



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

NAJKRATŠIE POKRYTIE GRAFU CYKLAMI

(Diplomová práca)

RUDOLF STAROVSKÝ

Školiteľ: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava 2010

Najkratšie pokrytie grafu cyklami

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Rudolf Starovský

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY**

Študijný odbor: 9.2.1 Informatika

Vedúci diplomovej práce
RNDr. Edita Máčajová, PhD.

BRATISLAVA 2010

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vy-
pracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

.....

Podakovanie

Ďakujem mojej školiteľke RNDr. Edite Máčajovej, PhD.
za konzultácie a cenné rady, za ponuknutie témy a po-
skytnutie literatúry.

Abstrakt

Autor: Rudolf Starovský

Názov práce: Najkratšie pokrytie grafu cyklami

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra informatiky

Vedúci: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava 2010

V tejto diplomovej práci sa venujeme téme Najkratších pokrytí cyklami. Zvlášť sme sa zamerali na kubické grafy a skúmanie niektorých známych nekonečných tried snarkov, ktoré dosahujú dolné hranice pre celkovú dĺžku ako aj počet cyklov pokrytia. Všímame si súvislosť s problémom pokrytia grafu štyrmi 1-faktormi. Podobne sa zaoberáme aj prepojením s problémom dvojitého pokrytia cyklami a prechádzky čínskeho poštára. Na základe overenia vlastností pre snarky na malom počte vrcholov vyslovujeme niekoľko hypotéz, ktoré sa týkajú tohto prepojenia.

Ako prílohu prikladáme program na nájdenie najkratšieho pokrytia cyklami kubického grafu a niektoré programy, ktoré sme používali počas ove-

rovania spomínaných vlastností.

Kľúčové slová: Najkratšie pokrytie cyklami, cykly, kružnice, snarky, pokrytie 1-faktormi, dvojité pokrytie cyklami, prechádzka čínskeho poštára

Predhovor

Za tému mojej diplomovej práce som si zvolil najkratšie pokrytie grafu cyklami. Pri výbere témy diplomovej práce som sa rozhodol pokračovať v oblasti teórie grafov, nakoľko tejto oblasti som sa venoval už aj v bakalárskej práci, ktorá sa zaoberala témou cyklickej hranovej súvislosti kubických grafov.

Tak ako cyklická hranová súvislosť, ani najkratšie pokrytie cyklami sa nezaraďuje k základným témam teórie grafov, pri štúdiu rôznych článkov ma však zaujal súvis s ďalšími témami, či otvorenými problémami z teórie grafov.

Okrem zhrnutia základných poznatkov a preskúmania tejto oblasti so zameraním na kubické grafy, prikladám aj programy, pomocou ktorých sa dá nájsť najkratšie pokrytie cyklami, ako i ďalšie programy, ktoré som využíval pri overovaní niektorých vlastností a hypotéz.

Obsah

1	Úvod	17
1.1	Základné pojmy	18
1.2	Štruktúra práce	19
2	Prehľad	20
2.1	Najkratšie pokrytie cyklami	20
2.2	NP-úplnosť	21
2.3	Prechádzka čínskeho poštára a najkratšie pokrytie cyklami . .	24
2.4	Dvojité pokrytie a najkratšie pokrytie cyklami	25
2.5	Krátke pokrytia cyklami a toky	26
2.5.1	Tuttova hypotéza o 3-toku a krátke pokrytie cyklami .	33
2.6	Pokrytie grafu cyklami v závislosti od počtu vrcholov	34
3	Najkratšie pokrytie cyklami niektorých snarkov	36
3.1	Základné vlastnosti najkratšieho pokrytia cyklami	37
3.2	Isaacsove snarky	39
3.2.1	Vonkajšia a vnútorná kružnica	40
3.2.2	Najkratšie pokrytie cyklami Isaacsových snarkov	42

3.3	Goldbergove snarky	43
3.3.1	Pokrývajúce kružnice	45
3.3.2	Najkratšie pokrytie cyklami Goldergových snarkov . . .	46
3.4	Zovšeobecnené Blanušove snarky	47
3.4.1	Pokrývajúce kružnice	48
3.4.2	Najkratšie pokrytie cyklami zovšeobecnených Blanušových snarkov	51
3.5	Najkratšie cyklové pokrytie a pokrytie 1-faktormi	52
3.5.1	Pokrytie 1-faktormi	52
3.5.2	Ekvivalencia najkratšieho pokrytia cyklami a pokrytia 1-faktormi	54
3.6	Szekeresove snarky	55
3.6.1	Najkratšie pokrytie cyklami Szekeresovho snarku S_1	58
3.6.2	Najkratšie pokrytie cyklami pre celú triedu Szekeresových snarkov	59
3.7	Zhrnutie	60
4	Prechádzka čínskeho poštára a Dvojité pokrytie cyklami	62
4.1	Prechádzka čínskeho poštára	63
4.2	Dvojité pokrytie cyklami	64
4.2.1	Overovanie Hypotézy 4.2.1	67
4.2.2	Overovanie Hypotézy 4.2.3	68
4.2.3	Spresnenie hypotéz	69
5	Algoritmy	71

5.1	Algoritmus na pokrytie kubického grafu cyklami	71
5.2	Algoritmus pre hľadanie 1-faktorov	76
5.3	Algoritmus pre hľadanie prípustných váh	78
6	Záver	80
A	Príloha	82

Zoznam obrázkov

1.1	Najkratšie pokrytie cyklami Petersenovho grafu	17
2.1	graf H	22
3.1	Element Isaacsovho snarku	39
3.2	Isaacsov snark I_5	40
3.3	Vonkajšia kružnica D_5 Isaacsovho snarku I_5	41
3.4	Vnútná kružnica D_k ľubovoľného Isaacsovho snarku	42
3.5	Základný element Goldbergových snarkov	44
3.6	Goldbergov snark G_5	44
3.7	Prvý a druhý typ kružníc na Goldbergových snarkoch	45
3.8	Pokrytie cyklami Goldbergovho snarku G_5	46
3.9	Zovšeobecnené Blanušove snarky 1. typu (hore) a 2. typu(dolu)	48
3.10	Prvý a druhý typ kružníc	49
3.11	Najkratšie pokrytie cyklami zovšeobecnených Blanušových snarkov B_3^1 (hore) a B_3^2 (dolu)	50
3.12	Základný element Szekeresových snarkov a jeho zjednodušené znázornenie	55
3.13	Základný blok Szekeresových snarkov	56

3.14	Szekeresov snark S_2 s dvomi základnými blokmi	57
3.15	Szekeresov snark S_1 s 50 vrcholmi	57
3.16	Rozširovanie Szekeresových snarkov	58
3.17	Kružnice C_1 (červená) a D_1 (modrá) tvoria 2-faktor, keďže sú nepárnej dĺžky sú dobrým párom. Krúžkom zvýraznené vr- choly sú koncovými vrcholmi hrán tvoriacich dobrú trojicu. . .	59
3.18	Štyri 1-faktory pokrývajúce Szekeresov snark	60
3.19	Najkratšie pokrytie cyklami Szekeresovho snarku S_1	61

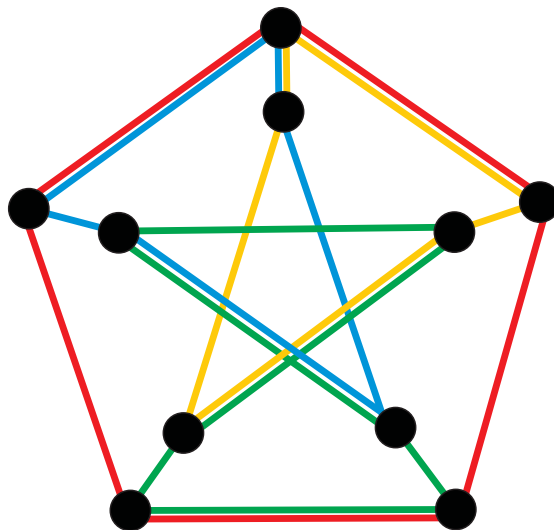
Zoznam tabuliek

4.1	Platnosť Hypotézy 4.2.1 na triede snarkov do 28 vrcholov . . .	67
4.2	Platnosť Hypotézy 4.2.3 na snarkoch, pre ktoré platí	
	Hypotéza 4.2.1	68

Kapitola 1

Úvod

V tejto práci sa budeme zaoberať najkratším pokrytím grafu cyklami. Alon a Tarsi vyslovili hypotézu [AT85], ktorá tvrdí, že pre každý graf existuje pokrytie cyklami, ktorého celková dĺžka je najviac $\frac{7}{5}$ počtu hrán grafu.



Obr. 1.1: Najkratšie pokrytie cyklami Petersenovho grafu

Spomedzi všetkých cyklicky hranovo 4-súvislých grafov vyniká Petersenov graf, ktorý je z nich jediný známy s vlastnosťou, že jeho najkratšie pokrytie cyklami dosahuje práve hodnotu $\frac{7}{5}$ počtu hrán. Obrázok 1.1 znázorňuje najkratšie pokrytie cyklami Petersenovho grafu.

1.1 Základné pojmy

I keď niektoré tvrdenia uvádzané v tejto práci platia aj pre grafy, ktoré obsahujú viacnásobné hrany a slučky, kvôli jednoduchosti a lepšej čitateľnosti budeme mať pod pojmom *graf* na mysli taký graf, ktorý viacnásobné hrany a ani slučky neobsahuje. Pod *cyklom* budeme rozumieť taký podgraf, ktorý má všetky stupne vrcholov párne. *Pokrytie grafu cyklami* je množina cyklov, taká, že každá hrana grafu je pokrytá aspoň jedným z týchto cyklov. *Dĺžkou pokrytia* budeme rozumieť celkovú dĺžku týchto cyklov.

Pri hľadaní najkratšieho pokrytia cyklami nás zaujíma také pokrytie cyklami, ktorého dĺžka je najmenšia. Jeden graf môže mať viacero najkratších pokrytí cyklami.

Kružnica je súvislý podgraf, ktorý má všetky stupne vrcholov 2. Cyklus nemusí byť vždy súvislý, môže byť tvorený napríklad viacerými kružnicami.

Operáciu *symetrickej diferencie* dvoch cyklov budeme označovať symbolom \triangle . Touto operáciou medzi cyklami C_1, C_2 vzniká nový cyklus $C_1 \triangle C_2$, ktorý obsahuje všetky hrany, ktoré sa nachádzajú práve v jednom z cyklov C_1, C_2 .

1.2 Štruktúra práce

V druhej kapitole uvedieme základné definície a vlastnosti, súvislosti s niektorými ďalšími problémami, hypotézy, ktoré sa skúmajú, ako aj tvrdenia, ktoré už boli dokázané.

V ďalších kapitolách opisujeme výsledky nášho skúmania. V tretej kapitole sa venujeme niektorým známym nekonečným triedam snarkov, presne určujeme dĺžku najkratšieho pokrytia cyklami pre tieto triedy. Taktiež sa zaoberáme minimálnym počtom cyklov potrebných pre najkratšie pokrytie cyklami. Ukážeme súvislosť s pokrytím grafu štyrmi 1-faktormi.

Vo štvrtej kapitole sa venujeme prepojeniu s problémami najkratšej prechádzky čínskeho poštára a dvojitého pokrytia cyklami. Uvádzame niektoré hypotézy, ktoré vyplynuli zo skúmania snarkov s malým počtom vrcholov.

Napokon v piatej kapitole sa venujeme popisu algoritmu, ktorý sme navrhli pre hľadanie najkratšieho pokrytia cyklami ako aj ďalším algoritmom, ktoré sme používali.

Kapitola 2

Prehľad

V tejto kapitole poskytneme základné informácie o probléme krátkeho pokrytia cyklami, definície, hypotézy a tvrdenia, ktoré sa už podarilo dokázať.

2.1 Najkratšie pokrytie cyklami

Pri pokrytí grafu cyklami, hľadáme takú množinu cyklov, že každá hrana bude pokrytá s niektorým z týchto cyklov.

Pokrytie cyklami má každý bezmostový graf. Vyplýva to z jednoduchého pozorovania, pretože žiaden cyklus nemôže pokrývať most, a ak hrana, nie je mostom, musí byť súčasťou niektorého cyklu.

Definícia 2.1.1. *Nech G je graf bez mostu. Pokrytie grafu G cyklami, ktoré má najmenšiu celkovú dĺžku sa nazýva najkratšie pokrytie cyklami grafu G .*

Termín *Najkratšie pokrytie cyklami* pochádza z anglického názvu *Shortest cycle cover*.

Nasledujúca hypotéza [AT85] sa snaží nájsť horný odhad dĺžky najkratšieho pokrytia cyklami pre všetky bezmostové grafy.

Tvrdenia uvedené v tejto kapitole kladú podmienky na grafy, aby sa priblížili k tomuto hornému odhadu.

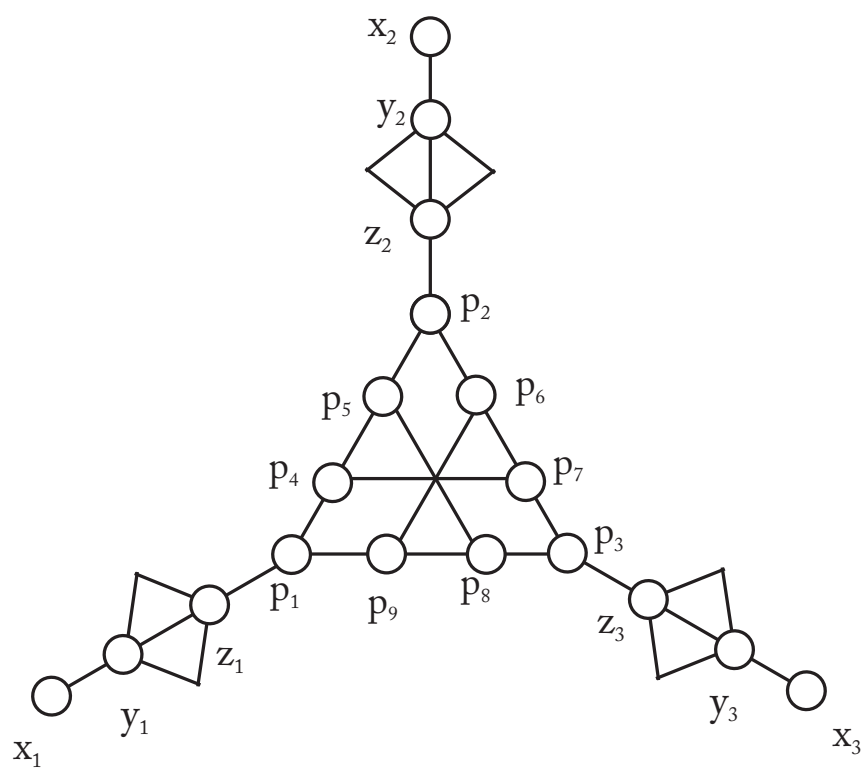
Hypotéza 2.1.1. (*Alon, Tarsi*) *Nech G je bezmostový graf. Potom G má pokrytie cyklami s celkovou dĺžkou najviac $\frac{7}{5}|E(G)|$.*

2.2 NP-úplnosť

Pri probléme najkratšieho pokrytia cyklami potrebujeme rozhodnúť, či pre daný bezmostový graf G a celé číslo K existuje pokrytie cyklami grafu G , pričom jeho dĺžka bude najviac K . Thomassen dokázal [Tho97], že tento problém patrí medzi NP-úplné problémy. Budeme vychádzať z popisu, ktorý sa nachádza v [Zha97]. Využíva sa redukcia z problému hranového 3-zafarbenia grafu, ktorý je tiež NP-úplný [Hol81].

Z grafu H na obrázku 2.1 dostaneme Petersenov graf ak odstránime vrcholy y_i a x_i ($i = 1, 2, 3$) a vrcholy z_i stotožníme do jedného vrchola ($i = 1, 2, 3$).

Pod označením $H(k, q)$ budeme rozumieť taký graf, ktorý vznikne nahradením hrán spájajúcich y_i a z_i ($i = 1, 2, 3$) cestami dĺžky k a nahradením hrán medzi vrcholmi p_i a p_j (pre každé i, j , pre ktoré sú vrcholy spojené hranou), cestami dĺžky q . Pod termínom *pokrytie cestami a cyklami* budeme rozumieť takú množinu ciest a cyklov, že každá hrana $H(k, q)$ je nimi aspoň raz pokrytá a každá cesta spája niektoré dva vrcholy spomedzi x_i ($i = 1, 2, 3$). Počet ciest vychádzajúcich z x_i označíme s_i ($i = 1, 2, 3$) a takéto pokrytie ces-



Obr. 2.1: graf H

tami a cyklami grafu H budeme označovať ako (s_1, s_2, s_3) -pokrytie.

Keďže každá cesta má dva konce, tak $s_1 + s_2 + s_3$ je vždy párne a pretože graf H je symetrický môžeme predpokladať, že $s_1 \leq s_2 \leq s_3$.

Ďalej budeme využívať nasledujúcu lemu [Tho97].

Lema 2.2.1. (*Thomassen*) *Ak $k \geq 16(q + 1) > 80$, potom celková dĺžka ciest a cyklov (s_1, s_2, s_3) -pokrytia $H(k, q)$ je aspoň $16q + 10k + 12$. Rovnosť nastáva len pre $(s_1, s_2, s_3) = (1, 2, 3)$.*

Teraz ukážeme ako sa dá problém hranového 3-zafarbenie polynomiálne previesť na problém najkratšieho pokrytia cyklami grafu. Otázka pri probléme hranového 3-zafarbenia znie, či je možné daný bezmostový kubický graf hranovo zafarbiť tromi farbami.

Predpokladajme teraz, že máme bezmostový kubický graf G s počtom vrcholov n . Každú hranu grafu G rozdelíme tak, že do nej vložíme nový vrchol. Množinu vložených vrcholov označíme ako V_2 , pretože ich stupeň je 2. Každý vrchol, ktorý má stupeň 3, nahradíme grafom $H(100, 5)$. Získame tak graf G' .

Budeme tvrdiť, že graf G je hranovo 3-zafarbiteľný, práve vtedy keď graf G' má pokrytie cyklami s celkovou dĺžkou najviac $1092n$.

Ukážeme, že toto tvrdenie je pravdivé. Predpokladajme, že graf G' má pokrytie cyklami s dĺžkou najviac $1092n$. Podľa predchádzajúcej lemy má graf $H(100, 5)$ pokrytie cestami a cyklami s dĺžkou aspoň 1092, pričom dĺžka je práve 1092, ak ide o $(1, 2, 3)$ -pokrytie. Aby bol predpoklad nášho tvrdenia splnený, musí byť každý $H(100, 5)$ podgraf v grafe G' pokrytý $(1, 2, 3)$ -pokrytím. Aby bolo pokrytie cyklami korektné musí sa v každom vrchole z množiny V_2 stretať rovnaký počet ciest, ktoré pokrývajú grafy $H(100, 5)$.

Tento počet ciest určuje farbu hrany, ktorú tento vrchol rozdelil. A teda graf G sa dá zafarbiť tromi farbami.

Podobne ak existuje hranové 3-zafarbenie grafu G , vrcholy z množiny V_2 v grafe G' zafarbíme podľa farby hrany, na ktorej ležia. Takto získame aj príslušný počet ciest v (s_1, s_2, s_3) -pokrytí pre podgrafy $H(100, 5)$ pre jednotlivé vrcholy x_i . Dĺžka celkového pokrytia grafu G' cyklami potom bude $1092n$.

2.3 Prechádzka čínskeho poštára a najkratšie pokrytie cyklami

V tejto časti uvedieme súvislosť medzi prechádzkou čínskeho poštára a najkratším pokrytím grafu cyklami. Najskôr uvedieme definíciu prechádzky čínskeho poštára.

Definícia 2.3.1. *Nech G je súvislý graf. Uzavretý ťah T v G , ktorý obsahuje všetky hrany grafu G sa nazýva poštárova prechádzka. Poštárova prechádzka s najkratšou dĺžkou sa nazýva prechádzka čínskeho poštára.*

Ako vidieť z Definície 2.3.1 najkratšie pokrytie cyklami a prechádzka čínskeho poštára sú navzájom podobné problémy. Uvedieme za akých okolností budeme hovoriť, že tieto problémy sú ekvivalentné.

Definícia 2.3.2. *Nech G je hranovo 2-súvislý graf. Ak sa celková dĺžka najkratšieho pokrytia cyklami grafu G rovná dĺžke prechádzky čínskeho poštára, potom hovoríme, že problém najkratšieho pokrytia cyklami a problém prechádzky čínskeho poštára sú pre graf G ekvivalentné.*

Problém prechádzky čínskeho poštára a problém najkratšieho pokrytia cyklami nie je ekvivalentný pre Petersenov graf. Dĺžka prechádzky čínskeho poštára je 20, ale dĺžka najkratšieho pokrytia cyklami je 21. Dôkaz možno nájsť v [IR78]. Nasledujú dve vety, ktoré opisujú za akých podmienok sú tieto problémy ekvivalentné. Tieto vety sú dokázané v [Jac90], [Zha90], resp. [AGZ94]. Možno ich nájsť aj v [Zha97].

Veta 2.3.1. (*Jackson, Zhang*) *Problém prechádzky čínskeho poštára a problém najkratšieho pokrytia cyklami sú ekvivalentné pre hranovo 2-súvislé grafy pripúšťajúce 4-tok. Navyše, pre každý graf G pripúšťajúci nikde-nulový 4-tok, G má najkratšie pokrytie cyklami \mathcal{F} , pričom $|\mathcal{F}| \leq 3$ a \mathcal{F} pokrýva každú hranu minimálneho paritného podgrafu P dvakrát a všetky ostatné raz.*

Veta 2.3.2. (*Alspach, Goddyn, Zhang*) *Problém prechádzky čínskeho poštára a problém najkratšieho pokrytia cyklami sú ekvivalentné pre hranovo 2-súvislé grafy, ktoré neobsahujú subdivíziu Petersenovho grafu. Navyše, pre každý graf ktorý neobsahuje subdivíziu Petersenovho grafu, G má najkratšie pokrytie cyklami \mathcal{F} , pričom $|\mathcal{F}| \leq 3$ a \mathcal{F} pokrýva každú hranu minimálneho paritného podgrafu P dvakrát a všetky ostatné raz.*

2.4 Dvojité pokrytie a najkratšie pokrytie cyklami

V tejto časti uvedieme vzťah medzi hypotézami, ktoré sú známe o dvojitom pokrytí cyklami a najkratšom pokrytí cyklami. Szekeres [Sze73] a Seymour [Sey79] vyslovili túto hypotézu.

Hypotéza 2.4.1. (*Szekeres, Seymour*) *Pre každý bezmostový graf G , existuje taká množina cyklov \mathcal{F} , že každá hrana grafu G je pokrytá práve dvomi cyklami z množiny \mathcal{F} .*

Podľa nasledujúcej vety, Hypotéza 2.1.1 implikuje Hypotézu 2.4.1. Dôkaz vety možno nájsť v [JT92].

Veta 2.4.1. (*Jamshy, Tarsi*) *Ak má každý bezmostový graf s m hranami najkratšie pokrytie cyklami s celkovou dĺžkou najviac $\frac{7}{5}m$, potom každý bezmostový graf má dvojité pokrytie cyklami.*

2.5 Krátke pokrytia cyklami a toky

V tejto časti sa budeme zaoberať súvislosťou tokov a krátkych pokrytí cyklami. Pri definovaní toku budeme vychádzať z [Zha97].

Definícia 2.5.1. *Nech G je ľubovoľný graf, nech D je orientácia $E(G)$, nech f je funkcia $E(G) \rightarrow H$, kde H je abelovská grupa. Nech $E^+(v)$ je množina všetkých šípov z $D(G)$, ktoré vychádzajú z vrchola v a nech $E^-(v)$ je množina všetkých šípov z D , ktoré vchádzajú do vrchola v .*

Ďalej nech

$$f^+(v) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \quad \text{a} \quad f^-(v) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e)$$

Potom tokom sa nazýva usporiadaná dvojica (D, f) , pre ktorú platí

$$f^+(v) = f^-(v)$$

pre každý vrchol $v \in V(G)$.

Definícia 2.5.2. (1) Pod pojmom celočíselný tok (D, f) rozumieme tok na G s funkciou f , ktorej oborom hodnôt sú celočíselné hodnoty.

(2) Pod pojmom k -tok budeme rozumieť celočíselný tok (D, f) , pre ktorý platí $|f(e)| < k$ pre všetky $e \in E(G)$.

(3) Podpora toku (D, f) je množina všetkých hrán G , pre ktoré $f(e) \neq 0$, budeme ju označovať $\text{supp}(f)$.

(4) Tok (D, f) grafu G sa nazýva nikde-nulový ak $\text{supp}(f) = E(G)$.

Teraz uvedieme niekoľko viet, ktoré popisujú súvislosť krátkych pokrytí a tokov. Na dôkaz nasledujúcej vety nám vystačia základné poznatky z teórie grafov.

Veta 2.5.1. Nech $G = (V, E)$ je graf, ktorý pripúšťa nikde-nulový 4-tok. Potom graf G má pokrytie 2 cyklami s dĺžkou najviac $\frac{4}{3}|E(G)|$.

Dôkaz. Ak graf G pripúšťa nikde-nulový 4-tok, potom pripúšťa aj nikde-nulový $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -tok. Hrany incidentné s ľubovoľným vrcholom majú teda hodnotu toku buď $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, pričom parita jednotlivých hodnôt pre hrany incidentné s vrcholom musí byť rovnaká, aby ich súčet bol nulový.

Bez straty na všeobecnosti predpokladajme, že počet hrán pre ktoré je hodnota toku $(1, 1)$, nie je menší ako počet hrán s hodnotou $(1, 0)$, a ten nie je menší ako počet hrán s hodnotou $(0, 1)$. Ak z grafu odstránime hrany, ktoré majú hodnotu toku $(1, 1)$, graf, ktorý zostane, bude mať všetky stupne párne, a teda obsahuje uzavretý eulerovský ťah. Dostaneme prvý cyklus. Podobne dostaneme druhý cyklus ak odstránime hrany, ktoré majú hodnotu toku $(1, 0)$.

Celková dĺžka týchto cyklov je najviac $\frac{4}{3}|E(G)|$, pretože obidvomi cy-

klami budú pokryté len hrany, ktoré majú hodnotu toku $(0, 1)$, ale ich počet je najviac $\frac{1}{3}|E(G)|$.

□

Nasledujúca veta uvádza ďalšiu hranicu pre pokrytie grafu cyklami. Na jej dôkaz budeme potrebovať nasledujúce lemy. Dôkazy liem sú uvedené tiež v [Zha97].

Definícia 2.5.3. *Graf G sa nazýva náhrdelník, ak G je zjednotením hranovo disjunktných kružníc C_1, C_2, \dots, C_t , pričom platí $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$, kde $i \notin \{j-1, j, j+1\}$.*

Dôkaz tejto lemy uviedol Younger [You83].

Lema 2.5.1. *(Younger) Každý bezmostový graf G pripúšťa 2-tok (D, f_1) a 3-tok (D, f_2) taký, že $\text{supp}(f_1) \cup \text{supp}(f_2) = E(G)$ a podgraf indukovaný $\text{supp}(f_1)$ je náhrdelník.*

Nie je ťažké overiť, že platí nasledujúca lema.

Lema 2.5.2. *Nech $\{C_a, C_b, C_c\}$ je pokrytie grafu G tromi cyklami. Potom pre každé $C_d \in \{C_a, C_a \triangle C_b, C_a \triangle C_c, C_a \triangle C_b \triangle C_c\}$, je*

$$\{C_b, C_c, C_d\}$$

tiež pokrytím grafu G tromi cyklami.

Nasledujúcu lemu dokázali Alon a Tarsi [AT85].

Lema 2.5.3. (*Alon, Tarsi*) *Nech G je bezmostový graf, potom G pripúšťa 3-tok (D, f) , pričom platí*

- (1) $E(G) \setminus \text{supp}(f)$ je obsiahnuté v náhrdelníku C_0
- (2) pre každú kružnicu C obsiahnutú v C_0 platí:

$$|\text{supp}(f) \cap E(C)| \leq \frac{2}{3}|E(C)|$$

Teraz pristúpime k uvedeniu a dôkazu vety [BJJ83], [AT85].

Veta 2.5.2. (*Bermond, Jackson, Jaeger a Alon, Tarsi*) *Nech G je bezmostový graf. Potom G má pokrytie tromi cyklami s celkovou dĺžkou najviac $\frac{5}{3}|E(G)|$.*

Dôkaz. Vychádzajúc z Lemy 2.5.3, nech C_0 je zodpovedajúci náhrdelník a nech (D, f) je zodpovedajúci 3-tok. Nech S je podgraf indukovaný množinou $\text{supp}(f)$ a nech S' je podgraf indukovaný množinou $E(G) \setminus \text{supp}(f)$.

Pretože f je zároveň aj 4-tok, existuje podľa Vety 2.5.1 pokrytie S cyklami C_1, C_2 , pričom

$$|E(C_1)| + |E(C_2)| \leq \frac{4}{3}|E(S)|$$

Z množiny $\{C_0, C_0 \triangle C_1, C_0 \triangle C_2, C_0 \triangle C_1 \triangle C_2\}$, vyberme ten cyklus, ktorý má najmenšiu dĺžku a označme ho C_3 .

Z vlastnosti (2) z Lemy 2.5.3 vyplýva

$$|E(S')| \geq \frac{1}{3}|E(C_0)|$$

a teda

$$|E(C_3)| \leq |E(C_0)| \leq 3|E(S')|$$

Uvažujme pokrytie G množinou cyklov $\{C_0, C_0 \triangle C_1, C_0 \triangle C_2, C_0 \triangle C_1 \triangle C_2\}$. Každá hrana G sa nachádza buď v podgrafe S , alebo v podgrafe S' .

Keďže cykly C_1 a C_2 pokrývajú len hrany z S , tak ľubovoľná hrana z S pokrytá cyklom C_0 , je pokrytá ešte jedným z cyklov z tejto množiny. Podobne ľubovoľná hrana z S , ktorá nie je pokrytá cyklom C_0 , je pokrytá práve dvomi cyklami z tejto množiny.

Cykly C_1 a C_2 nemajú z S' spoločnú žiadnu hranu, a preto ľubovoľná hrana z S bude pokrytá všetkými štyrmi cyklami.

Na základe predchádzajúceho môžeme odvodiť:

$$\begin{aligned} |E(C_3)| &\leq \frac{1}{4} [|E(C_0)| + |E(C_0 \triangle C_1)| + |E(C_0 \triangle C_2)| + |E(C_0 \triangle C_1 \triangle C_2)|] \\ |E(C_3)| &\leq \frac{1}{4} [2|E(S)| + 4|E(S')|] \\ |E(C_3)| &\leq \frac{1}{2} [|E(G)| + |E(S')|] \end{aligned}$$

Teraz nám len už zostáva spočítať celkovú dĺžku pokrytia G cyklami $\{C_1, C_2, C_3\}$.

$$\text{Nech } P = |E(C_1)| + |E(C_2)| + |E(C_3)|$$

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{4}{3}|E(S)| + |E(C_3)| = \frac{4}{3}|E(G)| - \frac{4}{3}|E(S')| + |E(C_3)| \\ P &\leq \frac{4}{3}|E(G)| + \frac{2}{3}|E(C_3)| - \frac{1}{3}|E(S')| + (\frac{1}{3}|E(C_3)| - |E(S')|) \\ P &\leq \frac{4}{3}|E(G)| + \frac{2}{3}|E(C_3)| - \frac{1}{3}|E(S')| \\ P &\leq \frac{4}{3}|E(G)| + (\frac{1}{3}|E(G)| + \frac{1}{3}|E(S')|) - \frac{1}{3}|E(S')| \\ P &\leq \frac{5}{3}|E(G)| \end{aligned}$$

□

Ďalej ukážeme, aké výsledky boli dokázané pre grafy, ktoré pripúšťajú nikdenulový 5-tok. Budeme potrebovať nasledujúce dve lemy. Pod označením $E_i(f)$

myslíme takú množinu hrán, pre ktoré je hodnota toku i . Dôkazy nasledujúcich liem pochádzajú z [JRT86]. Rovnako ich možno nájsť aj v [Zha97].

Lema 2.5.4. (*Jamshy, Raspaud, Tarsi*) *Predpokladajme, že graf G pripúšťa nikde-nulový 5-tok (D, f) . Potom existujú štyri nezáporné 2-toky (D, f_i) (pre $i = 1, 2, 3, 4$), také, že platí $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ a dajú sa zostrojiť nasledovne: nech (D, f') je 2-tok grafu G s podporou*

$$\text{supp}(f') = E_1(f) \cup E_3(f) \quad \text{a} \quad f_1 + f_2 = \frac{f+f'}{2}, \quad f_3 + f_4 = \frac{f-f'}{2}$$

Navyše tieto štyri 2-toky majú nasledujúcu vlastnosť:

$\text{supp}(f_i) \cap \text{supp}(f_{i+1}) \subseteq E_3(f) \cup E_4(f) \subseteq \text{supp}(f_j) \cup \text{supp}(f_{j+1})$ pre každý pár $\{i, j\} = \{1, 3\}$.

Lema 2.5.5. (*Jamshy, Raspaud, Tarsi*) *Ak graf G pripúšťa nikde-nulový 5-tok, potom pripúšťa aj kladný 5-tok (D, g) s vlastnosťou $|E_1(G)| \geq \frac{2}{5}|E(G)|$.*

Veta 2.5.3. (*Jamshy, Raspaud, Tarsi*) *Každý graf, ktorý pripúšťa nikde-nulový 5-tok má pokrytie tromi cyklami s celkovou dĺžkou najviac $\frac{8}{5}|E(G)|$.*

Dôkaz. Nech (D, f) je kladný 5-tok, ktorého existenciu ukazuje Lema 2.5.5 a nech (D, f_i) (pre $i = 1, 2, 3, 4$) sú nezáporné 2-toky zodpovedajúce (D, f) a zneniu Lemy 2.5.4.

Nech cyklus C_i zodpovedá hranám podpory pre tok f_i (pre $i = 1, 2, 3, 4$).

Podľa Lemy 2.5.4 platia tieto vlastnosti

- (i) $E(C_1) \cap E(C_2) \subseteq E(C_3) \cup E(C_4)$
- (ii) $E(C_3) \cap E(C_4) \subseteq E(C_1) \cup E(C_2)$
- (iii) $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$

Uvažujme nasledujúce dve pokrytia cyklami, zistíme, koľkokými cyklami sú jednotlivé hrany pokryté:

1. Zvoľme množinu cyklov $\{C_1 \triangle C_2, C_3, C_4\}$:

Hranami $E_1(f)$ tečie práve jeden z tokov f_i , preto sú tieto hrany pokryté práve jedným cyklom.

Hranami $E_2(f)$ tečú práve dva toky z f_i , ak sú to f_1 a f_2 , potom sú tieto hrany pokryté vďaka vlastnosti (i) cyklami C_3 a C_4 . Ak hranami tečú iné dva toky, ľahko vidieť, že hrany budú pokryté tiež dvoma cyklami.

Hranami $E_3(f)$ tečú práve tri toky z f_i , ak medzi nimi nie sú zároveň C_1 a C_2 , tak tieto hrany sú pokryté tromi cyklami, inak len jedným.

Napokon hranami $E_4(f)$ tečú štyri toky z f_i a tieto hrany budú pokryté cyklami C_3 a C_4 . Dostaneme teda pokrytie grafu tromi cyklami $\{C_1 \triangle C_2, C_3, C_4\}$.

2. Zvoľme množinu cyklov $\{C_3 \triangle C_4, C_1, C_2\}$.

Analogicky ako v predchádzajúcom prípade, hrany $E_1(f)$ budú pokryté jedenkrát, hrany $E_2(f)$ (ak nimi tečú toky f_3 a f_4 využijeme vlastnosť (ii)) dvakrát, hrany $E_3(f)$ trikrát a hrany $E_4(f)$ dvakrát. Dostaneme teda pokrytie grafu tromi cyklami $\{C_3 \triangle C_4, C_1, C_2\}$.

S využitím predchádzajúceho zistíme, že celková dĺžka oboch pokrytí je

$$2|E_1(f)| + 4(|E_2(f)| + |E_3(f)| + |E_4(f)|) = 4|E(G)| - 2|E_1(f)| \leq \frac{16}{5}|E(G)|$$

pričom pri poslednej nerovnosti sme využili Lemu 2.5.5.

Toto však znamená, že aspoň jedno z uvedených pokrytí musí mať dĺžku najviac $\frac{8}{5}|E(G)|$.

□

2.5.1 Tuttova hypotéza o 3-toku a krátke pokrytie cyklami

V tejto podkapitole sa budeme venovať súvisu Tuttovej hypotézy a pokrytia cyklami. Najskôr uvedieme variant Tuttovej hypotézy [Fan93].

Hypotéza 2.5.1. *Každý hranovo 4-súvislý graf má nikde-nulový 3-tok.*

Ďalej uvedieme niektoré ďalšie tvrdenia a hypotézy, pomocou ktorých sa priblížime k prepojeniu Tuttovej hypotézy a pokrytia cyklami.

Pod označením $E_{\text{odd}}(f)$ budeme myslieť tú množinu hrán grafu, ktorá má hodnoty toku f nepárne. Graf budeme nazývať párny, ak má všetky stupne vrcholov párne.

Seymour [Sey81] v dôkaze vety o 6-toku ukázal, že každý 3-súvislý kubický graf G má párny podgraf F a 3-tok f , pričom platí $E(G) \setminus E(F) \subseteq \text{supp}(f)$.

Z hľadiska pokrytia grafu cyklami, ak by bola Tuttova hypotéza pravdivá, má zmysel uvažovať o nasledujúcej hypotéze [Fan93]. Pri ukazovaní prepojenia týchto problémov ju využijeme.

Hypotéza 2.5.2. *Každý bezmostový graf G má podgraf F a 3-tok f taký, že platí: $E(G) \setminus E(F) \subseteq \text{supp}(f)$ a $|E(F)| \geq \frac{2}{3}|E(G)|$.*

Hypotéza 2.5.3. *Každý bezmostový graf G má nikde-nulový 6-tok g s vlastnosťou $|E_{\text{odd}}(g)| \geq \frac{2}{3}|E(G)|$.*

Ďalej platí, že Hypotéza 2.5.2 je ekvivalentná s Hypotézou 2.5.3 [Fan93]. Ak F je párny podgraf grafu G a graf G pripúšťa 3-tok f s vlastnosťou $E(G) \setminus E(F) \subseteq \text{supp}(f)$, potom nech h je 2-tok v G a $\text{supp}(h) = F$. Takže teraz tok g pre ktorý platí $g = 2h + f$ je nikde-nulový 6-tok s $E_{\text{odd}}(g) = F$.

Obrátene, nech G má nikde-nulový 6-tok g a platí $E_{\text{odd}}(g) = F$, potom G má 3-tok f , pričom $f(e) = 0$, iba ak $|g(e)| = 3$, a to platí, iba ak $e \in E(F)$.

Dôkazy nasledujúcich viet je možné nájsť v článku [Fan93].

Veta 2.5.4. *(Fan) Ak Hypotéza 2.5.1 je pravdivá, potom aj Hypotéza 2.5.2 je pravdivá.*

Veta 2.5.5. *(Fan) Ak graf G má nikde-nulový 6-tok g s vlastnosťou*

$$|E_{\text{odd}}(g)| \geq \frac{2}{3}|E(G)|$$

potom G má pokrytie cyklami s celkovou dĺžkou najviac $\frac{44}{27}|E(G)|$.

Vďaka vetám 2.5.4 a 2.5.5 a ekvivalencii hypotéz 2.5.2 a 2.5.3 sa dostávame k vysloveniu hlavného tvrdenia tejto časti [Fan93].

Veta 2.5.6. *(Fan) Ak Tuttova hypotéza o 3-toku je pravdivá, potom každý bezmostový graf má pokrytie cyklami s celkovou dĺžkou najviac $\frac{44}{27}|E(G)|$.*

2.6 Pokrytie grafu cyklami v závislosti od počtu vrcholov

Teraz uvedieme niektoré tvrdenia, ktoré ohraničujú dĺžku pokrytia cyklami vzhľadom na počet vrcholov a hrán grafu. Nasledujúce tvrdenie bolo dlho považované za hypotézu. Fanovi sa ho však podarilo dokázať [Fan98].

Veta 2.6.1. *(Fan) Nech G je bezmostový graf. Potom G má pokrytie cyklami s dĺžkou najviac $|E(G)| + |V(G)| - 1$.*

Ak budeme klásť podmienku na tok v grafe G , dokážeme nájsť ešte tesnejšie ohraničenie. Vyplýva to z nasledujúceho tvrdenia, ktoré dokázal Raspaud [Ras91]. Dôkaz je taktiež uvedený aj v [Zha97].

Veta 2.6.2. (*Raspaud*) *Nech G je jednoduchý graf rôzny od K_4 . Ak G pripúšťa nikde-nulový 4-tok, potom G má pokrytie dvomi cyklami s celkovou dĺžkou najviac $|E(G)| + |V(G)| - 3$.*

Nasledujúce tvrdenia nezohľadňujú priamo počet vrcholov v grafe, uvádzame ich však kvôli ich všeobecnosti. Dôkaz nasledujúceho tvrdenia vykonal Fan [Fan98].

Veta 2.6.3. (*Fan*) *Nech G je bezmostový graf. Potom G má pokrytie tromi cyklami s celkovou dĺžkou najviac*

$$|E(G)| + \frac{r}{r-1}(|V(G)| - 1),$$

kde r je najmenšia dĺžka párnej kružnice grafu G s dĺžkou aspoň 6.

Posledné tvrdenie, ktoré uvedieme v tejto kapitole dokázal Jackson [Jac90] a možno ho nájsť aj v [Zha97].

Veta 2.6.4. (*Jackson*) *Nech $m \geq 2$ je celé číslo a G hranovo $2m$ -súvislý graf. Potom G má pokrytie tromi cyklami s celkovou dĺžkou najviac $\frac{2m+2}{2m+1}|E(G)|$.*

Kapitola 3

Najkratšie pokrytie cyklami niektorých snarkov

V tejto a nasledujúcich kapitolách sa budeme venovať vlastným výsledkom, týkajúcich sa najkratšieho pokrytia cyklami niektorých známych snarkov.

Pod pojmom *snark* budeme rozumieť bezmostový kubický graf, ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný, je cyklicky hranovo 4-súvislý a dĺžka najkratšej kružnice, ktorú obsahuje, je aspoň 5.

Pre snarky sme určili obmedzenie na cyklickú hranovú súvislosť a dĺžku najkratšej kružnice. Vysvetlíme, prečo sa zvyknú takéto obmedzenia klásť. Po odstránení cyklického hranového rezu veľkosti najviac 3 v bezmostovom kubickom grafe G , ktorý nie je hranovo 3-zafarbiteľný, získame dva podgrafy. Dá sa ukázať, že aspoň jeden zo vzniknutých podgrafov, po pridaní malého počtu vrcholov alebo hrán, nebude hranovo 3-zafarbiteľný. Z toho vyplýva, že pôvodný graf G by vznikol na základe spojenia hranovo 3-zafarbiteľného kubického grafu so snarkom s menším počtom vrcholov, alebo na základe

spojenia dvoch snarkov s menším počtom vrcholov. Podobne, aj odstránenie krátkej kružnice nás privedie ku snarku s menším počtom vrcholov. Graf G by teda vznikol jednoduchou úpravou jedného alebo dvoch menších snarkov. Z tohto dôvodu, pod pojmom snark, nebudeme mať takéto grafy na mysli.

Teraz uvedieme niektoré základné pozorovania, ktoré je možné využiť pri hľadaní najkratšieho pokrytia snarku cyklami.

Potom sa budeme podrobne venovať najkratšiemu pokrytiu cyklami známych nekonečných tried grafov ako sú Isaacsové snarky, Zovšeobecnené Blanušove snarky a Goldbergove snarky.

Ďalej predstavíme súvislosť medzi pokrytím cyklami a pokrytím 1-faktormi a na triede Szekeresových snarkov predvedieme, ako ju môžeme využiť pri hľadaní najkratšieho pokrytia cyklami.

3.1 Základné vlastnosti najkratšieho pokrytia cyklami

V tejto časti popíšeme niektoré základné vlastnosti, o ktorých sme si všimli, že platia a ktoré budeme ďalej využívať.

Lema 3.1.1. *Najkratšie pokrytie cyklami snarku má dĺžku aspoň $\frac{4}{3}|E(G)|$.*

Dôkaz. Tento fakt vyplýva z možného rozloženia cyklov v okolí jednotlivých vrcholov snarku.

□

Lema 3.1.2. *Ak má snark najkratšie pokrytie cyklami dĺžky $\frac{4}{3}|E(G)|$, potom žiadna hrana v tomto pokrytí nie je pokrytá tromi cyklami a pri každom*

vrchole je práve jedna hrana pokrytá dvomi cyklami a práve dve hrany sú pokryté jedným cyklom.

Dôkaz. Ak by neboli splnené uvedené vlastnosti, dĺžka najkratšieho pokrytia cyklami by prevyšovala $\frac{4}{3}|E(G)|$.

□

Z predchádzajúcej lemy vyplýva, že pozdĺž cyklu zo spomínaného najkratšieho pokrytia cyklami sa striedajú hrany, ktoré sú pokryté len týmto cyklom a hrany, ktoré sú pokryté ešte niektorým iným cyklom.

Veta 3.1.1. *Ak má snark G najkratšie pokrytie cyklami dĺžky $\frac{4}{3}|E(G)|$, potom toto najkratšie pokrytie obsahuje aspoň štyri cykly.*

Dôkaz. Predpokladajme, že by bolo možné pokryť G dvomi cyklami. Maximálna dĺžka cyklu je $\frac{2}{3}|E(G)|$, pretože takýto je počet vrcholov. Keďže dĺžka pokrytia je $\frac{4}{3}|E(G)|$, potom to znamená, že obidva cykly majú dĺžku $\frac{2}{3}|E(G)|$ a prechádzajú všetkými vrcholmi. Z predchádzajúcej lemy vyplýva, že jednotlivé kružnice, ktoré tvoria tieto cykly majú párnú dĺžku. Stačí, ak hrany kružníc jedného z cyklov zafarbíme striedavo dvomi farbami. Zostávajúce hrany, ktoré tvoria 1-faktor, zafarbíme treťou farbou. Takýto graf by už nebol snarkom.

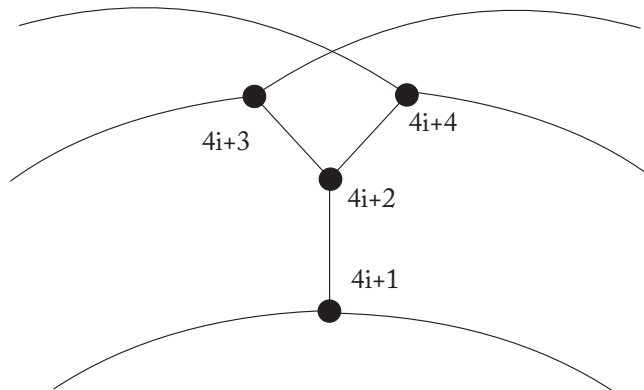
Predpokladajme, že by bolo možné pokryť G tromi cyklami. Označme cykly ako C_1, C_2, C_3 . Ukážeme, že graf by bol hranovo 3-zafarbiteľný. Hrany, ktoré pokrýva len cyklus C_1 zafarbíme farbou 1, len C_2 zafarbíme farbou 2, len C_3 zafarbíme farbou 3. Podľa Lemy 3.1.2 zostali už len hrany, ktoré sú pokryté práve dvomi cyklami a susedia s hranami, ktoré sme už zafarbili.

Preto hrany, ktoré pokrývajú cykly C_1, C_2 zafarbíme farbou 3, hrany, ktoré pokrývajú cykly C_1, C_3 zafarbíme farbou 2 a hrany, ktoré pokrývajú cykly C_2, C_3 zafarbíme farbou 1. Takýto graf nie je snark.

□

3.2 Isaacsove snarky

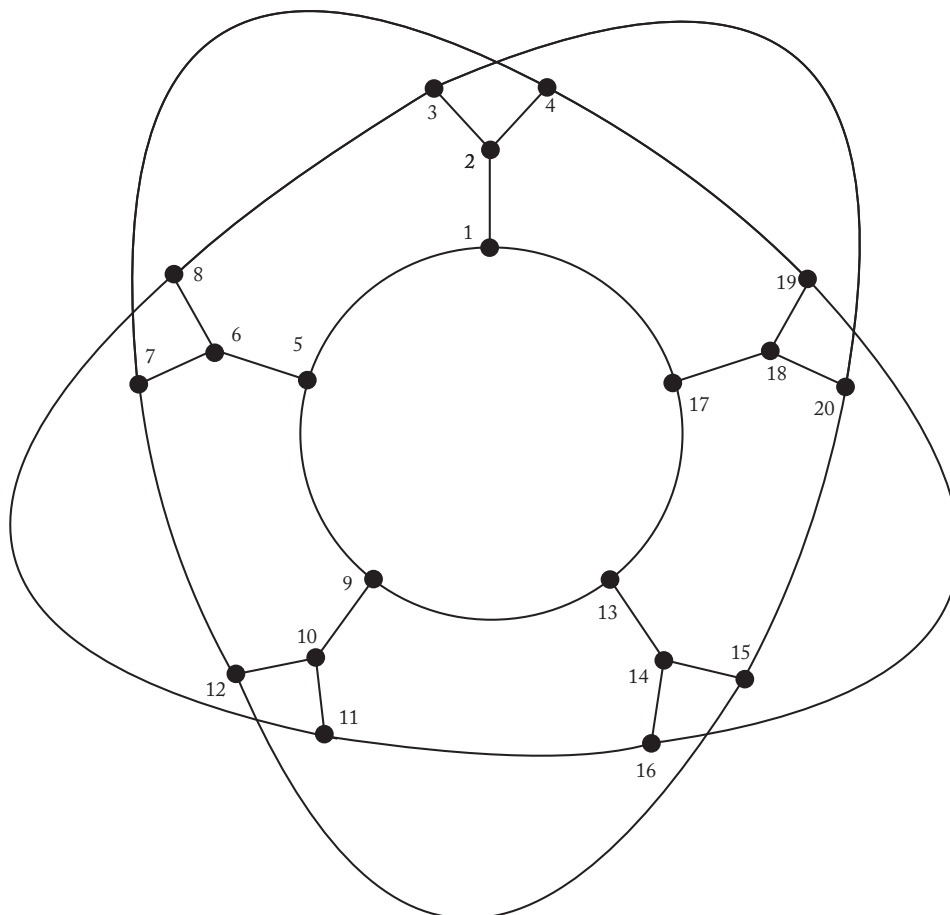
Isaacsove snarky budeme označovať ako I_{2k+1} pre $k \geq 2$. Isaacsov snark I_n má $4n$ vrcholov a $6n$ hrán. Index n budeme nazývať *číslo* Isaacsovho snarku. Pojem číslo snarku budeme analogicky používať aj pri ďalších nekonečných triedach. Základnou štruktúrou ľubovoľného Isaacsovho snarku je element pozostávajúci zo štyroch vrcholov, ktorý je znázornený na Obrázku 3.1.



Obr. 3.1: Element Isaacsovho snarku

Tieto elementy budeme postupne pripájať v tvare kruhu, až kým sa nedostaneme k počiatočnému elementu. Jednotlivé vrcholy elementu budú očíslované $4i + 1, 4i + 2, 4i + 3$ a $4i + 4$ pre $i = 0..n - 1$, pričom element i susedí

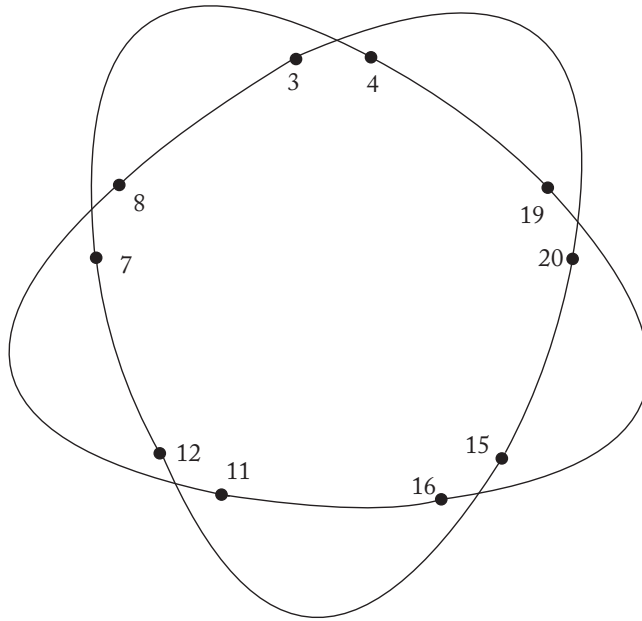
s elementami $i - 1 \pmod n$ a $i + 1 \pmod n$, tak ako naznačujú obrázky 3.1 a 3.2.



Obr. 3.2: Isaacsov snark I_5

3.2.1 Vonkajšia a vnútorná kružnica

V každom Isaacsovom snarku môžeme nájsť niekoľko typov kružníc, z ktorých budeme používať dva. Prvý typ budeme nazývať *vonkajšia kružnica*. Táto kružnica je tvorená vrcholmi:



Obr. 3.3: Vonkajšia kružnica D_5 Isaacsovhho snarku I_5

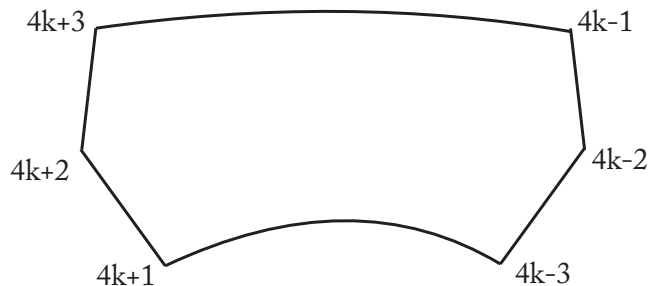
$3, 8, 11, 16, \dots, (8i + 3 \bmod V), (8i + 8 \bmod V), \dots 3$ pre $i = 0 \dots n - 1$

kde V je počet vrcholov snarku a n je jeho číslo. Vonkajšiu kružnicu budeme označovať ako D_n . Pre snark I_5 je vonkajšia kružnica D_5 znázornená na Obrázku 3.3.

Druhý typ kružníc budeme nazývať *vnútorná kružnica*. Túto kružnicu tvoria vrcholy:

$$4k - 1, 4k - 2, 4k - 3, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 4 \quad \text{pre } k = 0 \dots n - 1$$

kde n je číslo snarku a čísla vrcholov rozumieme *mod n*. Každú vnútornú kružnicu budeme označovať ako D_k pre $k = 0 \dots n - 1$. Vnútorná kružnica D_k je znázornená na Obrázku 3.4.



Obr. 3.4: Vnútorná kružnica D_k ľubovoľného Isaacsovho snarku

3.2.2 Najkratšie pokrytie cyklami Isaacsových snarkov

Pre ľubovoľný Isaacsov snark I_n existuje najkratšie pokrytie cyklami dĺžky $\frac{4}{3}|E(I_n)|$. Jedno z najkratších pokrytí cyklami ilustrujeme na snarku I_5 , ktorý má 30 hrán a potom ho rozšírime pre všetky ostatné Isaacsove snarky. Na Obrázku 3.2 sú jednotlivé vrcholy I_5 očíslované. Cez vrcholy budú prechádzať cykly C_1 , C_2 , C_3 a C_4 .

Cyklus C_1 je tvorený vonkajšou kružnicou D_5 , ktorá je znázornená aj na Obrázku 3.3.

Cyklus C_2 je tvorený dvomi vnútornými kružnicami D_0 a D_2 . Podobne cyklus C_3 tvoria vnútorné kružnice D_1 a D_3 . Cykly C_2 a C_3 sú teda tvorené vnútornými kružnicami snarku, jednu kružnicu však pokryť nemohli, pretože vnútorných kružníc je nepárny počet a žiadna hrana cyklu nemôže byť pokrytá dvomi kružnicami toho istého cyklu. Cyklus C_4 bude preto tvorený vnútornou kružnicou D_4 .

Uvedené najkratšie pokrytie cyklami sa dá rozšíriť na všetky Isaacsove snarky.

Veta 3.2.1. *Najkratšie pokrytie cyklami pre ľubovoľný graf I_n z triedy Isa-*

acsových snarkov má dĺžku $\frac{4}{3}|E(I_n)|$.

Dôkaz. Nájdeme množinu cyklov $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, ktorá bude tvoriť najkratšie pokrytie cyklami pre I_n .

$$\begin{aligned} C_1 &= D_n \\ C_2 &= \bigcup_{i=0}^{(n-3)/2} D_{2i} \\ C_3 &= \bigcup_{i=0}^{(n-3)/2} D_{2i+1} \\ C_4 &= D_{n-1} \end{aligned}$$

Každá hrana snarku je pokrytá. Vonkajšia kružnica D_n má dĺžku $2n$. Použili sme všetky vnútorné kružnice, ktorých je n a každá má dĺžku 6.

$$\sum_{i=1}^4 |E(C_i)| = \sum_{i=0}^n |E(D_i)| = 6n + 2n = 8n$$

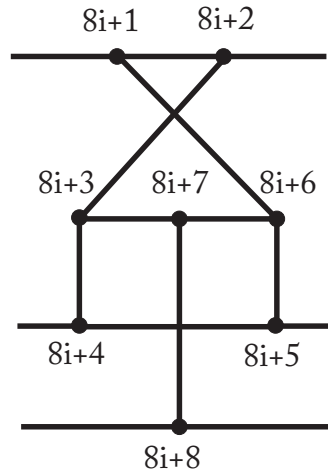
Dĺžka najkratšieho pokrytia cyklami Isaacsovho snarku I_n je preto $8n$, čo je $\frac{4}{3}|E(I_n)|$.

□

3.3 Goldbergove snarky

Ďalším typom snarkov, ktorými sa budeme zaoberať sú Goldbergove snarky. Ukážeme, že túto triedu snarkov je tiež možné pokryť cyklami dĺžky $\frac{4}{3}$ počtu hrán.

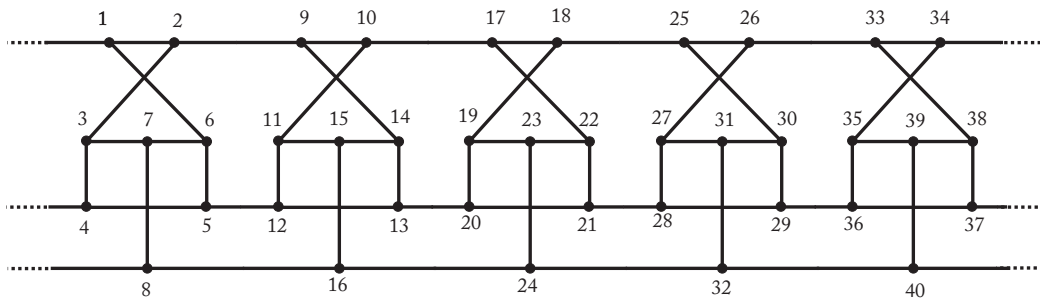
Obrázok 3.5 znázorňuje základný element Goldbergových snarkov, ktoré



Obr. 3.5: Základný element Goldberových snarkov

sa spájajú "do kruhu" podobne ako Isaacsove snarky. Goldbergove snarky budeme označovať ako G_{2k+1} , pričom $k \geq 1$, teda pozostávajú z nepárneho počtu základných elementov, najmenej z troch.

Goldbergov snark G_n má $8n$ vrcholov a $12n$ hrán. Jednotlivé vrcholy elementu i budú očíslované $8i + 1, 8i + 1, \dots, 8i + 8$, pričom $0 \leq i \leq n - 1$, tak ako vidieť na Obrázku 3.5. Goldbergov snark G_5 znázorňuje Obrázok 3.6.



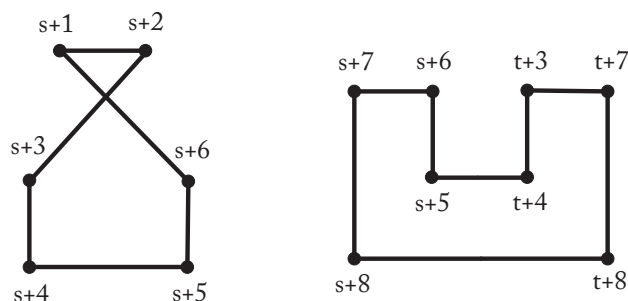
Obr. 3.6: Goldbergov snark G_5

3.3.1 Pokrývajúce kružnice

Podobne ako pri Isaacsových snarkoch, všimneme si aj pri Goldbergových snarkoch niekoľko typov kružníc, pomocou ktorých môžeme pokryť všetky hrany. Prvý typ kružnice sa nachádza v každom elemente a je určený vrcholmi:

$$s + 1, s + 2, \dots, s + 6 \quad \text{pre } s = 8i \text{ a } 0 \leq i \leq n - 1$$

Kružnice tohto typu budeme označovať ako D_i pre $0 \leq i \leq n - 1$.



Obr. 3.7: Prvý a druhý typ kružníc na Goldbergových snarkoch

Druhý typ kružnice prepája dva susedné elementy a je tvorený týmito vrcholmi:

$$s + 5, s + 6, s + 7, s + 8, t + 8, t + 7, t + 3, t + 4$$

pričom $s = 8i, t = 8(i + 1) \bmod n, 0 \leq i \leq n - 1$. Kružnice zodpovedajúce tomuto typu budeme označovať ako K_i pre $0 \leq i \leq n - 1$.

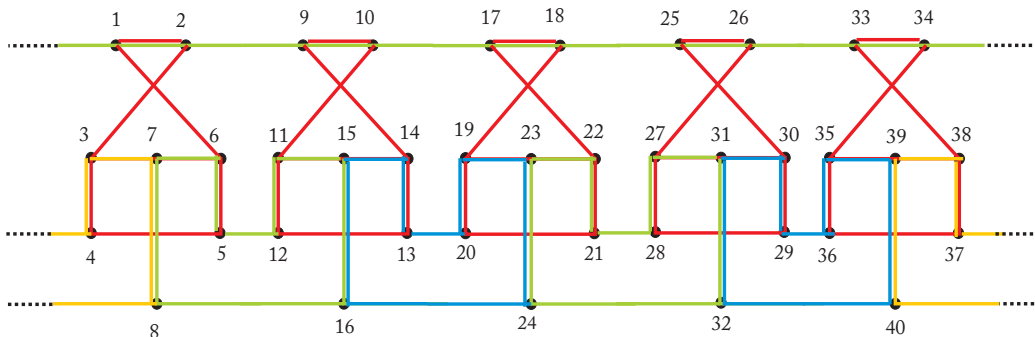
Napokon budeme používať aj kružnicu, ktorá prechádza cez všetky elementy. Je tvorená vrcholmi:

$$1, 2, 9, 10, 17, 18, \dots, 1$$

Túto kružnicu budeme označovať ako D_n .

3.3.2 Najkratšie pokrytie cyklami Goldergových snarkov

Pre ľubovoľný Goldbergov snark G_n existuje najkratšie pokrytie cyklami dĺžky $\frac{4}{3}|E(G_n)|$. Jedno z najkratších pokrytí cyklami ilustrujeme na snarku G_5 (Obr. 3.8), ktorý má 60 hrán a potom ho rozšírime pre všetky ostatné Goldbergove snarky. Na Obrázku 3.8 sú jednotlivé vrcholy G_5 očíslované. Cez tieto vrcholy budú prechádzať cykly C_1 , C_2 , C_3 a C_4 .



Obr. 3.8: Pokrytie cyklami Goldbergovho snarku G_5

Cyklus C_1 je tvorený kružnicami D_i pre $0 \leq i \leq 4$.

Cyklus C_2 je tvorený kružnicami K_0 a K_2 . Podobne cyklus C_3 tvoria kružnice K_1 a K_3 . Cykly C_2 a C_3 sú tvorené kružnicami druhého typu, jednu kružnicu však pokryť nemohli, pretože kružníc druhého typu je nepárny počet a žiadne dve kružnice druhého typu nemôžu byť vedľa seba. Cyklus C_4 bude preto tvorený kružnicou K_4 . Keďže sme ešte nepokryli všetky hrany prislúchajúce kružnici D_5 , priradíme túto kružnicu napríklad do cyklu C_2 .

Uvedené pokrytie cyklami sa dá rozšíriť na všetky Goldbergove snarky.

Veta 3.3.1. *Najkratšie pokrytie cyklami pre ľubovoľný graf G_n z triedy Gold-*

bergových snarkov má dĺžku $\frac{4}{3}|E(G_n)|$.

Dôkaz. Nájdeme množinu cyklov $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, ktorá bude tvoriť najkratšie pokrytie cyklami pre G_n .

$$C_1 = \bigcup_{i=0}^{n-1} D_i$$

$$C_2 = \bigcup_{i=0}^{(n-3)/2} K_{2i}$$

$$C_3 = \bigcup_{i=0}^{(n-3)/2} K_{2i+1}$$

$$C_4 = K_4 \cup D_5$$

Každá hrana snarku je pokrytá. Cyklus C_1 je tvorený n kružnicami, pričom každá má dĺžku 6. Cykly C_2 , C_3 a C_4 obsahujú spolu n kružníc dĺžky 8 a jednu kružnicu dĺžky $2n$. Celková dĺžka pokrytia týmito cyklami preto bude

$$\sum_{i=1}^4 |E(C_i)| = 6n + 8n + 2n = 16n$$

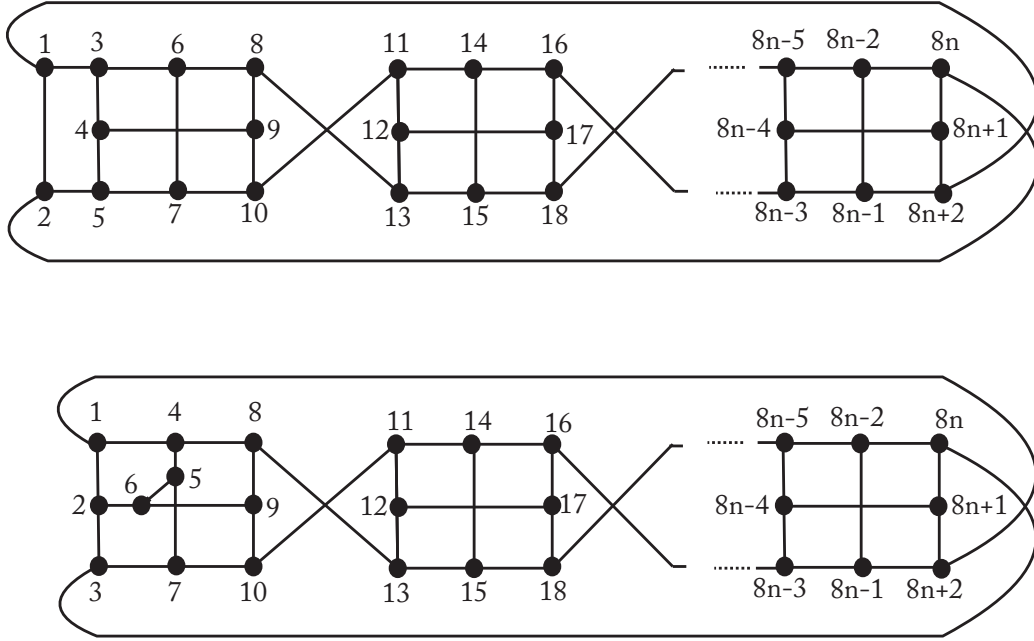
Dĺžka najkratšieho pokrytia cyklami Goldbergovho snarku G_n je preto $16n$, čo je $\frac{4}{3}|E(G_n)|$.

□

3.4 Zovšeobecnené Blanušove snarky

Zovšeobecnené Blanušove snarky 1.typu (resp. 2.typu) budeme označovať ako B_n^1 (resp. B_n^2) pre $n \geq 2$. Každý graf z týchto nekonečných tried snarkov má

$8n+2$ vrcholov a $12n+3$ hrán. Reprezentantov tried Blanušových snarkov 1. a 2. typu zobrazuje Obrázok 3.9. Zovšeobecnené Blanušove snarky pozostávajú z n elementov, ktoré sú pospájané ako naznačuje tento obrázok. Ako vidieť,



Obr. 3.9: Zovšeobecnené Blanušove snarky 1. typu (hore) a 2. typu(dolu)

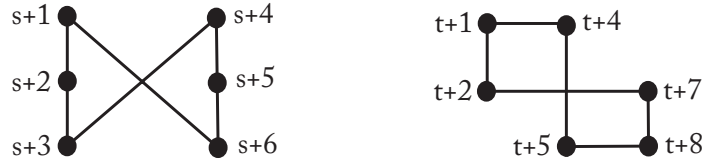
prvý element je vždy špeciálny a určuje typ zovšeobecneného Blanušovho snarku.

3.4.1 Pokrývajúce kružnice

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch určíme základné kružnice, ktoré budú tvoriť cykly. V tomto prípade nájdeme 4 typy kružníc. Prvý typ kružníc bude určený týmito vrcholmi:

$$s + 1, \quad s + 2, \quad s + 3, \quad s + 4, \quad s + 5, \quad s + 6$$

pričom $s = 7 + 8i$, $0 \leq i \leq n - 2$. Tieto kružnice budeme označovať ako D_i pre $0 \leq i \leq n - 2$.



Obr. 3.10: Prvý a druhý typ kružníc

Nasledujúce vrcholy určujú druhý typ kružníc

$$t + 1, \quad t + 2, \quad t + 7, \quad t + 8, \quad t + 5, \quad t + 4$$

pričom $t = 10 + 8i$, $0 \leq i \leq n - 2$. Tieto kružnice budeme označovať ako K_i pre $0 \leq i \leq n - 2$.

Prvé dva typy kružníc sú spoločné pre obidva typy zovšeobecnených Blanušových snarkov. Ďalšie dva typy kružníc obsahujú len jednu kružnicu. Tieto kružnice potrebujeme pre každý typ snarkov určiť zvlášť. Prvý riadok bude zodpovedať prvému typu zovšeobecnených Blanušových snarkov, druhý riadok druhému typu. Môžeme pristúpiť k určeniu tretieho typu kružnice.

$$1, 3, 6, 7, 10, 9, 4, 5, 2, 8n, 8n + 1, 8n + 2$$

$$1, 4, 5, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 8n, 8n + 1, 8n + 2$$

Tento typ kružnice budeme označovať D_{n-1} .

Posledný, štvrtý typ kružnice bude na prvom (špeciálnom) elemente určený týmito vrcholmi:

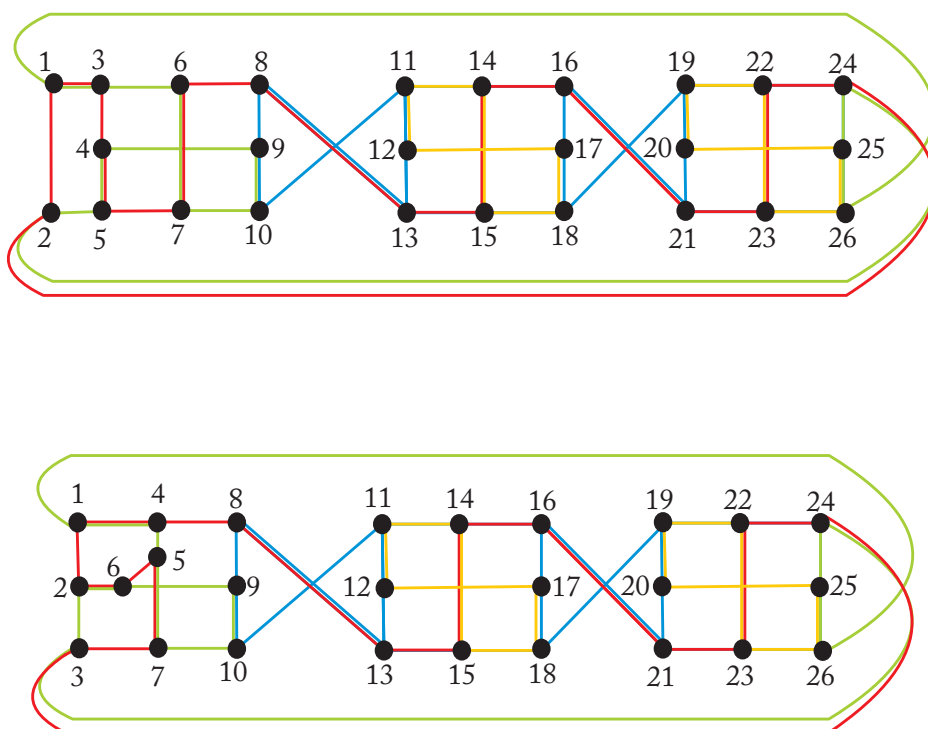
$$2, 1, 3, 4, 5, 7, 6, 8$$

$$3, 7, 5, 6, 2, 1, 4, 8$$

V ďalších elementoch bude nadväzovať na prvý element nasledujúcimi vrcholmi

$$a, b, c, d, a + 8, b + 8, c + 8, d + 8, \dots, a + 8i, b + 8i, c + 8i, d + 8i, \dots$$

pričom $a = 13, b = 15, c = 14, d = 16$. Túto kružnicu budeme označovať D_n .



Obr. 3.11: Najkratšie pokrytie cyklami zovšeobecnených Blanušových snar-
kov B_3^1 (hore) a B_3^2 (dolu)

3.4.2 Najkratšie pokrytie cyklami zovšeobecnených Blanušových snarkov

Tak ako pri Isaacsových a Goldbergových snarkoch aj pri zovšeobecnených Blanušových snarkov má najkratšie pokrytie cyklami veľkosť $\frac{4}{3}|E(G)|$.

Veta 3.4.1. *Najkratšie pokrytie cyklami zovšeobecnených Blanušových snarkov má veľkosť $\frac{4}{3}|E(G)|$.*

Dôkaz. Zostrojíme tieto štyri cykly:

$$C_1 = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i$$

$$C_2 = \bigcup_{i=0}^{n-2} K_i$$

$$C_3 = D_{n-1}$$

$$C_4 = D_n$$

Každá hrana ľubovoľného snarku je pokrytá. Dĺžka cyklu C_1 aj C_2 je $6(n-1)$. Dĺžka C_3 je 12 a dĺžka C_4 je $8 + 4(n-1)$. Celková dĺžka pokrytia týmito cyklami preto bude

$$\sum_{i=1}^4 |E(C_i)| = 6(n-1) + 6(n-1) + 4(n-1) + 8 + 12 = 16n + 4$$

Dĺžka najkratšieho pokrytia cyklami zovšeobecnených Blanušových snarkov B_n^1 , resp. B_n^2 je preto $16n + 4$, čo je $\frac{4}{3}|E(B_n^1)|$, resp. $\frac{4}{3}|E(B_n^2)|$.

□

3.5 Najkratšie cyklové pokrytie a pokrytie 1-faktormi

Ako budeme vidieť, pokrytie snarku 1-faktormi úzko súvisí s najkratším pokrytím cyklami. Uvedieme teraz tri lemy, ktoré budeme využívať. Ich dôkazy možno nájsť v [FV09].

Lema 3.5.1. (*Fouquet, Vanherpe*) *Nech $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ je pokrytie kubického grafu G 1-faktormi, potom každá jeho hrana je pokrytá práve jedným alebo dvomi 1-faktormi z M .*

Lema 3.5.2. (*Fouquet, Vanherpe*) *Nech $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ je pokrytie kubického grafu G 1-faktormi. Potom pre každé i ($i = 1 \dots 4$) $M - M_i$ je množina troch 1-faktorov, pričom žiadna hrana nie je obsiahnutá vo všetkých troch 1-faktoroch.*

Lema 3.5.3. (*Fouquet, Vanherpe*) *Nech G je kubický graf s 1-faktormi M_1, M_2 a M_3 , ktoré majú prázdny prienik. Nech T_0 označuje množinu hrán grafu G , ktorá nie je pokrytá žiadnym z uvedených párení. Analogicky, nech T_1 a T_2 označuje množinu hrán, ktorá je pokrytá jedným, resp. dvomi z týchto párení. Potom množina hrán $T_0 \cup T_2$ tvorí množinu disjunktných cyklov párnej dĺžky, pričom hrany z T_0 a T_2 sa navzájom striedajú.*

3.5.1 Pokrytie 1-faktormi

Budeme sa chvíľu venovať hľadaniu pokrytia 1-faktormi. Pri ich hľadaní využijeme vetu, ktorú uviedli Fouquet a Vanherpe v [FV09]. Jej dôkaz nám ponúka postup ako tieto párenia nájsť, tiež ho možno nájsť v [FV09].

Najskôr vysvetlíme, čo budeme rozumieť pod pojmom dobrý pár a dobrá trojica. Nech C a C' sú kružnice nepárnej dĺžky. Predpokladajme, že existujú po dvoch rôzne hrany xx' , yy' a zz' , kde x, y, z sú vrcholmi C a x', y', z' sú vrcholmi C' , pričom tieto vrcholy určujú tri cesty nepárnej dĺžky na každej kružnici. Potom hovoríme, že $\{C, C'\}$ je *dobrý pár* a (xx', yy', zz') je *dobrá trojica*. Teraz uvedieme znenie spomínanej vety.

Veta 3.5.1. (*Fouquet, Vanherpe*) *Nech G je snark a nech má 2-faktor F , ktorého nepárne cykly môžeme usporiadať do dobrých párov*

$$\{C_1, D_1\}, \{C_2, D_2\}, \dots, \{C_k, D_k\}.$$

Potom sa dá G pokryť štyrmi 1-faktormi.

Z dôkazu vety získame nasledujúci návod ako nájsť tieto 1-faktory. Nech pre každý dobrý pár $\{C_i, D_i\}$, je $(c_i^1 d_i^1, c_i^2 d_i^2, c_i^3 d_i^3)$ jemu zodpovedajúca dobrá trojica.

Nech M_1 je 1-faktor, ktorý vznikne odstránením všetkých hrán, ktoré tvoria 2-faktor F . Ďalej budeme postupne vytvárať 1-faktory M_2, M_3 a M_4 . Najskôr pridáme do M_{j+1} pre $j = 1, 2, 3$ hrany $c_i^j d_i^j$ pre všetky i .

Ak odstránime v každej i -tej kružnici vrcholy c_i^j a d_i^j , dostaneme pre množinu $E(C_i) \cup E(D_i)$, pre každé j , jednoznačný 1-faktor. Hrany tvoriace toto párenie pridáme do M_{j+1} .

Ak F obsahoval aj párne cykly, pridáme niektorý 1-faktor hrán týchto párnych cyklov do M_2 . Zvyšné hrany párnych cyklov pridáme aj do M_3 aj do M_4 .

Získali sme 1-faktory M_1, M_2, M_3 a M_4 , ktoré pokrývajú všetky hrany snarku G .

3.5.2 Ekvivalencia najkratšieho pokrytia cyklami a pokrytia 1-faktormi

Teraz ukážeme súvis medzi najkratším pokrytím cyklami a pokrytím 1-faktormi. Táto súvislosť nám pomôže pri hľadaní konkrétnych cyklov najkratšieho pokrytia cyklami. Budeme využívať lemy, ktoré sme uviedli v úvode tejto časti.

Veta 3.5.2. *Snark G má pokrytie štyrmi 1-faktormi práve vtedy, ak má pokrytie štyrmi cyklami s celkovou dĺžkou $\frac{4}{3}|E(G)|$.*

Dôkaz. Nech M_1, M_2, M_3, M_4 sú 1-faktory pokrývajúce hrany G . Zostrojíme štyri cykly C_1, C_2, C_3, C_4 , ktoré tiež budú pokrývať hrany G .

Nech $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ak odstránime 1-faktor M_i , množina T_{i0} bude obsahovať hrany, ktoré boli pokryté len s M_i , množina T_{i2} bude obsahovať tie hrany, ktoré sa vyskytujú v prieniku dvojíc zo zvyšných 1-faktorov, teda $T_{i2} = \bigcup_{j \neq i \neq k} M_j \cap M_k$.

Vieme, že množina $T_{i0} \cup T_{i2}$ je cyklus párnej dĺžky. Preto stačí položiť $C_i = T_{i0} \cup T_{i2}$. Hrany pokryté len jedným 1-faktorom sme použili raz a hrany pokryté dvomi 1-faktormi dvakrát. Keďže dĺžka 1-faktora je $\frac{1}{3}|E(G)|$, potom dĺžka pokrytia cyklami C_i musí byť $\frac{4}{3}|E(G)|$.

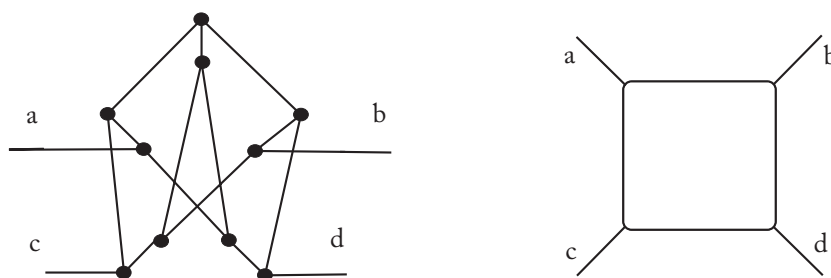
Obrátene, nech máme pokrytie snarku cyklami C_1, C_2, C_3, C_4 s celkovou dĺžkou $\frac{4}{3}|E(G)|$. Znovu, nech $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, potom 1-faktor M_i bude obsahovať hrany, ktoré sú pokryté len cyklom C_i a hrany, ktoré sú pokryté dvomi cyklami zo zostávajúcich cyklov. Využili sme skutočnosť, že pozdĺž cyklu sa striedajú hrany pokryté jedným a dvomi cyklami.

□

Ako vidieť z dôkazu, táto veta nám ponúka návod na konštrukciu najkratšieho pokrytia cyklami z pokrytia 1-faktormi a naopak.

3.6 Szekeresove snarky

Szekeresové snarky sú grafy na pomerne veľkom počte vrcholov. Jednotlivé snarky majú $40n + 10$ vrcholov, kde n je číslo snarku. Triedu Szekeresových snarkov získame "pospájaním" niekoľkých grafov, ktoré vznikli z Peterse-
novho grafu rozpojením dvoch hrán. Takéto grafy budeme nazývať *základnými elementami* Szekeresových snarkov. Hrany, ktoré vychádzajú zo základného elementu označíme písmenami a, b, c, d , tak ako ukazuje Obrázok 3.12.

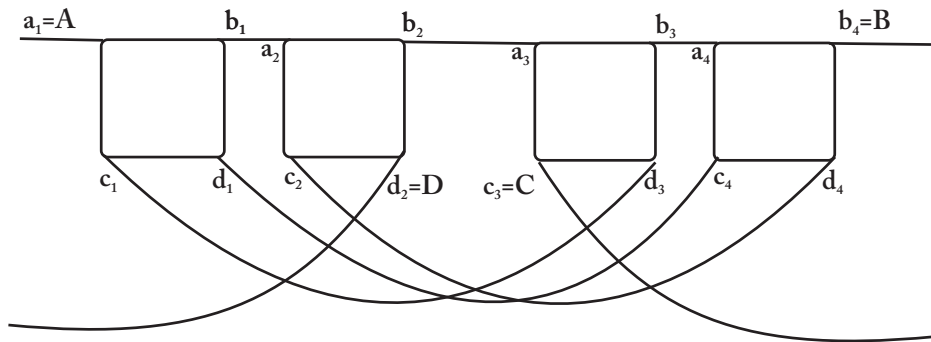


Obr. 3.12: Základný element Szekeresových snarkov a jeho zjednodušené znázornenie

Základný blok Szekeresových snarkov získame spojením štyroch základných elementov. Ak tieto elementy očísľujeme číslami 1-4 a zodpovedajúce čísla priradíme ako indexy hranám, ktoré vychádzajú z elementov, môžeme nasledujúcim spojením hrán vyjadriť usporiadanie základných elementov v rámci základného bloku:

$$b_1 - a_2, b_2 - a_3, b_3 - a_4, \quad c_1 - d_3, d_1 - c_4, c_2 - d_4$$

Zo základného bloku vychádzajú von štyri hrany, a to: a_1 , b_4 , c_3 , d_2 . Tieto hrany budeme v tom istom poradí označovať písmenami A , B , C , D . Keď budeme chcieť zvýrazniť, ktorému bloku tieto hrany patria, budeme ich označovať ako A_i , B_i , C_i , D_i , kde i je index základného bloku. Obrázok 3.13 znázorňuje základný blok Szekeresových snarkov.



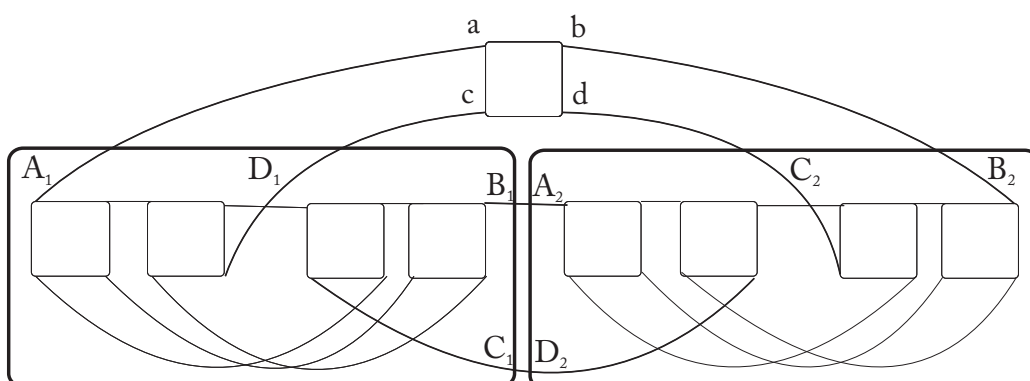
Obr. 3.13: Základný blok Szekeresových snarkov

Szekeresove snarky sú tvorené n základnými blokmi a jedným základným elementom, ktorý budeme nazývať aj *špeciálny element*. Pripomeňme, že hrany vychádzajúce zo špeciálneho elementu tiež označujeme písmenami a, b, c, d . Nasledujúce prepojenie hrán medzi špeciálnym elementom a základnými blokmi definuje nekonečnú triedu Szekeresových snarkov.

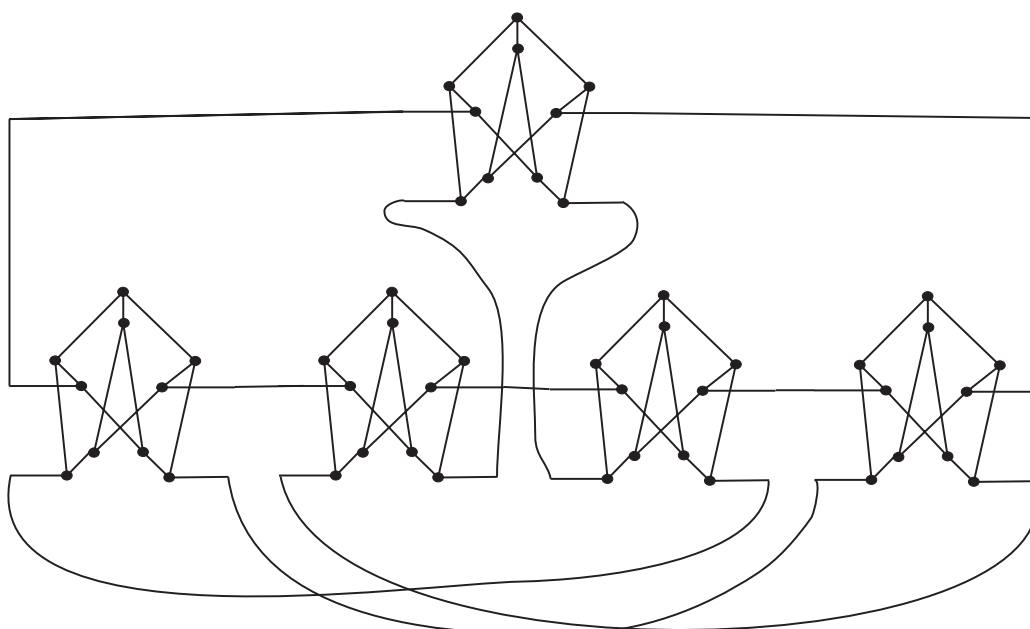
$$\begin{aligned} a - A_1, B_1 - A_2, B_2 - A_3 \dots B_{n-1} - A_n, B_n - b \\ c - D_1, C_1 - D_2, C_2 - D_3 \dots C_{n-1} - D_n, C_n - d \end{aligned}$$

Znázornenie zapojenia dvoch základných blokov v Szekeresovom snarku S_2 si môžeme všimnúť na Obrázku 3.14.

Najmenší člen triedy Szekeresových snarkov obsahuje 50 vrcholov a je



Obr. 3.14: Szekeresov snark S_2 s dvomi základnými blokmi

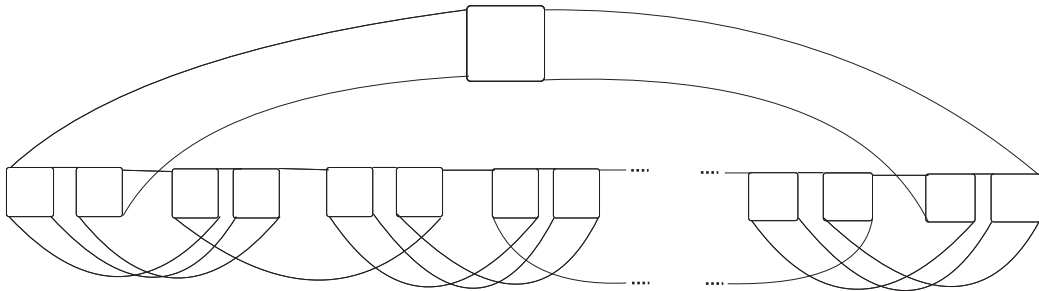


Obr. 3.15: Szekeresov snark S_1 s 50 vrcholmi

tvorený jedným základným blokom (Obr. 3.15).

Rozšírením snarku o jeden základný blok získavame ďalší snark z tejto triedy, ktorý má o 40 vrcholov viac ako pôvodný snark. Toto rozširovanie,

ktorým môžeme získať všetkých členov triedy Szekeresových snarkov, naznačuje Obrázok 3.16.



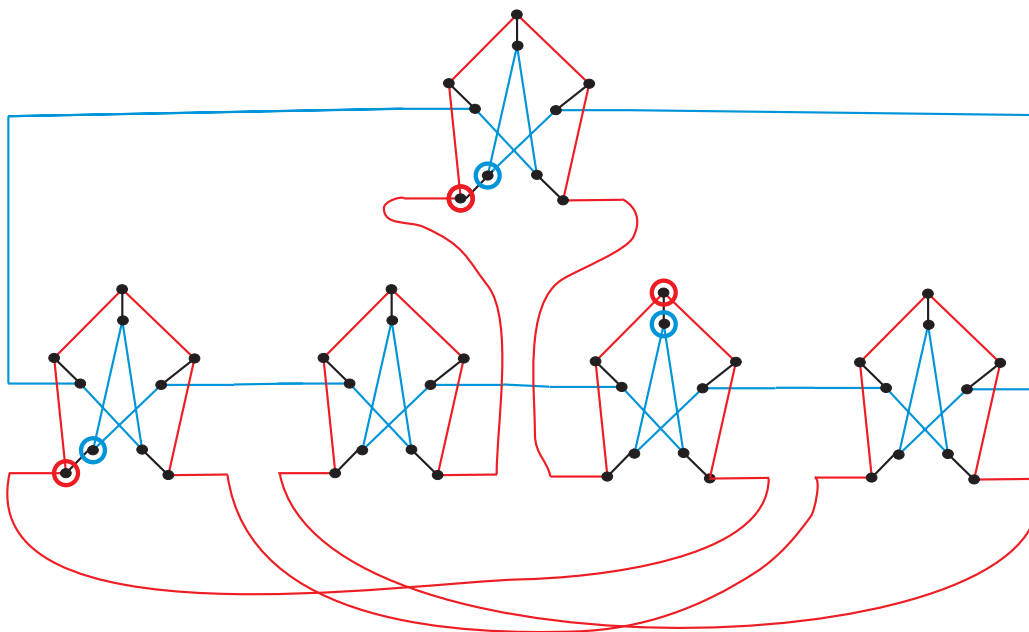
Obr. 3.16: Rozširovanie Szekeresových snarkov

3.6.1 Najkratšie pokrytie cyklami Szekeresovho snarku S_1

Vezmime Szekeresov snark S_1 . Na tomto grafe možno nájsť 2-faktor, pozostávajúci z dobrého páru $\{C_1, D_1\}$. Na kružniciach C_1, D_1 je možné nájsť aj vrcholy, ktoré rozdeľujú kružnice na tri cesty nepárnej dĺžky. Tieto vrcholy sú súčasťou hrán tvoriacich dobrú trojicu. Znázornenie možno vidieť na obrázku 3.17.

To, že sme našli dobrý pár a dobrú trojicu nám podľa Vety 3.5.1 umožňuje nájsť aj štyri 1-faktory, pričom pri ich konštrukcii budeme vychádzať z dôkazu tejto vety. Obrázok 3.18 zobrazuje tieto 1-faktory. Hnedou farbou označíme hrany 1-faktoru M_1 , teda tie, ktoré neležia na 2-faktore.

Ďalej, 1-faktor M_2 (resp. M_3, M_4) je tvorený hranami červenej (resp. zelenej, modrej) farby. Sú to hrany, ktoré tvorili jednoznačné párenie vrcholov 2-faktoru, po odstránení príslušnej hrany z dobrej trojice. Táto odstránená

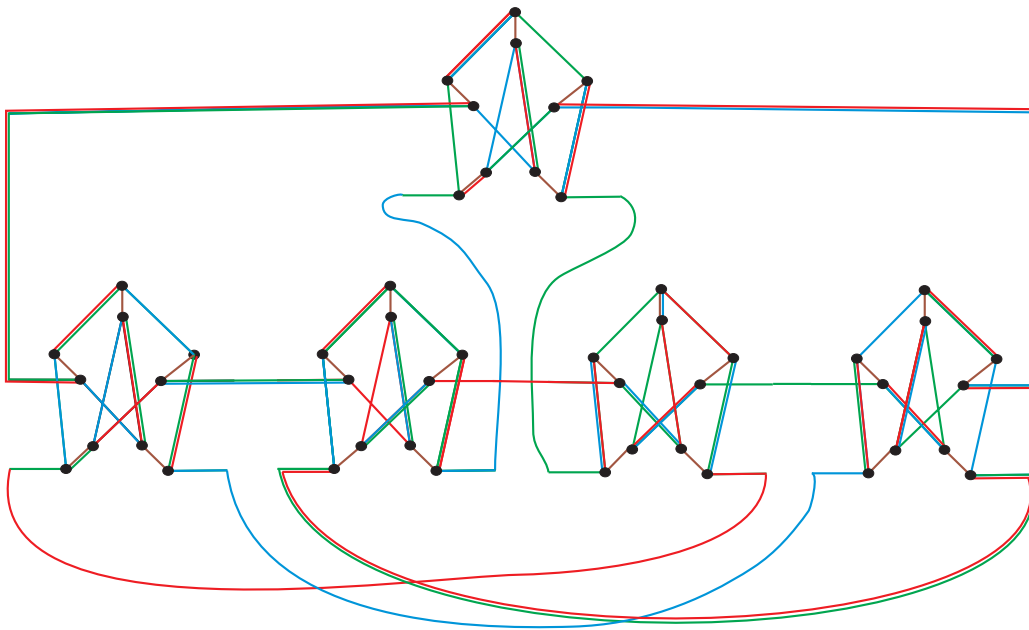


Obr. 3.17: Kružnice C_1 (červená) a D_1 (modrá) tvoria 2-faktor, keďže sú nepárnej dĺžky sú dobrým párom. Krúžkom zvýraznené vrcholy sú koncovými vrcholmi hrán tvoriacich dobrú trojicu.

hrana neleží na 2-faktore a na obrázku je označená červenou (resp. zelenou, modrou) farbou, pretože tiež patrí do M_2 (resp. M_3 , M_4). Ďalej podľa Vety 3.5.2 už dokážeme nájsť najkratšie pokrytie cyklami dĺžky $\frac{4}{3}|E(S_1)|$. Obrázok 3.19 ho znázorňuje.

3.6.2 Najkratšie pokrytie cyklami pre celú triedu Szekeresových snarkov

Podľa spôsobu konštrukcie Szekeresových snarkov, je vidieť že možno tento postup aplikovať aj pre snarky s vyšším počtom vrcholov. Každý Szekere-

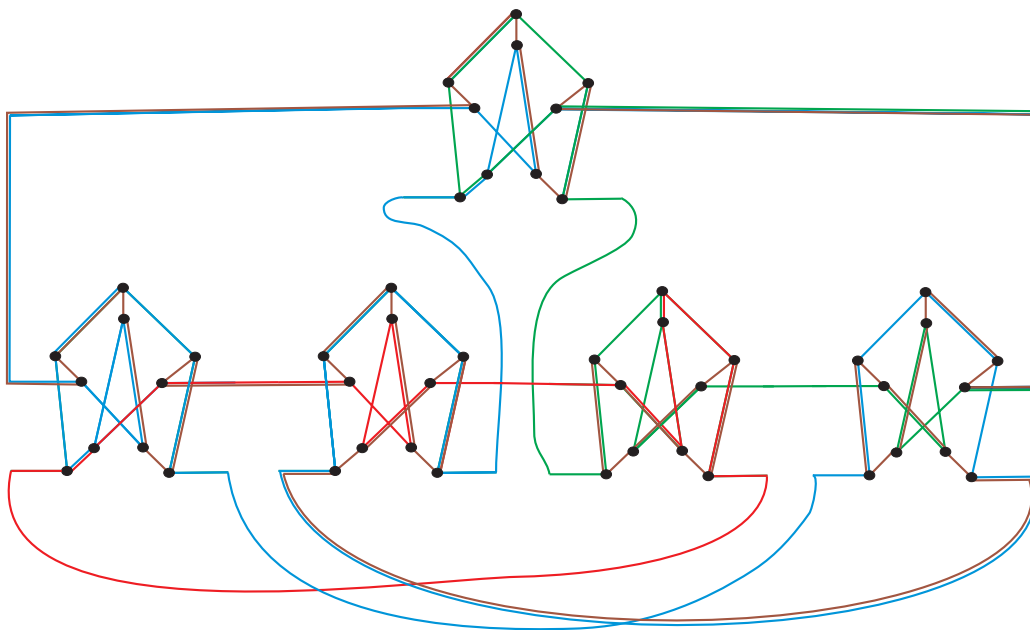


Obr. 3.18: Štyri 1-faktory pokrývajúce Szekeresov snark

sov snark totiž obsahuje 2-faktor, ktorý je tvorený dobrým párom $\{C_1, D_1\}$, analogicky ako S_1 . Pridanie jedného bloku spôsobí totiž len predĺženie jednej časti kružníc C_1, D_1 o párnu dĺžku, čím nebude porušená vlastnosť, že úseky na kružniciach musia byť nepárnej dĺžky. Preto môžeme nájsť štyri pokrývajúce 1-faktory, z ktorých následne zostrojíme najkratšie pokrytie cyklami dĺžky $\frac{4}{3}|E(S_n)|$ pre ľubovoľný snark S_n z triedy Szekeresových snarkov.

3.7 Zhrnutie

Ako sme si mali možnosť všimnúť, všetky skúmané snarky majú najkratšie pokrytie cyklami dĺžky $\frac{4}{3}|E(G)|$. Taktiež sme pripravili počítačový program, s ktorým sme otestovali aj všetky snarky, ktoré majú najviac 30 vrcholov,



Obr. 3.19: Najkratšie pokrytie cyklami Szekeresovho snarku S_1

pričom len Petersenov graf P_g mal dĺžku najkratšieho pokrytia cyklami väčšiu ako $\frac{4}{3}|E(P_g)|$. Nie je nám preto známy žiaden iný cyklicky hranovo 4-súvislý kubický graf s touto vlastnosťou. Zaujímavosťou je, že pre všetky snarky do 30 vrcholov (až na P_g), existovali najkratšie pokrytia takými cyklami, ktoré obsahovali len jednu kružnicu.

Fouquet a Vanherpe vo svojom článku stanovili problém nájdenia cyklicky hranovo 4-súvislého kubického grafu, pre ktorý neexistuje pokrytie štyrmi 1-faktormi ako otvorený problém (Problém 4.3 [FV09]). Na základe Vety 3.5.2, ktorú sme dokázali, nájdenie cyklicky hranovo 4-súvislého kubického grafu G rôzneho od Petersenovho grafu, ktorého dĺžka najkratšieho pokrytia štyrmi cyklami by bola ostro väčšia ako $\frac{4}{3}E(G)$, okrem iného, vyrieši aj tento otvorený problém.

Kapitola 4

Prechádzka čínskeho poštára a Dvojité pokrytie cyklami

V tejto kapitole sa budeme venovať problémom, ktoré úzko súvisia s najkratším pokrytím cyklami. Uvedieme teraz definíciu, ktorú budeme onedlho potrebovať. Množinu celých nezáporných čísel budeme označovať Z^* .

Definícia 4.0.1. *Nech G je graf. Funkcia $w : E(G) \rightarrow Z^*$ sa nazýva váhová funkcia. Ak pre ľubovoľný hranový rez T v G je súčet*

$$\sum_{e \in T} w(e)$$

párny, potom sa w nazýva eulerovská váhová funkcia.

Ak pre eulerovskú váhovú funkciu w , pre ľubovoľný hranový rez T v G a ľubovoľnú hranu $e \in T$ platí,

$$w(e) \leq \sum_{e' \in T-e} w(e')$$

tak potom sa eulerovská váhová funkcia nazýva prípustná váhová funkcia.

Váhovú funkciu w budeme niekedy skrátene nazývať aj *váha*. Ak je obo-
rom hodnôt váhovej funkcie množina $\{1, 2\}$, budeme váhovú funkciu nazývať
(1, 2) váha.

4.1 Prechádzka čínskeho poštára

Prechádzke čínskeho poštára sme sa už venovali v časti 2.3. Na tomto mieste
vyslovíme ďalšiu vetu, o ktorej sme si všimli, že platí a ktorá hovorí o ekvi-
valencii tohto problému a najkratšieho pokrytia cyklami.

Veta 4.1.1. *Problémy prechádzky čínskeho poštára a najkratšieho pokrytia
cyklami sú ekvivalentné pre kubický graf G , práve vtedy keď dĺžka najkratšieho
pokrytia cyklami grafu G je $\frac{4}{3}|E(G)|$.*

Dôkaz. Ukážeme, že prechádzka čínskeho poštára má pre G dĺžku $\frac{4}{3}|E(G)|$.
Z toho už potom bude vyplývať samotné znenie vety.

Vezmime ľubovoľný 2-faktor C a k nemu doplnkový 1-faktor M grafu G .
Na každej kružnici z C si zvolíme orientáciu. Zkontrahujeme jednotlivé kruž-
nice z C do jedného vrchola. Z grafu, ktorý dostaneme vyberieme kosť T .
Vyberieme koreň, nech je to v a vytvoríme na T sled hrán S , ktorý zodpovedá
prehľadávaniu do hĺbky na T , pričom nasledovníci práve prehľadávaného vr-
chola u budú radení v poradí zodpovedajúcom orientácii na kružnici, z ktorej
 u vznikol.

Teraz sa vrátime k pôvodnému grafu a popíšeme ako bude na ňom vyze-
rať prechádzka čínskeho poštára. Začneme z vrchola v . Vždy prejdeme jednu
hranu po kružnici z C v smere podľa zvolenej orientácie a následne po jednej
hrane z M . Ak sa hrana z M nachádza v slede S , tak prejdeme na ďalšiu

kružnicu z C , inak sa vrátíme po tej istej hrane na pôvodnú kružnicu. Tento postup opakujeme, až kým sa nevrátíme druhý raz do vrchola v . Prvý raz sa totiž vrátíme do v po hrane z C , druhý raz po hrane z M .

Týmto postupom dostaneme prechádzku čínskeho poštára, pričom hrany M prejdeme práve dva-krát a hrany C práve raz. Z toho vyplýva, že dĺžka prechádzky čínskeho poštára na G je $\frac{4}{3}|E(G)|$.

□

4.2 Dvojité pokrytie cyklami

Problémom dvojitého pokrytia cyklami sme sa už krátko zaoberali v časti 2.4, kde bola, okrem iného, uvedená aj Hypotéza 2.4.1 o dvojitom pokrytí cyklami ([AT85]), ktorá tvrdí, že pre každý bezmostový graf existuje také pokrytie cyklami, že každá hrana je pokrytá dvomi cyklami.

Seymour vyslovil aj silnejšie tvrdenie tejto hypotézy, že pre každý bezmostový graf G a pre každú kružnicu C v G , existuje také pokrytie cyklami, ktoré obsahuje kružnicu C ako súčasť cyklu a toto pokrytie pokrýva každú hranu G dvomi cyklami.

V tejto časti formulujeme ďalšie hypotézy. Preskúmame, pre ktoré snarky platia a popíšeme ich súvis s Hypotézou 2.4.1. Napokon na základe overovania týchto hypotéz vyslovíme v časti 4.2.3 spresnenie týchto hypotéz.

Hypotéza 4.2.1. *Nech C je ľubovoľný 2-faktor v ľubovoľnom snarku rôznom od Petersenovho grafu. Potom existuje dvojité pokrytie cyklami, ktoré obsahuje C .*

Hypotéza 4.2.2. *Nech C je ľubovoľný množina navzájom hranovo disjunktých kružníc v ľubovoľnom snarku rôznom od Petersenovho grafu. Potom existuje dvojité pokrytie cyklami, ktoré obsahuje C .*

Prvé dve hypotézy sa zaoberali množinou kružníc, ktorá buď pokrývala všetky vrcholy (Hypotéza 4.2.1), alebo nemusela pokrývať všetky vrcholy (Hypotéza 4.2.2). Budeme skúmať ako sa prejavuje aj táto skutočnosť.

Nasledujúca hypotéza je variantom Hypotézy 4.2.2, avšak v tejto forme sa nám s ňou bude lepšie pracovať.

Hypotéza 4.2.3. *Nech w je ľubovoľná prípustná $(1, 2)$ váha v ľubovoľnom snarku rôznom od Petersenovho grafu. Potom existuje pokrytie kružnicami grafu G , pričom každá hrana je pokrytá práve $w(e)$ kružnicami.*

Nasledujúca lema popisuje za akých okolností je váha w na kubickom grafe prípustná.

Lema 4.2.1. *Nech G je kubický graf a nech w je ohodnotenie jeho hrán. Potom w je prípustná $(1, 2)$ váha práve vtedy, ak hranám v okolí ľubovoľného vrchola priradí váhová funkcia w buď hodnoty $1, 1, 2$ alebo hodnoty $2, 2, 2$.*

Dôkaz. Nech w je prípustná $(1, 2)$ váha. Keďže prípustná váha je aj eulerovská a hrany v okolí ľubovoľného vrchola tvoria hranový rez, nemáme žiadne iné možnosti ohodnotenia týchto hrán ako $1, 1, 2$ a $2, 2, 2$, aby sme dostali párny súčet a zároveň, aby žiadna hrana nemala priradenú väčšiu hodnotu ako súčet zvyšných dvoch. Obrátene. Vezmime také hrany e z G , pre ktoré platí $w(e) = 1$. Keďže takéto hrany sú pri každom vrchole buď dve alebo žiadna, tak vytvárajú cyklus. Hrany cyklu prechádzajú cez každý rez párny počet

krát, preto ak niektorý hranový rez obsahuje hrany s vlastnosťou $w(e) = 1$, musí ich byť párny počet. Z týchto vlastností vyplýva, že žiadna hrana nie je ohodnotená väčšou hodnotou ako je súčet ohodnotení ostatných hrán rezu. Váha w je teda prípustná.

□

Medzi spomínanými hypotézami ako aj hypotézou o dvojitém pokrytí cyklami platia vzťahy, ktoré opisujeme v nasledujúcej vete.

Veta 4.2.1. *Platia nasledujúce tvrdenia:*

- i) Hypotéza 4.2.3 platí práve vtedy, keď platí Hypotéza 4.2.2.*
- ii) Ak platí Hypotéza 4.2.2, potom platí aj Hypotéza 4.2.1.*
- iii) Ak platí Hypotéza 4.2.1, potom platí aj Hypotéza 2.4.1 na triede kubických grafov.*

Dôkaz. Dokážeme len tvrdenie i) ostatné tvrdenia sú zrejmé. Ekvivalencia Hypotézy 4.2.3 a Hypotézy 4.2.2 vyplýva z ekvivalencie ich predpokladov. Ak máme množinu C hranovo disjunktných kružníc, prípustnú váhu w nájdeme ohodnotením: $w(e) = 1$, ak $e \in C$, inak $w(e) = 2$. Obrátene. Prípustná váha ohodnotí hrany v okolí každého vrchola buď hodnotami 2,2,2 alebo 1,1,2. Ak vezmeme len hrany ohodnotené hodnotou 1, dostaneme podgraf, ktorý má stupne vrcholov buď 0, alebo 2, tvorí ho teda množina kružníc.

□

4.2.1 Overovanie Hypotézy 4.2.1

Hypotézu 4.2.1 sme testovali algoritmom pre hľadanie pokrytia cyklami¹. Využili sme skutočnosť, že v bezmostovom kubickom grafe existuje ku každému 2-faktoru doplnkový 1-faktor a naopak. Stačí preto, ak pre graf a jeho ľubovoľný 1-faktor nájdeme také pokrytie cyklami, že hrany 1-faktoru budú pokryté dvomi cyklami a ostatné hrany len jedným. Potom je hypotéza pre tento graf pravdivá.

Testovanie sme vykonávali tak, že sme pre jednotlivé snarky vygenerovali všetky 1-faktory, a potom hľadali také pokrytia cyklami, ktoré spĺňajú vlastnosť požadovanú v predchádzajúcom odstavci.

Tabuľka 4.1: Platnosť Hypotézy 4.2.1 na triede snarkov do 28 vrcholov

PV	PS	4.2.1 platí / počet CS4	4.2.1 platí / počet CS5
18	2	0 / 2	0 / 0
20	6	0 / 5	1 / 1
22	20	0 / 18	2 / 2
24	38	0 / 36	2 / 2
26	280	11 / 270	10 / 10
28	2900	121 / 2825	75 / 75

PV = počet vrcholov, PS = počet snarkov, CS 4 = snarky s cyklickou hranovou súvislosťou 4, CS 5 = snarky s cyklickou hranovou súvislosťou 5 a viac

Ako naznačujú výsledky, ktoré sumarizuje Tabuľka 4.2.1, zdá sa, že na pravdivosť Hypotézy 4.2.1 vplýva cyklická hranová súvislosť. Ukazuje sa, že

¹Algoritmom sa podrobnejšie venujeme v nasledujúcej kapitole

pre snarky s cyklickou hranovou súvislosťou 5, je Hypotéza 4.2.1 pravdivá, takisto aj pre jediný snark na 28 vrchoch s cyklickou hranovou súvislosťou 6. Na niektorých snarkoch s cyklickou hranovou súvislosťou 4, bola táto hypotéza pravdivá, na väčšine však nie. Preskúmali sme všetky snarky do 28 vrcholov.

4.2.2 Overovanie Hypotézy 4.2.3

Na základe Vety 4.2.1, Hypotéza 4.2.3 neplatí na snarkoch, na ktorých neplatí Hypotéza 4.2.1. Môžeme však otestovať, či platí na snarkoch, na ktorých platí Hypotéza 4.2.1.

Tabuľka 4.2: Platnosť Hypotézy 4.2.3 na snarkoch, pre ktoré platí Hypotéza 4.2.1

PV	PS	4.2.3 / 4.2.1 (CS4)	4.2.3 / 4.2.1 (CS5)
18	2	0 / 0	0 / 0
20	6	0 / 0	1 / 1
22	20	0 / 0	2 / 2
24	38	0 / 0	2 / 2
26	280	11 / 11	10 / 10
28	2900	87 / 121	75 / 75

(počet snarkov danej CS na ktorých: platí Hyp. 4.2.1 aj 4.2.3 / platí len Hyp. 4.2.1)

Platnosť Hypotézy 4.2.3 budeme testovať podobne ako platnosť Hypotézy 4.2.1, a to tak, že pre snarky, na ktorých platila Hypotéza 4.2.1, vygeneru-

jeme všetky prípustné váhy. Pre každú váhu w otestujeme, či existuje také pokrytie cyklami, že každá hrana e je pokrytá práve $w(e)$ cyklami.

Tabuľka 4.2.2 znázorňuje výsledky testovania, ktoré naznačujú, že Hypotéza 4.2.3 platí na všetkých snarkoch s cyklickou hranovou súvislosťou 5 a viac, na ktorých platila aj Hypotéza 4.2.1. Počet snarkov s cyklickou hranovou súvislosťou 4 s najviac 28 vrcholmi, pre ktoré platila Hypotéza 4.2.1 a neplatí pre ne Hypotéza 4.2.3 je 34.

4.2.3 Spresnenie hypotéz

Na základe predchádzajúcich výsledkov, musíme trochu zoslabiť uvedené hypotézy, pretože musíme zohľadniť aj cyklickú hranovú súvislosť.

Hypotéza 4.2.4. *Nech C je ľubovoľný 2-faktor v cyklicky hranovo 5-súvislom snarku rôznom od Petersenovho grafu. Potom existuje dvojité pokrytie cyklami, ktoré obsahuje C .*

Hypotéza 4.2.5. *Nech C je ľubovoľná množina navzájom hranovo disjunktých kružníc v ľubovoľnom cyklicky hranovo 5-súvislom snarku rôznom od Petersenovho grafu. Potom existuje dvojité pokrytie cyklami, ktoré obsahuje množinu C .*

Hypotéza 4.2.6. *Nech w je ľubovoľná prípustná $(1, 2)$ váhová funkcia v cyklicky hranovo 5-súvislom snarku rôznom od Petersenovho grafu. Potom existuje pokrytie kružnicami grafu G , pričom každá hrana je pokrytá práve $w(e)$ kružnicami.*

Okrem toho, že sa nám podarilo upraviť znenie hypotéz, môžeme vysloviť ešte jednu vetu, ktorá udáva vzťah medzi pôvodnými hypotézami:

Veta 4.2.2. *Uvažujme cyklicky hranovo 5-súvislé snarky s najviac 28 vrcholmi. Potom Hypotéza 4.2.1 platí práve vtedy, keď platí Hypotéza 4.2.2. Zároveň Hypotéza 4.2.1 platí práve vtedy, keď platí Hypotéza 4.2.3.*

Kapitola 5

Algoritmy

V tejto kapitole popíšeme a uvedieme pseudokód algoritmov, ktoré sme používali pri hľadaní najkratšieho pokrytia cyklami a overovaní hypotéz v predchádzajúcej kapitole. Zdrojové kódy sú na priloženom CD.

5.1 Algoritmus na pokrytie kubického grafu cyklami

Tento algoritmus sme používali pri hľadaní najkratšieho pokrytia cyklami kubických grafov, ale aj pri hľadaní pokrytia cyklami pri overovaní hypotéz, pri ktorých sme mali dopredu určené, koľko cyklov má prechádzať po každej hrane grafu. Na konci tejto podkapitoly uvádzame pseudokód algoritmu pre hľadanie najkratšieho pokrytia cyklami. S drobnými úpravami, ktoré popíšeme, ho môžeme použiť aj na hľadanie spomínaného pokrytia cyklami, na základe vopred určeného počtu cyklov prechádzajúcich jednotlivými hranami.

Pretože problém najkratšieho pokrytia grafu cyklami je NP-úplný, nie sú známe žiadne efektívne algoritmy, ktoré by ho vedeli vypočítať. Budeme používať exponenciálny algoritmus, ktorý využíva backtracking.

Ústrednou časťou algoritmu je rekurzívna procedúra *hladaj*, pomocou ktorej hľadáme kružnicu z počiatočného vrchola vytváraním postupnosti hrán. Po uzavretí kružnice, vezmeme v poradí prvú nepokrytú hranu a začneme vytvárať ďalšiu postupnosť hrán, s cieľom vytvoriť ďalšiu kružnicu. Každú kružnicu reprezentujeme ako postupnosť vrcholov. Používame nato dvojrozmerné globálne pole *postupnost*. Okrem neho používame aj globálne pole *index*, ktoré nám slúži, aby sme si pamätali aká je aktuálna dĺžka kružnice, a aké sú dĺžky už nájdených kružníc. Takisto používame globálne premenné *akt_index* a *akt_postupnost*, ktoré nám slúžia ako smerníky do týchto globálnych polí.

Na načítanie grafu a uchovávanie tabuľky susednosti vrcholov používame dvojrozmerné pole *tabulka_susednosti*, v poli *hrany* si udržiavame informácie o všetkých hranách. Hrana pozostáva z troch údajov, dva údaje sú čísla koncových vrcholov hrany (v_1, v_2) a jeden údaj nesie informáciu o pokrytí hrany.

Pri hľadaní najkratšieho pokrytia cyklami je spočiatku premenná s informáciou o pokrytí hrany, nastavená pre každú hranu na -1. Po uzavretí kružnice sa pri označovaní hrán, podľa aktuálnej postupnosti, nastaví hodnota tejto premennej na 1. Pri odznačovaní hrán, pokiaľ nie je pokrytá inou hranou, sa zasa nastaví na -1. Aby sme výpočet urýchlili, pri nájdení prvého pokrytia cyklami, si v premennej *min* zapamätáme jeho dĺžku. Premennú *min* aktualizujeme vždy pri nájdení kratšieho pokrytia. Zároveň si zapamätáme v dvojrozmernom poli *naj_postupnost* zatiaľ najkratšie pokrytie cyklami. Vždy

pred začatím vytvárania novej kružnice overíme, či celková dĺžka doteraz nájdených kružníc neprevyšuje zatiaľ najkratšie pokrytie, ktoré sme našli. Funkcia *spocitaj_zatial* vráti celkovú dĺžku kružníc uložených v globálnom poli *postupnost*.

Pri hľadaní pokrytia cyklami pri testovaní hypotéz spomínaných v časti 4.2, sme mali určené, ktorá hrana má byť pokrytá koľkými cyklami. Keďže aj celková dĺžka pokrytia bola tým pádom určená, nemuseli sme hľadať žiadne kratšie pokrytia, a teda ani volať funkciu *spocitaj_zatial*. Takisto sme sa zaobišli aj bez premennej *min*, či *naj_postupnost*. Pri pokrytí hrany kružnicou, sa premenná s informáciou o pokrytí hrany dekrementovala. Ak máme určený počet kružníc pokrývajúcich hranu, ako bolo tomu tak, aj v tomto prípade, musíme kontrolovať, či hrana, ktorú chceme použiť, nemá už vyčerpaný počet pokrývajúcich kružníc. Ak nemá, hovoríme, že hrana je *prípustná*. Ak nie je vopred určené, koľko cyklov má prechádzať po jednotlivých hranách, túto podmienku kontrolovať nemusíme a hrany budeme považovať za prípustné vždy.

Funkcia *existuje_nepokryta_hrana* vracia číslo prvej hrany v poradí, ktorá ešte nebola pokrytá. Keďže táto hrana musí byť pokrytá nejakou kružnicou, je to vhodné miesto, odkiaľ hľadať ďalšiu kružnicu. Ak taká hrana už neexistuje, funkcia vráti hodnotu -1.

```

procedure hladaj(int s){
    index[akt_index] ++;
    postupnost[akt_postupnost][index[akt_index]] = s;
    IF (nie je uzavreta kruznica){
        FOR (i=0; i<3; i++){
            x = tabulka_susednosti[i][s];
            IF (x nie je v postupnsti postupnost[akt_postupnost])
                AND (hrana(x,s) je pripustna){
                    hladaj(x);
                }
        }
    }
    ELSE{
        zatial = spocitaj_zatial();
        IF (zatial < min){
            e = existuje_nepokryta_hrana();
            IF (e > -1){
                akt_postupnost ++;
                akt_index ++;
                postupnost[akt_postupnost][0] = hrany[e].v1;
                index[akt_index] = 1;
                hladaj(hrany[e].v2);
                akt_index --;
                akt_postupnost --;
            }
        }
    }
}

```

```
    }  
    ELSE{  
        min = zatial;  
        naj_postupnost = postupnost;  
    }  
}  
}  
index[akt_index] --;  
}
```

5.2 Algoritmus pre hľadanie 1-faktorov

Na nájdenie všetkých 1-faktorov sme používali tiež priamočiary backtrackingový algoritmus. Vieme, že v kubickom grafe musí mať každý 1-faktor tretinu počtu hrán celého grafu.

Algoritmus pracuje s globálnym poľom *hrany*, ktoré pre každú hranu uchováva vrcholy, ktoré ju tvoria a informáciu o príslušnosti hrany do 1-faktoru. Ak hodnota premennej *hrany[i].c* je 2, potom *i*-ta hrana je súčasťou 1-faktoru. Ak hodnota premennej *hrany[i].c* je 1, tak zatiaľ nie je. Na začiatok inicializujeme pre *i*-tú hranu hodnotu *hrany[i].c* na 1. V parametri *zostava* si pamätáme koľko hrán ešte potrebujeme do 1-faktoru priradiť. Po priradení hrany do 1-faktoru, voláme procedúru s dekrementovanou hodnotou parametra *zostava*. Ak je hodnota premennej *zostava* 0, našli sme 1-faktor a môžeme ho zapísať na výstup.

Na začiatku voláme funkciu *pridaj_hranu* s parametrom *start* = 0, teda začíname od prvej hrany a postupne sa snažíme pridať nasledujúce. Funkcia *over* vracia hodnotu *true* práve vtedy, keď daná hrana nesusedí so žiadnou hranou, ktorá už do 1-faktoru patrí.

```

procedure pridaj_hranu(int start, int zostava){
    IF (zostava == 0){
        zapis_1-faktor
    }
    ELSE{
        FOR(i = start; i <= pocet_hran - zostava; i ++){
            if(hrany[i].c==1 AND over(i)){
                hrany[i].c = 2;
                pridaj_hranu(i, zostava-1);
                hrany[i].c = 1;
            }
        }
    }
}

```

5.3 Algoritmus pre hľadanie prípustných váh

Podobne aj pre generovanie prípustných váh používame algoritmus založený na backtrackingu. V tomto prípade budeme vychádzať z tvrdenia Lemy 4.2.1, že každá prípustná váha má pri každom vrchole hrany ohodnotené jednou z nasledujúcich trojíc: $(2, 2, 2)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$. Do úvahy teda prichádzajú štyri možnosti, ktoré budeme testovať vo FOR cykle. Funkcia *over_moznost* vráti true práve vtedy ak doterajšie ohodnotenie hrán nevyklučuje možnosť, na ktorú sa pýtame. Procedúra *oznac*(m, n) označí hrany incidentné s vrcholom n podľa možnosti m .

Okrem toho, si v procedúre *oznac* globálne zaznamenávame, ako boli označené hrany pred aplikovaním danej možnosti. Vystačí nám nato dvojrozmerné pole veľkosti $3N$, kde N je počet vrcholov kubického grafu. Na začiatku, totiž, majú všetky hrany hodnotu 0. Ak sme aplikovali možnosť m na vrchol, v ktorého okolí boli niektoré hrany už označené, aby sme sa vedeli vrátiť do stavu pred aplikovaním danej možnosti, nestačí nám pamätať si, ktorú možnosť sme aplikovali, ale potrebujeme vedieť aj presné ohodnotenie hrán v tomto stave.

Algoritmus bude postupne spracovávať vrcholy, podľa ich poradia. Pod spracovaním vrchola, máme na mysli už spomínané ohodnocovanie hrán, ktoré sú s ním incidentné. Pokiaľ ohodnotenie hrán nie je korektné, vraciam sa k predchádzajúcemu vrcholu a vyskúšame nasledujúcu možnosť ohodnotenia hrán. Ku poslednému vrcholu sa dostaneme, práve vtedy, ak ohodnotenia hrán incidentných s predchádzajúcimi vrcholmi boli korektné. Keďže hrany incidentné s posledným vrcholom už musia byť ohodnotené, stačí nám dané ohodnotenie len zapísať na výstup.

```

procedure spracuj_vrchol(int n){
  IF (n < pocet){
    FOR(m = 1; m <= 4; m++){
      if(over_moznost(m)){
        oznac(m, n);
        spracuj_vrchol(n+1);
        odznac(n);
      }
    }
  }
  ELSE{
    zapis_ohodnotenie();
  }
}

```

Kapitola 6

Záver

V tejto diplomovej práci sme zhrnuli poznatky o najkratšom pokrytí cyklami. Uviedli sme súvislosti s podobnými problémami v teórii grafov.

Našli sme a popísali sme najkratšie pokrytie cyklami pre známe nekonečné triedy grafov, ako sú Isaacsove snarky, Goldbergove snarky, Zovšeobecnené Blanušové snarky a Szekeresove snarky. Taktiež sme pomocou počítačového programu našli najkratšie pokrytie cyklami pre všetky snarky s najviac 30 vrcholmi.

Zistili sme, že všetky tieto snarky, s výnimkou Petersenovho grafu, majú dĺžku najkratšieho pokrytia cyklami veľkosti $\frac{4}{3}$ počtu hrán, čo je dolná hranica pre dĺžku najkratšieho pokrytia bezmostových kubických grafov. Takisto sa dajú všetky pokryť štyrmi cyklami, čo je rovnako dolná hranica pre počet cyklov. Ukázali sme, že problém nájsť pokrytie snarku štyrmi 1-faktormi je ekvivalentný problému nájsť najkratšie pokrytie štyrmi cyklami celkovej dĺžky $\frac{4}{3}|E(G)|$. Vďaka tejto ekvivalencii vieme nájsť najkratšie pokrytie cyklami na základe pokrytia štyrmi 1-faktormi, čo sme demonštrovali na Sze-

keresovom snarku s 50 vrcholmi.

Ďalej sme vyslovili niekoľko hypotéz, ktoré naznačujú za akých predpokladov by sme mohli nájsť dvojité pokrytie cyklami pre ľubovoľný snark, ktorý spĺňa tieto predpoklady. Poukázali sme aj na zaujímavé vzťahy, ktoré medzi týmito hypotézami platia.

Na túto diplomovú prácu sa dá v rôznych smeroch nadviazať. Zaujímava je predovšetkým otázka, či existuje nejaký snark, rôzny od Petersenovho grafu, ktorý by mal dĺžku najkratšieho pokrytia cyklami väčšiu ako $\frac{4}{3}|E(G)|$. Naďalej sa dá pokračovať i v skúmaní hypotéz 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6, ale i ekvivalencie hypotéz 4.2.1 a 4.2.2, resp. 4.2.4 a 4.2.6.

Dodatok A

Príloha

Ku diplomovej práci prikladáme aj CD, ktoré obsahuje programy, ktoré sme využívali. Programy sú napísané v jazyku C. Podrobné inštrukcie sa nachádzajú v súbore "help.txt".

Obsahom CD sú nasledovné programy určené pre kubické grafy.

- 1) program na nájdenie najkratšieho pokrytia cyklami
- 2) program na generovanie 1-faktorov
- 3) program na generovanie prípustných váh
- 4) program na hľadanie pokrytia cyklami podľa ohodnotenia hrán

Literatúra

- [AGZ94] B. Alspach, L. A. Goddyn, and C.-Q. Zhang. Graphs with the circuit cover property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 344(1):131–154, 1994.
- [AT85] N. Alon and M. Tarsi. Covering multigraphs by simple circuits. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 6(3):345–350, 1985.
- [BJJ83] J. C. Bermond, B. Jackson, and F. Jaeger. Shortest coverings of graphs with cycles. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 35:297–308, 1983.
- [Fan93] Genghua Fan. Tutte’s 3-flow conjecture and short cycle covers. *J. Comb. Theory Ser. B*, 57(1):36–43, 1993.
- [Fan98] Genghua Fan. Proofs of two minimum circuit cover conjectures. *J. Comb. Theory Ser. B*, 74(2):353–367, 1998.
- [FV09] Jean-Luc Fouquet and Jean-Marie Vanherpe. On the perfect matching index of bridgeless cubic graphs. *CoRR*, abs/0904.1296, 2009.
- [Hol81] Ian Holyer. The np-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):718–720, 1981.

- [IR78] Alon Itai and Michael Rodeh. Covering a graph by circuits. In *ICALP*, pages 289–299, 1978.
- [Jac90] Bill Jackson. Shortest circuit covers and postman tours in graphs with a nowhere zero 4-flow. *SIAM J. Comput.*, 19(4):659–665, 1990.
- [JRT86] Ury Janshy, Andre Raspaud, and Michael Tarsi. Short circuit covers for regular matroids with a nowhere zero 5-flow. *J. Comb. Theory Ser. A*, 43(3):354–357, 1986.
- [JT92] Ury Janshy and Michael Tarsi. Short cycle covers and the cycle double cover conjecture. *J. Comb. Theory Ser. B*, 56(2):197–204, 1992.
- [Ras91] André Raspaud. Cycle covers of graphs with a nowhere-zero 4-flow. *Journal of Graph Theory*, 15(6):649–654, 1991.
- [Sey79] P. D. Seymour. Sums of circuits. In *Graph Theory and Related Topics (J.A. Bondy and U.S.R. Murty, eds.)*, pages 341–355. Academic press, 1979.
- [Sey81] P. D. Seymour. Nowhere-zero 6-flows. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 30(2):130 – 135, 1981.
- [SZ05] Jinlong Shu and Cun-Quan Zhang. A note about shortest cycle covers. *Discrete Mathematics*, 301(2-3):232–238, 2005.
- [Sze73] G. Szekeres. Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Austral. Math. Soc.*, 8:367–387, 1973.

- [Tho97] Carsten Thomassen. On the complexity of finding a minimum cycle cover of a graph. *SIAM J. Comput.*, 26(3):675–677, 1997.
- [You83] D. H. Younger. Integer flows. *J. Graph Theory*, 7:349–357, 1983.
- [Zha90] C.-Q. Zhang. Minimum cycle coverings and integer flows. *J. Graph Theory*, 14(5):537–546, 1990.
- [Zha97] C.-Q. Zhang. *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*. Marcel Dekker, 1997.