



KATEDRA INFORMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

ZOZNAMOVÉ FARBENIA GRAFOV

(Diplomová práca)

LUKÁŠ ŠPALEK

Vedúca: RNDr. Edita Máčajová, PhD.

Bratislava, 2010

Zoznamové farbenia grafov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Lukáš Špalek

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY a INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

Študijný odbor: 9.2.1. Informatika

Vedúca záverečnej práce
RNDr. Edita Máčajová, PhD.

BRATISLAVA, 2010

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

.....

PodĎakovanie

Chcem sa poĎakovať mojej školiteľke RNDr. Edite Máčajovej PhD. za výber témy, cenné rady a trpezlivosť, ďalej mojej rodine za ich podporu počas celého štúdia. V neposlednom rade Ďakujem aj všetkým priateľom za ich čas, cenné rady a pomoc pri jazykovej korekcii.

Abstrakt

Autor: Lukáš Špalek
Názov práce: Zoznamové farbenia grafov
Škola: Univerzita Komenského
Fakulta: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra: Katedra informatiky
Vedúci diplomovej práce: RNDr. Edita Máčajová, PhD.
Bratislava, jún 2010

Farbenie grafov je jednou z najpopulárnejších oblastí, ktorou sa zaoberá teória grafov. Farbenie grafu je priradenie farieb jednotlivým vrcholom, tak aby susedné vrcholy mali rôzne farby. V tejto práci si bližšie predstavíme zoznamové farbenie, ktoré je zovšeobecnením štandardného farbenia. V zoznamovom farbení má každý vrchol zoznam prípustných farieb, ktorými môže byť ofarbený. Oboznámime čitateľa s hypotézou o zoznamovom farbení a s doterajšími výsledkami o zoznamovom farbení a platnosti hypotézy o zoznamovom farbení. Ďalej v štvrtej kapitole predstavíme metódy dokazovania danej hypotézy spolu s názornými príkladmi, ktoré využívajú grafový polynóm, orientácie grafu, permutácie a faktorizáciu. Následne v piatej kapitole predvedieme dôkazy platnosti hypotézy o zoznamovom farbení pre koleso, jeho modifikácie, zovšeobecnené Petersenove grafy kroku 1, Möbiov rebrík a iné triedy.

Kľúčové slová: zoznamové farbenie, hypotéza o zoznamovom farbení

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Motivácia	2
1.2	Základné definície	3
1.3	Základné tvrdenia	5
2	Zoznamové farbenie	7
2.1	Definície	7
2.2	História	9
2.3	Známe poznatky	10
2.3.1	Grafy s cyklami dĺžky deliteľnej číslom l	13
3	Hypotéza o zoznamovom farbení (LCC)	18
3.1	LCC a bipartitné grafy	20
4	Metódy dokazovania LCC	23
4.1	Grafový polynóm	23
4.2	Eulerovské podgrafy	25
4.3	Permutácie	26
4.4	Faktorizácia	28
5	Platnosť LCC pre vybrané triedy grafov	32
5.1	Rebrík, koleso a iné modifikácie	32

5.1.1	Rebrík	32
5.1.2	Koleso	33
5.1.3	Modifikácie kolesa	35
5.1.4	Kolesové veže	36
5.1.5	Valce	37
5.2	Zovšeobecnené Petersenove grafy	40
5.2.1	Definícia	40
5.2.2	Zovšeobecnené Petersenove grafy kroku 1	41
5.3	Trieda grafov A_n	42
5.4	Möbiiov rebrík	47
6	Záver	51
6.1	Otvorené otázky	52

Kapitola 1

Úvod

Koľko najmenej farieb potrebujeme na ofarbenie mapy sveta tak, aby susedné štáty mali rôznu farbu?

Táto otázka nám bližšie priblíži o čom je problém farbenia v teórii grafov. Na úvod si predstavíme niekoľko pojmov. *Graf* je množina vrcholov a hrán, t.j. spojení medzi vrcholmi. *Farbenie* grafu je priradenie čísla (farby) každému vrcholu tak, aby vrcholy spojené hranou nemali priradené rovnaké číslo. *Mostom* budeme nazývať hranu, pokiaľ sa graf po jej odstránení stane nesúvislým. Ak graf vieme zakresliť do roviny tak, aby sa hrany nepretínali hovoríme, že je *planárny*. Teória grafov nám po dlhých desaťročiach skúmania dala v roku 1976 odpoveď na spomínanú otázku ohľadne farbenia mapy sveta. Kenneth Appel a Wolfgang Haken dokázali, že na zafarbenie oblastí každého planárneho bezmostového grafu stačia štyri farby, čím potvrdili hypotézu, ktorá bola po prvý krát vyslovená už v roku 1852.

Táto práca sa bude zaoberať zoznamovým farbením, ktoré je zovšeobecnením pojmu farbenia. V tomto zovšeobecnení pre každý vrchol existuje zoznam farieb a následne ofarbujeme vrcholy grafu z ich zoznamov. Zoznamovému farbeniu ako prví predstavili páni Erdős, Rubin, a Taylor v roku 1959 [9]. Po 26 rokoch skúmania vznikla hypotéza o zoznamovom farbení, ktorej sa bu-

deme v tejto práci venovať. Ukážeme si viaceré metódy, ktoré sa používajú pri čiastkových dôkazoch platnosti tejto hypotézy a následne si uvedieme triedy grafov, pre ktoré sme dokázali platnosť hypotézy o zoznamovom farbení.

1.1 Motivácia

Klasické farbenie sa používa na riešenie širokého spektra problémov. Spomeňme aspoň niektoré: plánovanie, alokácia registrov, problém priradovania kanálov. Zoznamové farbenie vychádza z aplikácií klasického farbenia, pre ktoré platia obmedzenia na priradovanie hodnôt jednotlivým objektom. V tejto časti si predstavíme niekoľko príkladov použitia zoznamového farbenia v praxi.

Využitím zoznamového farbenia na alokáciu registrov sa v článku [24] zaoberajú páni Zeitlhofer a Wess. Rozoberajú situáciu, keď procesor má funkcionálne jednotky viacerých typov: napríklad také, čo vedie sčítavať aj násobiť a také, ktoré vedie len sčítavať. Zoznamové farbenie je potom používané na plánovanie inštrukcií. Napríklad, ak operácia vyžaduje násobenie, potom nemôže byť priradená jednotke, ktorá vie len sčítavať. Teda každej operácii sú priradené jednotky, ktoré ju môžu spracovať. Ďalšie použitie zoznamového farbenia môžeme nájsť pri ukladaní medzivýsledkov do registrov. Operáciám sú priradené zoznamy registrov, ktoré závisia od použitých jednotiek a od nimi potrebných registrov. Operácie sú teda vrcholy grafu a tie budeme ofarbovať farbami (názvami registrov). Pre ilustráciu si uvedieme nasledujúci príklad: ak operácia používa sčítanie a následne násobenie, potom medzivýsledok sčítania by nemal byť uložený do registra, ktorý nie je asociovaný s jednotkou, ktorá podporuje násobenie. Riešenie tohto problému určuje korektnú alokáciu registrov a plánovanie inštrukcií pre zadané výpočty.

Ďalšou možnou aplikáciou je riešenie problému priradovania kanálov. Ramachandran a kol. vo svojom článku [18] poukazujú na vzájomné rušenie sa

bezdrôtových sietí, ktoré sú blízko seba. Minimalizovanie rušenia môžeme dosiahnuť obmedzením frekvencií, na ktorých môže router pracovať. Túto situáciu môžeme modelovať pomocou zoznamového farbenia. Spomínaní autori prirovnávajú problém priradovania frekvencií k bezdrôtovej mesh sieti postavenej na jednorádiových a viacrádiových routeroch. Viacrádiové routre majú niekoľko rádii, ktoré môžu byť nastavené na neprekrývajúce sa kanály a komunikovať s viacerými ďalšími rádiami. Reprezentujme tento problém v terminológii teórie grafov za predpokladu, že hardware je na fixnom mieste, teda sieťová topológia je daná. Každé rádio bude predstavovať vrchol. Hranu grafu predstavuje bezdrôtové spojenie medzi rádiami v danej topológii. Takýto graf označíme G . Ďalej vytvoríme multirádiový graf konfliktov MCG , vrcholmi tohto grafu budú hrany grafu G , ak sa dve bezdrôtové spojenia navzájom rušili v grafe G , potom medzi vrcholmi týchto spojení bude v grafe MCG hrana. Zoznam prípustných frekvencií je priradený ku každému vrcholu grafu MCG . Môžeme si všimnúť, že prezentované zoznamové farbenie grafu MCG je zoznamové hranové farbenie grafu G .

1.2 Základné definície

V tejto časti si predstavíme definície z oblasti farbenia grafov a zhrnieme základné vlastnosti, ktoré s nimi súvisia.

Graf alebo *neorientovaný graf* G je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholov a E je množina hrán, t.j. neusporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$, kde $u \neq v$.

Orientovaný graf G je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholov a E je množina orientovaných hrán, t.j. usporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$, kde $u \neq v$.

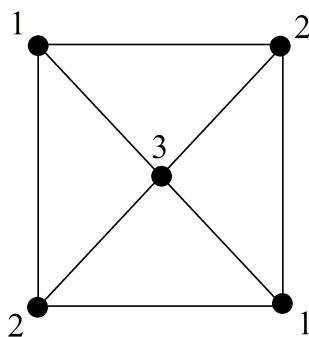
Bipartitný graf je taký graf, ktorého vrcholy vieme rozdeliť do dvoch množín A, B , tak, aby všetky hrany boli tvaru uv , kde $u \in A$ a $v \in B$, alebo

$u \in B$ a $v \in A$.

Vrcholové farbenie grafu $G = (V, E)$ je funkcia $c : V \rightarrow S$, kde S je množina farieb. Funkcia c musí spĺňať vlastnosť, že pre všetky hrany $uv \in E$ platí $c(u) \neq c(v)$. Inak povedané vrcholy spojené hranou musia mať rôznu farbu.

Graf G je (vrcholovo) k -zafarbiteľný, pokiaľ existuje farbenie $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Chromatické číslo $\chi(G)$ grafu G je najmenšie také k , pre ktoré graf G je k -zafarbiteľný.



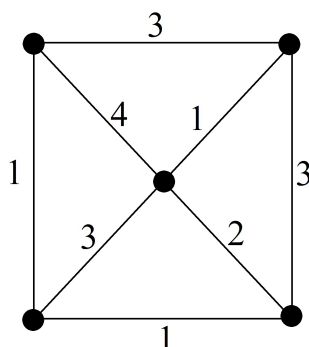
Obr. 1.1: Vrcholové farbenie $V \rightarrow \{1, \dots, 3\}$

Môžeme si všimnúť, že k -farbenie zodpovedá rozdeleniu vrcholov do k nezávislých množín, tieto nazývame *farebné triedy*.

Hranové farbenie grafu $G = (V, E)$ je funkcia $c : V \rightarrow S$ taká, že pre každú dvojicu susedných hrán $e, f \in E$ platí $c(e) \neq c(f)$.

Chromatický index grafu G je najmenšie prirodzené číslo k , pre ktoré platí, že graf G je hranovo k -zafarbiteľný. Označujeme ho $\chi'(G) = k$.

Maximálny stupeň grafu G označíme $\Delta(G)$.

Obr. 1.2: Hranové farbenie $V \rightarrow \{1, \dots, 4\}$

Známe dolné ohraňčenia

Klikové číslo grafu $\omega(G)$ predstavuje počet vrcholov maximálnej kliky (kompletného podgrafu) grafu G .

Nezávislá množina grafu G je množina takých vrcholov grafu G , ktoré nie sú spojené hranou.

Veľkosť maximálnej nezávislej množiny grafu G označíme ako $\alpha(G)$.

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

Medzi triedy grafov, pre ktoré $\chi(G)$ je väčšie ako $\omega(G)$ patria napríklad nepárne cykly dĺžky aspoň päť ($\chi(C_{2k+1}) = 3 > 2 = \omega(C_{2k+1})$), alebo taktiež komplement nepárneho cyklu, ktorého stupeň je aspoň päť ($\chi(\overline{C_{2k+1}}) = k + 1 > k = \omega(\overline{C_{2k+1}})$).

1.3 Základné tvrdenia

Veta 1.3.1 (Grötzsch [12]) *Každý rovinný graf, ktorý neobsahuje trojuholník je 3-zafarbiteľný.*

Veta 1.3.2 (*Veta o štyroch farbách*)(Appel, Haken [5]) Každý rovinný graf je 4-zafarbiteľný.

Veta 1.3.3 Pre každý graf G ktorý obsahuje m hrán platí:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Veta 1.3.4 (*Brooksova veta* [6]) Nech graf G je súvislý. Graf G nie je kompletňý graf ani nepárna kružnica práve vtedy, keď platí:

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Veta 1.3.5 (*König* [17]) Pre každý bipartitňý graf G platí:

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Veta 1.3.6 (*Vizing* [22]) Pre každý graf G platí:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Kapitola 2

Zoznamové farbenie

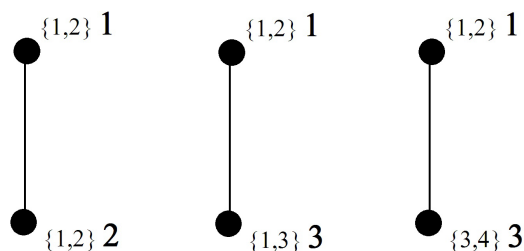
V tejto kapitole uvedieme, čo znamená pojem zoznamové farbenie a aké sú jeho základné vlastnosti. Táto oblasť je relatívne mladá a poskytuje vedcom veľký potenciál pre výskum. Niektorí skúmajú, aké vzťahy existujú medzi klasickým farbením a zoznamovým farbením, iných viac zaujali algoritmy na hľadanie k -zoznamového chromatického čísla na náhodných grafoch, ďalších upútali vlastnosti zoznamového farbenia a hypotézy s nimi súvisiace.

2.1 Definície

Nech pre každý vrchol $v \in V$ existuje zoznam S_v . Potom farbenie c také, že pre všetky $v \in V$ platí $c(v) \in S_v$, nazývame farbenie zo zoznamov S_v .

Graf G nazývame *zoznamovo k -zafarbiteľný*, ak pre ľubovoľnú množinu zoznamov $(S_v)_{v \in V}$ takú, že $|S_v| = k$ pre všetky $v \in V$ existuje vrcholové farbenie grafu G zo zoznamov S_v . Názorný príklad zoznamového farbenia môžeme vidieť na obrázku 2.1.

Najmenšie prirodzené číslo k pre ktoré je graf G zoznamovo k -zafarbiteľný nazývame *zoznamové chromatické číslo* a označujeme ho $ch(G)$ (v anglickej literatúre tiež označované ako *choice number*).



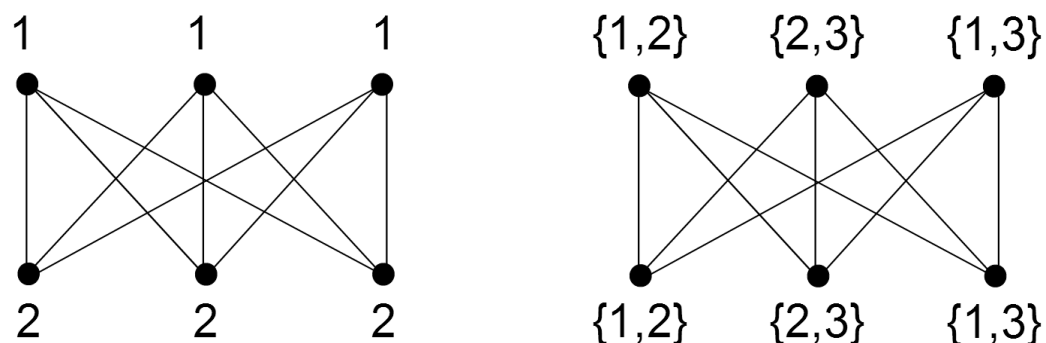
Obr. 2.1: Príklad zoznamovo 2-zafarbiteľného grafu.

Zoznamové farbenie hrán je definované obdobne.

Najmenšie prirodzené číslo k , pre ktoré graf G má zoznamové k -farbenie hrán nazývame *zoznamový chromatický index* a je označovaný ako $ch'(G)$. Môžeme taktiež vidieť, že $ch'(G) = ch(L(G))$, kde $L(G)$ je hranový graf grafu G . Z definície zoznamového farbenia je možné vidieť, že klasické k -farbenie je špeciálny prípad zoznamového k -farbenia, v ktorom pre všetky vrcholy $v \in V$ platí $S_v = \{1, \dots, k\}$. Z toho dostávame, že

$$ch(G) \geq \chi(G) \quad ch'(G) \geq \chi'(G). \quad (2.1)$$

Je zaujímavé pozorovať, že aj napriek nerovnostiam 2.1 mnohé tvrdenia, ktoré platia pre klasické farbenie, platia aj pre zoznamové farbenie. Veľmi pekným príkladom je Brookova veta 1.3.4 a jej obdoba pre zoznamové farbenia, ktorá nám hovorí, že graf G nie je kompletný ani nepárna kružnica, vtedy a len vtedy, keď $ch(G) \leq \Delta(G)$. Na obrázku 2.1 môžeme vidieť príklad bipartitného grafu, pre ktorý zoznamové chromatické číslo a chromatické číslo sú rozdielne. Bolo dokázané, že rozdiel medzi chromatickým číslom a zoznamovým chromatickým číslom môže byť ľubovoľne veľký, napríklad v prípade bipartitných grafov [9].



Obr. 2.2: Príklad bipartitného grafu G , kde $\chi(G) = 2$, ale $\chi'(G) > 2$, lebo $\chi'(G) = 3$.

2.2 História

Ako už bolo spomenuté problematika zoznamového farbenia je pomerne mladá. Uvedieme prierez históriou farbenia a zoznamového farbenia.

1. Chromatické číslo

- (a) (Heawood [14], 1890) $\chi(G) \leq 5$ pre každý planárny graf G
- (b) (Grötzsch [13], 1959) $\chi(G) \leq 3$ pre každý planárny graf G s obvodom apoň 4
- (c) (Grünbaum [11], 1962) $\chi(G) \leq 3$ pre každý planárny graf G s najviac tromi 3-cyklami
- (d) (Appel a Haken [5], 1976) $\chi(G) \leq 4$ pre každý planárny graf G

2. Zoznamové chromatické číslo

- (a) (Alon a Tarsi [4], 1992) $ch(G) \leq 3$ pre každý graf G , ktorý je planárny a bipartitný
- (b) (Thomassen [19], 1994) $ch(G) \leq 5$ pre každý planárny graf G

- (c) (Thomassen [20], 1995) $ch(G) \leq 3$ pre každý planárny graf G s obvodom aspoň 5
- (d) (Alon a Krivelevich [3], 1998) $ch(G) \approx (1 + o(1)) \log_2(np)$ pre každý náhodný bipartitný graf $G(n, n, p)$
- (e) (Thomassen [21], 2002) $ch(G) \leq 3$ pre každý planárny graf G s obvodom aspoň 5 - krátky dôkaz

2.3 Známe poznatky

Vlastnosti zoznamového chromatického čísla sú odlišné od vlastností chromatického čísla. Toto podčiarkuje aj jav, že aj napriek platnosti istých analogických nerovností, dôkazy týchto nerovností sú radikálne odlišné.

Jedným z najznámejších príkladov, ktoré toto potvrdzujú je zoznamová verzia vety o 5-zafarbiteľnosti planárnych grafov. Tvrdenie, že každý planárny graf je zoznamovo 5-zafarbiteľný bolo skúmané skoro 20 rokov. Nakoniec v roku 1994 Thomassen [19] toto tvrdenie dokázal použitím jednoduchej matematickej indukcie. Thomassen sa v svojom dôkaze vyhol použitiu vety o 5-zafarbiteľnosti planárnych grafov a jeho dôkaz je diametrálne odlišný.

Lema 2.3.1 *Predpokladajme, že každá vnútorná plocha grafu G je ohraničená trojuholníkom a vonkajšia plocha je ohraničená cyklom $C = v_1 \dots v_k v_1$. Ďalej predpokladajme, že vrchol v_1 je už zafarbený s farbou 1 a vrchol v_2 s farbou 2. A nakoniec predpokladajme ešte, že každý ďalší vrchol cyklu C má vo svojom zozname aspoň 3 farby a každý vrchol z $G - C$ má vo svojom zozname aspoň 5 farieb. Potom farbenie vrcholov v_1 a v_2 vieme rozšíriť na farbenie grafu G z jeho zadaných zoznamov.*

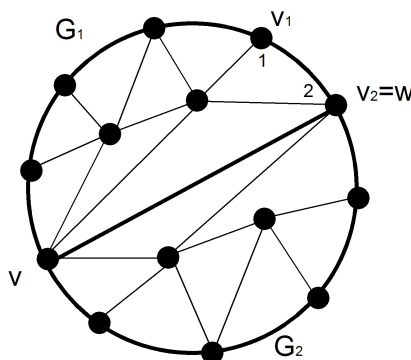
Dôkaz. Dôkaz uskutočníme pomocou matematickej indukcie vzhľadom na počet vrcholov grafu G .

Ak $|G| = 3$, potom $G = C$ a zafarbenie je triviálne.

Ďalej nech $|G| \geq 4$ a predpokladajme, že pre všetky menšie grafy lema platí.

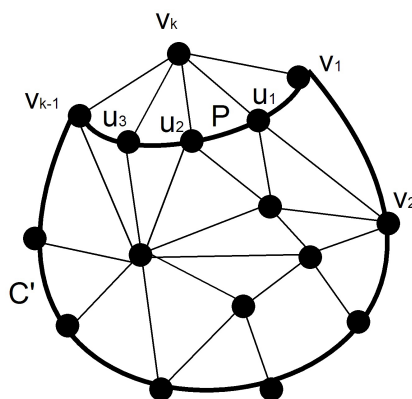
Indukčný krok rozdelíme na 2 prípady, podľa existencie tetivy cyklu C :

1. Ak C má tetivu vw , potom vw leží na 2 cykloch $C_1, C_2 \subseteq C + vw$ s hranou $v_1v_2 \in C_1$ a hranou $v_1v_2 \notin C_2$. Pre $i = 1, 2$ nech G_i označuje podgraf, ktorý vznikol z grafu G vybraním všetkých vrcholov ležiacich na C_i alebo v ňom. Pozri obrázok 2.3. Použijeme náš indukčný predpoklad na podgraf G_1 . Potom zoberieme farby, ktoré sme z indukčného predpokladu dostali pre vrcholy v a w a použijeme opäť indukčný predpoklad, ale tentoraz na G_2 s týmito farbami. Následne dostávame farbenie celého grafu G .



Obr. 2.3: Indukčný krok s tetivou vw , prípad $v_2 = w$

2. Ak C nemá žiadnu tetivu, potom nech vrcholy $v_1, u_1, \dots, u_m, v_{k-1}$ sú susedmi vrcholu v_k v prirodzenom cyklickom poradí okolo vrcholu v_k . Z definície C vieme, že vrcholy u_i ležia vo vnútri cyklu C . Pozri obrázok 2.4. Keďže graf G je triangulácia, každá jeho vnútorná plocha je ohraničená trojuholníkom. Potom vrcholy $v_1, u_1, \dots, u_m, v_{k-1}$ tvoria cestu P v grafe G a $C' = P \cup (C - v_k)$ je cyklus.



Obr. 2.4: Indukčný krok bez tetivy

Ďalej zvolíme 2 rôzne farby $j, l \neq 1$ zo zoznamu vrcholu v_k a následne vymažeme tieto farby zo zoznamov vrcholov u_i . Týmto dosiahneme, že zoznam farieb každého vrcholu cyklu C obsahuje aspoň 3 farby a teda môžeme použiť indukčný predpoklad. Tým dostávame platné zoznamové farbenie pre graf $G - v_k$. Aspoň jedna z farieb j, l nie je priradená vrcholu v_{k-1} a práve touto farbou zafarbíme vrchol v_k (vrcholy u_i neobsahujú ani jednu z týchto farieb a vrchol v_1 je podľa predpokladu zafarbený farbou 1). \square

Veta 2.3.1 (Thomassen [19]) *Každý planárny graf je zoznamovo 5-zafarbiteľný.*

Dôkaz. K dôkazu využijeme Lemu 2.3.1. Ukážeme, že táto lema implikuje naše tvrdenie. Nech je daný ľubovoľný planárny graf spolu so zoznamami 5 farieb pre každý vrchol. Budeme pridávať hrany k zadanému grafu, až pokiaľ nedosiahneme maximálny planárny graf G , ktorý je trianguláciou. Ďalej keďže G je trianguláciou, zoberieme jeho vonkajšiu plochu a tá je tvorená trojuholníkom $v_1v_2v_3v_1$. Následne zoberieme vrcholy v_1 a v_2 a ofarbíme ich rôznymi farbami z ich zoznamov, potom použijeme Lemu 2.3.1 a dostaneme platné zoznamové 5-farbenie grafu G . \square

Tak ako býva často zvykom, trik tohto dôkazu spočíva v precíznom vyvážení sily tvrdenia, ktoré je dokazované. Uvedomme si skutočnosť, že náš dôkaz nevyužíva vetu o 5 farbách, ani Eulerovu formulu, ktorá sa vyskytuje v štandardnom dôkaze tejto vety. Z tohto dôvodu pri skúmaní ďalších nevyriešených problémov týkajúcich sa farbenia môže byť užitočné pokúsiť sa vyriešiť verziu pre zoznamové farbenie. Teda pokúsiť sa dokázať $ch(G) \leq k$ namiesto $\chi(G) \leq k$. Avšak pokus o takéto riešenie Problému štyroch farieb zlyhal. Margit Voigt v roku 1993 dokázala, že existujú planárne grafy s $ch(G) = 5$. [23]

Veta 2.3.2 (Alon 1993) *Existuje funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že pre ľubovoľnú $k \in \mathbb{N}$ platí nasledovné: Pre všetky grafy G s priemerným stupňom $d(G) \geq f(k)$ platí $ch(G) \geq k$.*

Dôkaz je postavený na využití pravdepodobnostných metód, čo sa však vymyká náplni tejto práce. Bližšie informácie o náhodných grafoch a pravdepodobnostných metódach môžeme nájsť v [7].

2.3.1 Grafy s cyklami dĺžky deliteľnej číslom l

Túto podkapitolu začneme pripomenutím známeho tvrdenia o bipartitných grafoch: Graf G je bipartitný práve vtedy, keď každý jeho cyklus je párnej dĺžky. V článku [9] môžeme nájsť dôkaz tvrdenia, že zoznamové chromatické číslo bipartitného grafu môže byť ľubovoľne veľké. My sa necháme inšpirovať týmito tvrdeniami a ukážeme, že pre grafy v ktorých každý cyklus má dĺžku deliteľnú číslom $l \geq 3$ platí: $ch(G) \leq 3$.

Lema 2.3.2 ([1]) *Je daný graf G a prirodzené číslo $l \geq 3$. Ak je dĺžka každého cyklu deliteľná l , potom pre ľubovoľnú hranu $e \in E(G)$ existuje $e' \in E(G)$ taká, že $\{e, e'\}$ je hranový rez v grafe G .*

Dôkaz. Nech $e = uv$. Ak graf $G \setminus e$ je hranovo dvojsúvislý, potom použijeme Mengerovu vetu a dostaneme, že existujú dve hranovo nezávislé cesty P_1, P_2 z u do v . Keďže každý cyklus v grafe G má dĺžku deliteľnú číslom l a $P_i \cup \{e\}$ je cyklus v G , dostávame, že $|E(P_1)| = l - 1 \pmod{l}$ a $|E(P_2)| = l - 1 \pmod{l}$. Ďalej $P_1 \cup P_2$ je eulerovský graf, ktorého hrany vieme rozdeliť do cyklov. Z toho dostávame, l také, že $|E(P_1)| + |E(P_2)| = 2l - 2$, čo je spor s predpokladom: dĺžka každého cyklu je deliteľná l . Teda dostávame, že graf $G - \{e\}$ je nanajvýš hranovo 1-súvislý. Z toho vyplýva, že existuje $e' \in E(G \setminus \{e\})$, také, že existuje hranový rez $\{e, e'\}$ v grafe G . \square

Veta 2.3.3 ([1]) *Majme graf G a prirodzené číslo $l \geq 3$. Ak je dĺžka každého cyklu v grafe G deliteľná l , potom $ch(G) \leq 3$.*

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že graf G je súvislý. S použitím matematickej indukcie vzhľadom na $|V(G)|$ dokážeme, že ak graf G spĺňa predpoklad, potom tvrdenie platí pre každé 2 rôzne vrcholy u a w s farbami $c(u) = a$ a $c(w) = b$ (ak existuje hrana, medzi vrcholmi u, v , potom $a \neq b$).

Inak povedané: Ak máme pre každý vrchol $v \in V(G) \setminus \{u, w\}$ zoznam farieb S_v taký, že $|S_v| = 3$, potom môžeme získať zoznamové farbenie c grafu G také, že $c(u) = a$ a $c(w) = b$.

- Báza indukcie: $n = 3$, potom platnosť tvrdenia je zrejmá.
- Indukčný predpoklad: Nech veta platí pre všetky grafy s $|V(G)| \leq n$.
- Indukčný krok: Nech G je graf, $|V(G)| = n + 1$ a pre každý vrchol $v \in V \setminus \{u, w\}$ máme zoznam farieb S_v , kde $|S_v| = 3$. Ďalej nech $c(u) = a$ a $c(w) = b$. Predpokladajme, že $e = uv$ je hrana incidentná s u , použijeme predchádzajúcu lemu a dostaneme, že existuje hranový rez e, e' grafu G , kde $e = uv$ a $e' = u'v'$ (u, u' a v, v' nemusia byť rôzne).

Nech G_1 je súvislý komponent grafu $G \setminus \{e, e'\}$, ktorý obsahuje u a $G_2 = G \setminus \{e, e', V(G_1)\}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $u' \in V(G_1)$ a následne dostávame tieto prípady:

1. Ak $w \in V(G_1)$ (w a u' nemusia byť rôzne), potom použijeme indukčný predpoklad a dostaneme zoznamové farbenie c_1 grafu G_1 také, že $c_1(u) = a$ a $c_1(w) = b$.
 - (a) Ak $v = v'$, potom z indukčného predpokladu dostaneme zoznamové farbenie c_2 grafu G_2 také, že $c_2(v) \in S_v \setminus \{c_1(u), c_2(u')\}$ a zvyšné zoznamy ostanú ako boli.
 - (b) V prípade $v \neq v'$ zvolíme farby $x \in S_v \setminus c_1(u)$ a $y \in S_{v'} \setminus c_1(u')$ také, že $x \neq y$. Z indukčného predpokladu dostaneme, že existuje zoznamové farbenie c_2 grafu G_2 také, že $c_2(v) = x$ a $c_2(v') = y$.

Potom spojením farbení c_1 a c_2 dostaneme požadované farbenie grafu G .

2. Ak $w \in V(G_2)$ a $v = v'$.
 - (a) Ak $w = v = v'$, potom z indukčného predpokladu existuje zoznamové farbenie c_2 grafu G_2 také, že $c_2(v) = b$. Nech $t \in S_w \setminus \{a, b\}$, v tom prípade z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje zoznamové farbenie c_1 grafu G_1 také, že $c_1(u') = t$. Presne tak, ako sme potrebovali.
 - (b) V prípade, že $w \neq v$, nech $z \in S_v \setminus \{a, b\}$. Opäť použijeme indukčný predpoklad a dostaneme, že existuje zoznamové farbenie c_2 grafu G_2 také, že $c_2(w) = b$ a $c_2(v) = z$. Predpokladajme, že $t \in S_w \setminus \{a, z\}$, v tom prípade z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje zoznamové farbenie c_1 grafu G_1 také, že $c_1(u) = a$ a $c_1(u') = t$, to je presne to, čo sme potrebovali.

3. Predpokladajme, že $w \in V(G_2)$ a $v \neq v'$. Najskôr preskúmame prípad, že $w = v$.
- (a) Ak $u \neq u'$, potom $s \in S_{u'} \setminus \{a\}$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje zoznamové farbenie c_1 grafu G_1 také, že $c_1(u) = a$ a $c_1(u') = s$. Zvoľme $s' \in S_v \setminus \{b, s\}$. Ďalej z indukčného predpokladu dostávame, že existuje zoznamové farbenie c_2 grafu G_2 také, že $c_2(w) = b$ a $c_2(v') = s'$.
- (b) Ak $u = u'$, potom $t \in S_{v'} \setminus \{a, b\}$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje zoznamové farbenie c_2 grafu G_2 také, že $c_2(w) = b$ a $c_2(v') = t$. Teraz môžeme rozšíriť toto farbenie na farbenie celého grafu G , také, že farba vrcholu u je a .

Pre prípad $w = v'$, je dôkaz obdobný.

4. Posledný prípad je ak $w \in V(G_2)$ a $w \notin \{v, v'\}$. Nech $r \in S_v \setminus \{a, b\}$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje zoznamové farbenie c_2 grafu G_2 také, že $c_2(v) = r$ a $c_2(w) = b$. Nech $r' \in S_{u'} \setminus \{a, c_2(v')\}$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje zoznamové farbenie c_1 grafu G_1 také, že $c_1(u) = a$ a $c_1(u') = r'$. Týmto prípadom je dôkaz skončený.

□

Dôsledok 2.3.1 *Majme graf G a prirodzené číslo $l \geq 3$. Zostrojme graf H z grafu G tak, že každú hranu grafu G rozdelíme $l - 1$ vrcholmi na l hrán, potom $ch(H) \leq 3$.*

Nakoniec dodáme ešte pár slov o 2-zoznamovo zafarbiteľných grafoch. Ak G je súvislý graf a *jadro* grafu G je graf získaný z G po opakovanom odstránení vrcholov stupňa 1, až pokiaľ žiaden taký vrchol neexistuje. Jednoduchý graf je 2-zoznamovo zafarbiteľný práve vtedy, ak jadro každého súvislého

komponentu je jeden vrchol, alebo párný cyklus, alebo graf pozostávajúci z 2 vrcholov s tromi párnymi vnútorne disjunktnými cestami, kde dĺžka aspoň dvoch z nich je presne 2. Potom môžeme vysloviť nasledujúcu vetu:

Veta 2.3.4 ([1]) *Majme súvislý graf G a prirodzené číslo $l \geq 3$. Ak je dĺžka každého cyklu v grafe G deliteľná l , potom platia nasledovné tvrdenia:*

1. *Ak G nie je bipartitný graf, potom $ch'(G) = 3$.*
2. *Ak G je bipartitný graf a $l \neq 4$, potom $ch'(G) = 3$ práve vtedy, keď G obsahuje aspoň dva cykly. Ak $l = 4$ a $|V(G)| \geq 2$, potom $ch'(G) = 2$ práve vtedy, keď jadro grafu G je jeden vrchol, alebo párný cyklus, alebo graf pozostávajúci z 2 vrcholov s tromi párnymi vnútorne disjunktnými cestami, kde dĺžka dvoch z nich je presne 2 a dĺžka tretej je $2 \pmod{4}$.*

Kapitola 3

Hypotéza o zoznamovom farbení (LCC)

Bolo už spomenuté, že chromatické číslo a zoznamové chromatické číslo sa môžu navzájom veľmi líšiť. Avšak doteraz nebol nájdený jediný prípad, v ktorom by sa zoznamový chromatický index nerovnal chromatickému indexu. Z tohto dôvodu bola vyslovená hypotéza, že tieto dve čísla sa rovnajú. Autoirmi hypotézy sú dve dvojice: páni Albertson a Tucker a páni Gupta a Dinitz, ktorí k jej vysloveniu prišli nezávisle v roku 1985. Hypotézu budeme označovať skratkou *LCC* (z anglického List Colouring Conjecture).

Hypotéza 3.0.1 (o zoznamovom farbení) *Pre každý graf G platí:*

$$ch'(G) = \chi'(G).$$

Medzi známe výsledky v tejto oblasti patrí potvrdenie platnosti hypotézy o zoznamovom farbení pre bipartitné grafy. Ako pomocný nástroj budeme používať orientáciu grafov. Ak D je orientovaný graf a $v \in V(D)$, potom označíme $N^+(v)$ množinu a $d^+(v)$ počet vrcholov w takých, že orientovaná hrana $vw \in D$.

K hlbšiemu pochopeniu súvislostí, medzi orientáciami a zoznamovým farbením predstavíme známy greedy algoritmus pre ofarbenie, ktorý sa používa napríklad pri dôkaze horného odhadu pre $\chi(G)$.

Greedy algoritmus: Zvolíme ľubovoľné poradie vrcholov v_1, \dots, v_n , v ktorom ich budeme následne ofarbovať. Vrchol v_i ofarbíme najmenším prirodzeným číslom, ktoré ešte nie je priradené žiadnemu z jeho susedov medzi vrcholmi v_1, \dots, v_{i-1} . Týmto dostaneme farbenie, ktoré použije najviac $\Delta(G) + 1$ farieb.

V našom prípade si tento algoritmus mierne modifikujeme: Najskôr zvolíme ľubovoľné poradie vrcholov v_1, \dots, v_n , ktoré nám určuje orientáciu hrán v grafe G a každú hranu $v_i v_j$, pre ktorú platí $i > j$ otočíme. Potom pre každý vrchol v_i , ktorý zafarbujeme, algoritmus berie do úvahy len tie hrany, ktoré sú orientované z v_i do už ofarbených vrcholov (v_1, \dots, v_{i-1}). Môžeme pozorovať, že ak pre každý vrchol v grafu G platí $d^+(v) < k$, použijeme najviac k farieb.

Načrtneme dôkaz tohto pozorovania: použijeme indukciu vzhľadom na k . Je možné všimnúť si, že množina U vrcholov, ktorým bola priradená farba 1 má nasledujúcu vlastnosť: z každého vrcholu z $G - U$ vedie hrana do U . Z toho nám vyplýva, že pre každý vrchol $v \in G$ platí $d_{G-U}^+(v) < d_G^+(v)$ a teda z indukčného predpokladu vieme graf $G - U$ ofarbiť $k - 1$ farbami.

Nasledujúca lema nám ponúka zovšeobecnenie tohto pozorovania na zoznamové farbenie a orientácie D v grafe G , ktoré nie nutne pochádzajú zo zvoleného poradia vrcholov, ale môžu obsahovať niekoľko orientovaných cyklov. Nazvime nezávislú množinu $U \subseteq V(D)$ *kernelom* grafu D , ak pre každý vrchol $v \in D - U$ existuje hrana v D orientovaná z v do vrcholu v U . Uvedomme si, že kernel neprázdneho orientovaného grafu je taktiež neprázdny.

3.1 LCC a bipartitné grafy

Lema 3.1.1 *Majme graf H a množinu zoznamov farieb $(S_v)_{v \in V(H)}$. Ak graf H má orientáciu D takú, že pre každý vrchol $v \in H$ platí $d^+(v) < |S_v|$ a každý indukovaný podgraf z D má kernel, potom H vieme zoznamovo zafarbiť použitím zoznamov S_v .*

Dôkaz. Dôkaz uskutočníme pomocou matematickej indukcie vzhľadom na veľkosť $|H|$.

- Báza indukcie: $|H| = 0$, zoberieme prázdne farbenie.
- Indukčný krok: Nech $|H| > 0$ a zároveň α je farba, ktorá sa vyskytuje v jednom zo zoznamov S_v a nech D je začiatočná orientácia grafu H . Vrcholy $\{v \in V : \alpha \in S_v\}$ vytvárajú neprázdny podgraf D' v grafe D . Vďaka predpokladom lemy môžeme povedať, že D má kernel $U \neq \emptyset$. Teraz zoberieme všetky vrcholy z množiny U a ofarbíme ich farbou α a taktiež odstránime farbu α zo všetkých zoznamov S_v , kde $v \in D' - U$. Keďže z každého takéhoto vrcholu vychádza hrana do U , potom nové zoznamy S'_v , kde $v \in D - U$, stále spĺňajú podmienku $d^+(v) < |S'_v|$ v $D - U$. Ďalej vieme, že $D - U$ je orientácia grafu $H - U$ a následne môžeme použiť indukčný predpoklad na ofarbenie $H - U$ zo zoznamov S_v . Keďže žiaden z týchto zoznamov neobsahuje farbu α (odstránili sme ju z nich), môžeme rozšíriť zoznamové farbenie z indukčného predpokladu aj o vrcholy z U , pre ktoré bude platiť: $U \rightarrow \{\alpha\}$.

□

Veta 3.1.1 (Galvin [10]) *Pre každý bipartitný graf G platí: $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Dôkaz. Majme graf $G = (X \cup Y, E)$, kde $\{X, Y\}$ je bipartitné rozdelenie vrcholov grafu G . Uvedomme si, že 2 hrany sú spojené v X práve vtedy,

keď majú v X spoločný koncový vrchol. Obdobné pozorovanie platí aj pre množinu Y . Nech $\chi'(G) = k$ a nech c je k -hranové farbenie grafu G .

Z nerovnosti 2.1 vieme, že platí $\chi'(G) \geq k$. Takže potrebujeme dokázať nerovnosť $\chi'(G) \leq k$.

Ideou tohto dôkazu je aplikovať Lemu 3.1.1, aby sme ukázali, že hranový graf $H = L(G)$ grafu G je zoznamovo k -zafarbiteľný.

K tomu, aby sme mohli použiť lemu, musíme najskôr nájsť orientáciu D grafu H , v ktorej pre každý vrchol v bude platiť $d^+(v) < k$ a taktiež každý indukovaný podgraf D bude mať kernel. Ako nájdeme orientáciu D ?

Uvažujme susedné hrany $e, e' \in E$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $c(e) < c(e')$. Ak e, e' majú spoločný vrchol v X , potom hrana $ee' \in H$ bude orientovaná z e' do e ; ak sa spoločný vrchol nachádza v Y , potom hrana $ee' \in H$ bude orientovaná z e do e' . Pozri obrázok 3.1.

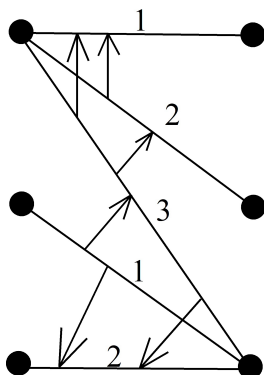
Teraz spočítame $d^+(e)$ pre danú hranu $e \in E = V(D)$. Ak $c(e) = i$, povedzme, že každá hrana $e \in N^+(e)$ sa stretáva s hranou e v X a jej farba je z množiny $\{1, \dots, i-1\}$ a každá hrana $e' \in N^+(e)$ sa stretáva s hranou e v Y a jej farba je z množiny $\{i+1, \dots, k\}$. Ako ľubovoľné 2 susedné hrany e' hrany e sa obe stretávajú s hranou e v X alebo obe v Y , potom aj tieto medzi sebou sú navzájom susedné a z toho dôvodu sú teda ofarbené rôzne. Z toho dostávame, že $d^+(e) < k$, ako sme potrebovali.

Teraz nám už len ostáva ukázať, že každý indukovaný podgraf D grafu D má kernel. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na $|D|$.

1. Báza indukcie: Nech $D = \emptyset$, potom kernel je prázdna množina.

2. Indukčný krok:

Nech teda $D' \geq 1$. Zvoľme $E' = V(D') \subseteq E$. Pre každý vrchol $x \in X$, z ktorého vychádza hrana v E' označme $e_x \in E'$ hranu, ktorá vychádza z vrcholu x a má minimálnu hodnotu farby c . Ďalej nech U označuje množinu všetkých takýchto hrán e_x . Potom každá hrana $e' \in E' \setminus U$ má


 Obr. 3.1: Orientácia hrán grafu G

susednú hranu $e \in U$ v X a hrana $ee' \in D'$ je orientovaná z e' do e . Ak U je nezávislá množina, potom to je kernel grafu D a máme presne to, čo sme potrebovali.

Zamyslíme sa ešte nad prípadom, že U nie je nezávislá množina. Nech $e, e' \in U$ sú susedné hrany a predpokladajme, že platí $c(e) < c(e')$. Z definície množiny U vieme, že e a e' majú spoločný vrchol v Y , teda hrana $ee' \in D$ je orientovaná z e do e' . Z indukčného predpokladu je nám známe, že $D - e$ má kernel U' . Ak $e' \in U'$, potom U' je tiež kernel D' a opäť máme, čo sme potrebovali. Ak $e' \notin U'$, potom existuje hrana e'' taká, že D' obsahuje hranu orientovanú z e' do e'' . Avšak ak e' a e'' majú spoločný vrchol v X , potom z definície D vyplýva $c(e'') < c(e')$, čo je spor s predpokladom, že $e' \in U$. Teda e' a e'' majú spoločný vrchol v Y a $c(e') < c(e'')$, a teda ee'' je orientovaná z e do e'' a dostávame opäť, že U' je kernel grafu D' .

□

Dôsledok 3.1.1 Pre každý bipartitný graf G platí: $ch'(G) = \Delta(G)$.

Kapitola 4

Metódy dokazovania hypotézy o zoznamovom farbení

Nasledujúca kapitola prezentuje techniky, ktoré sa používajú pre dokazovanie hypotézy o zoznamovom farbení. Všetky uvedené podmienky sú len postačujúce a nie nutné. Pri každej technike nájdeme príklad, ktorý nám umožní lepšie pochopenie daného spôsobu dokazovania.

4.1 Grafový polynóm

Grafový polynóm sa stal jedným z hlavných nástrojov dokazovania LCC a budeme ho využívať pri všetkých nasledujúcich technikách. Samotný polynóm bol študovaný už mnohými autormi, ako prvý sa ním zaoberal už v roku 1891 Petersen.

Grafový polynóm grafu $G(V, E)$, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ budeme označovať $f_G(x_1, \dots, x_n)$. Polynóm vyzerá nasledovne:

$$f_G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j; v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j)$$

V roku 1992 Alon a Tarsi [4] ukázali vzťah medzi koeficientom tohto polynómu a zoznamovým farbením.

Majme graf G a funkciu $a : V(G) \rightarrow \mathbf{N}$, potom graf G nazývame *zoznamovo a -zafarbiteľný*, ak pre ľubovoľnú množinu zoznamov $(S_v)_{v \in V}$ takú, že $|S_v| = a(v)$ pre všetky $v \in V$ existuje vrcholové farbenie grafu G zo zoznamov S_v .

Veta 4.1.1 (Alon a Tarsi [4]) *Majme graf G a funkciu $a : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots\}$. Ak koeficient $\prod_{v \in V(G)} x_v^{a(v)-1}$ v grafovom polynóme f_G je nenulový, potom graf G je zoznamovo a -zafarbiteľný.*

Príklad

Zoberme si kružnicu C_4 dĺžky štyri a budeme chcieť pre ňu ukázať platnosť hypotézy o zoznamovom farbení pomocou grafového polynómu.

Keďže chceme ukazovať, že graf je zoznamovo hranovo 2-zafarbiteľný, najskôr by sme mali urobiť hranový graf z pôvodného grafu, ale keďže platí $L(C_n) = C_n$, tak to môžeme zanedbať.

Zvolíme si funkciu a takú, že $a(v) = 2$ pre každý vrchol $v \in C_4$. Vytvoríme grafový polynóm ku grafu C_4 a ukážeme, že pre tento graf platí LCC.

$$\begin{aligned}
 f_G(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i < j; v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j) = \\
 &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_1 - x_4) = \\
 &= (x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2^2 + x_2 x_3)(-x_3 x_4 + x_1 x_3 + x_4^2 - x_1 x_4) = \\
 &= -2x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4^2 - x_1^2 x_2 x_4 + \\
 &\quad + x_1 x_3^2 x_4 - x_1^2 x_3^2 - x_1 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_3 x_4 + \\
 &\quad + x_2^2 x_3 x_4 - x_1 x_2^2 x_3 - x_2^2 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_4 - \\
 &\quad - x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2 x_3 x_4^2
 \end{aligned}$$

Potom je vidieť, že koeficient $\prod_{v \in V(G)} x_v^{a(v)-1}$ je -2 a z vety 4.1.1 vyplýva platnosť LCC pre graf C_4 . \square

4.2 Eulerovské podgrafy

Orientovaný podgraf H orientovaného grafu D sa nazýva *eulerovský*, ak je pre každý vrchol v počet vstupných hrán $d_H^-(v)$ rovnaký, ako počet výstupných hrán $d_H^+(v)$. Graf H nemusí byť súvislý. Ak $|E(H)|$ je párny, nazývame H *párny* podgraf grafu D , inak ho nazývame *nepárny*. Prázdny podgraf nazývame párnym. Označme si počet párných eulerovských podgrafov grafu D ako $EE(D)$ a počet nepárných ako $EO(D)$.

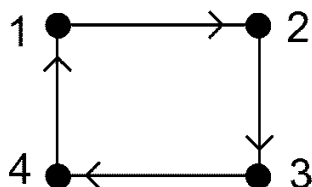
Veta 4.2.1 ([2]) *Majme orientovaný graf $D(V, E)$ a definujme funkciu $f : V \rightarrow Z$ nasledovne: $f(v) = d_D^+(v) + 1$. Ak $EE(D) \neq EO(D)$, potom graf D je f -zoznamovo zafarbiteľný.*

Tvrdenie 4.2.1 ([2]) *Majme orientáciu D neorientovaného grafu $G = (V, E)$ na množine vrcholov $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Nech pre každý vrchol v_i je $d_i = d_D^+(v_i)$, potom $C(D)$ označíme absolútnu hodnotu koeficientu monómu $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ v štandardnej reprezentácii polynómu $f_G = f_G(x_1, \dots, x_n)$ ako lineárnej kombinácii monómov. Jeho hodnota je $|EE(G) - EO(G)|$. Zjednodušene, ak $EE(D) \neq EO(D)$, potom spomínaný koeficient v grafovom polynóme nie je nula.*

Príklad

Pre ukážku tohto spôsobu dokazovania si zoberieme kružnicu C_4 .

Najskôr je potrebné si vytvoriť hranový graf z pôvodného grafu. V našom prípade vieme, že $C_4 = L(C_4)$. Potom zvolíme orientáciu D takú, že pre každý vrchol $v \in L(C_4)$ platí $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ (lebo potrebujeme ukázať, že

Obr. 4.1: Kružnica dĺžky štyri s orientáciou D

koeficient $\prod_{v \in V(G)} x_v^1$ v grafovom polynóme je nenulový). Pozri obrázok 4.2. Následne spočítame párne a nepárne eulerovské podgrafy. V našom prípade existuje dva párne eulerovske podgrafy grafu C_4 : celá orientácia D a prázdny podgraf a neexistuje žiadny nepárny eulerovský podgraf. Z toho vďaka vete 4.2.1 vieme, že koeficient $\prod_{v \in V(G)} x_v^1$ v grafovom polynóme je nenulový. Ďalej z tohto zistenia a vety 4.1.1 dostávame, že pre graf C_4 platí LCC. \square

4.3 Permutácie

Majme permutáciu σ množiny X . Označme $N(\sigma)$ počet inverzií v permutácii σ , t.j. párov $x, y \in X$ takých, že $x < y$ a $\sigma(x) > \sigma(y)$. Potom *znamienko permutácie* definujeme ako $sign(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

Pre každý vrchol $v \in V(G)$, nech π_v je ľubovoľná permutácia hrán grafu G incidentných s vrcholom v . Ďalej pre každé hranové farbenie c grafu G s d farbami $\{0, \dots, d-1\}$ znamienko farbenia c s označením $sign(c)$, je definované ako súčin znamienok všetkých $|V|$ permutácií $(\pi_v^{-1} c_v(e) : v \in e \in E(G))$. Označme množinu všetkých d -hranových farbení grafu G ako $EC(G)$, potom definujeme $ec(G) = \sum_{c \in EC(G)} sign(c)$.

Tvrdenie 4.3.1 ([2]) *S použitím vyššie uvedenej notácie platí*

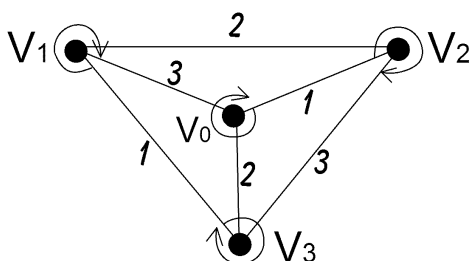
$$|C(D)| = \left| \sum_{c \in EC(G)} sign(c) \right| = |ec(G)|$$

Toto tvrdenie je pre regulárne grafy stupňa tri dokázané napr. v [16]. Aplikovaním tohto tvrdenia na vetu 4.2.1 dostávame nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 4.3.2 ([2]) *Hypotéza o zoznamovom farbení platí pre ľubovoľný d -regulárny graf G , pre ktorý platí $\chi'(G) = d$ a $ec(G) \neq 0$.*

Príklad

Použitie tejto techniky si predstavíme na grafe K_4 .



Obr. 4.2: Graf K_4

Označme si $sign(\pi_v^{-1}c_v(e))$; $v \in e \in E(K_4)$ ako $\gamma_c(v)$, potom sa ľahko dá ukázať, že pre kubický graf $\gamma_c(v) = +1$, ak farby idú okolo vrcholu v smere hodinových ručičiek a $\gamma_c(v) = -1$ inak. Zoberme si permutácie π_v ; $v \in V(K_4)$, ktorú môžeme vidieť na obrázku 4.2. Z obrázka vidíme, že všetky permutácie π_v majú farby okolo vrcholu v smere hodinových ručičiek, teda znamienko každej permutácie π_v je kladné a teda aj znamienko celého farbenia. Všetky ostatné farbenia grafu K_4 dostaneme iba zmenou permutácie farieb, lebo vieme, že na zafarbenie vonkajšej kružnice dĺžky tri potrebujeme tri farby a toto zafarbenie vonkajšej kružnice nám priamo určuje aj zafarbenie ostatných hrán.

Je ľahké ukázať, že pokiaľ navzájom iba prepermutujeme farby, výsledné znamienko novovzniknutého farbenia sa nezmení, lebo ak by sa zmenilo pre

vrchol v , potom by sa taktiež zmenilo aj pre ostatné vrcholy. Vrcholov máme párnny počet, dostávame $(-1^4) = (+1)^4 = +1$ a z toho vyplýva, že $C(D) \neq 0$ a platnosť LCC pre graf K_4 .

4.4 Faktorizácia

V tejto časti si ukážeme možnosti dokazovania LCC pre regulárne grafy so stupňom vrcholu d .

Definícia 4.4.1 *Množinu hrán grafu G , ktorá pokrýva všetky vrcholy $V(G)$ a vytvára k -regulárny podgraf grafu G nazývame k -faktor.*

Definícia 4.4.2 *Rozdelenie množiny hrán grafu G na neprekrývajúce sa k -faktory nazývame k -faktorizáciou grafu G .*

Nech $p = \lceil d/2 \rceil$. Neusporiadanou skoro faktorizáciou grafu G budeme nazývať množinu $F = \{F_0, F_1, \dots, F_{p-1}\}$, kde $\bigcup_i F_i = E(G)$ a $F_i : 0 \leq i < (p-1)$ je 2-faktor, a F_{p-1} je 1-faktor, ak d je nepárne, inak je to tiež 2-faktor.

Množinu všetkých neusporiadaných skoro faktorizácií grafu G budeme označovať $B2F(G)$.

Celkový počet kružníc v 2-faktoroch v neusporiadanej skoro faktorizácii F budeme označovať $\zeta(F)$.

Majme k -farbenie c , zvoľme dve rôzne farby a, b použité vo farbení c . Označme $G(a, b)$ podgraf grafu G , ktorý vznikne vybratím hrán ofarbených farbami a, b . *Kempe výmenou* nazývame výmenu farieb a, b v jednom komponente podgrafu $G(a, b)$. Dve farbenia (alebo 1-faktorizácie) nazývame *kempe ekvivalentné*, ak jedno vieme dostať z druhého aplikovaním konečného počtom kempe výmen.

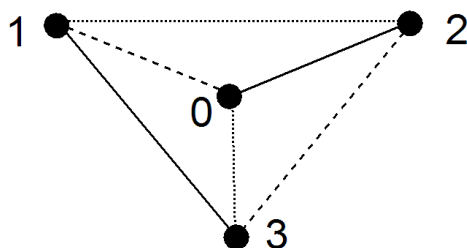
Veta 4.4.1 ([8]) *Majme d -regulárny graf a predpokladajme, že aspoň jedno z nasledujúcich tvrdení platí:*

1. Graf G má nepárny počet rôznych 1-faktorizácií.
2. Graf G je 1-faktorizovateľný a každé dve 1-faktorizácie sú kempe ekvivalentné.
3. Graf G je 1-faktorizovateľný a každé dve 1-faktorizácie majú rovnaké znamienko.
4. Počet $F \in B2F(G)$ s minimálnym $\zeta(F)$, t.j. minimálnym celkovým počtom kružníc v 2-faktoroch v F , je nepárny.

Potom $C(D) \neq 0$ a z toho vyplýva, že G je zoznamovo hranovo d -zafarbiteľné.

Príklad 1

Zoberme si graf K_4 a ukážeme, že má nepárny počet 1-faktorizácií.

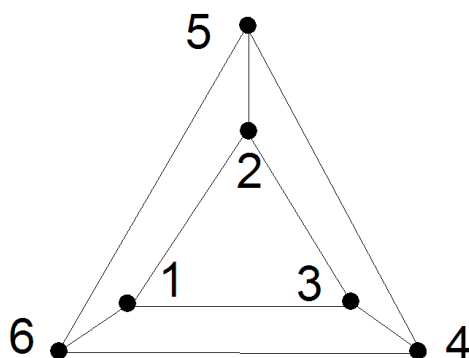


Obr. 4.3: 1-faktorizácia grafu K_4

Zoberme si označenie vrcholov z obrázku 4.3. V grafe K_4 má 1-faktor dve hrany a teda každý 1-faktor musí obsahovať hranu incidentnú s vrcholom v_0 , podľa výberu tejto hrany nám je zrejmé, že zvyšné dva vrcholy musia byť spojené hranou, aby sme dostali 1-faktor. Z tohto možno vidieť, že výber hrany incidentnej s vrcholom v_0 nám priamo indukuje celý 1-faktor. Vrchol v_0 je stupňa tri a teda máme tri rôzne 1-faktory a ako môžeme vidieť na obrázku 4.3 tvoria nám jednu 1-faktorizáciu. Iná nemôže existovať, lebo sme ukázali, že neexistuje iný 1-faktor.

Príklad 2

Ukážeme, že pre graf $G(3, 1)$ (obrázok 4.4) platí LCC. Použijeme pri tom 4. tvrdenie z vety 4.4.1.

Obr. 4.4: Graf $G(3, 1)$

Zamyslime sa najskôr nad štvrtým tvrdením z vety 4.4.1. Minimálna hodnota $\zeta(F)$ je 1, je ľahké nahliadnuť, že je to v prípade, ak graf má hamiltonovskú kružnicu a je kubický. Tieto požiadavky sú pre graf $G(3, 1)$ splnené. Teda chceme ukázať, že počet rôznych ham. kružníc je nepárny.

Keďže graf $G(3, 1)$ je kubický, je zrejmé, že pre každý vrchol dve hrany s ním incidentné budú patriť do ham. kružnice a jedna nebude. Môžeme si všimnúť, že aspoň jedna hrana z hrán v_4v_5, v_5v_6, v_6v_4 nesmie patriť do ham. kružnice, lebo inak by nám vznikla kružnica, ktorá by nebola hamiltonovská. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je to hrana v_4v_5 , potom vieme, že hrany $v_5v_6, v_5v_2, v_4v_3, v_4v_6$ musia patriť do ham. kružnice. Ďalej vrchol v_6 má už dve incidentné hrany vo vytváranej ham. kružnici, teda hrana v_6v_1 nepatrí do ham. kružnice. Z toho ale dostávame, že zvyšné dve hrany incidentné s v_1 (v_1v_2, v_1v_3) tam musia patriť. Tým sa nám uzatvoril cyklus a vznikla nám skutočne hamiltonovská kružnica. Môžeme si všimnúť, že počiatočný výber jednej z hrán v_4v_5, v_5v_6, v_6v_4 , ktorá nepatrí do ham. kružnice nám určil

výslednú ham. kružnicu. Keďže už vieme, že vždy jedna hrana z týchto troch nesmie patriť do ham. kružnice je zrejmé, že celkový počet rôznych ham. kružníc je 3, čo je nepárne číslo. \square

Kapitola 5

Platnosť hypotézy o zoznamovom farbení pre vybrané triedy grafov

V tejto kapitole sa pozrieme na triedy grafov, pre ktoré sa nám podarilo dokázať platnosť hypotézy o zoznamovom farbení.

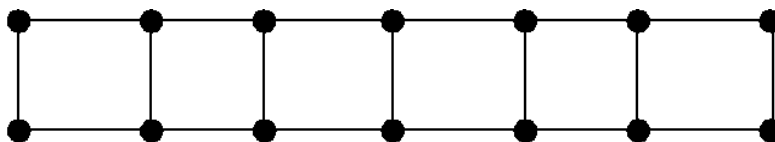
5.1 Rebrík, koleso a iné modifikácie

5.1.1 Rebrík

Na obrázku 5.1 máme graf $G(V, E)$, ktorý má vrcholy $V = \{u_0, \dots, u_{n-1}, v_0, \dots, v_{n-1}\}$ a hrany $E = \{u_i v_i : 0 \leq i < n; u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : 0 \leq i < n - 1\}$. Takýto graf budeme nazývať rebrík R_n .

Tvrdenie 5.1.1 *Pre každý graf R_n platí: $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Dôkaz. Ukážeme, že rebrík je bipartitný. Dokážme, že množinu vrcholov vieme rozdeliť na dve množiny A, B : $A = \{u_i, v_{i+1} : i \text{ je}$



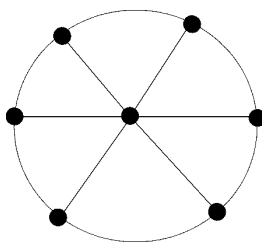
Obr. 5.1: Graf R_7

párne } a $B = \{u_i, v_{i+1} : i \text{ je nepárne}\}$. Teraz všetky hrany vedú medzi týmito množinami, lebo v žiadnej množine nie sú spolu vrcholy u_i a u_{i+1} ani v_i a v_{i+1} , ani u_i a v_i , a iba tieto vrcholy nám spolu vytvárajú hrany. Keďže už sme si dokázali, že R_n je bipartitný, tak použijeme vetu 3.1.1 a dostávame, že platí $ch'(G) = \chi'(G)$. \square

5.1.2 Koleso

Koleso je graf, ktorý obsahuje n vrcholov v_0, \dots, v_n pospájaných do kružnice a v ich strede sa nachádza vrchol s , ktorý je incidentný so všetkými vrcholmi na kružnici. Formálnejšie povedané:

Graf W_n taký, že $V(W_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}, s\}$, $E(W_n) = \{v_i v_{i+1 \pmod n}, sv_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ budeme nazývať *koleso*.



Obr. 5.2: Koleso W_6

Tvrdenie 5.1.2 Pre každý graf W_n , kde $n > 3$ platí:

$$ch'(W_n) = \chi'(W_n)$$

Dôkaz. 1. ak $n = 3$

Dôkaz bol uvedený v predchádzajúcej kapitole v časti o faktorizácii príklad č. 2.

2. ak $n = 4$

Hrany $sv_i : 0 \leq i \leq 3$ ofarbíme farbami z ich zoznamov, môžeme tak urobiť bez problémov, keďže každý zoznam obsahuje 4 farby. Označme si hrany nasledovne $e_i = v_i v_{i+1 \pmod{4}} : 0 \leq i \leq 3$.

Ak $S_{e_0} \cap S_{e_2} \neq \emptyset$ alebo $S_{e_1} \cap S_{e_3} \neq \emptyset$. Potom bez ujmy na všeobecnosti nech $t \in S_{e_0} \cap S_{e_2}$, potom hranám e_0, e_2 priradíme farbu t . Hranám $e_i : i = \{1, 3\}$ priradíme farbu zo zoznamu S_{e_i} - je isté, že nám jedna zo štyroch farieb ostane, lebo sme použili farbu t a maximálne dve farby incidentné s hranou e_i a vrcholom s .

Ak $S_{e_0} \cap S_{e_2} = \emptyset$ a $S_{e_1} \cap S_{e_3} = \emptyset$. Potom každá hrana $e_i : i = \{0, \dots, 3\}$ je zatiaľ incidentná s dvoma ofarbenými hranami a v každom zozname nám ostali dve voľné farby. Bez ujmy na všeobecnosti označíme tieto ešte nepoužité farby $S_{e_i, j} : i = \{0, \dots, 3\}, j = \{1, 2\}$. Bez ujmy na všeobecnosti ofarbíme hranu e_0 farbou $S_{e_0, 1}$ a hranu e_2 farbou $S_{e_2, 1}$.

Môžu nastať dva prípady: buď vieme ofarbiť zvyšné hrany e_1 a e_3 , alebo jednu z týchto hrán ofarbiť nevieme. Nech je to hrana e_1 . Potom platí $\{S_{e_1, 1}, S_{e_1, 2}\} = \{S_{e_0, 1}, S_{e_2, 1}\}$ a keďže $S_{e_1} \cap S_{e_3} = \emptyset$, tak $\{S_{e_3, 1}, S_{e_3, 2}\} \cap \{S_{e_0, 1}, S_{e_2, 1}\} = \emptyset$. Ďalej už len zmeníme farbu hrany e_0 na farbu $S_{e_0, 2}$ a následne už vieme ofarbiť všetky ostávajúce hrany. \square

3. ak $n > 4$

Pomocou Greedy algoritmu ukážeme, že graf W_n je n -zoznamovo hranovo zafarbiteľný.

Majme pre každú hranu $e \in W_n$ ľubovoľný zoznam farieb S_e dĺžky n . Najskôr ofarbíme hrany vychádzajúce zo stredu kola - tých je n . Takže pre každú hranu existuje aspoň jedna farba, ktorú žiadna iná hrana nemá zatiaľ priradenú.

Ďalej budeme postupne farbiť susediace hrany na kružnici, označíme ich $f_i = v_i v_{i+1 \pmod n}$. Na začiatku si zoberieme ľubovoľnú hranu f_0 - má 4 susedné hrany a z nich sú zatiaľ len dve ofarbené. Teda v S_{f_0} existuje aspoň $n - 2$ voľných farieb, takže jej priradíme ľubovoľnú z nich.

Potom zoberieme susednú hranu f_1 , ktorá má momentálne 3 susedné ofarbené hrany a teda existuje v jej zozname S_{f_1} aspoň $n - 3$ voľných farieb. Vyberieme opäť jednu z nich.

Postupne budeme takto ofarbovať hrany f_i , pre ktoré platí, f_{i-1} je už ofarbená a f_{i+1} ešte neofarbená.

Na konci nám vo W_n ostane len posledná neofarbená hrana f_{n-1} , tá je na kružnici a má 4 susedné hrany, ktoré sú ofarbené. Ale veľkosť $S_{f_{n-1}}$ je n a $n > 4$, takže nájdeme aspoň jednu voľnú farbu a máme farbenie pre ľubovoľné zoznamy.

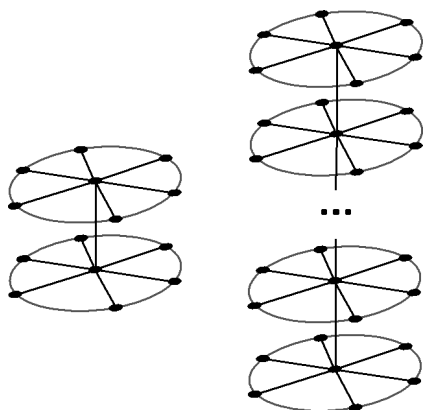
□

5.1.3 Modifikácie kola

Po úspešnom vytvorení dôkazu pre koleso je vhodné sa zamyslieť nad možnosťami využitia tohto dôkazu aj v podobných triedach grafov. Pozrime sa na modifikáciu, keď pospájame viacero kolies dokopy.

5.1.4 Kolesové veže

Zoberme m grafov W_n , stred i -teho kolesa $W_{n,i}$ budeme označovať s_i . K m kolesám pridáme hrany $s_i s_{i+1} : 0 \leq i \leq n - 2$. Dostaneme graf v ktorom susedné dve kolesá budú spolu spojené cez im prislúchajúce vrcholy s . Výsledný graf nám bude pripomínať vežu. Označme takýto graf $W_{m,n}$.



Obr. 5.3: Príklad $W_{2,6}$ a $W_{m,6}$

Tvrdenie 5.1.3 *Pre každý graf $W_{m,n}$, kde $m \geq 1$ a $n \geq 3$ platí:*

$$ch'(W_{m,n}) = \chi'(W_{m,n})$$

Dôkaz. Zoberme si ľubovoľnú množinu $S = \{S_e : e \in W_{m,n}, |S_e| = \Delta(W_{m,n})\}$.

Ak $m = 1$ tak $W_{1,n} \cong W_n$ a naše tvrdenie platí vďaka predchádzajúcej vete.

Ak $m = 2$ tak $\Delta(G) = n + 1$. Pre hranu $e = s_0 s_1$ si zvolíme ľubovoľnú farbu z jej zoznamu. Ďalej odstránime túto farbu zo zoznamu farieb pre hrany incidentné s vrcholmi $s_i : 0 \leq i < m$ a pre každú hranu grafu nám ostanú zoznamy dĺžky aspoň n . Z predchádzajúcej vety vieme, že pre ľubovoľné

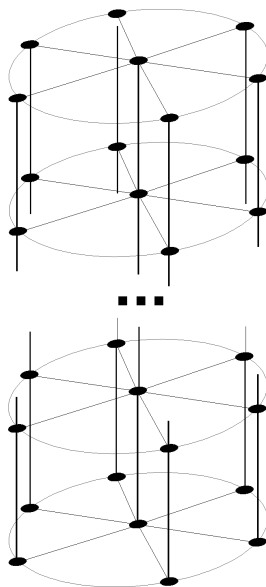
zoznamy dĺžky n existuje farbenie kolesa. Takže vieme jednotlivo ofarbiť obe kolesá v grafe.

Ak $m > 2$ tak $\Delta(W_{m,n}) = n + 2$ postupne ofarbíme hrany ktoré spájajú vrcholy $s_i : 0 \leq i < m$. Týmto z každého zoznamu S_e hrany e incidentnej so stredom kolesa odstránime max. dve farby a opäť nám ostane pre každú hranu zoznam aspoň n farieb. Ďalej vieme použiť vetu 5.1.2.

Z toho dostaneme, že $\chi'(W_n) = \Delta(W_n)$ a teda platnosť hypotézy o zoznamovom farbení. \square

5.1.5 Valce

Ďalšou modifikáciou kolesových veží je prípad, že kolesá, ktoré sú si najbližšie, nie sú pospájané len jednou hranou ale $n + 1$ hranami. Z každého vrcholu vychádza jedna hrana do vrcholu jemu ekvivalentnému v kolese pod ním. Takéto grafy budeme označovať $Val_{m,n}$. Pozri obrázok 5.1.5.



Obr. 5.4: Príklad $Val_{m,6}$

Tvrdenie 5.1.4 Pre každý graf $Val_{m,n}$, kde $m \geq 1$ a $n \geq 6$ platí:

$$ch'(Val_{m,n}) = \chi'(Val_{m,n})$$

Dôkaz. Náš dôkaz bude vyzeráť obdobne ako v prípade kolesových veží.

Ak $m = 1$, tak $Val_{1,n} \cong W_n$ a naše tvrdenie platí vďaka vete 5.1.2.

Ak $m = 2$, tak $\Delta(Val_{m,n}) = n + 1$. Graf ofarbíme ako keby to bola kolesová veža. Ďalej nám ostali ešte neoznačené hrany $e_i = v_{i,0}v_{i,1}$. Keďže $\Delta(Val_{m,n}) = n + 1$ a $n \geq 6$ tak potom $|S_{e_i}| = \Delta(Val_{m,n}) \geq 7$ a každá hrana e_i je incidentná s práve 6 ofarbenými hranami a teda nám isto ostane aspoň jedna nepoužitá farba v zozname S_{e_i} a tú priradíme tejto hrane.

Ak $m > 2$, tak $\Delta(Val_{m,n}) = n + 2$. Graf ofarbíme ako v prípade $m = 2$ a ďalej budeme ofarbovať hrany spájajúce j -te a $(j + 1)$ -vé koleso. Každá hrana $v_{i,j}v_{i,j+1}$ bude vždy incidentná so 7 ofarbenými hranami a keďže $\Delta(Val_{m,n}) = n + 2$ dostaneme, že $\Delta(Val_{m,n}) \geq 8$ a teda opäť nám ostane aspoň jedna nepoužitá farba zo zoznamu $S_{v_{i,j}v_{i,j+1}}$

Tým sme dostali farbenie na celom grafe a dokázali sme, že graf je $\Delta(Val_{m,n})$ -zoznamovo hranovo zafarbiteľný, z toho vyplýva platnosť hypotézy LCC pre $Val_{m,n}$.

□

Definícia 5.1.1 Karteziánsky súčin \square grafov G a H je graf $G \square H$, kde

$$V(G \square H) = \{v_1v_2 : v_1 \in V(G), v_2 \in V(H)\},$$

$$E(G \square H) = \{(uv, xy) : (u = x, (v, y) \in E(H)) \text{ alebo } ((u, x) \in E(G), v = y)\}$$

Všimnime si, že valec $Val_{m,n}$ je karteziánsky súčin cesty dĺžky m s označením P_m a kolesa W_n . Je ľahké nahliadnúť, že karteziánsky súčin cesty P_m a

ľubovoľného grafu G je graf, ktorý vznikne z m kópií grafu G (i -tu kópiu budeme označovať G_i) tak, že pre všetky $0 \leq i < m$ zoberieme grafy G_i a G_{i+1} a pridáme k nim hrany medzi vrcholmi $v_{i,j} \in V(G_i)$ a $v_{(i+1),j} \in V(G_{i+1})$ ktoré sú si navzájom ekvivalentné. V tomto prípade budeme nazývať dva vrcholy ekvivalentné, ak oba reprezentujú v grafe G ten istý vrchol.

Veta 5.1.1 *Majme graf G taký, že $ch(G) = \Delta(G)$ a $n \geq 3$, potom pre graf $G \square P_n$ platí $ch(G \square P_n) = \Delta(G \square P_n)$ a teda platí Hypotéza o zoznamovom farbení.*

Dôkaz. Označme si graf $G \square P_n$ ako GP . Z vyššie uvedených informácií vieme, že v grafe GP sa nachádza n disjunktných kópií grafu G , ktoré sú prepojené hranami. Stačí ukázať, že graf GP je zoznamovo hranovo $(\Delta(G) + 2)$ -zafarbiteľný.

Majme ľubovoľnú množinu $S = \{S_e : |S_e| = \Delta(G) + 2, e \in E(GP)\}$ zoznamov farieb. Vieme, že podgraf G_0 grafu GP je zoznamovo hranovo $\Delta(G)$ -zafarbiteľný. Potom ofarbíme hrany spájajúce podgrafy G_0 a G_1 , keďže v každom zozname máme ešte aspoň dve nepoužité farby. Ďalej vieme, že pre každú hranu z G_1 sme použili maximálne dve farby pre už doposiaľ ofarbené hrany, ktoré s ňou susedia, lebo každá hrana spája dva vrcholy a každý vrchol má len jeden vrchol, ktorý mu je ekvivalentný v G_0 . Teda pre každú hranu grafu G_1 nám ostali zoznamy nepoužitých farieb dĺžky $\Delta(G)$ a teda vieme ofarbiť podgraf G_1 . Ďalej ofarbíme hrany spájajúce G_1 a G_2 , pre každú takúto hranu e nám ostala aspoň jedna zatiaľ nepoužitá farba v zozname S_e . Následne ofarbíme samotný podgraf G_2 . Takto postupne ofarbíme $\Delta(G) + 2$ farbami celý graf GP . A z toho dostávame, že pre graf GP platí LCC.

□

5.2 Zovšeobecnené Petersenove grafy

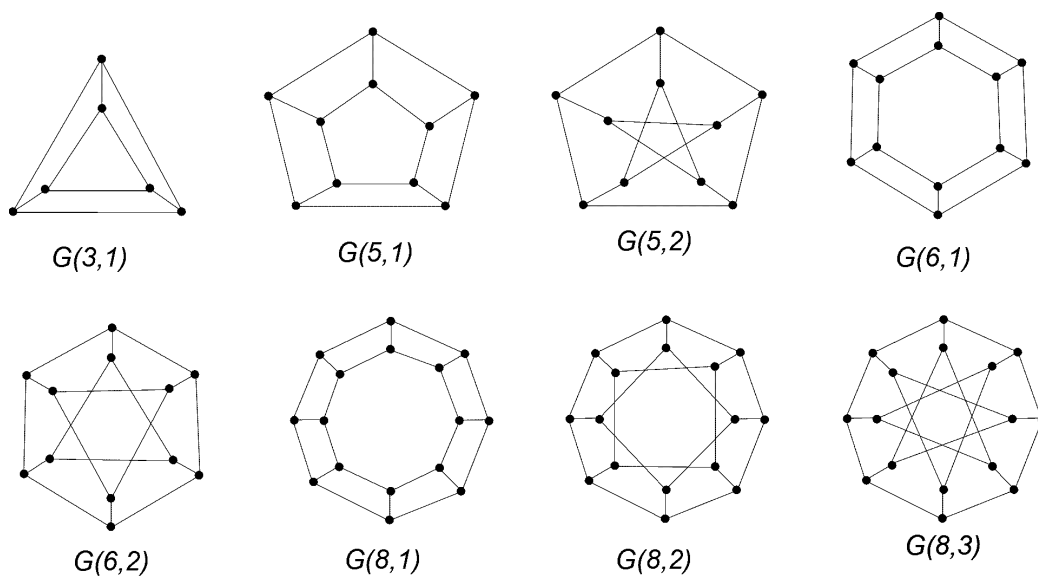
Ako už samotný názov napovedá, tieto grafy vznikli zovšeobecnením známeho Petersenovho grafu. Ako prvý ich predstavil v roku 1950 H. S. M. Coxeter. Súčasný názov a tiež označenie $G(n, k)$ zaviedol o 19 rokov neskôr Mark Watkins.

5.2.1 Definícia

Zovšeobecnený Petersenov graf $G(n, k)$ je definovaný nasledovne:

$$V(G(n, k)) = \{u_i, v_i : i = 0, \dots, n - 1\}$$

$$E(G(n, k)) = \{u_i u_{i+1 \pmod n}, v_i v_{i+k \pmod n}, u_i v_i : i = 0 \dots n - 1\}$$



Obr. 5.5: Príklad $G(n, p)$

Číslo k určuje krok zovšeobecneného Petersenového grafu.

5.2.2 Zovšeobecnené Petersenove grafy kroku 1

Zoberme triedu $G(n, 1)$, po krátkom skúmaní prídeme na to, že jednotlivé grafy vznikli z grafu s názvom rebrík, v ktorom sú spojené vrcholy stupňa dva hranami v_0v_n, u_0u_n . V niektorých literatúrach sa aj graf $G(n, 1)$ nazýva rebrík. Táto jednoduchá modifikácia spôsobí, že dokazovanie hypotézy o zoznamovom farbení pre tieto grafy sa zásadne skomplikuje. V predchádzajúcej kapitole sme prezentovali metódy využívania orientácii a permutácií v grafe. Na dôkaz platnosti LCC pre $G(n, 1)$ využijeme tieto poznatky spolu s nasledujúcim dôsledkom k Tvrdeniu 4.3.2.

Dôsledok 5.2.1 ([2]) *Pre každý dvojsúvislý planárny kubický graf G platí hypotéza o zoznamovom farbení.*

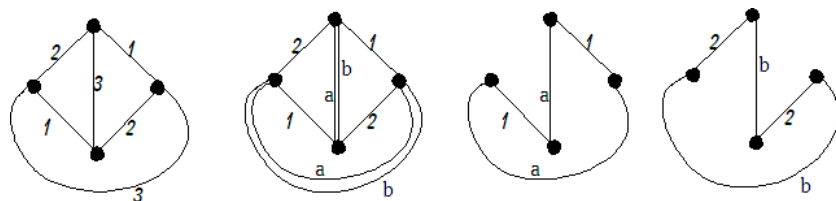
Dôkaz. Každé hranové 3-zafarbenie planárneho grafu má kladné znamienko. Tento výsledok bol už dokázaný rôznymi autormi. Ukážeme jednoduchý dôkaz:

Zoberme si hranové 3-farbenie f grafu G s farbami 1, 2, 3. Nahradíme každú hranu ofarbenú farbou 3 dvoma paralelnými hranami, jednu ofarbíme farbou a a druhú farbou b , týmto dostaneme planárny 4-regulárny graf. V novom grafe nám hrany ofarbené farbami 1, a vytvárajú množinu C_1 nesúvislých eulerovských planárnych podgrafov, taktiež aj ostatné hrany tvoria množinu s rovnakými vlastnosťami C_2 . Pozri obrázok 5.6. Je jednoduché skontrolovať, že koncové vrcholy hrán grafu G , ktoré sú ofarbené farbou 3, majú rovnaké znamienka vzhľadom na farbenia f práve vtedy, keď sa v práve jednom z nich pretínajú grafy C_1 a C_2 . Celkový počet takýchto pretnutí je párný, teda máme párný počet hrán ofarbených farbou 3, ktorých koncové vrcholy majú rovnaké znamienko.

Ukázali sme si, že hranové 3-zafarbenia planárnych kubických grafov majú rovnaké znamienka. Taktiež vieme, že tvrdenie "2-súvislý planárny kubický

KAPITOLA 5. PLATNOSŤ LCC PRE VYBRANÉ TRIEDY GRAFOV 42

graf G má $\chi(G) = 3$, je ekvivalentné vete o 4 farbách. Použitím vety 4.3.2 dostávame, to čo sme chceli dokázať, teda platnosť LCC pre tieto grafy.



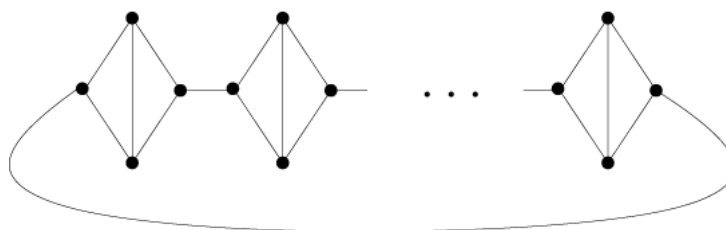
Obr. 5.6: Ukážka rozpadu grafu G na eulerovske podgrafy

□

Vráťme sa späť k zovšeobecneným Petersenovým grafom, z definície je zrejmé, že každý graf $G(n, k)$ je 3-regulárny. Ďalej tiež o $G(n, 1)$ vieme, že sú to planárne grafy a teda pre ne môžeme použiť Dôsledok 5.2.1. Z toho vyplýva, že pre triedu grafov $G(n, 1)$ platí LCC.

5.3 Trieda grafov A_n

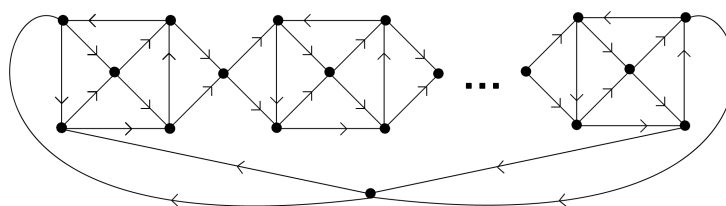
Na obrázku 5.7 si ukážeme triedu grafov, pre ktorú dokážeme LCC. Budeme ju označovať A_n .



Obr. 5.7: Trieda A_n

Dôkaz 1

1. Vytvoríme si hranový graf z A_n .
2. Zoberieme si jeho orientáciu D , v ktorej platí $\delta^+(D) = 2$.
3. Ukážeme, že počty párnych a nepárnych eulerovských podgrafov v D sú rôzne.



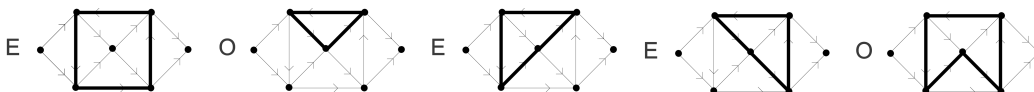
Obr. 5.8: Hranový graf k triede A_n s orientáciou D

Vytvorili sme si hranový graf $L(A_n)$ a jeho orientáciu nazveme D . Ďalej si všimnime, že graf A_n je zložený z n podgrafov, ktoré sú navzájom izomorfné a ich vonkajšie hrany tvoria šesťuholník. Preto budeme ďalej študovať tento podgraf AP . Pozri obrázok 5.9.

Ďalej nás bude zaujímať, koľko párnych a nepárnych eulerovských podgrafov sa nachádza v grafe D . Podgrafy AP_i a AP_{i+1} sú navzájom pospájané do reťaze vždy cez jeden vrchol, ktorý označíme a_{i+1} . Ďalej si všimneme, že z vrcholu a_{i+1} do a_i sa vieme dostať len tak, že prejdeme cez všetky ostatné vrchly a_j v grafe D . Z toho vyplýva, že pokiaľ má eulerovský podgraf prechádzať cez viac podgrafov AP , tak musí obsahovať všetky podgrafy AP . Takže eulerovský podgraf grafu D sa skladá buď z viacerých eulerovských podgrafov v rámci rôznych podgrafov AP (ktoré nemajú spoločný prienik), alebo prechádza všetkými vrcholmi a_i .

1. Každý podgraf AP obsahuje 5 rôznych eulerovských podgrafov, ktoré neprechádzajú cez žiaden z vrcholov a_i .

Na obrázku 5.9 a aj na nasledujúcich obrázkoch budeme pri jednotlivých grafoch písať E , pokiaľ je znázornená cesta párnej dĺžky a O , pokiaľ je nepárnej dĺžky.

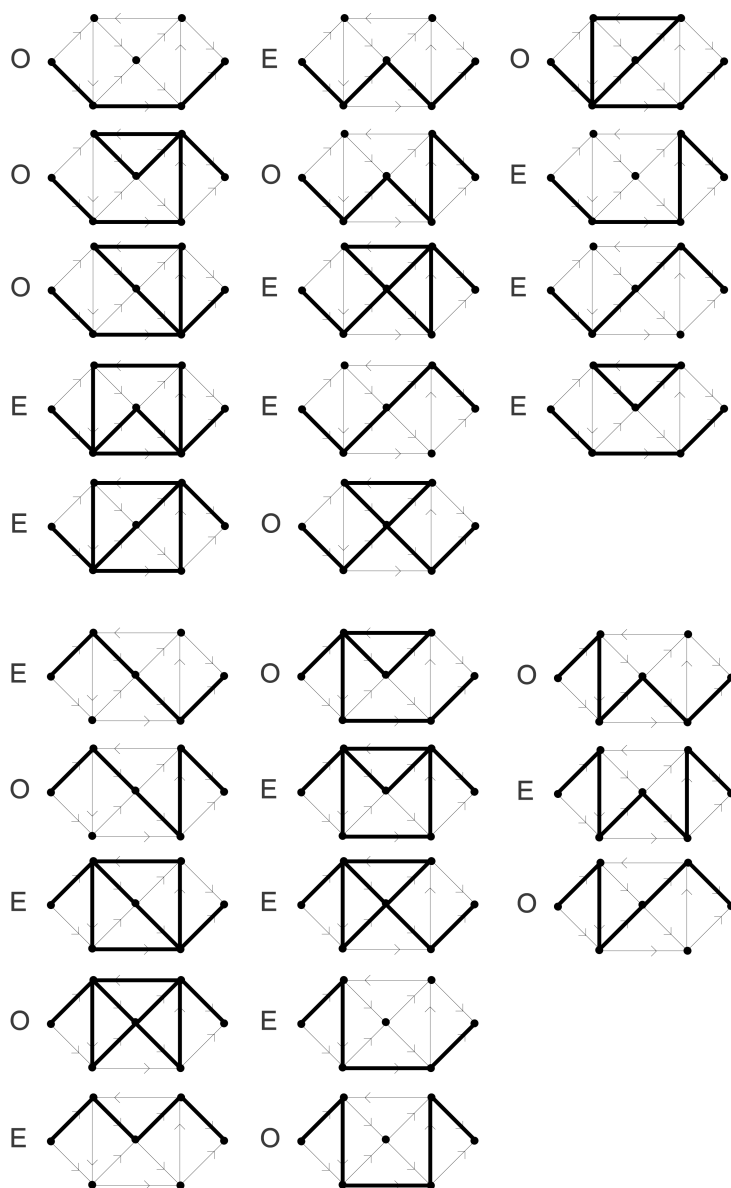


Obr. 5.9: Všetky rôzne cykly v AP

Teda celkový počet eulerovských podgrfov grafu D , ktoré neprechádzajú vrcholmi a_i je 6^n . Lebo pre každý podgraf AP_i buď vyberieme jeden z 5 rôznych cyklov, alebo nevyberieme žiaden.

2. Pokiaľ chceme spočítať všetky cykly ktoré prechádzajú cez vrcholy a_i , tak najskôr musíme vedieť, koľko existuje rôznych "skoro eulerovských" podgrfov v AP_i . "Skoro eulerovský" podgraf v AP_i je taký podgraf, ktorý obsahuje cestu z vrcholu a_i do vrcholu $a_{i+1 \pmod n}$ a pre každý vrchol w z množiny $V(AP_i) \setminus \{a_i, a_{i+1 \pmod n}\}$ platí, že $\delta^+(w) = \delta^-(w)$. Počet všetkých takýchto eulerovských podgrfov grafu D je 27^n , lebo pre každý podgraf AP_i vyberáme jeden z 27 "skoro eulerovských" podgrfov. Pozri obrázok 5.10.

Vyššie uvedené typy eulerovských podgrfov grafu D pokrývajú všetky možnosti. Ďalej treba ukázať, že počet párných a nepárných eulerovských podgrfov je rôznych. K tomu nám postačí si všimnúť, že celkový počet eulerovských podgrfov je $27^n + 6^n$ a to je nepárne číslo. Vďaka tomu je zrejmé, že počet párných a nepárných cyklov je rôznych. Ďalej vďaka použitiu vety 4.2.1 vieme, že koeficient $\prod_{v \in V(L(A_n))} x_v^2$ v grafovom polynóme je nenulový. Z tohto zistenia a vety 4.1.1 dostávame, že platí LCC. \square



Obr. 5.10: Všetky "skoro eulerovské" podgrafy v AP

Dôkaz 2

V tomto dôkaze ukážeme použitie techniky, ktorá využíva permutácie farbení (Pozri podkapitola 4.3). Budeme vychádzať z vety 4.3.1, ktorá hovorí, že ak

$C(D) \neq 0$, potom pre graf G platí LCC.

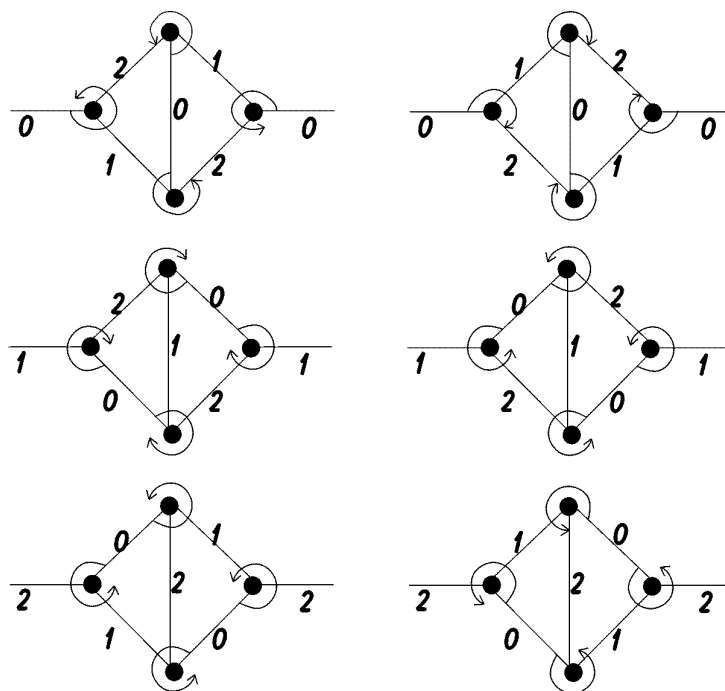
$$|C(D)| = |ec(G)| = \left| \sum_{c \in EC(G)} sign(c) \right|$$

$$sign(c) = \prod_{v \in V} \pi_v^{-1} c_v(e); v \in e \in E$$

Možno ľahko vidieť, že každé farbenie grafu A_n má hrany spájajúce jednotlivé podgrafy AL zafarbené tou istou farbou a taktiež tou istou farbou musí byť zafarbená aj hrana spájajúca vrcholy 2 a 3 v podgrafe AL . Ďalej máme vždy dve možnosti ako ofarbiť zvyšné štyri hrany ostávajúcimi farbami v každom podgrafe AL . Je ľahko vidieť, že iné farbenie okrem týchto neexistuje a počet farbení je teda $3! = 6$.

Spočítame, koľko je farbení s párnym a nepárnym znamienkom pre A_1 . Poradie hrán v permutácii $\pi^{-1} c_v(e) : v \in e \in E(G)$ je pre každý vrchol určené podľa zakreslenia v rovine (pozri obrázok 5.3) v smere hodinových ručičiek. Je možné ľahko nahliadnuť, že znamienko tejto permutácie nijako neovplyvňuje, ktorá hrana je prvá.

Označme si $sign(\pi^{-1} c_v(e)); v \in e \in E(G)$ ako $\gamma_c(v)$, potom sa ľahko dá ukázať, že pre kubický graf $\gamma_c(v) = +1$, ak farby idú okolo vrcholu v smere hodinových ručičiek a $\gamma_c(v) = -1$ inak. Na obrázku 5.3 môžeme vidieť všetkých 6 rôznych farbení podgrafu AL . Môžeme si všimnúť, že pre každé farbenie majú všetky vrcholy farby im incidentných hrán v rovnakom smere, t.j. v smere hodinových ručičiek, alebo v protismere hodinových ručičiek. Keďže podgraf AL má párny počet vrcholov, potom je zrejmé, že ľubovoľné jeho farbenie c bude mať kladné znamienko: $sign(c) = \prod_{v \in V} \gamma_c(v) = (-1)^4 = (+1)^4 = +1$. Ďalej vieme, že farbenie celého grafu A_n vznikne tak, že ofarbíme podgrafy $AL_i : 0 \leq i < n$, jediná podmienka je aby hrany medzi podgrafmi AL_i a $AL_{i \pmod n}$ mali rovnakú farbu. Keďže každé farbenie pre AL_i má vždy kladné znamienko, tak potom aj farbenie pre A_n má kladné znamienko a súčet kladných znamienok je väčší ako 0. \square



Obr. 5.11: Všetky farbenia podgrafu AL

5.4 Möbiov rebrík

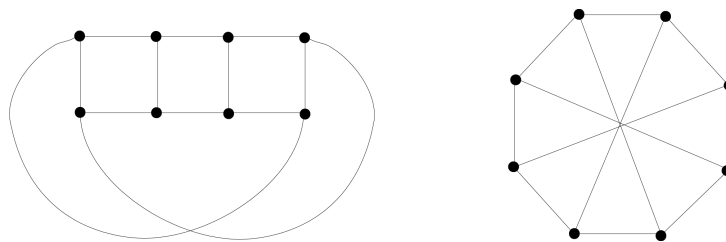
Na začiatku tejto kapitoly sme predstavili graf s názvom rebrík, teraz ukážeme jeho modifikáciu a dokážeme pre ňu platnosť LCC.

Majme rebrík R_n , pridajme k nemu hrany v_0u_{n-1} , $v_{n-1}u_0$ a výsledný graf M_n budeme nazývať Möbiov rebrík. Pozri obrázok 5.12

Dôkaz

Hlavná myšlienka dôkazu bude nasledovná: Ak je n nepárne, potom graf M_n je bipartitný: $A = \{v_0, v_2, \dots, v_n, u_1, u_3, u_{n-1}\}$, $B = V(M_n) \setminus A$. Vo vete 3.1.1 bolo ukázané, že ak je graf bipartitný, potom preňho platí LCC.

Ak je n párne: V predchádzajúcej kapitole sme v časti o faktorizácii



Obr. 5.12: Zakreslenia Möbiovho rebríka v rovine

uviedli vetu 4.4.1. V Möbiovom rebríku vždy existuje aspoň jedna hamiltonovská kružnica pozri nakreslenie na obrázku 5.12, v ktorom sú všetky vrcholy grafu na kružnici. Takže budeme ukazovať, že počet hamiltonovských kružníc je nepárny, presnejšie ukážeme, že ich je $n + 1$. Budeme vychádzať z nakreslenia na obrázku 5.12, kde sú všetky vrcholy na jednej kružnici. Pre vrcholy si zvolíme ľubovoľné poradie vrcholov na kružnici a budeme ich do konca dôkazu označovať v_0, \dots, v_{2n-1} . Hamiltonovské kružnice si rozdelíme na prípady podľa počtu tetív, ktoré do nich patria.

Ak žiadna tetiva nepatrí do ham. kružnice, potom takáto ham. kružnica je len jedna $v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}, v_0$.

Ak ham. kružnica obsahuje len jednu tetivu $v_i v_{i+n}$, tak nevieme spojiť vrcholy v_i a v_{i+n} cez všetky zvyšné vrcholy iba hranami na kružnici.

Ak ham. kružnica obsahuje dve tetivy, tak ich koncové vrcholy musia byť susedné, inak by sme rozdelili kružnicu na 4 neprázdne množiny vrcholov, ktoré by sme chceli spojiť dvoma cestami, ktoré vedú len po obode kružnice, čo sa nedá. Pokiaľ sú teda tetivy susedné, označme si ich $v_i v_{i+n}$ a $v_{i+1} v_{i+n+1}$. Ak by sme spojili hranou vrcholy v_i, v_{i+1} (resp. v_{i+n}, v_{i+n+1}), tak opäť zvyšné vrcholy nevieme napojiť do ham. kružnice, kde patria hrany $v_{i+n+1} v_{i+1} v_i v_{i+n}$. Takže nám ostáva možnosť, že spojíme vrcholy v_i a v_{i+n+1} po kružnici a taktiež symetricky v_{i+1} a v_{i+n} a dostaneme ham. kružnicu. Táto je určená dvojicou protifaľných nepoužitých hrán na obode kružnice. Keďže hrán je

na obvode $2n$, rôznych ham. kružníc tohto typu bude n .

Ak ham. kružnica obsahuje viac tetív, potom si zoberme dve, ktoré sú k sebe najbližšie $v_i v_{i+n}$ a $v_j v_{j+n}$. Z toho vyplýva, že cesta $v_i v_{i+1} \dots v_j$ patrí do kružnice, lebo inak sa vrchol $v_k : i < k < j$ musel do ham. kružnice zapojiť cez tetivu ním prechádzajúcu, čo je spor s výberom najbližších dvoch tetív. To isté platí aj pre cestu $v_{i+n} v_{i+n+1} \dots v_{j+n}$ a teda by nám vznikol cyklus, ktorý nie je hamiltonovský.

Zoberme si teda susedné tetivy $v_i v_{i+n}$ a $v_{i+1} v_{i+n+1}$ a budeme ich chcieť zapojiť do ham. kružnice. Situáciu si rozdelíme na dva prípady:

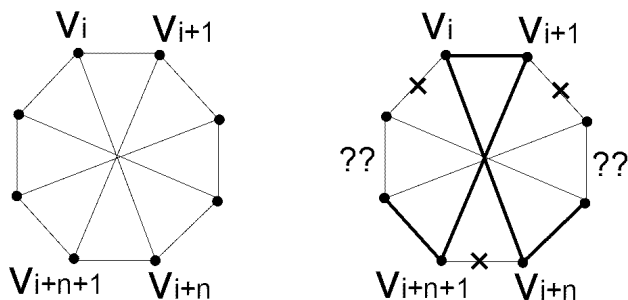
Ak ham. kružnica má vyzeráť nasledovne: $v_{i+n+1} v_{i+1} \dots v_{i+n} v_i \dots v_{i+n+1}$. Potom chceme spojiť vrcholy v_{i+1}, v_{i+n} jednou cestou a to isté má platiť aj pre v_{i+n+1}, v_i . Vieme, že do ham. kružnice nepatria hrany $v_i v_{i+1}$ a $v_{i+n} v_{i+n+1}$, z toho vyplýva, že do ham. kružnice patria hrany $v_{i+1} v_{i+2}$ a $v_{i+n+1} v_{i+n+2}$. Potom je zrejmé, že nemôžeme použiť tetivu $v_{i+2} v_{i+n+2}$, lebo by vznikla kružnica, ktorá nie je hamiltonovská. Teda opäť musíme použiť hrany na kružnici $v_{i+2} v_{i+3}$ a $v_{i+n+2} v_{i+n+3}$ a opäť prichádzame do tej istej situácie. Toto sa opakuje až pokiaľ do ham. kružnice nevyberieme $v_i v_{i-1}$ a $v_{i+n-1} v_{i+n}$, čím ale dostávame prípad, že sme použili len dve tetivy, čo sme nechceli.

Pokiaľ by sme hľadali cesty pre vrcholy v_i, v_{i+n} a v_{i+1}, v_{i+n+1} , tak by nám vznikli dve kružnice a nie jedna hamiltonovská.

Ostáva nám možnosť, že do ham. kružnice použijeme hranu $v_i v_{i+1}$ a teda bude tvaru: $v_{i+n+1} v_{i+1} v_i v_{i+n} \dots v_{i+n+1}$. Chceme ukázať, že existuje cesta z vrcholu v_{i+n+1} do v_{i+n} cez všetky ostatné vrcholy, tak aby sme dostali ham. kružnicu. Je zrejmé, že nepoužijeme hranu $v_{i+n} v_{i+n+1}$, lebo by sme uzatvorili kružnicu, teda musíme použiť zvyšné dve hrany incidentné s vrcholmi v_{i+n}, v_{i+n+1} . Keďže do ham. kružnice sme už vybrali dve hrany incidentné s vrcholom v_i vieme, že hrana $v_i v_{i-1}$ v ham. kružnici už nemôže byť. To isté platí aj pre vrchol v_{i+1} a hranu $v_{i+1} v_{i+2}$. Z tohto stavu je nám ale zrejmé, aké hrany sa musia použiť pre vrcholy v_{i+n-1}, v_{i+n+2} . Takto máme vždy ur-

KAPITOLA 5. PLATNOSŤ LCC PRE VYBRANÉ TRIEDY GRAFOV 50

čené, ktoré hrany sa vyberajú pre tento prípad do ham. kružnice a ktoré nie. Môžeme si všimnúť, že hrany z obvodu kružnice grafu M_n sa postupne striedajú, či ich vyberieme do ham. kružnice $(v_i v_{i+1}, v_{i+n} v_{i+n-1})$, alebo nie $(v_{i+1} v_{i+2}, v_{i+n-1} v_{i+n-2})$ avšak hrán medzi vrcholmi v_i a v_{i+n} je n a to je párne. Všimnime si, že z oboch strán vždy vyberieme prvú hranu do kružnice, potom je zrejmé, že v strede nám ostane jedna hrana, ktorá by mala byť aj v hamiltonovskej kružnici aj nemal byť, čo je však spor. A nie je teda možné vytvoriť hamiltonovskú kružnicu. \square



Obr. 5.13: Vytváranie ham. kružnice s viac ako dvomi tetivami

Kapitola 6

Záver

V tejto práci sme sa venovali problematike zoznamového farbenia. V prvých dvoch kapitolách sme uviedli základné definície a prezentovali niekoľko doterajších poznatkov z oblasti zoznamového farbenia. Spomenieme aspoň Thomassenovu vetu o zoznamovej 5-zafarbiteľnosti planárnych grafov a vetu o zoznamovej 3-zafarbiteľnosti grafov s cyklami dĺžky deliteľnou číslom l . V tretej kapitole sme oboznámili čitateľa s hypotézou o zoznamovom farbení a predstavili Galvinov dôkaz jej platnosti pre bipartitné grafy. Následne v štvrtej kapitole sme sa venovali rôznym metódam dokazovania tejto hypotézy. Týmto prehľadom metód spolu s názornými príkladmi sme chceli ukázať návod, ako sa dá dokazovať LCC pre rôzne triedy grafov. Aj čitateľ, ktorý sa len začal zaujímať o hypotézu o zoznamovom farbení, má po preštudovaní tejto kapitole silný aparát na dokazovanie LCC pre rôzne triedy grafov. V piatej kapitole sme sa venovali rôznym triedam grafov, pre ktoré sa nám podarilo dokázať platnosť hypotézy o zoznamovom farbení. Medzi tieto triedy patria: koleso, valce, zovšeobecnené petersenove grafy kroku jeden, Möbiiov rebrík a iné.

6.1 Otvorené otázky

Najdôležitejšou otvorenou otázkou je stále všeobecná platnosť hypotézy o zoznamovom farbení. Avšak pokiaľ sa túto hypotézu nepodarí vyriešiť, dôkaz pre každú nekonečnú triedu bude úspechom.

Za zaujímavé by som považoval dokázanie LCC pre zovšeobecnené peter-senove grafy kroku k , kde $k \geq 2$ a celkovo pre triedy neplanárnych regulárnych grafov.

Literatúra

- [1] Akbari, S., Ghanbari, M., Jahanbekam, S. a Jamaali, M. List coloring of graphs having cycles of length divisible by and given number. *Discrete Mathematics* 309, 3 (2009), 613 – 614.
- [2] Alon, N. Restricted colorings of graphs. *in Surveys in Combinatorics 1993, London Math. Soc. Lecture Notes Series 187* (1993), 1–33.
- [3] Alon, N. a Krivelevich, M. The choice number of random bipartite graphs. *Annals of Combinatorics*, 2 (1998), 291–297.
- [4] Alon, N. a Tarsi, M. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica* 12, 2 (1992), 125–134.
- [5] Appel, K. a Haken, W. Every planar map is four colorable. *American Mathematical Society Bulletin* 82, 5 (1976), 711–712.
- [6] Brooks, R. L. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37 (Apr. 1941), 194–197.
- [7] Diestel, R. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [8] Ellingham, M. N. a Goddyn, L. List edge colourings of some 1-factorable multigraphs. *Combinatorica* 16, 3 (1996), 343–352.

- [9] Erdős, P., Rubin, P. a Taylor, H. Choosability in graphs. *Congressus Numerantium*, 26 (1979), 125–157.
- [10] Galvin, F. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 63, 1 (1995), 153 – 158.
- [11] Grünbaum, B. Grötzsch’s theorem on 3-colorings. *Michigan Math. Journal* 10, 3 (1963), 303–310.
- [12] Grötzsch, H. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel. *Math. Nat. Reihe* 8 (1959), 109–120.
- [13] Grötzsch, H. Zur theorie der diskreten gebilde, vii: Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel. *Math.-Nat. Reihe* 8 (1959), 109120.
- [14] Heawood, P. J. Map-colour theoremss. *Quarterly Journal of Mathematics* 24 (1890), 332338.
- [15] Hefetz, D. Lecture notes for subject: Graphs and algorithms: Advanced topics, 2008.
- [16] Jaeger, F. On the penrose number of cubic diagrams. *Discrete Math.* 74, 1-2 (1989), 85–97.
- [17] König, D. Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. *Matematikai és Természettudományi Értesít* 34 (1916), 104–119.
- [18] Ramachandran, K. N., Belding, E. M., Almeroth, K. C. a Buddhikot, M. M. Interference-aware channel assignment in multi-radio wireless mesh networks. *INFOCOM 2006. 25th IEEE International Conference on Computer Communications. Proceedings* (2006), 1–12.
- [19] Thomassen, C. Every planar graph is 5-choosable. *J. Comb. Theory Ser. B* 62, 1 (1994), 180–181.

- [20] Thomassen, C. 3-list-coloring planar graphs of girth 5. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 64, 1 (1995), 101 – 107.
- [21] Thomassen, C. A short list color proof of grötzsch’s theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 88, 1 (2003), 189 – 192.
- [22] Vizing, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p -graph(russian). *Diskret. Analiz* 3 (1964), 25–30.
- [23] Voigt, M. List colourings of planar graphs. *Discrete Mathematics* 120, 1-3 (1993), 215–219.
- [24] Zeitlhofer, T. a Wess, B. List-coloring of interval graphs with application to register assignment for heterogeneous register-set architectures. *Signal Process.* 83, 7 (2003), 1411–1425.