h(u)) \cap E(h(v)) \neq \emptyset$. Jasne vidieť, že graf G' je strom. Ak by G obsahoval cyklus, rozdelil by sa cyklus C_{ham} aspoň na dva disjunktné cykly. Ak by G nebol súvislý, stalo by sa to isté alebo by v G musel existovať vrchol, ktorý je incidentný s aspoň štyrmi hranami cyklu C_{ham} , čo nie je prípustné.

Je zrejmé, že

$$\left(\bigcup_{C \in C_{in}} E(C) \cap E_{ham} = E_{ham} \right) \quad (4.19)$$

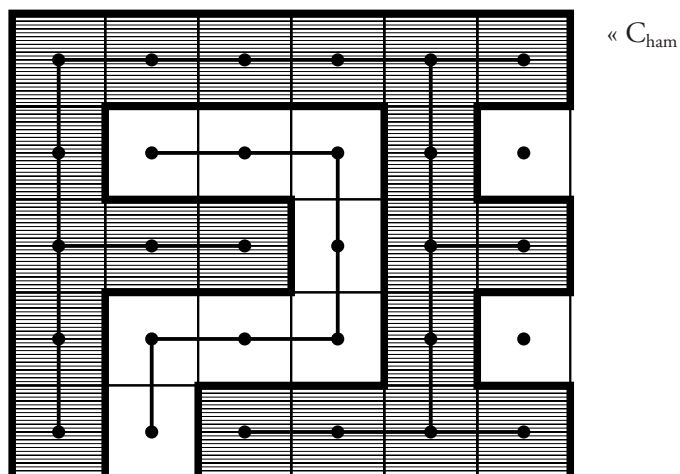
$$\wedge \left(\forall(C, C' \in C_{in}) (E(C) \cap E_{ham}) \cap (E(C') \cap E_{ham}) = \emptyset \right) \quad (4.20)$$

Taktiež platí

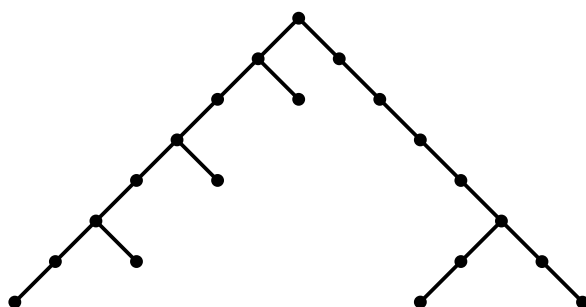
$$\forall(C \in C_{in}) |E(C) \cap E_{ham}| = 4 - d_{h^{-1}(C)} \quad (4.21)$$

Teda C_{in} nám určuje rozklad množiny E_{ham} . Z (4.19), (4.20) a (4.21) teda vyplýva, že

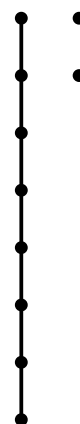
$P_7 \times P_6$:



G' :



G'' :



Obrázok 4.14: Mriežka a Hamiltonovský cyklus, ktoré určujú G' a G''

$$\begin{aligned}
 M \times N &= \sum_{v \in V'} (4 - d_v) \\
 &= 4 \times |V'| - 2 \times |E'| \\
 &= 2 \times |V'| + 2 \\
 |V'| &= \frac{1}{2} M \times N - 2
 \end{aligned}$$

Potom z rovností $|C_{in}| = |V'|$ a $|C_{in}| + |C_{out}| = (M-1) \times (N-1)$ vyplýva, že $|C_{out}| = \frac{1}{2} M \times N - M - N + 2$.

Podobne ako G' pre C_{in} sa zdefinuje G'' a h' pre C_{out} . G'' je strom alebo les. Teraz už len stačí nájsť bijekciu b medzi V'' a E_{out} . Nech $a(v)$ je otec vrchola v a $s(v)$ je syn vrchola v . Nech korene stromov z lesa G'' majú stupeň jedna. Ak $v \in V''$ nie je koreň, $\{b(v)\} = E(h'(v)) \cap E(h'(a(v)))$. Ak v je koreň, potom $\{b(v)\} = E(h'(v)) \setminus (E_{ham} \cup (E(h'(v)) \cap E(h'(s(v)))))$. Bijekcia je zadaná korektne, pretože každý strom má len jedného kandidáta na koreň, ktorý sa podľa definície môže zobrazovať na nejakú hranu. Ak by mal dvoch, znamenalo by to, že cyklus C_{ham} by bol rozdelený na aspoň dva disjunktné cykly. \square

Veta 4.3.7. *Pre konvexné nakreslenie mriežky $P_N \times P_M$, $M \leq N$, pri ktorom sú vrcholy usporiadané tak, ako za sebou nasledujú na Hamiltonovskom cykle je počet priesečníkov asymptoticky rovný $\Omega(M^2 \times N)$.*

Dôkaz. Priesečníky v nakreslení určenom Hamiltonovským cyklom budú iba medzi hranami e, f takými, že $e \in E_{out}$ a $f \in E_{in}$. V prípade, že G'' z dôkazu Lemy 4.3.1 nie je strom, G'' zakoreníme. Korene stromov z lesa G'' budú teraz synovia koreňa nového stromu. Tento strom označíme G . V prípade, že G'' je strom, $G := G''$. Zobrazenie b (opäť z dôkazu Lemy 4.3.1.) každému vrcholu z $V(G)$ okrem koreňa priradí hranu z E_{out} . Hrana $b(v)$ urobí asymptoticky toľko priesečníkov, koľko je vrcholov v podstrome s koreňom v , t.j. $\Theta(|V(\text{Subtree}(v))|)$. Z Lemy 4.3.1. vyplýva, že počet vrcholov stromu G je $\Theta(M \times N)$. Hrany z množiny $\{b(v) \mid \text{depth}(v) = k\}$, pre fixné $k < M/3$, urobia spolu asymptoticky rovnako veľa priesečníkov, teda $\Theta(M \times N)$. Keďže strom G má hĺbku aspoň $\lfloor \frac{M}{2} \rfloor$, priesečníkov spolu musí vzniknúť aspoň $\Omega(M \times M \times N)$. \square

4.4 Planárne grafy

Pre planárne grafy sa vo všeobecnosti sa ukáže, že $\nu_1(G) = O(n^2)$. To, že tento odhad je asymptoticky optimálny, dokáže existencia planárneho grafu, ktorý má pravdepodobne najväčšie konvexné priesečníkové číslo spomedzi všetkých planárnych grafov (osobná komunikácia Sýkora O.).

Veta 4.4.1. *Pre planárny graf $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_1, v_k\}, \{v_2, v_k\} \mid 3 \leq k \leq n\} \cup \{\{v_k, v_{k+1}\} \mid 3 \leq k \leq n-1\} \cup \{\{v_n, v_3\}\}$ a párne n platí*

$$\nu_1(G) = \frac{n^2}{4} + \frac{3n}{2} - 8 = O(n^2)$$

Dôkaz. Odhadne sa zdola minimálny počet priesečníkov. Nech je pre ľubovoľné konvexné nakreslenie $|o(v_1) - o(v_2)| - 1 = k$, počet priesečníkov sa potom zdola ohraničí výrazom

$$\sum_{i=1}^k i + \sum_{i=1}^{n-2-k} i + 2(n-4)$$

Upravením a derivovaním výrazu podľa k získame minimum, ktoré je rovné $\frac{n^2}{4} + \frac{3n}{2} - 8$. Kreslenie, ktoré zodpovedá tomuto minimu je to, v ktorom platí $|o(v_1) - o(v_2)| - 1 = \frac{n-2}{2}$ a navyše nevznikne priesečník medzi hranami cyklu $v_3v_4 \dots v_n$. \square

Veta 4.4.2. *Pre planárny graf G , $n > 2$ platí*

$$\nu_1(G) \leq \binom{3n-6}{2} = O(n^2)$$

Dôkaz. Z Eulerovho polyhedrálneho vzorca vyplýva pre počet hrán planárneho grafu nerovnosť $m \leq 3n - 6$ a keďže priesečníkov iste nie je viac ako $\binom{m}{2}$, dôkaz je skončený. \square

Kapitola 5

Algoritmus simulovaného žihania pre hľadanie $\nu_1(G)$

5.1 Popis algoritmu

Problém hľadania konvexného priesečnikového čísla pre ľubovoľný graf G sa ukázal byť NP-úplný [15], takže nájsť preň polynomiálny algoritmus sa skôr nepodarí.

Boli urobené heuristické algoritmy [1], [12], založené na *greedy* prístupe, ktoré ale nedávajú také dobré výsledky ako genetický algoritmus [13]. Porovnanie heuristik a genetického algoritmu (GA) pre niektoré triedy grafov sa dá nájsť tamtiež. Z toho sa dá usudzovať, že stochastické algoritmy sú celkom vhodné pre aproximáciu $\nu_1(G)$.

Ďalší evolučný optimalizačný prístup javiaci sa prijateľne a dávajúci porovnateľné výsledky s GA je simulované žihanie, ktoré je založené na fyzikálnom prístupe žihania tuhého telesa, keď sa z vysokej teploty postupným pomalým ochladzovaním telesa odstraňujú jeho vnútorné defekty. V našej analógii budú defektami práve priesečníky medzi hranami.

Popis algoritmu je nasledovný :

Začne sa z náhodnej permutácie p_{old} určujúcej konvexné nakreslenie grafu G s cr_{old} priesečníkmi. Aplikuje sa na ňu stochastický operátor O , ktorého výstupom je nová permutácia p_{new} . Ak bude p_{new} určovať nakreslenie s menším počtom priesečnikov, cr_{new} , tak ju akceptujeme a v ďalšom kroku aplikujeme operátor O na p_{new} a postup sa opakuje (teda $p_{old} := p_{new}$), ak nie tak len s istou pravdepodobnosťou závisiacou od teploty príjmemu p_{new} , inak sa postup znovu opakuje s p_{old} . Počas behu algoritmu sa priebežne pamätá

KAPITOLA 5. ALGORITMUS SIMULOVANÉHO ŽÍHANIA PRE HĽADANIE $\nu_1(G)$

najlepšie doterajšie riešenie. Parametre algoritmu sú operátor O , počiatočná teplota T_{start} , koeficient znižovania teploty α , koncová teplota T_{stop} , počet iterácií algoritmu pre jednu hodnotu teploty I . Na výpočet pravdepodobnosti P akceptovania permutácie p_{new} pri teplote T sa použije Metropolisovo kritérium :

$$P(old, new) = \min\left\{e^{-\frac{cr_{new}-cr_{old}}{T}}, 1\right\}$$

Ako operátor O sa použije nasledujúci algoritmus (v pseudopascal):

```
Operator(in, var out) // in je vstupná permutácia
                    // out je výstupná permutácia
begin
  out := in;
  length := Length(in); // dĺžka permutácie
  position_1 := Random(length);
  position_2 := Random(length) <> position_1;
  Exchange(out, position_1, position_2); // urobí výmenu medzi
                                         // dvomi prvkami v out
end;
```

Ostatné parametre sa empiricky ukázali byť pre testované grafy vhodné tieto :

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.95 \\ T_{Start} &= \lceil \sqrt{avg_crossing_num}/6 \rceil \\ T_{Stop} &= 0.3 \\ I &= \min\{n \times n, 50000\}\end{aligned}$$

$avg_crossing_num$ sa získa aritmetickým priemerom počtov priesečníkov zo sto náhodných nakreslení grafu G .

Pseudokód pre celý algoritmus vyzerá nasledovne :

```
Sim_Annealing(G, alpha, I, T_Stop, var out) // out je výstupná
permutácia
begin
  T_Start := GetStartTemperature(G); //init
  T := T_Start;
  new := GetPermutationOfLength(n);
  old := new;
  out := old;
  while (T>T_Stop) do begin
    for i:=1 to I do begin
      Operator(old, new);
      if P(old, new)>Random then begin
```

```
    old := new;  
    if Crossings(out) > Crossings(old) then  
        out := old;  
    end;  
end;  
T := alpha * T;  
end;  
end;
```

Algoritmus v tomto tvare a s uvedenými parametrami je možné jednoducho účinne zrýchliť bez výraznej straty na kvalite výstupu dvomi spôsobmi:

- 1. Porovnáme počet priesečníkov cr_{old} s cr_{out} , kde si uchováваме počet priesečníkov doteraz najlepšieho nájdeného riešenia, a ak $cr_{old} > jump \times cr_{out}$, vybehneme z *for* cyklu a znížime teplotu. Pričom toto testovanie vykonáme len keď $i \bmod I/ratio = 0$.
- 2. Ak sa počas $I/ratio$ prebehnutí *for* cyklu neaktualizoval výstup *out* vybehneme z *for* cyklu a znížime teplotu.

Parametre pre urýchlenie boli experimentálne zvolené takto:

```
jump = 1.1  
ratio = 5
```

V nasledujúcej časti textu sú zdokumentované výsledky dosiahnuté týmto algoritmom pre rôzne typy grafov, ich porovnanie so známymi odhadmi a heuristikou [1] podľa času behu algoritmu a podľa počtu priesečníkov vo výsledných nakresleniach. Zmenou konštant v parametroch algoritmus simulovaného žíhania môže dávať na testovaných grafoch v priemere o málo lepšie (isto nie niekoľko násobne lepšie) výsledky, aj to za cenu neúmerne vyššej časovej náročnosti.

Heuristika [1] funguje nasledovne : Pozostáva z dvoch fáz *Greedy-append* fáza a *Shifting* fáza.

1. *Greedy – append* fáza - V každom kroku vyberáme vrchol grafu podľa istého kritéria a zaradíme ho na začiatok alebo na koniec postupnosti už vybratých vrcholov. Spomínané kritérium je maximum počtu už vybratých susedov, v prípade rovnosti sa rozhodne v prospech vrchola s menším počtom nevybratých susedov. Vrchol zaradíme na tú stranu postupnosti (na začiatok alebo na koniec), na ktorej vznikne jeho pridaním menej priesečníkov medzi otvorenými hranami a hranami, ktoré majú umiestnené v postupnosti už oba

koncové vrcholy.

2. *Shifting* fáza - Každý vrchol presúvame na všetky možné pozície so zafixovaním ostatných vrcholov a necháme ho tam, kde je jeho lokálne najlepšia pozícia.

Heuristika sa znáhodnila tým, že v prípade rovnosti kritéria určujúceho, na ktorý z koncov postupnosti sa vrchol pridá, pre oba konce, sa s tou istou pravdepodobnosťou zvolí jeden z nich. Taktiež v prípade, že viac vrcholov spĺňa kritérium ďalšieho vybratého vrchola, vyberie sa jeden z nich náhodne.

Algoritmus bol testovaný na počítači s 1 GHz procesorom AMD ATHLON a operačným systémom Windows XP, zdrojový kód bol písaný v jazyku C++.

Ďalej uvedené výsledky boli získané aritmetickým spriemerovaním výsledkov desiatich spustení jednotlivých algorimov pre jednotlivé grafy.

Keďže prvý z horeuvedených spôsobov zrýchlenia nemal vplyv na kvalitu výstupu algoritmu, všetky výsledky pre sim. žíhanie boli dosiahnuté s týmto urýchlením.

[1] & sim. žíhanie znamená, že vstup pre algoritmus simulovaného žíhania, t.j. prvá permutácia, bola získaná z [1] heuristiky. Sim. žíhanie akcel. je simulované žíhanie s obomi horeuvedenými zrýchleniami.

Hodnoty v stĺpcoch :

cr - aritmetický priemer počtov priesečníkov

time - aritmetický priemer časov behov algoritmu

best - najlepší získaný výsledok počtu priesečníkov

stdev - smerodajná odchýlka pre počet priesečníkov

bound - horný odhad

5.2 Halinove grafy

Výsledky pre Halinov graf (Pre každý beh algoritmu sa generoval nový náhodný graf s daným počtom vrcholov.) :

Halinov graf s 50 vrcholmi, *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 800. Distribúcia optimálneho počtu priesečníkov (získaného z Vety 4.2.4.) bola v priemere 23 so smerodajnou odchýlkou 2.

KAPITOLA 5. ALGORITMUS SIMULOVANÉHO ŽÍHANIA PRE
HĽADANIE $\nu_1(G)$

	cr	time	best	stdev
[1]	205	40 msec.	172	23
sim. žíhanie	31	2 sec.	27	3
[1]	31	2 sec.	27	3
sim. žíhanie akcel.	31	2 sec.	26	3
[1] & sim. žíhanie akcel.	31	2 sec.	27	3

Halinov graf s 100 vrcholmi, *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 4000. Distribúcia optimálneho počtu priesečníkov (získaného z Vety 4.2.4.) bola v priemere 48 so smerodajnou odchýlkou 3.

	cr	time	best	stdev
[1]	725	300 msec.	615	68
sim. žíhanie	67	13 sec.	60	5
[1] & sim. žíhanie	69	14 sec.	64	3
sim. žíhanie akcel.	80	4 sec.	69	6
[1] & sim. žíhanie akcel.	88	4 sec.	79	8

Halinov graf s 200 vrcholmi, *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 15000. Distribúcia optimálneho počtu priesečníkov (získaného z Vety 4.2.4.) bola v priemere 98 so smerodajnou odchýlkou 4.

	cr	time	best	stdev
[1]	2691	2 sec.	2321	230
sim. žíhanie	158	86 sec.	141	13
[1] & sim. žíhanie	157	86 sec.	132	15
sim. žíhanie akcel.	195	39 sec.	175	15
[1] & sim. žíhanie akcel.	194	39 sec.	149	29

5.3 Mriežky

Výsledky pre štvorcové mriežky :

$P_8 \times P_8$, horný odhad z Vety 4.3.6. je 170. *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 2000.

KAPITOLA 5. ALGORITMUS SIMULOVANÉHO ŽÍHANIA PRE
HĽADANIE $\nu_1(G)$

	cr	time	best	stdev
[1]	323	90 msec.	307	25
sim. žíhanie	109	6 sec.	98	5
[1] & sim. žíhanie	112	6 sec.	103	7
sim. žíhanie akcel.	112	4 sec.	96	11
[1] & sim. žíhanie akcel.	116	4 sec.	98	13

$P_{16} \times P_{16}$, horný odhad z Vety 4.3.6. je 1368. *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 40000.

	cr	time	best	stdev
[1]	3242	5 sec.	2103	701
sim. žíhanie	935	315 sec.	853	49
[1] & sim. žíhanie	965	280 sec.	864	42
sim. žíhanie akcel.	998	120 sec.	876	68
[1] & sim. žíhanie akcel.	1038	110 sec.	992	45

$P_{25} \times P_{25}$, *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 240000.

	cr	time	best	stdev
[1]	12954	92 sec.	9490	2176
sim. žíhanie	4031	1110 sec.	3661	415
[1] & sim. žíhanie	5002	915 sec.	4563	270
sim. žíhanie akcel.	4571	500 sec.	3777	598
[1] & sim. žíhanie akcel.	5346	495 sec.	4892	263

5.4 Hyperkocky

Výsledky pre hyperkocky (Snáď aj optimálny horný odhad pre n -rozmernú hyperkocku je

$$\frac{1}{2}4^n - 2^{n-2}(n^2 + n + 2).):$$

6-rozmerná hyperkocka, *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 6000. Najlepší horný odhad je 1344.

KAPITOLA 5. ALGORITMUS SIMULOVANÉHO ŽÍHANIA PRE
HĽADANIE $\nu_1(G)$

	cr	time	best	stdev
[1]	2285	100 msec.	2276	15
sim. žíhanie	1394	14 sec.	1344	83
[1] & sim. žíhanie	1376	14 sec.	1344	80
sim. žíhanie akcel.	1409	10 sec.	1344	85
[1] & sim. žíhanie akcel.	1425	8 sec.	1344	109

7-rozmerná hyperkocka, *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 30000. Najlepší horný odhad je 6336.

	cr	time	best	stdev
[1]	11044	2 sec.	9871	741
sim. žíhanie	6986	169 sec.	6336	510
[1] & sim. žíhanie	7264	157 sec.	6336	593
sim. žíhanie akcel.	6833	48 sec.	6336	433
[1] & sim. žíhanie akcel.	7373	48 sec.	6336	986

8-rozmerná hyperkocka, *avg_crossing_num* sa pohybuje okolo 170000. Najlepší horný odhad je 28032.

	cr	time	best	stdev
[1]	51308	17 sec.	47259	3492
sim. žíhanie	31607	1520 sec.	29056	1453
[1] & sim. žíhanie	37286	1358 sec.	29632	5304
sim. žíhanie akcel.	33147	502 sec.	31771	668
[1] & sim. žíhanie akcel.	39572	485 sec.	32076	4836

5.5 Rôzne triedy grafov

Ďalej nasledujú výsledky získané len jedným behom algoritmu simulovaného žíhanie (v tabuľke sim) s oboma zrýchleniami (*Halin_n* je Halinov graf s *n* vrcholmi. *Q_n* je *n* rozmerná hyperkocka, *RGC(n,p)* je náhodný graf na *n* vrchoch s *p* % hrán.).

KAPITOLA 5. ALGORITMUS SIMULOVANÉHO ŽÍHANIA PRE
HĽADANIE $\nu_1(G)$

G	cr sim	time sim	$\nu_1(G)$	bound	<i>avg_crossing_num</i>
<i>Halin</i> ₅₀₀	1007	243 sec.	252		90000
<i>Halin</i> ₁₀₀₀	3305	746 sec.	505		370000
$P_{20} \times P_3$	42	2 sec.	36		1500
$P_{50} \times P_3$	162	17 sec.	96		10000
$P_{100} \times P_3$	508	99 sec.	196		40000
$P_{20} \times P_4$	93	4 sec.		72	3000
$P_{50} \times P_4$	266	49 sec.		192	20000
$P_{100} \times P_4$	947	179 sec.		392	80000
$P_{40} \times P_{40}$	35713	3238 sec.			1600000
Q_9	134360	1953 sec.		119296	880000
$RCG(100, 5)$	1946	2 sec.			10000
$RCG(100, 10)$	15768	47 sec.			40000
$RCG(100, 20)$	91356	205 sec.			160000
$RCG(200, 5)$	64247	483 sec.			160000
$RCG(200, 10)$	369461	2042 sec.			650000

Nasleduje tabuľka výsledkov pre simulované žíhanie bez druhého typu zrýchlenia.

G	cr sim	time sim	$\nu_1(G)$	bound	<i>avg_crossing_num</i>
<i>Halin</i> ₅₀₀	628	446 sec.	252		90000
<i>Halin</i> ₁₀₀₀	2411	1254 sec.	505		370000
$P_{20} \times P_3$	39	4 sec.	36		1500
$P_{50} \times P_3$	107	49 sec.	96		10000
$P_{100} \times P_3$	413	232 sec.	196		40000
$P_{20} \times P_4$	86	9 sec.		72	3000
$P_{50} \times P_4$	245	136 sec.		192	20000
$P_{100} \times P_4$	996	393 sec.		392	80000
$P_{40} \times P_{40}$	24315	4757 sec.			1600000
Q_9	135441	4285 sec.		119296	880000
$RCG(100, 5)$	1933	41 sec.			10000
$RCG(100, 10)$	15454	174 sec.			40000
$RCG(100, 20)$	90236	774 sec.			160000
$RCG(200, 5)$	63393	1640 sec.			160000
$RCG(200, 10)$	357652	3254 sec.			650000

Heuristika [1] dosahovala tieto výsledky.

G	cr [1]	time [1]	$\nu_1(G)$	bound	<i>avg_crossing_num</i>
<i>Halin</i> ₅₀₀	16262	41 sec.	252		90000
<i>Halin</i> ₁₀₀₀	62526	374 sec.	505		370000
$P_{20} \times P_3$	119	60 msec.	36		1500
$P_{50} \times P_3$	307	700 msec.	96		10000
$P_{100} \times P_3$	637	5 sec.	196		40000
$P_{20} \times P_4$	243	100 msec.		72	3000
$P_{50} \times P_4$	627	2 sec.		192	20000
$P_{100} \times P_4$	1046	16 sec.		392	80000
$P_{40} \times P_{40}$	69653	1891 sec.			1600000
Q_9	243213	164 sec.		119296	880000
$RCG(100, 5)$	3248	700 msec.			10000
$RCG(100, 10)$	20529	2 sec.			40000
$RCG(100, 20)$	106285	8 sec.			160000
$RCG(200, 5)$	85790	18 sec.			160000
$RCG(200, 10)$	442755	64 sec.			650000

5.6 Závěry

Kombinácia heuristiky [1] a simulovaného žíhania sa v drvivej väčšine prípadov ukázala ako zbytočná, pretože dávala porovnateľné alebo trochu horšie výsledky pri relatívne malom ušetrení času, čo môže byť spôsobené aj tým, že [1] heuristika skončí v nejakom lokálnom minime prehľadávacieho priestoru, z ktorého širšieho okolia má simulované žíhanie problém vyskočiť.

Druhý typ zrýchlenia algoritmu simulovaného žíhania bol z časového hľadiska výhodný, pretože výsledky, ktoré sa ním získali boli porovnateľné, aj keď o málo horšie ako v prípade bez tohto urýchlenia. [1] heuristika bola, ako sa dalo aj očakávať, rýchla, ale na druhej strane výsledky, ktoré sa ňou získali sú niekoľko násobne horšie ako pri simulovanom žíhaní.

Algoritmus simulovaného žíhania pre testované grafy s malým počtom vrcholov (do 100) dokázal nájsť v mnohých prípadoch optimálne riešenie a riešenie veľmi blízke optimu (Halinove grafy, mriežky $N \times 3$) alebo bol schopný prekonať stanovený všeobecný horný odhad (štvorcové

mriežky), pre malé hyperkocky potvrdil možnú optimálnosť horného odhadu.

U väčších z testovaných grafov sa dosahujú výsledky porovnateľné s odhadmi resp. zistenými hodnotami $\nu_1(G)$, ale nie sú až také blízke ako pre menšie grafy.

Pre každú triedu testovaných grafov potom existuje neostrá hranica počtu vrcholov, od ktorej algoritmus simulovaného žíhania začne dávať výsledky niekoľkokrát horšie od optimálnych a zdá sa, že ani zmena parametrov algoritmu ako zväčšenie T_{start} a I alebo zmenšenie α tomuto nepomôžu.

Časové výsledky sa ešte dajú bez výraznej straty na kvalite výstupu radikálne vylepšiť prestavením parametrov. Pre hustejšie grafy s väčším počtom vrcholov je T_{stop} nastavené príliš malé a v jednotlivých iteráciách algoritmu sa výstup dlho ku koncu veľmi nemení.

Faktor, ktorý celkom logicky napomáha získať lepšie výsledky je tiež symetria grafu, čo sa ukázalo v prípade hyperkociek alebo istá homogénnosť ako u mriežok.

Kapitola 6

Iné druhy nakreslení grafov

Ako bolo už spomenuté v úvode, úrovňové nakreslenia sa používajú v mnohých reálnych situáciach, keď je treba reprezentovať nejaký hierarchický systém alebo grafy ktoré vyjadrujú isté sémantické pravidlá (napr. súbor vrcholov spája nejaká spoločná vlastnosť). Konvexné nakreslenie je teda len jednou z mnohých reprezentácií grafov a je špeciálnym prípadom radiálneho nakreslenia (angl. *r*-radial *b*-bends drawing). To je také, že vrcholy grafu sú umiestnené na *r* sústredných kružníc, pričom sa kladie obmedzenie *b* na maximálny počet zakrivení (angl. bends) jednej hrany. Konvexné nakreslenie je potom 1-radial 0-bends nakreslenie.

Iným druhom je kreslenie, keď sú vrcholy umiestnené na *s* rovnobežných priamok a opäť sa obmedzuje počet zakrivení jednej hrany (angl. *s*-spine *b*-bends drawing).

Skúmali sa podmienky, za ktorých sú grafy nejakým z uvedených spôsobov nakresliteľné bez priesečníkov medzi hranami. Na túto tému bola podaná v [11] charakterizácia grafov, ktoré vieme bez hranových priesečníkov a zakrivení kresliť na ľubovoľný počet rovnobežných priamok prostredníctvom zakázaných podgrafov, ktoré nesmie graf obsahovať, ak má byť týmto spôsobom nakresliteľný.

Ďalej sú známe charakterizácie pre viaceré triedy nakreslení 1,2-spine 0,1,2-bends (1-spine 1-bend [2], 1-spine 2-bends [14], 2-spine 0-bend [5], 2-spine 1-bend [9]), pričom sa ukázalo, že už 1-spine 2-bends spôsobom sú nakresliteľné bez priesečníkov všetky planárne grafy. Taktiež prekvapujúco pre planárne grafy stačí 1-radial 1-bend nakreslenie [10]. Otvoreným problémom ostáva charakterizácia pre *k*-spine 0,1-bends nakreslenia pre $k > 2$.

V ďalšom sa bude pojednávať o počte priesečníkov v 3 úrovňovom kreslení kompletného binárneho stromu.

6.1 Horný odhad počtu priesečníkov pre 3 úrovňové nakreslenie kompletneho binárneho stromu

3 úrovňovým nakreslením D grafu G sa bude rozumieť také nakreslenie $D(G)$, v ktorom sú vrcholy umiestnené na 3 rovnobežné priamky a hrany sú kreslené ako úsečky medzi nimi, pričom hrana môže viesť iba medzi vrcholmi, ktoré sú na susedných priamkach. Teda s nakreslením môžeme stotožniť dve funkcie $o, l, o : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, zodpovedajúca usporiadaniu vrcholov (pre všetky priamky je smer usporiadania taký istý) na priamke (opäť analogicky sa definuje relácia $<_o$) a $p : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$, určujúca priamku, na ktorej je vrchol umiestnený. Platí, že ak $uv \in E$, potom $p(u) = p(v) + 1 \vee p(u) = p(v) - 1$. $tcr(D(G))$ sa označí počet priesečníkov medzi dvojicami hrán v D . Minimum z $\{tcr(D(G)) \mid D \text{ je 3 úrovňové nakreslenie grafu } G\}$ sa označí $tcr(G)$ a nazve 3 úrovňovým priesečníkovým číslom grafu G (pozn. Nie každý graf sa dá nakresliť týmto spôsobom.). Stromová terminológia je tá istá ako v časti o Halinovom grafe.

Zadefinuje sa 3 úrovňové nakreslenie D (ďalej len nakreslenie) pre kompletný binárny strom G s párnou hĺbkou $2N$, ktorého počet priesečníkov určí celkom dobrý (možno aj optimálny) horný odhad pre $tcr(G)$, opäť sa bude vrcholom priradovať typ, podľa ktorého budú umiestnení všetci jeho nasledovníci.

Vrcholom v párnej hĺbke priradíme typ z množiny

$$T = \{MD, \vec{N}D, \overleftarrow{N}D\} \cup \{MH_i, \vec{N}H_i, \overleftarrow{N}H_i \mid i \in N\}$$

funkciou $t : V \rightarrow T$. G sa začne kresliť tak, že koreň r sa umiestni na strednú priamku, t.j. $p(r) = 2$ a $t(r) = MH_0$. Je ľahké si teraz uvedomiť, že vrcholy v párnej hĺbke budú umiestnené na tej iste priamke ako koreň.

Definujú sa podmienky ($V \rightarrow \{true, false\}$), ktoré budú vysvetlené neskôr.

Nech $N - depth(v)/2 = d$ a $t(v) = NH_i$, potom

$$c_1(v) = i \geq \frac{1}{9}(4^d - 10)$$

$$c'_1(v) = i \geq \frac{1}{9}(2 \times 4^d - 11)$$

Nech $N - depth(v)/2 = d$ a $t(v) = MH_i$, potom

$$c_2(v) = i \geq \frac{1}{9}(4^d - 4)$$

$$c_2'(v) = i \geq \frac{1}{9}(2 \times 4^d - 8)$$

Nech $N - \text{depth}(v)/2 = d$ a $t(v) \in \{NH_i, MH_i\}$, potom

$$c_3(v) = i \leq \frac{1}{3}(4^d - 4)$$

Ďalšie priradenie typov vrcholov bude vyzerat' nasledovne, ak

- $t(v) = MH_i$

Ak neplatí $c_2(v)$:	Ak platí $c_2(v)$ a platí $c_3(v)$:
$t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{NH}_i$	$t(s_1(s_1(v))) = MD$
$t(s_2(s_1(v))) = MH_{i+1}$	$t(s_2(s_1(v))) = MD$
$t(s_1(s_2(v))) = MH_{i+1}$	$t(s_1(s_2(v))) = \overleftarrow{ND}$
$t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{NH}_i$	$t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{ND}$

Ak platí $c_2(v)$ a neplatí $c_3(v)$:

$t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{ND}$
$t(s_2(s_1(v))) = MD$
$t(s_1(s_2(v))) = MD$
$t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{ND}$

- $t(v) = \overleftarrow{NH}_i$

Ak neplatí $c_1(v)$:	Ak platí $c_1(v)$ a platí $c_3(v)$:
$t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{NH}_i$	$t(s_1(s_1(v))) = MD$
$t(s_2(s_1(v))) = MH_{i+1}$	$t(s_2(s_1(v))) = MD$
$t(s_1(s_2(v))) = \overleftarrow{NH}_{i+1}$	$t(s_1(s_2(v))) = \overleftarrow{ND}$
$t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{NH}_{i+1}$	$t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{ND}$

Ak platí $c_1(v)$ a neplatí $c_3(v)$:

$t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{ND}$
$t(s_2(s_1(v))) = MD$
$t(s_1(s_2(v))) = MD$
$t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{ND}$

- $t(v) = \overrightarrow{NH}_i$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Ak neplatí } c_1(v): & \text{Ak platí } c_1(v) \text{ a platí } c_3(v): \\
 t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{N}H_{i+1} & t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{N}D \\
 t(s_2(s_1(v))) = \overrightarrow{N}H_{i+1} & t(s_2(s_1(v))) = \overrightarrow{N}D \\
 t(s_1(s_2(v))) = MH_{i+1} & t(s_1(s_2(v))) = MD \\
 t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{N}H_i & t(s_2(s_2(v))) = MD
 \end{array}$$

Ak platí $c_1(v)$ a neplatí $c_3(v)$:

$$\begin{array}{l}
 t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{N}D \\
 t(s_2(s_1(v))) = MD \\
 t(s_1(s_2(v))) = MD \\
 t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{N}D
 \end{array}$$

- $t(v) = MD$

$$\begin{array}{l}
 t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{N}D \\
 t(s_2(s_1(v))) = MD \\
 t(s_1(s_2(v))) = MD \\
 t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{N}D
 \end{array}$$

- $t(v) = \overleftarrow{N}D$

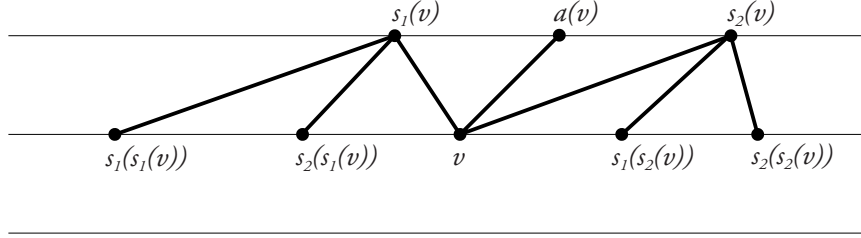
$$\begin{array}{l}
 t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{N}D \\
 t(s_2(s_1(v))) = MD \\
 t(s_1(s_2(v))) = \overleftarrow{N}D \\
 t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{N}D
 \end{array}$$

- $t(v) = \overrightarrow{N}D$

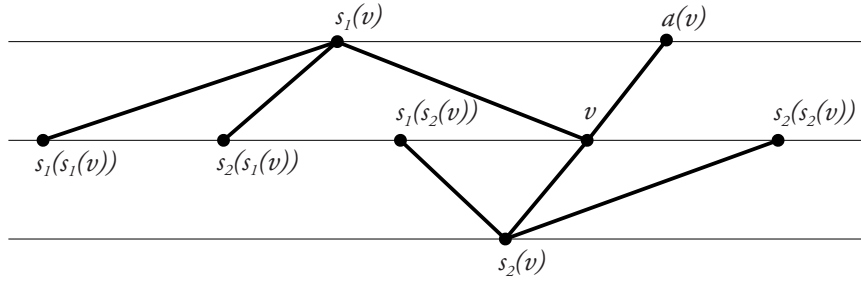
$$\begin{array}{l}
 t(s_1(s_1(v))) = \overleftarrow{N}D \\
 t(s_2(s_1(v))) = \overrightarrow{N}D \\
 t(s_1(s_2(v))) = MD \\
 t(s_2(s_2(v))) = \overrightarrow{N}D
 \end{array}$$

V závislosti na type vrchola potom umiestnenie nasledovníkov vyzerá nasledovne.

- $t(v) = MH_i$



Obrázok 6.1: Umiestnenie nasledovníkov, keď $t(v) = MH_i$ a neplatí $c_2(v)$



Obrázok 6.2: Umiestnenie nasledovníkov, keď $t(v) = MH_i$ resp. $t(v) = \overleftarrow{N}H_i$ a platí $c_2(v)$ resp. $c_1(v)$ a platí $c_3(v)$

Ak neplatí $c_2(v)$:

$$\begin{aligned} s_1(v) <_o a(v) <_o s_2(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o v <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = p(s_2) = 1 \end{aligned}$$

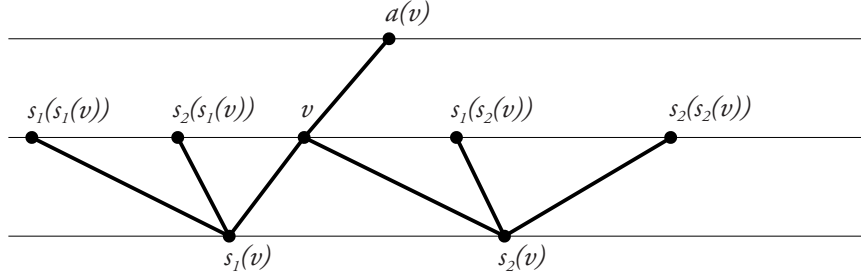
Ak platí $c_2(v)$ a platí $c_3(v)$:

$$\begin{aligned} s_1(v) <_o a(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o s_1(s_2(v)) <_o v <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = 1 \wedge p(s_2) = 3 \end{aligned}$$

Ak platí $c_2(v)$ a neplatí $c_3(v)$:

$$\begin{aligned} s_1(v) <_o s_2(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o v <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = p(s_2) = 3 \end{aligned}$$

- $t(v) = \overleftarrow{N}H_i$



Obrázok 6.3: Umiestnenie nasledovníkov, keď $t(v) = MH_i$ resp. $t(v) = \overleftarrow{N} H_i, \overrightarrow{N} H_i$ a platí $c_2(v)$ resp. $c_1(v)$ a neplatí $c_3(v)$

Ak neplatí $c_1(v)$:

$$\begin{aligned} s_1(v) <_o s_2(v) <_o a(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o s_1(s_2(v)) <_o v <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = p(s_2) = 1 \end{aligned}$$

Ak platí $c_1(v)$ a platí $c_3(v)$:

$$\begin{aligned} s_1(v) <_o a(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o s_1(s_2(v)) <_o v <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = 1 \wedge p(s_2) = 3 \end{aligned}$$

Ak platí $c_1(v)$ a neplatí $c_3(v)$:

$$\begin{aligned} s_1(v) <_o s_2(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o v <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = p(s_2) = 3 \end{aligned}$$

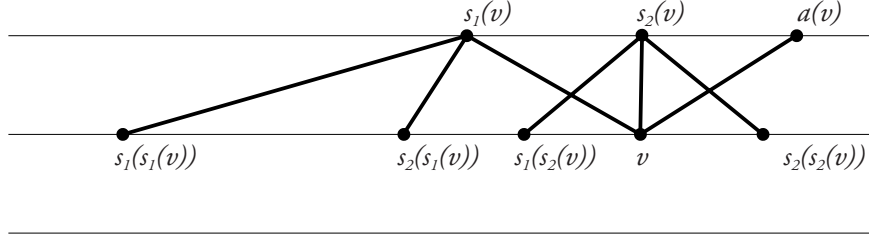
- $t(v) = \overrightarrow{N} H_i$

Ak neplatí $c_1(v)$:

$$\begin{aligned} a(v) <_o s_1(v) <_o s_2(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o v <_o s_2(s_1(v)) <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = p(s_2) = 1 \end{aligned}$$

Ak platí $c_1(v)$ a platí $c_3(v)$:

$$\begin{aligned} a(v) <_o s_2(v) \\ s_1(s_1(v)) <_o v <_o s_2(s_1(v)) <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v)) \\ p(s_1) = 3 \wedge p(s_2) = 1 \end{aligned}$$



Obrázok 6.4: Umiestnenie nasledovníkov, keď $t(v) = \overleftarrow{N} H_i$ a neplatí $c_1(v)$

Ak platí $c_1(v)$ a neplatí $c_3(v)$:

$$s_1(v) <_o s_2(v)$$

$$s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o v <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v))$$

$$p(s_1) = p(s_2) = 3$$

- $t(v) = MD$

$$s_1(v) <_o a(v) <_o s_2(v)$$

$$s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o v <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v))$$

$$p(s_1) = p(s_2) = 3$$

- $t(v) = \overleftarrow{N} D$

$$s_1(v) <_o s_2(v) <_o a(v)$$

$$s_1(s_1(v)) <_o s_2(s_1(v)) <_o s_1(s_2(v)) <_o v <_o s_2(s_2(v))$$

$$p(s_1) = p(s_2) = 3$$

- $t(v) = \overrightarrow{N} D$

$$a(v) <_o s_1(v) <_o s_2(v)$$

$$s_1(s_1(v)) <_o v <_o s_2(s_1(v)) <_o s_1(s_2(v)) <_o s_2(s_2(v))$$

$$p(s_1) = p(s_2) = 3$$

Navyše o nakreslení platí nasledujúce (Podmienka hovorí o tom, že vrcholy ľubovoľného podstromu sú umiestnené tesne vedľa seba.):

$$(\forall v \in V) (\forall u \in V) X = \{o(w) \mid w \in \text{Subtree}(v) \wedge p(w) = p(u)\} \\ (\min(X)) \leq o(u) \leq (\max(X)) \Rightarrow u \in \text{Subtree}(v)$$

Nasledujúce funkcie počítajú počet priesečníkov, ktoré vzniknú medzi hranami $Subtree(v)$ (opäť $d = N - depth(v)/2$), ak $t(v) = MD$:

$$F_1(d) = 4^d \left(\frac{4}{3}d - \frac{16}{9} \right) + \frac{16}{9}$$

ak $t(v) = ND$:

$$F_2(d) = 4^d \left(\frac{4}{3}d - \frac{10}{9} \right) + \frac{10}{9}$$

Podmienky $c_1, c_2, c'_1, c'_2, c_3$ vzniknú úpravou nasledujúcich nerovností a hovoria nám, kedy je vhodné podstrom $Subtree(v)$ kresliť medzi druhú a tretiu priamku resp. kedy "nakreslenie prvých úrovní podstromu $Subtree(v)$ medzi prvú a druhú priamku už nie je výhodné". Keďže pre v , ktoré nie je list, platí, že $c_3 \Rightarrow c'_1$ a $c_3 \Rightarrow c'_2$, v definícií funkcie f sa nepoužijú.

$$t(v) = MH_i, NH_i$$

$$\gamma_1(i, d) \text{ resp. } c_1(v) : 3i + 2F_1(d-1) + 2F_2(d-1) \leq 6i + 2 + 4F_1(d-1)$$

$$\gamma'_1(i, d) \text{ resp. } c'_1(v) : F_1(d) \leq 6i + 2 + 4F_1(d-1)$$

$$\gamma_2(i, d) \text{ resp. } c_2(v) : 3i + 2F_1(d-1) + 2F_2(d-1) \leq 6i + 4F_1(d-1)$$

$$\gamma'_2(i, d) \text{ resp. } c'_2(v) : F_1(d) \leq 6i + 4F_1(d-1)$$

$$\gamma_3(i, d) \text{ resp. } c_3(v) : 3i + 2F_1(d-1) + 2F_2(d-1) \leq F_1(d)$$

Definuje sa funkcia $f(N, i, y) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{true, false\} \rightarrow \mathbb{N}$

- $\neg\gamma_1(i, N) :$

$$f(N, i, false) = 6i + 2 + f(N-1, i, false) + 2f(N-1, i+1, false) + f(N-1, i+1, true)$$

- $\gamma_1(i, N) \wedge \gamma_3(i, N) :$

$$f(N, i, false) = 2F_1(N-1) + 2F_2(N-1) + 3i$$

- $\gamma_1(i, N) \wedge \neg\gamma_3(i, N)$:

$$f(N, i, false) = F_1(N)$$

- $\neg\gamma_2(i, N)$:

$$f(N, i, true) = 6i + 2f(N - 1, i, false) + 2f(N - 1, i + 1, true)$$

- $\gamma_2(i, N) \wedge \gamma_3(i, N)$:

$$f(N, i, true) = 2F_1(N - 1) + 2F_2(N - 1) + 3i$$

- $\gamma_2(i, N) \wedge \neg\gamma_3(i, N)$:

$$f(N, i, true) = F_1(N)$$

$tcr(G)$ sa teraz zhora ohraničí výrazom $f(N, 0, true)$.

Veta 6.1.1. *Pre kompletný binárny strom G hĺbky $2N$ platí*

$$trc(G) \leq f(N, 0, true)$$

Dôkaz. Nakreslenie D obsahuje práve $f(N, 0, true)$ priesečníkov a tým je dôkaz skončený. \square

Kapitola 7

Záver

V mojej práci som podal presné $\nu_1(G)$ pre Halinov graf a mriežky $P_N \times P_3$. Tieto výsledky sme dosiahli v [7], no tam boli uvedené bez dôkazu horného odhadu pre Halinov graf. Ukazuje sa, že hľadať $\nu_1(G)$ pre iné známe triedy grafov ako hyperkocky, všeobecné mriežky $P_N \times P_M$ je problematickejšie. Ťažké je najmä dokazovať dobrý dolný odhad, aj keď intuitívne o jeho platnosti môžeme byť presvedčený napríklad ako v prípade hyperkociek.

Preto som určil pre mriežky $P_N \times P_M$ len horný odhad a ukázal, že iný, možno intuitívnejší prístup ako kresliť mriežku $P_N \times P_M$, a to podľa Hamiltonovskej kružnice, nedá lepší výsledok. Zaujímavým otvoreným problémom ostáva teda, aká je presná hodnota $\nu_1(P_N \times P_M)$ resp. presnejší odhad zhora aj zdola.

Pre planárne grafy som konvexné priesečníkové číslo asymptoticky zhora ohraničil a ukázal, že existuje graf, ktorý ho dosiahne.

Ďalej som získané výsledky použil pri oceňovaní a porovnávaní kvality heuristiky [1] a algoritmu simulovaného žihania aplikovaného na tento problém, ktorý sa pre malé grafy (do 100 vrcholov) približoval alebo dosahoval presné výsledky alebo aj prekonával stanovené všeobecné horné odhady. Heuristika [1] sa ukázala ako oveľa rýchlejšia, ale dávala výsledky niekoľkokrát horšie ako simulované žihanie. Spojenie tejto heuristiky a algoritmu simulovaného žihania tak, že mi heuristika predpripravila vstup pre sim. žihanie nedávalo lepšie výsledky a ani časovo nebolo výhodnejšie.

V poslednej časti som spomenul iné aktuálne skúmané grafové nakreslenia, ktorých špeciálnym prípadom je konvexné nakreslenie a podal horný odhad pre 3 úrovňové nakreslenie kompletného binárneho stromu.

Literatúra

- [1] Baur M., Brandes U., *Crossing reduction in circular layouts*, to appear in Proceedings of WG'2004.
- [2] Bernhart F., Kainen P., *The book thickness of the graph*, Journal Combinatorial Theory, Series B, 27(3):320-331, 1979.
- [3] Bollobás B., Leader I., Edge-isoperimetric inequalities in the grid, *Combinatorica*, **11** (1991), 299-314.
- [4] Chung F.R.K., Füredi Z., R.L. Graham, P.D. Seymour: On induced subgraphs of the cube, J. Comb. Theory **A-49** (1988), 180-187.
- [5] Cornelsen S., Schank T., and Wagner D.: Drawing graphs on two and three lines. In *Graph Drawing (Proc. GD'02)*, volume 2528 of LNCS, pages 31-41. Springer Verlag, 2002.
- [6] Czabarka É., Sýkora O., Székely L. A., and Vrto I., *Outerplanar Crossing Numbers, Circular Arrangement Problem, and Isoperimetric Functions*
- [7] Fulek R., He H., Sýkora O., Vrto I., *Outerplanar Crossing Numbers of 3-Row Meshes, Halin Graphs and Complete p-Partite Graphs.*, SOFSEM, (2005), 376-379.
- [8] Gazit H., and Miller G., *Planar separators and Euclidean norm*, Algorithms, Proc. Int. Symp. SIGNAL '90, Lecture Notes in Computer Science **450** (Springer, 1990), 338-347.
- [9] Di Giacomo E., Didimo W., Liotta G., and Suderman M. J.: Hamiltonian-with-handles graphs and k-spine drawability problem. In *Graph Drawing (Proc. Gd'04)*, LNCS. Springer-Verlag, 2005.
- [10] Di Giacomo E., Didimo W., Liotta G., and Wismath S. K.: Curve-constrained drawing of planar graphs. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2005.

- [11] Healy P., Kuusik A., and Leipert S.: Characterization of Level Non-Planar Graphs by Minimal Patterns, 2000.
- [12] He H., Sýkora O., *New Circular Drawing Algorithms*, to appear in ITAT'04.
- [13] He H., Newton M. C., Sýkora O., *Genetic Algorithms for Bipartite and Outerplanar Graph Drawings are Best!*, SOFSEM 2005 Communications, Slovak Society for Computer Science, Bratislava, 51-60.
- [14] Kaufmann M., Wiese R. *Embedding vertices at points: Few bends suffice for planar graphs.*, Journal of Graph Algorithms and Applications, 6(1):115-129, 2002.
- [15] Masuda S., Kashiwabara T., Nakajima K., and Fujisawa T., *On the NP completeness of a computer network layout problem*, in: *Proc. IEEE Intl. Symposium on Circuits Systems 1987*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 1987, 292-295.
- [16] Purchase H., *Which aesthetic has the greatest effect on human understanding ?*, in: *Proc. Symposium on Graph Drawing, GD'97*, Lecture Notes in Computer Science **1353** Springer, 1997, 248-261.
- [17] Riskin A., *On the outerplanar crossing number of $K_{m,n}$* , Bulletin ICA **39**, (2003), 7 -15.
- [18] Shahrokhi F., Sýkora O., Székely L. A., and Vrto I., *Book Embeddings and Crossing Numbers*, in: *Proc. 20th Intl. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'94*, Lecture Notes in Computer Science **903**, Springer, 1997, 256–268.
- [19] Shahrokhi F., Sýkora O., Székely L.A., and Vrto I., *Towards the theory of convex crossing numbers*, in: *Towards a theory of Geometric Graphs*, ed. J. Pach, Contemporary Mathematics, **342** American Mathematical Society, Providence 2004, 249–258.