Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Malé cyklové pokrytia v grafoch

Diplomová práca

Študijný program: Informatika

Študijný odbor: 9.2.1 informatika

Školiace pracovisko: Katedra informatiky

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Bratislava, 2011 **Bc. František Grega**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. František Grega
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Malé cyklové pokrytie v grafoch

Cieľ: Zhrnúť a analyzovať doteraz známe poznatky o hypotéze o malých cyklových pokrytiach a preveriť platnosť hypotézy pre niektoré triedy grafov.

Vedúci: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Dátum zadania: 12.11.2009

Dátum schválenia: 18.02.2011

prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
garant študijného programu

študent

Martin Škoviera

vedúci

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

V Bratislave dňa: ....

Poďakovanie

Ďakujem môjmu školiteľovi prof. RNDr. Martinovi Škovierovi, PhD. za konzultácie a cenné rady, za výber témy a poskytnutie literatúry. Ďalej ďakujem priateľom a rodine za trpezlivosť a pomoc. Ďakujem Bohu.

Abstrakt

Autor: František Grega
Názov práce: Malé cyklové pokrytia v grafoch
Univerzita komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra informatiky
Vedúci: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Bratislava 2011

Táto práca sa zaoberá hypotézou o malých dvojitých cyklových pokrytiach na karteziánskych, respektíve zovšeobecnených karteziánskych súčinoch grafov.

Kľúčové slová: SCDC, PPDC, EPPDC, cyklus, pokrytie cyklami, grafové nakrytie, šikmý súčin, voľný súčin

Abstract

Author: František Grega
Title: Small cycle double covers in graphs
Comenius University in Bratislava
Faculty of mathematics, physics and informatics
Department of Computer Science
Advisor: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Bratislava 2011

This work is about small cycle double cover conjecture in cartesian products of graphs, graph bundles and free products.

Keywords: SCDC, PPDC, EPPDC, cycle, cycle cover, covering graph, cartesian product, graph bundle, free product

Predhovor

Problematika cyklových pokrytí v grafoch je relatívne známou v oblasti teórie grafov. Rieši otázku, ako je možné pokryť graf súborom cyklov tak, aby boli splnené nejaké podmienky. Postupom času sa teória obohatila o nové poznatky, smery, ktorými sa v súčastnosti výskum v tejto oblasti uberá. Otázka cyklových pokrytí zasahuje do oblastí, ako toky v grafoch, farbenie grafov a pod.

Cyklové pokrytia grafov, ako oblasť skúmania teórie grafov som si vybral, pretože ma tento predmet zaujal a chcel som obohatiť svoje vedomosti o výskum v podobe diplomovej práce. Okrem toho je táto práca čiastočne pokračovaním môjho výskumu z bakalárskej práce.

Obsah

Úvod

0.1 Všeobecné

Hypotéza o dvojitom cyklovom pokrytí na grafoch je v teórii grafov jednou z najviac skúmaných problémov spolu s hypotézou o nikde nulovom 5-toku a Berge-Fulkersonovou hypotézou. Podľa hypotézy o dvojitom cyklovom pokrytí má každý dvojsúvislý graf súbor cyklov taký, že každá hrana grafu sa v ňom nachádza práve dva krát. Hypotéza o nikde nulovom 5-toku sa zaoberá nikde nulovým 5-tokom na ľubovoľnom dvojsúvislom grafe. Podľa Berge-Fulkersonovej hypotézy existuje v každom dvojsúvislom kubickom grafe šesť 1-faktorov s vlastnosťou, že každá hrana daného grafu sa nachádza v práve dvoch 1-faktoroch z týchto. Ako ďalej spomína Gazdík vo svojej diplomovej práci [Gaz10], zaujímavé je a tiež jedným z dôvodov, prečo tieto hypotézy spomíname, že všetky problémy sa dajú redukovať na triedu snarkov, čo sú dvojsúvislé kubické grafy s chromatickým indexom štyri.

V tejto práci sa budeme zaoberať najmä hypotézou o dvojitom cyklovom pokrytí na grafoch a to konkrétne odvodenou hypotézou o malých dvojitých cyklových pokrytiach, ktorá je zosilnením pôvodnej hypotézy a budeme ju skúmať na karteziánskom súčine grafov. Poukážeme na súvislosti medzi súčinmi grafov a inými triedami grafov. Dokážeme platnosť hypotézy na niektorých grafoch, ktoré sú karteziánskymi súčinmi grafov. Zovšeobecníme pojem karteziánskeho súčinu a dokážeme platnosť hypotézy na niektorých objektoch zovšeobecnených karteziánskych súčinov grafov.

0.2 Motivácia

Motiváciou skúmania hypotézy CDC, resp. SCDC v informatike je vo všeobecnosti skutočnosť, že poznatky o štruktúre grafov vedú ku konštrukcii rýchlejších algoritmov na riešenie rôznych problémov (napríklad kombinatorických) na grafoch. Nakoľko hypotéza CDC zohráva významnú úlohu v prepojení rôznych poznatkov o štruktúre grafov, tak jej riešenie môže mať zásadný prínos. Oblasť teórie grafov sa dotýka rôznych informatických disciplín, z ktorých snáď najzaujímavejšou v súvislosti s teóriou grafov je teória počítačových sietí. Motivácia skúmania karteziánskych súčinov podobne spočíva v tom, že tento objekt je spomedzi súčinov na grafoch jedným z najatraktívnejších. A to napríklad svojou aplikáciou v teórii kódovania, teórii sietí, alebo teoretickej chémie.[IKR08]

Kapitola 1

Hypotézy

1.1 Cieľ práce

Dokázať platnosť hypotézy SCDC na karteziánskych súčinoch grafov, respektíve zovšeobecnených karteziánskych súčinoch grafov.

1.2 Teória

1.2.1 Základné definície

Definícia 1.2.1. (jednoduchý graf) Jednoduchým grafom rozumieme neohodnotený graf, ktorý obsahuje iba neorientované hrany a neobsahuje násobné hrany a slučky.

Definícia 1.2.2. (neorientovaný graf) Neorientovaným grafom rozumieme graf, ktorý obsahuje iba neorientované hrany.

Poznámka 1.2.1. Množina hrán grafu G sa označuje, ako $E(G)$. Niekedy budeme v grafe nahrádzať neorientované hrany dvojicou opačne orientovaných šípov, teda pre všetky hrany $e \in E(G)$ existuje $d, d^{-1} \in D(G)$, kde d, d^{-1} sú opačne orientované *šípy*. Šíp je len iné pomenovanie pre orientovanú hranu, kde d_i označuje počiatočný vrchol šípu d a d_t koncový.

Definícia 1.2.3. (komponent súvislosti) Komponentom súvislosti grafu G nazývame maximálny súvislý podgraf grafu G.

Poznámka 1.2.2. Každý konečný graf sa skladá z niekoľkých komponentov súvislosti a súvislý graf sa skladá z jedného komponentu súvislosti, ktorým je on sám.

Definícia 1.2.4. (stupeň vrchola) Stupňom vrchola je číslo, ktoré označuje počet hrán incidentných s daným vrcholom.

Definícia 1.2.5. (cyklus) Graf nazývame cyklus, ak je súvislý a všetky jeho vrcholy majú stupeň 2.

Poznámka 1.2.3. V anglickej literatúre sa pod pojmom cyklus zvykne uvádzať graf, ktorého každý vrchol má párny stupeň. V tomto je naša definícia striktná, lebo vyžadujeme, aby bol graf súvislý a aby stupeň každého vrchola bol práve 2.

Definícia 1.2.6. (párny graf) Párnym grafom nazývame graf, ktorý má všetky vrcholy párneho stupňa.

Grafom stupňa n nazývame graf, ktorý má všetky vrcholy stupňa n.

Poznámka 1.2.4. Párnemu grafu sa zvykne hovoriť aj eulerovský graf, pretože v každom komponente súvislosti tohoto grafu existuje eulerovský ťah, teda uzavretý ťah, ktorý obsahuje všekty hrany daného komponentu súvislosti.

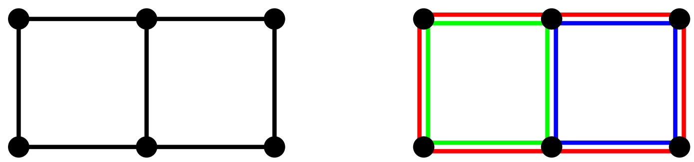
1.2.2 Dvojité cyklové pokrytia grafov

Definícia 1.2.7. *Dvojité cyklové pokrytie grafu* je súbor cyklov $\mathbf{C}$ taký, že každá hrana patriaca danému grafu sa nachádza v práve dvoch cykloch z $\mathbf{C}$. (CDC)

Príklad dvojitého cyklového pokrytia uvádzame na obrázku 1.1, kde sú farebne odlíšené cykly patriace CDC daného grafu.

Hypotéza 1.2.1. *Každý dvojsúvislý graf má dvojité cyklové pokrytie. (hypotéza CDC)*

Poznámka 1.2.5. Ak sa uvádza, že graf je dvojsúvislý, myslí sa tým hranová dvojsúvislosť.



Obr. 1.1: Ilustrácia CDC na grafe $P_3 \square P_2$

Táto hypotéza je pripisovaná viacerým autorom.[Cha09] Konkrétne ju vyslovili páni Szekeres a Seymour v 70-tich rokoch minulého storočia. Motiváciu jej skúmania ponúkol už Euler tvrdením, že pre každý párny graf existuje jeho dekompozícia na množinu cyklov. Hypotéza CDC je známa, ako dôsledok hypotézy o silnom vnorení. Hypotéza o silnom vnorení hovorí, že každý dvojsúvislý graf má silné vnorenie na nejakom povrchu.[Jae85] Existujú ďalšie odvodené problémy spojené s týmto. Napríklad takzvaná hypotéza o silnom vnorení na orientovaných povrchoch. Iné sa týkajú zase k-zafarbiteľnosti stien grafu v nejakom vnorení. K samotnej hypotéze o dvojitých cyklových pokrytiach na grafoch existujú taktiež odvodené problémy, z ktorých jeden budeme skúmať v tejto práci. Sú to napríklad tieto:

Hypotéza 1.2.2. *Každý dvojsúvislý graf má orientované dvojité cyklové pokrytie.*

Poznámka 1.2.6. Ak by sme všetky hrany neorientovaného grafu nahradili dvojicou opačne orientovaných hrán, tak potom orientované dvojité cyklové pokrytie je taký súbor cyklov **C** taký, že každý cyklus v tomto súbore je orientovaný a platí, že každá orientovaná hrana je v práve jednom cykle daného súboru. Zjavne je tu podobnosť s hypotézou týkajúcou sa hypotézy o silnom vnorení na orientovaných povrchoch.

Hypotéza 1.2.3. *Každý dvojsúvislý graf má stenovo-*5*-zafarbiteľné vnorenie na nejakom orientovanom povrchu.*

Každý dvojsúvislý graf má dvojité 5*-cyklové pokrytie.*

Ak skombinujeme predchádzajúce hypotézy, dostávame nasledovné:

Hypotéza 1.2.4. *Každý dvojsúvislý graf má silné, stenovo-*5*-zafarbiteľné vnorenie do nejakého orientovaného povrchu.*

Tento dohad implikuje platnosť hypotézy CDC, ako aj hypotézy o nikde nulovom 5-toku na dvojsúvislých grafoch:

Tvrdenie 1.2.1. *Nech graf G má silné, stenovo-5-zafarbiteľné orientované vnorenie. Potom G má nikde nulový 5-tok.*

Podľa [Jae85] navyše existuje redukcia hypotézy CDC na snarky, t.j. ak platí, že každý snark má CDC, tak aj každý dvojsúvislý graf má CDC. Veľmi dobrá ilustrácia vzťahov rôznych hypotéze je v práci [Bon88] na strane 18.

1.2.3 Malé dvojité cyklové pokrytia grafov

Definícia 1.2.8. *Malé dvojité cyklové pokrytie grafu* je súbor cyklov **C** taký, že každá hrana patriaca danému grafu sa nachádza v práve dvoch cykloch z **C** a platí, že počet cyklov v **C** je menší, ako počet vrcholov daného grafu. (SCDC)

Hypotéza 1.2.5. *Každý jednoduchý dvojsúvislý graf má malé dvojité cyklové pokrytie. (hypotéza SCDC) [Bon88]*

Poznámka 1.2.7. Uvedomme si, že jednoduchosť grafu nám zabezpečí, aby graf nemal „príliš” veľa hrán v porovnaní s počtom vrcholov grafu, čo by spôsobilo, že počet cyklov musí byť väčší, ako počet vrcholov grafu. Jednoduchosť grafu je teda nutnou podmienkou. V tejto práci, ak nebude uvedené ináč, pod pojmom graf myslíme jednoduchý neorientovaný graf.

Poznamenajme, že toto ohraničenie je svojím spôsobom prirodzené, nakoľko ľubovoľné CDC na nejakom kompletnom grafe K_n má minimálne $n-1$ cyklov, čo sa dá ľahko ukázať, nakoľko každý cyklus v danom grafe má maximálnu dĺžku n a počet hrán v grafe je $n * (n-1)/2$.

Z pozorovania, na ktorých triedach grafov bola hypotéza dokázaná sa dá vidieť, že bola skúmaná na takých objektoch, ktoré sa dajú nejakým spôsobom „dobre” uchopiť, dá sa ľahko udržiavať počet cyklov v CDC v požadovanej miere.

Podľa [Bon88] platí, že K_n s $n \geq 3$, resp. $K_{p,q}$ pre $p, q \geq 2$ má SCDC. Práce [FKS02, Sey93] pojednávajú hypotézu SCDC na triede 4-súvislých planárnych grafov, ako aj na triede hranových grafov kompletných multipartitných grafov. Hypotéza bola taktiež overená na jednoduchých trianguláciach na orientovných povrchoch.[FKS02]

Veta 1.2.1. *[FKS02]*

1. *Ak G je kompletný graf, kompletný bipartitný graf okrem $K_{1,2}$, alebo planárny graf bez artikulácie stupňa* 2*, tak hranový graf grafu G má SCDC.*

2. *Ak G je kompletný multipartitný graf iný, ako $K_{1,2}$, tak hranový graf grafu G má SCDC.*

3. *Ak G je dvojsúvislý planárny graf, tak hranový graf grafu G má SCDC.*

4. *Ak G nemá vrcholy stupňa* 2*, tak hranový graf grafu G má SCDC.*

Motiváciou skúmania hypotézy na triede planárnych grafov je zjavne využitie planárnych grafov v teórii počítačových sietí. V prípade triedy hranových grafov je zase motiváciou jednoducho popísateľná štruktúra. Zaujímavou triedou grafov sú aj rôzne súčiny na grafoch. V ďalšej kapitole sa preto venujeme práve karteziánskym súčinom grafov.

Kapitola 2

Karteziánsky súčin

2.1 Perfektné dvojité pokrytie cestami

Definícia 2.1.1. (Perfektné dvojité pokrytie cestami - PPDC) Hovoríme, že graf G má PPDC práve vtedy, keď má súbor ciest $\mathbf{P}(G)$ taký, že každá hrana z G leží v práve dvoch cestách z $\mathbf{P}(G)$ a každý vrchol z G je koncovým vrcholom práve dvoch ciest z $\mathbf{P}(G)$.

Poznámka 2.1.1. Uvedomme si, že podmienka, že každý vrchol je koncovým vrcholom práve dvoch ciest z $\mathbf{P}(G)$ nám zaručuje, že počet ciest v PPDC je rovný počtu vrcholov grafu.

Bondy vo svojej práci [Bon88] uvádza definíciu PPDC a zároveň poukazuje na súvis s hypotézou SCDC. Poukazuje na niektoré triedy grafov, na ktorých sú tieto hypotézy ekvivalentné. Ako je ďalej vidieť aj v prácach o hranových grafoch [Sey01], resp. karteziánskych súčinoch, ktoré pojednávajú túto problematiku, PPDC je úzko previazaná s hypotézou SCDC.

V práci [NS08] je uvedené, že ak jednoduchý bezmostý súvislý graf G o n vrcholoch má vrchol v stupňa $n-1$, tak G má SCDC, ak $G - \{v\}$ má PPDC, čo platí, takže inými slovami ak máme graf, ktorý obsahuje vrchol, ktorý je spojený so všetkými ostatnými vrcholmi hranou, tak tento graf má SCDC. Predchádzajúca veta však znovu potvrdzuje prepojenie medzi týmito hypotézami.

Veta 2.1.1. *Každý jednoduchý graf má PPDC. [Li90]*

Dôležitou vlastnosťou PPDC, ktorú využijeme pri konštruovaní malých dvojitých cyklových pokrytí je, že graf bez izolovaných vrcholov má také PPDC, ktoré neobsahuje cestu dĺžky nula.

Definícia 2.1.2. Nech G je graf, ktorý má PPDC $\mathbf{P}$. Graf $A(\mathbf{P})$ je multigraf, ktorý má rovnakú množinu vrcholov, ako G. Pre všetky $P \in \mathbf{P}$, $A(\mathbf{P})$ má hranu medzi dvoma koncovými vrcholmi P. Potom $A(\mathbf{P})$ je asociovaný graf grafu G.

Definícia 2.1.3. (Eulerovské perfektné dvojité pokrytie cestami - EPPDC) Hovoríme, že graf G má EPPDC práve vtedy, keď má PPDC $\mathbf{P}$ a platí, že $A(\mathbf{P})$ je cyklus.

Poznámka 2.1.2. Uvedomme si, že ak $\mathbf{P}$ je PPDC, tak $A(\mathbf{P})$ je graf stupňa 2 bez požiadavky jeho súvislosti.

Hypotéza 2.1.1. *Každý jednoduchý graf má EPPDC. [Bon90]*

Veta 2.1.2. *Každý strom má EPPDC.*

Dôkaz 2.1.1. Uvedieme konštrukčný dôkaz. Zoberme ľubovoľný strom. Budeme ho traversovať prehľadávaním do hĺbky. Zvolme si teda koreň stromu, ak nie je určený a usporiadanie synov každého otca v strome. Algoritmus na vyrobenie EPPDC na danom strome bude nasledovný pre graf G:

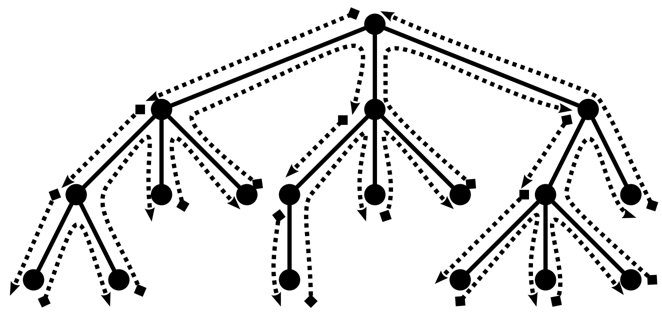
1. Zoberme koreň stromu v. Nastavme začiatok cesty $p := v$. Zoberme najľavejšieho syna w. $v := w$. Počet navštívení vrchola vynulujme.

2. Opakujme nasledovné pre vrchol v, začiatok cesty p:

3. Ak v je navštívený prvý krát, tak cestu $p, ..., v$ pridajme do $\mathbf{P}(G)$ a ak v navyše nie je koreňom stromu, tak v ňom začnime novú cestu, t.j. $p := v$. Ak je koreňom stromu, ukončíme algoritmus.

4. Ak v nie je list stromu, tak zoberme najľavejšieho syna, ktorý ešte nebol prehľadaný, v opačnom prípade, alebo ak neprehľadaný syn v neexistuje, zoberme otca. Nech tento vrchol je w.

5. $v := w$.



Obr. 2.1: Ilustrácia vytvárania EPPDC na strome.

Chceme ukázať, že na konci behu algoritmu bude $\mathbf{P}(G)$ EPPDC grafu G. $\mathbf{P}(G)$, ďalej len $\mathbf{P}$, je pokrytie grafu G cestami, lebo všetky objekty, ktoré za behu algoritmu vzniknú, sú cestami. To, že každá hrana je v danom pokrytí práve dva krát vyplýva z vlastnosti prehľadávania do hĺbky. Algoritmus taktiež ručí za to, že každý vrchol je koncovým vrcholom práve dvoch ciest. Poradie, v akom sú prehľadané vrcholy pri prehľadávaní do hĺbky je zároveň poradím vrcholov v $A(G)$ podľa $\mathbf{P}$, čo je tiež zjavné z algoritmu. To ale, znamená, že dané PPDC je zároveň eulerovské, čo sme chceli dokázať. Obrázok 2.1 ukazuje vytváranie EPPDC na strome prehľadávaním do hĺbky. Každá šípka v grafe označuje cestu z $\mathbf{P}$ a zároveň ukazuje, akým spôsobom algoritmus prechádza jednotlivými vrcholmi stromu.

Veta 2.1.3. *Každý cyklus s aspoň 3 vrcholmi má EPPDC.*

Dôkaz 2.1.2. Uvedieme konštrukčný dôkaz. Rozdelíme ho na dva prípady. Zoberme cyklus C_n, kde n je dĺžka cyklu.

Očíslujme vrcholy cyklu nasledovne: $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_0)$.

1. $n = 2k+1$: PPDC $\mathbf{P}$ zostrojíme tak, aby platilo, že vrchol c_i bude koncovým vrcholom ciest $\{c_{i-2}c_{i-1}, c_{i-1}c_i\}$ a $\{c_ic_{i+1}, c_{i+1}c_{i+2}\}$ (mod $2k+1$). Ľahko nahliadneme, že každý vrchol cyklu je práve dva krát koncovým vrcholom nejakej cesty v $\mathbf{P}$. Rovnako každá hrana c_ic_{i+1} je v práve dvoch cestách a to $\{c_{i-1}c_i, c_ic_{i+1}\}$ a $\{c_ic_{i+1}, c_{i+1}c_{i+2}\}$ (mod $2k+1$). Vďaka nepárnemu počtu vrcholov v cykle je dané PPDC eulerovským.

2. $n = 2k$: Ak by sme postupovali, ako v predchádzajúcom prípade, tak by sme dostali dva disjunktné cykly. Najmenší cyklus spĺňajúci

všetky podmienky je C_4. Aby sme dosiahli EPPDC, vytvoríme v cykle dve cesty nepárnej dĺžky a to nasledovne: zoberieme dva susedné vrcholy, napríklad c_i a c_{i+1}. Pridáme do PPDC **P**, ktoré vytvoríme, ako v predchádzajúcom príklade, cesty $\{c_ic_{i+1}\}$, $\{c_{i-1}c_i, c_ic_{i+1}, c_{i+1}c_{i+2}\}$ a odoberieme cesty $\{c_{i-1}c_i, c_ic_{i+1}\}$ a $\{c_ic_{i+1}, c_{i+1}c_{i+2}\}$. Zjavne sme charakteristiku PPDC neporušili. Ostáva ukázať, že dané PPDC je eulerovské. To vyplýva z faktu, že pridané cesty sú nepárnej dĺžky, odobrané cesty sú párnej dĺžky a obe pridané cesty sa prekrývajú tak, že pri traversovaní cyklu oboma smermi je koniec jednej z ciest vzdialený začiatku druhej cesty nepárny počet hrán.

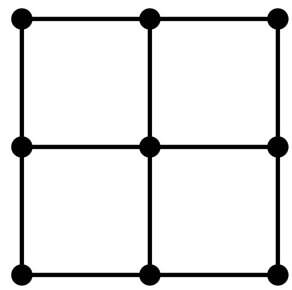
Hypotéza 2.1.2. *Každý párny graf s aspoň* 3 *vrcholmi má EPPDC.*

Veta 2.1.4. *[SW05, Bon90]*

1. *Majme graf G, ktorý má EPPDC. Potom ak pridáme do grafu G vrchol v a spojíme ho minimálne s jedným a maximálne s tromi vrcholmi grafu G hranou, tak graf $G + v$ má EPPDC.*
2. *Ľubovoľný graf s maximálnym stupňom najviac* 3 *má EPPDC.*
3. *Ak graf G je k-strom, $k = 1, 2, 3$, tak G má EPPDC.*
4. *Každá hyperkocka má EPPDC.*
5. *K_n má EPPDC.*
6. *Pre všetky $m, n \geq 1$, $K_{m,n}$ má EPPDC.*
7. *Ak G a H majú EPPDC a počet vrcholov oboch grafov sú navzájom nesúdeliteľné čísla, tak karteziánsky súčin grafov G a H má EPPDC.*
8. *Ak G má EPPDC, tak karteziánsky súčin grafov G a P_2 má EPPDC.*
9. *Ak G má EPPDC, tak lexikografický súčin grafov P_k a G má EPPDC.*

2.2 Karteziánsky súčin grafov

Definícia 2.2.1. *Karteziánsky súčin* $G \square H$ grafov G a H je graf s množinou vrcholov $V(G) \times V(H)$ a množinou hrán definovanou tak, že dva vrcholy



Obr. 2.2: Ilustrácia karteziánskeho súčinu dvojice grafov P_3

(u, v) a (x, y) sú susedné práve vtedy, keď buď $u = x \in V(G)$ a $vy \in E(H)$, alebo $ux \in E(G)$ a $v = y \in V(H)$.

Pre ilustráciu uvádzame obrázok 2.2.

Poznámka 2.2.1. Niekedy budeme používať nasledovné označenie pre vrcholy karteziánskeho súčinu: $(u, v) = z_{u,v}$, prípadne ak budú vrcholy identifikovné vo svojom grafe pomocou prirodzeného čísla, tak budeme používať označenie: $(u_i, v_j) = z_{i,j}$.

Ak očíslujeme vrcholy grafu G, ako $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ a vrcholy grafu H, ako $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$, vrcholy grafu $G \square H$ označíme písmenom x, tak kópiou grafu G grafu $G \square H$ nazývame graf G^i, pre ktorý platí, že množina jeho vrcholov je $V(G^i) = \{x_{0,i}, x_{1,i}, \ldots, x_{m-1,i}\}$ a pre množinu hrán daného grafu platí, že $E(G^i) = \{x_{k,i}x_{l,i} | g_k g_l \in E(G)\}$. Obdobne pre kópiu grafu H platí, že $V(H^i) = \{x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n-1}\}$ a $E(H^i) = \{x_{i,k}x_{i,l} | h_k h_l \in E(H)\}$. Zjednotenie všetkých kópií grafu G budeme volať *ľavý* graf grafu $G \square H$, alebo len $l(G \square H)$. Rovnako zjednotenie všetkých kópií grafu H nazveme *pravým* grafom grafu $G \square H$ $(r(G \square H))$.

V (3.2.2) sa venujeme ilustratívnym porovnaniam s ďalšími súčinmi grafov. Ako sme už spomenuli v kapitole 1, hypotézu SCDC sa snažíme skúmať na triedach grafov, ktoré majú nejakým spôsobom dobrú štruktúru, čo zabezpečí, že sme schopní tento problém na nich riešiť. Jednou z týchto tried je trieda hranových grafov. V tejto kapitole sa pozrieme na triedu karteziánskych súčinov grafov. Táto trieda je zaujímavá svojou štruktúrou. Vďaka pravidelnosti opakovania určitých vzoriek grafov v karteziánskych súčinoch grafov dostávame celkom dobré informácie na počítanie objektov, ktoré na nich hladáme. Nasledujúca veta nám načrtáva istú podobnosť s triedou hranových grafov a svojím spôsobom odobruje vôľu skúmať hypotézu na tejto triede grafov.

Veta 2.2.1. *$L(K_{m,n}) \simeq K_m \square K_n$. [Gre09]*

Dôkaz 2.2.1. Nech $V(K_{m,n}) = (A, B)$. Potom $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Graf $L(K_{m,n})$ je hranový graf grafu $K_{m,n}$ a teda všetky hrany grafu $K_{m,n}$ sú vrcholmi grafu $L(K_{m,n})$, z čoho dostávame:

$$V(L(K_{m,n})) = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_n), (a_2, b_1), ...(a_m, b_n)\}.$$

Ďalej zjednodušíme zápis tak, že $(a_i, b_j) = v_{i,j}$. Takže

$$V(L(K_{m,n})) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n}, v_{2,1}, \ldots, v_{m,n}\}.$$

Ak dve hrany sú incidentné s tým istým vrcholom, tak v hranovom grafe sú dva vrcholy reprezentujúce tieto hrany spojené hranou, z čoho vyplýva, že množina hrán je tvorená dvojicami $v_{i,j}v_{k,l}$, ak $i = k$, alebo $j = l$ okrem prípadu, keď $v_{i,j} = v_{k,l}$. $(v_{i,j}, v_{k,l} \in V(L(K_{m,n})))$ Zoberme $V(K_m) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, $V(K_n) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Po zjednodušení dostávame zápis

$$V(K_m \square K_n) = \{w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots, w_{1,n}, w_{2,1}, \ldots, w_{m,n}\}.$$

Ľahko nahliadneme, že množina hrán je tvorená dvojicami $w_{i,j}w_{k,l}$, ak $i = k$, alebo $j = l$ okrem prípadu, keď $w_{i,j} = w_{k,l}$.

Zjavne existuje bijektívne zobrazenie $\varphi(v_{i,j}) = w_{i,j}$ pre všetky $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Keďže bijektívne zobrazenie z množiny vrcholov na množinu vrcholov nie je nič iné, ako tzv. „premenovanie" vrcholov, tak platí, že grafy $L(K_{m,n})$ a $K_m \square K_n$ sú izomorfné a teda $L(K_{m,n}) \simeq K_m \square K_n$.

Veta 2.2.2.

1. *Nech G je graf o n vrcholoch bez izolovaných vrcholov. Potom $G \square P_2$ má SCDC s n cyklami. Navyše, ak G má SCDC, tak $G \square P_k, k \geq 3$ má SCDC s najviac $nk - n - k + 2$ cyklami.*

2. *Nech G je graf o n vrcholoch bez izolovaných vrcholov a nech G má SCDC. Potom pre ľubovoľný strom T, $G \square T$ má SCDC.*

3. *Nech G je graf o n vrcholoch bez izolovaných vrcholov. Potom pre ľubovoľné $k \geq 2$, $G \square C_{2k}$ má SCDC s $2n$ cyklami. Navyše ak G má SCDC, tak $G \square C_{2k-1}$ má SCDC s najviac $3n - 1$ cyklami. [NS08]*

Veta 2.2.3. *$G \square H$ má SCDC, ak G a H majú SCDC a ak platí, že aspoň jeden z grafov G, H má v nejakom svojom SCDC hamiltonovskú kružnicu.[Gre09]*

Veta 2.2.4. *$K_m \square K_n$ má SCDC pre $m, n \geq 1$ okrem prípadu, keď $\{m, n\} = \{1, 2\}$.[Gre09],[NS08]*

Práce [NS08] a [NS09] navyše pojednávajú hypotézu SCDC na ďalších súčinoch grafov, ako sú konkrétne lexikografické, kategorické, respektíve silné súčiny grafov.

2.3 EPPDC a karteziánsky súčin

Veta 2.3.1. *Ak G a H sú grafy s párnym počet vrcholov a majú EPPDC, tak $G \square H$ má SCDC.*

Dôkaz 2.3.1. Nech G, H sú grafy s párnym počtom vrcholov a nech majú EPPDC $\mathbf{P}(G)$ a $\mathbf{P}(H)$. Potom existujú grafy $A(G)$ podľa $\mathbf{P}(G)$ a $A(H)$ podľa $\mathbf{P}(H)$. Tieto grafy sú cykly s párnym počtom vrcholov také, že $A(G) = (g_0, g_1, \ldots, g_{2m-1}, g_0)$ a $A(H) = (h_0, h_1, \ldots, h_{2n-1}, h_0)$ a platí, pre všetky vrcholy (g_i, h_j) z $A(G) \square A(H)$ (ďalej $v_{i,j}$), že ich susedné vrcholy sú: $v_{i-1,j}$, $v_{i+1,j}$, $v_{i,j-1}$, $v_{i,j+1}$ (mod $(2m, 2n)$). Skonštruujme teraz súbor cyklov $\mathbf{C}'$ taký, že obsahuje cyklus

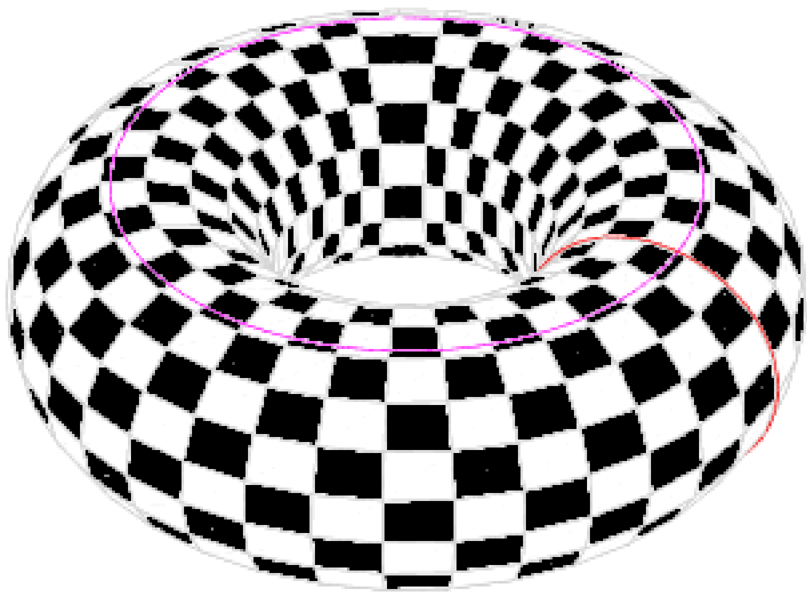
$$(v_{2k,2l}, v_{2k+1,2l}, v_{2k+1,2l+1}, v_{2k,2l+1}, v_{2k,2l})$$

a

$$(v_{2k-1,2l-1}, v_{2k,2l-1}, v_{2k,2l}, v_{2k-1,2l}, v_{2k-1,2l-1})$$

(mod $(2m, 2n)$) pre ľubovoľné k, l. Táto konštrukcia nám zabezpečuje, že všetky hrany grafu $A(G) \square A(H)$ sú práve v jednom cykle z $\mathbf{C}'$. Pre lepšiu predstavu uvádzame ilustráciu (2.3) na ktorej sú čiernou farbou vyfarbené jednotilvé cykly z $\mathbf{C}'$.

Premietnime teraz jeden z týchto cyklov do grafu $G \square H$. Nakoľko sa tento premietnutý graf skladá zo štyroch ciest z grafu, ktoré sú spojené cez ich koncové vrcholy do cyklu, tak aj tento graf je cyklus. Ak premietneme rovnakým spôsobom všetky cykly z $\mathbf{C}'$, dostávame súbor cyklov $\mathbf{C}$. Chceme ukázať, že



Obr. 2.3: Ilustrácia pokrytia grafu $A(G) \square A(H)$ cyklami.

tento súbor je SCDC grafu $G \square H$. Nakoľko všetky hrany z $A(G) \square A(H)$ sú pokryté práve raz, tak aj všetky hrany grafu $G \square H$ sú pokryté práve dva krát, pretože PPDC grafu pokrýva všetky hrany práve dva krát. Počet cyklov dostávame, ako $|V(G)| \cdot |V(H)|/2$ a zjavne platí, že $|V(G)| \cdot |V(H)|/2 \leq |V(G)| \cdot |V(H)| - 1$.

Kapitola 3

Zovšeobecnený súčin

3.1 Šikmý súčin grafov

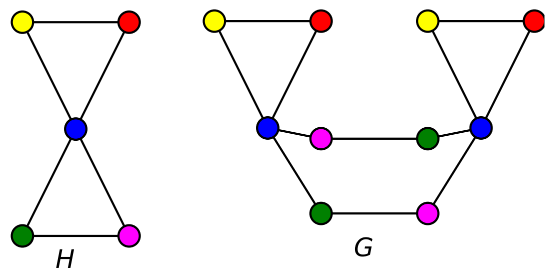
3.1.1 Grafové nakrytia a súčin grafov, motivácia

Definícia 3.1.1. (okolie vrchola) Okolie vrchola v v grafe G je množina vrcholov grafu G, ktorá obsahuje všetky vrcholy susedné s v.

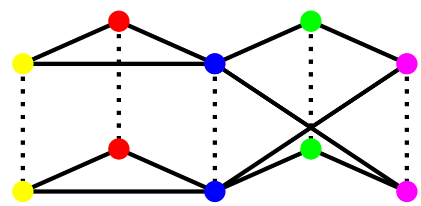
Definícia 3.1.2. (grafové nakrytie) Nech G, H sú grafy a nech $\varphi : V(G) \to V(H)$ je surjekcia. Potom φ je *nakrývajúce zobrazenie* z G do H, ak pre všetky vrcholy $v \in V(G)$, zúženie φ na okolie v je bijekcia na okolie $\varphi(v) \in V(H)$. Graf G je v takom prípade *nakrývajúci graf* grafu H, alebo graf H voláme *kvocient* grafu G.

Pre jednoduchšiu ilustráciu uvádzame obrázok 3.1 nakrývajúceho zobrazenia. Všimnime si, že farebne odlíšené susedné vrcholy ľubovoľného vrchola grafu H sú rovnako farebne odlíšené v netriviálnom nakrývajúcom grafe, G.

Veta 3.1.1. *Uvažujme graf G. Majme $k \in \mathbb{N}^+$. Majme zobrazenie $\alpha : D(G) \to \phi$, kde ϕ je bijekcia na množine $K = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ taká, že $\alpha(d) = \phi_d$ a navyše platí pre ľubovoľný šíp $d \in D(G)$, že $\alpha(d^{-1}) = (\alpha(d))^{-1}$. Skonštruujme graf (G, α) tak, že pre množinu vrcholov platí, že $V((G, \alpha)) = V(G) \times K$ a pre množinu hrán platí, že $E((G, \alpha)) = \{w_m w'_n | ww' \in E(G) \wedge n = \phi_{ww'}(m)\}$. Potom (G, α) je nakrývajúci graf grafu G a $\varphi : V((G, \alpha)) \to V(G)$, také, že $\varphi(v_i) = v$ pre ľubovoľný vrchol $v \in V(G)$ a $i \in K$, je nakrývajúce zobrazenie z (G, α) do G.*



Obr. 3.1: Ilustrácia grafového nakrytia.



Obr. 3.2: Ilustrácia grafu (H, α).

Dôkaz 3.1.1. φ je zjavne surjektívne zobrazenie. Zoberme ľubovoľný vrchol $v_i \in V((G, \alpha))$. Podľa predchádzajúceho dostávame, že $\varphi(v_i) = v$. Chceme ukázať, že zúženie φ na okolie v_i je bijekcia na okolie v. Nech okolie vrchola v je $N_G(v)$ a okolie vrchola v_i je $N_{(G,\alpha)}(v_i)$. Ak teda $v'_j \in N_{(G,\alpha)}(v_i)$, tak musí platiť $\varphi(v'_j) = v' \in N_G(v)$. To je zabezpečené v definícii $E((G, \alpha))$, nakoľko je generovaná práve z $E(G)$. Rovnako ak $v' \in N_G(v)$, tak nakoľko ϕ je bijekcia, musí existovať také j, pre ktoré platí, že $v'_j \in N_{(G,\alpha)}(v_i)$. Na obrázku 3.2 je plnými čiarami znázornený graf G, ako nakrývajúci graf grafu H z ilustrácie 3.1. Z pohľadu predchádzajúcej konštrukcie je to dvojica grafov $(H, \alpha) = G$ a H.

Lemma 3.1.1. *Ak graf H je strom a $\varphi : G \to H$ je nakrývajúce zobrazenie, tak $G \cong H$, alebo G je les, ktorý sa skladá zo stromov izomorfných s H.*

Dôkaz 3.1.2. Zoberme ľubovoľný vrchol v, pre ktorý platí, že $\varphi(v) = v'$ pre nejaké $v' \in V(H)$. Prehľadávaním do šírky, tak že hľadáme ešte nenavštívené hrany, konštruujme z tohto vrchola celý nakrývajúci graf podľa okolí v grafe H. Nakoľko H je strom, prehľadávanie sa po prehľadaní konečného počtu vrcholov zastaví a vráti skonštruovaný strom, ktorý je izomorfný so stromom H. Jedine, ak by v grafe H existoval cyklus, by sa mohol tento algoritmus dostať do stavu, kedy by mal prehľadať už prehľadaný vrchol, čo by spôsobilo buď vytvorenie nového vrchola, alebo spojenie s existujúcim. Z toho evidentne vyplýva, že netriviálne nakrytie možno dosiahnúť iba s grafom, ktorý obsahuje cyklus.

Lemma 3.1.2. *Ak G a H sú grafy a $\varphi : G \to H$ je nakrývajúce zobrazenie, H je súvislý, tak existuje $k \in \mathbb{N}^+$ také, že $|V(G)| = k \cdot |V(H)|$. Naviac platí pre ľubovoľný vrchol $v \in V(H)$, že počet vrcholov vo $\varphi^{-1}(v)$ je rovný k.*

Dôkaz 3.1.3. Budeme postupovať od konca. To znamená, že najskôr dokážeme, že existuje také $k \in \mathbb{N}^+$, že pre ľubovoľný vrchol $v \in V(H)$ platí, že $|\varphi^{-1}(v)| = k$. Uvažujme sporom, že existujú dva vrcholy grafu H, pre ktoré platí, že počet vrcholov, ktoré sa zobrazujú na jeden z nich je rozdielny od počtu vrcholov, ktoré sa zobrazujú na ten druhý. Nakoľko graf H je súvislý, tak existujú dva vrcholy $v, v' \in V(H)$, ktoré spĺňajú predchádzajúcu podmienku a pre ktoré platí, že tvoria hranu v H. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že počet vrcholov, ktoré sa cez φ zobrazujú na v je väčší, ako počet vrcholov zobrazujúcich sa na v'. Z vlastnosti nakrývajúceho zobrazenia však vieme, že pre každý vrchol $w \in \varphi^{-1}(v)$ existuje vrchol $w' \in \varphi^{-1}(v')$, pre ktorý platí, že ww' tvorí hranu v G. Nakoľko oba grafy sú jednoduché, tak neexistujú dva vrcholy patriace $\varphi^{-1}(v)$ také, že by boli spojené s jedným vrcholom z $\varphi^{-1}(v')$. To znamená, že $|\varphi^{-1}(v)| = |\varphi^{-1}(v')|$, čo je spor s predpokladom. Ostáva ukázať, že $|V(G)| = k \cdot |V(H)|$. Toto je zjavné pretože ku každému vrcholu existuje rovnaký počet vrcholov, ktoré sa zobrazia na neho. Zjavne teda také k existuje.

Veta 3.1.2. *Nech G a H sú grafy a $\varphi : G \to H$ je nakrývajúce zobrazenie, H je súvislý, tak ak H má SCDC, tak aj G má SCDC.*

Dôkaz 3.1.4. Chceme ukázať, že existuje súbor cyklov v grafe G taký, že každá hrana grafu G je v danom súbore práve v dvoch cykloch a počet cyklov v súbore je maximálne $|V(G)|-1$. Nech H má SCDC $\mathbf{C}$. Potrebujeme dokázať, že pre ľubovoľný cyklus $C \in \mathbf{C}$ platí, že $\varphi^{-1}(C)$ je graf stupňa 2. Zoberme nejaký vrchol $v \in V(C)$. Nakoľko C má aspoň 3 vrcholy, tak v má práve dvoch susedov v C. Nech sú to vrcholy v' a v''. Potom $v'v \in E(C)$ a $vv'' \in E(C)$. Vďaka vlastnosti nakrývajúceho zobrazenia dostávame, že pre všetky w patriace $\varphi^{-1}(v)$ existujú práve dva vrcholy a to: $w' \in \varphi^{-1}(v')$ a $w'' \in \varphi^{-1}(v'')$ s vlastnosťou, že $w'w, ww'' \in E(G)$. Indukciou cez všetky susedné vrcholy v cykle C dostaneme graf stupňa 2 v G. Súbor cyklov, ktorý je vytvorený, ako $\varphi^{-1}(C)$ pre všetky cykly $C \in \mathbf{C}$ nazveme $\mathbf{C}^{-1}$. Nakoľko každá hrana grafu H je v práve dvoch cykloch súboru $\mathbf{C}$, tak podobným spôsobom, vieme ukázať, že všetky hrany grafu G budú práve v dvoch cykloch súboru $\mathbf{C}^{-1}$. Dokázali sme teda, že $\mathbf{C}^{-1}$ je CDC grafu G. Ostáva ukázať, že daný súbor spĺňa podmienku na to, aby mohol byť SCDC grafu G. Zoberme opäť ľubovoľný vrchol v a pozrime sa na množinu $\varphi^{-1}(v)$. Počet vrcholov tejto množiny je maximálnym počtom cyklov, ktoré vzniknú, ako $\varphi^{-1}(C)$. Z lemy 3.1.2 vieme, že počet vrcholov grafu G, pre ktoré platí, že zobrazenie φ ich premietne na ten istý vrchol v' grafu H je rovnaký pre všetky vrcholy $v \in V(H)$. Nech teda počet vrcholov grafu G je $k \cdot |V(H)|$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}^{+}$. To znamená, že počet cyklov je maximálne $k \cdot |\mathbf{C}|$, čo je menej, ako $k \cdot |V(H)|$.

Lemma 3.1.3. *Nech G a H sú grafy a $\varphi : G \to H$ je nakrývajúce zobrazenie, potom ak H sa skladá z n komponentov súvislosti $H_0, H_1, \ldots, H_{n-1}$, tak pre ľubovoľné dva grafy z množiny $\varphi^{-1}(H_0), \varphi^{-1}(H_1), \ldots, \varphi^{-1}(H_{n-1})$ platí, že medzi nimi neexistuje hrana, ktorá by patrila grafu G.*

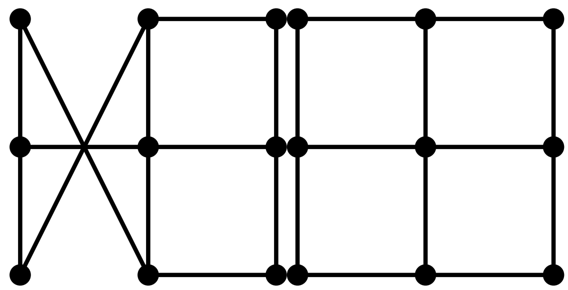
Dôkaz 3.1.5. Sporom. Ak by taká hrana existovala, musela by z vlastnosti nakrývajúceho zobrazenia existovať aj medzi danými komponentmi v grafe H, čo je spor s predpokladom, že sú to komponenty súvislosti.

Veta 3.1.3. *Nech G a H sú grafy a $\varphi : G \to H$ je nakrývajúce zobrazenie, tak ak H má SCDC, tak aj G má SCDC.*

Dôkaz 3.1.6. Všimnime si, že nevyžadujeme, aby H bol súvislý. Z vlastností vety 3.1.2 a lemy 3.1.3 vyplýva, že ak nájdeme SCDC pre všetky komponenty súvislosti grafu H v grafe G, tak zjednotenie týchto súborov cyklov bude tiež súbor cyklov s vlastnosťou pokrytia všetkých hrán práve dva krát a s vlastnosťou, že počet cyklov je menší, ako počet vrcholov grafu G.

Definícia 3.1.3. (šikmý súčin) Graf $G \square^{\alpha} H$ nazývame šikmý súčin grafov G a H, ak platí, že $V(G \square^{\alpha} H) = V(G) \times V(H)$ a $\alpha : D(G) \to Aut(H)$, tak, že $\alpha_{z^{-1}} = (\alpha_z)^{-1}$, pričom platí, že $E(G \square^{\alpha} H) = \{(v, v')(w, w') \,|\, v = w$ a zároveň $v'w' \in E(H)$, alebo $vw \in E(G)$ a zároveň $w' = \alpha_{vw} v'\}$.

Poznámka 3.1.1. Pripomeňme, že $D(G)$ je množina šípov grafu G. Všimnime si poznámku 2.2.1 pri definícii karteziánskeho súčinu. Pravý graf grafu $G \square^{\alpha} H$ ostáva rovnaký, ako v prípade karteziánskeho súčinu. Ľavý graf sa zmení tak, že platí $E(l(G \square^{\alpha} H)) = \{(v, v')(w, w') \,|\, vw \in E(G)$ a zároveň $w' = \alpha_{vw} v'\}$



Obr. 3.3: Ilustrácia rozdielov medzi šikmým súčinom a karteziánskym súčinom.

Na obrázku 3.3 ilustrujeme rozdiel medzi šikmým a karteziánskym súčinom grafov dvojice grafov P_3. Všimnime si, že jediný automorfizmus grafu P_3 rozdielný od identity je výmena dvoch koncových vrcholov.

Všimnime si, že ak zvolíme pre všetky $vw \in E$, $\alpha_{vw} = ID$, tak dostávame karteziánsky súčin grafov.

Poznámka 3.1.2. Všimnime si podobnosť šikmých súčinov s grafovými nakrytiami. Zoberme graf $G \square^{\alpha} H$. Z konštrukcie 3.1.1 vyplýva, že dvojica $l(G \square^{\alpha} H), G$ je grafové nakrytie, kde nakrývajúce zobrazenie $\varphi : V(G) \times V(H) \to V(G)$ je definované, ako $\varphi(v, v') = v$.

Motivácia skúmania hypotézy SCDC na šikmých súčinoch je v tom, že šikmé súčiny, ako si neskôr ukážeme, zachovávajú niektoré pekné vlastnosti karteziánskych súčinov a pritom rozširujú triedu grafov, na ktorých SCDC hypotézu skúmame. Okrem toho šikmé súčiny grafov sa vyskytujú v prírode bežne, aspoň výrazne častejšie, ako karteziánsky súčin grafov.[PV82]

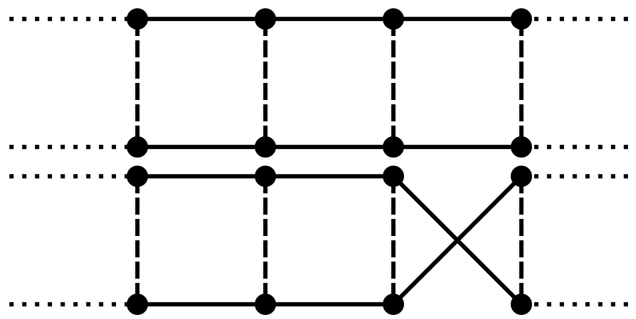
3.1.2 Výsledky

Veta 3.1.4. *$T \square^{\alpha} H \cong T \square H$.[PV82]*

Veta 3.1.5. *Nech H nemá izolované vrcholy a nech má SCDC. Potom ak T je strom, tak $T \square^{\alpha} H$ má SCDC.*

Dôkaz 3.1.7. Vyplýva priamo z viet 3.1.4 a 3.

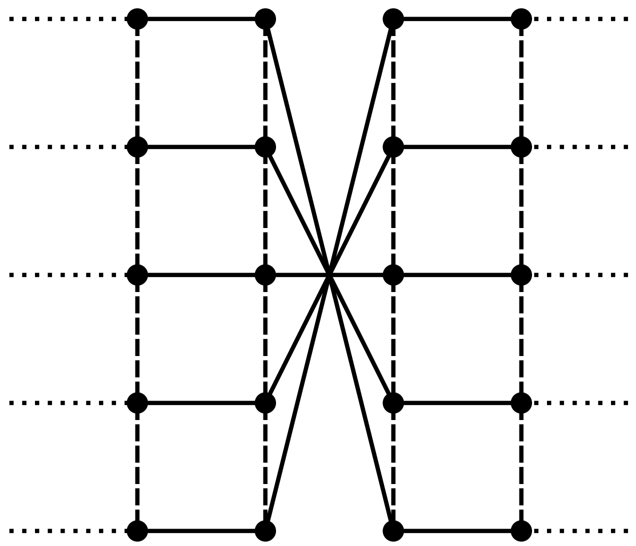
Veta 3.1.6. *Ak G je graf o n vrcholoch bez izolovaných vrcholov, tak $G \square^{\alpha} P_2$ má SCDC o n cykloch. Navyše ak G má SCDC, tak $G \square^{\alpha} P_k, k \geq 3$, má SCDC s najviac $nk - n - k + 2$ cyklami.*



Obr. 3.4: Ilustrácia PPDC na kateziánskom a šikmom súčine

Dôkaz 3.1.8. Využijeme konštrukciu dôkazu (3). Majme graf G. Podľa vety 2.1.1 vieme, že existuje PPDC grafu G, $\mathbf{Q}(G)$, ďalej $\mathbf{Q}$. Nech pre všetky $Q \in \mathbf{Q}$ platí, že Q má koncové vrcholy p a q. V grafe $G \,\square\, P_2$ máme teda dve kópie cesty Q a to Q^0, resp. Q^1 s koncovými vrcholmi p^0, q^0, resp. p^1, q^1. Zjavne $C_Q = Q^0 \cup p^0p^1 \cup Q^1 \cup q^1q^0$ je cyklus cesty Q. Ukážeme, že súbor cyklov $\mathbf{C} = \bigcup_{Q \in \mathbf{Q}} C_Q$ je SCDC grafu $G \,\square\, P_2$. Ako sme už spomenuli, PPDC grafu má takú vlastnosť, že počet ciest tohto súboru ciest je rovný počtu vrcholov daného grafu. Priamočiaro teda dostávame počet cyklov v $\mathbf{C}$ rovný počtu vrcholov grafu G. Ostáva ukázať, že každá hrana grafu $G \,\square\, P_2$ sa nachádza v práve dvoch cykloch z $\mathbf{C}$. Nakoľko každá hrana grafu G sa nachádza v práve dvoch cestách z $\mathbf{Q}$, tak všetky hrany z kópií grafu G sú obsiahnuté v $\mathbf{C}$ práve dva krát. Podobne ak si uvedomíme, že pre všetky vrcholy $p \in V(G)$ platí, že sú práve dva krát koncovými vrcholmi nejakej cesty z $\mathbf{Q}$, tak dostávame, že kópia cesty P_2 pre všetky $p \in V(G)$ je obsiahnutá v $\mathbf{C}$ práve dva krát a to konkrétne v C_{Q_i} a C_{Q_j} ak platí, že p je koncovým vrcholom Q_i a Q_j. Teraz ostáva ukázať, podobnú konštrukciu na grafe $G \,\square^\alpha P_2$. Pozrime sa na nejakú cestu $Q \in \mathbf{Q}$. Táto má koncové vrcholy, ako v prípade karteziánskeho súčinu, p a q. Potom Q^0 a Q^1 sú kópie cesty Q v grafe $G \,\square^\alpha P_2$ a platí, že $p^0, q^0 \in Q^0$, alebo $p^0, q^1 \in Q^0$. Ktorá možnosť z predchádzajúcich nastane vyplýva z toho, pre koľko hrán uv patriacich ceste Q je $\alpha(uv)$ rovné $(1, 0)$, teda $\varphi(u^0) = v^1$ a $\varphi(u^1) = v^0$. Párny počet znamená, že nastane prvá možnosť a nepárny, že nastane druhá. Ak $p^1 \in Q^1$, tak je jasné že Q^0 a Q^1 nemajú spoločný vrchol. Pre ľubovoľnú cestu Q máme teda cyklus $C_Q = Q^0 \cup p^0p^1 \cup Q^1 \cup q^1q^0$ tak, ako v prípade karteziánskeho súčinu, odkiaľ sa to už rovná predchádzajúcemu riešeniu.

Nech G má SCDC. $V(P_k) = \{p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$. Z vlastnosti, že φ je auto-



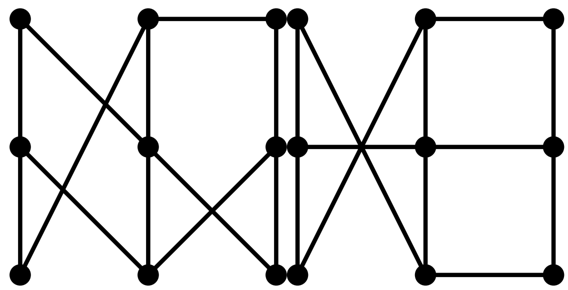
Obr. 3.5: Ilustrácia PPDC na šikmom súčine

morfizmus na P_k vieme, že pre ľubovoľný šíp $d \in D(G)$ platí, že $\alpha(d) = (p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$, alebo $\alpha(d) = (p_{k-1}, p_{k-2}, \ldots, p_0)$. To znamená, že graf $l(G \square^\alpha P_k)$ sa dá rozdeliť na komponenty súvislosti nasledovne: $G^0 \cup G^{k-1}$, $G^1 \cup G^{k-2}$, $G^2 \cup G^{k-3}$, $\ldots$ Zoberme pravý graf grafu $G \square^\alpha H$ ($r(G \square^\alpha H)$). Tento je definovaný, ako v kapitole o karteziánskom súčine grafov. Ak cestu P_k zmrštíme do hrany $p_0 p_{k-1}$ vo všetkých kópiách grafu P_k v $r(G \square^\alpha P_k)$, dostaneme tak nový graf, nazvime ho R. Potom $R \cup G_0 \cup G_{k-1}$ je izomorfný s grafom $G \square^\alpha P_2$. Z toho vieme, že graf $X = r(G \square^\alpha P_k) \cup G_0 \cup G_{k-1}$ má SCDC o n cykloch. Zoberme teraz graf $X' = \bigcup_{i=1}^{k-2} G_i$. Nakoľko $k \geq 3$, tak vieme, že tento graf je neprázdny. Tiež vieme, že X' nemá spoločnú hranu s X a že $X \cup X' = G \square^\alpha P_k$. Z pripomienky 3.1.2 o grafových nakrytiach vieme, že X' je nakrývajúci graf grafu G (podľa grafu $P_k - p_0 - p_{k-1}$). Podľa vety 3.1.3 o malých dvojitých cyklových pokrytiach na grafových nakrytiach vieme, že graf X' má SCDC. (Využili sme, že G má SCDC.) To znamená, že graf G má SCDC o najviac $n + (n-1)(k-2) = nk - n - k + 2$ cykloch.

Hypotéza 3.1.1.

1. *Nech G je súvislý graf s n vrcholmi a nech G má SCDC. Potom pre ľubovoľný strom T platí, že $G \square^\alpha T$ má SCDC.*

2. *Nech G je súvislý graf s n vrcholmi. Potom pre všetky $k \geq 2$, $G \square^\alpha C_{2k}$*



Obr. 3.6: Ilustrácia rozdielov medzi šikmým súčinom a karteziánskym súčinom.

má SCDC s $2n$ *cyklami. Naviac, ak* G *má SCDC, tak* $G\,\square^{\alpha} C_{2k-1}$ *má SCDC s najviac* $3n-1$ *cyklami.*

3.2 Voľný súčin grafov

3.2.1 Súčin grafov, voľnosť, motivácia

Definícia 3.2.1. (voľný súčin) Graf $G\,^{\alpha}\square H$ nazývame voľný súčin grafov G a H, ak platí, že $V(G\,^{\alpha}\square H) = V(G) \times V(H)$ a $\alpha : D(G) \to \varphi(H)$ tak, že $\alpha_{z^{-1}} = (\alpha_z)^{-1}$, pričom platí, že $E(G\,^{\alpha}\square H) = \{(v, v')(w, w') \,|\, v = w \wedge v'w' \in E(H) \vee\ vw \in E(G) \wedge w' = \alpha_{vw}v'\}$. $(\varphi : V(H) \to V(H))$

Všimnime si, že oproti definícii šikmého súčinu sme upustili od automorfizmu na H a zvolili sme si ľubovoľné zobrazenie. Ako uvidíme, rozšíri sa tým trieda skúmaných grafov.

Na obrázku 3.6 ilustrujeme rozdiel medzi šikmým a karteziánskym súčinom grafov dvojice grafov P_3.

Označenie pravého, respektíve ľavého grafu voľného súčinu bude obdobné, ako pripomenke 3.1.1 k definícii šikmého súčinu. Podobne, ako v 3.1.2 aj pre voľný súčin platí, že dvojica $l(G\,^{\alpha}\square H), G$ je grafové nakrytie, kde nakrývajúce zobrazenie $\varphi : V(G) \times V(H) \to V(G)$ je definované, ako $\varphi(v, v') = v$.

V 3.1.2 sme ukazovali podobnosť grafových nakrytí a šikmých súčinov, ale zmienili sme sa, že táto podobnosť bude aj medzi grafovými nakrytiami a voľnými súčinmi. V tejto kapitole túto skutočnosť využijeme v dôkazoch viet.

3.2.2 Výsledky

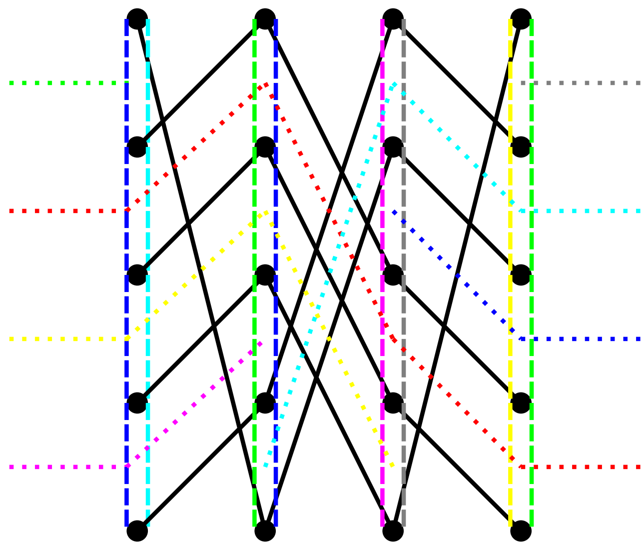
Veta 3.2.1. *$P_m {}^{\alpha}\Box P_n$ má SCDC, $(m, n \geq 2)$, ak pre ľubovoľnú hranu $e \in P_m$ platí $\alpha(e) = [0 + k, 1 + k, \ldots, n - 1 + k]$, (mod n) pre ľubovoľné k.*

Dôkaz 3.2.1. Nech $\mathbf{P}$ je PPDC grafu $P_n = (p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$ také, že $\mathbf{P}$ je zjednotením ciest $\{p_i p_{i+1}\}$, pre $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ a cesty $\{p_0p_1, p_1p_2, \ldots, p_{n-2}p_{n-1}\}$. Ukážeme, že $P_2 {}^{\alpha}\Box P_n$ má SCDC. Zoberme ľubovoľnú cestu z $\mathbf{P}$ na grafe P_n^0. Nech je to cesta $\{p_i p_{i+1}\}$ pre nejaké i. Zjavne pre ľubovoľné k platí, že v $\mathbf{P}$ existuje cesta, ktorá má koncové vrcholy p_{i+k} a p_{i+1+k} (mod n), pretože platí, že tieto vrcholy sú susedné okrem prípadu, keď $i + 1 + k$ (mod n) je rovné 0. Zjavne v oboch prípadoch taká cesta existuje. Naviac, ak sa pozrieme na súbor ciest, ktorý dostaneme rovnakým spôsobom zo všetkých ciest v $\mathbf{P}$ na grafe P_n^0, tak zistíme, že tento súbor ciest je $\mathbf{P}$ na grafe P_n^1. SCDC grafu $P_2 {}^{\alpha}\Box P_n$ bude mať n cyklov, z ktorých každý bude tvorený cestou z $\mathbf{P}$ na grafe P_n^0 a na grafe P_n^1 a dvoma hranami, ktoré spájajú koncové vrcholy týchto ciest.

Zoberme teraz graf $P_m {}^{\alpha}\Box P_n$. Ak zostrojíme súbor cyklov tak, že využijeme predchádzajúcu konštrukciu na všetky susedné kópie grafov P_n, t.j. také, že existuje j, pre ktoré P^j, P^{j+1} sú susedné, tak všetky hrany patriace grafom P_n^i, $i \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$ budú obsiahnuté v práve štyroch cykloch daného súboru cyklov. Dvojité pokrytie hrán grafu P_n^i máme totiž zabezpečené predchádzajúcou konštrukciou z grafov P_n^{i-1} a P_n^{i+1}. Teraz využijeme fakt, že všetky cykly v tomto súbore cyklov sa skladajú dvoch ciest na nejakých kópiách grafu P_m a dvoch ciest na nejakých kópiách grafu P_n. Tieto štyri cesty budeme volať štvrtiny cyklu. Pod operáciou spojenia dvoch susedných cyklov C, C', teda takých, ktoré sú v susedných kópiách grafu P_n a majú spoločnú štvrtinu cyklu, v grafe $P_m {}^{\alpha}\Box P_n$ budeme rozumieť nasledovné: Ak $P \in \mathbf{P}$ patrí grafu P_n^i a platí, že P je štvrtina cyklov C a C', tak zjednotenie C s C' bez P budeme nazývať spojenie cyklov C, C'.

Zjednoťme teda všetky také susedné cykly, ktorých spoločná štvrtina je cesta $\{p_i p_{i+1}\}$ pre všetky $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Zjavne sme dostali malé dvojité cyklové pokrytie, v ktorom je nanajvýš $n(m-1)$ cyklov. Ilustrácia zjednocovania cyklov je na obrázku 3.7, kde bodkované čiary rozlišujú jednotlivé cykly grafu a prerušované čiary označujú ich štvrtiny patriace kópiám grafu P_n.

Veta 3.2.2. *Nech T je strom s aspoň dvoma vrcholmi. $T {}^{\alpha}\Box P_n$ má SCDC,*



Obr. 3.7: Ilustrácia zjednocovania cyklov

ak pre ľubovoľnú hranu $e \in T$ platí $\alpha(e) = [0+k, 1+k, \ldots, n-1+k]$, (mod n) pre ľubovoľné k.

Dôkaz 3.2.2. Rozložíme strom T na systém ciest. Pre každý vrchol v stromu T, pre ktoré platí, že ich stupeň je väčší, ako 2:

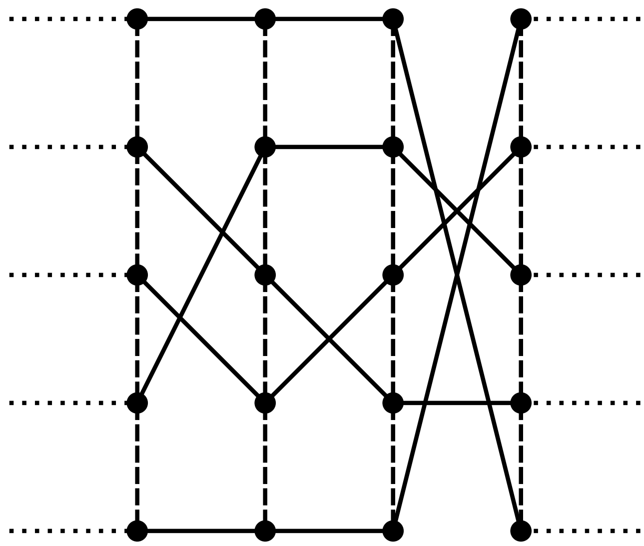
1. stupeň v je nepárny: aspoň jedna cesta v ňom začína. Cykly ostatných ciest zjednotíme po dvoch tak, ako v prípade $P_m\,{}^{\alpha}\square P_n$, navyše však zjednotíme cykly, ktorých spoločná štvrtina je cesta $\{p_0p_1, p_1p_2, \ldots, p_{n-2}p_{n-1}\}$ v danej kópii cesty P_n.

2. stupeň v je párny: okrem dvoch ciest, ktoré v danom vrchole nezjednotíme, všetky ostatné v tomto vrchole zjednotíme.

Veta 3.2.3. *Ak G je graf o n vrcholoch bez izolovaných vrcholov, tak $G\,{}^{\alpha}\square P_2$ má SCDC o n cykloch.*

Dôkaz 3.2.3. Uvedomme si, že voľný súčin je v tomto prípade šikmým súčinom. Všetky možné zobrazenia na P_2 sú totiž automorfizmom na tomto grafe. Viď dôkaz vety 3.1.6.

Permutáciu množiny $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ nazývame *jednoduchá*, ak platí, že je tvaru $[0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, k-1]$, alebo $[k-1, a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, 0]$, kde $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}]$ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \ldots, k-2\}$.



Obr. 3.8: Ilustrácia PPDC na voľnom súčine.

Veta 3.2.4. *Ak G je graf o n vrcholoch bez izolovaných vrcholov. Nech G má SCDC. Ak pre ľubovoľný šíp d grafu G platí, že $\alpha(d)$ je jednoduchá permutácia vrcholov P_k, tak $G\,^{\alpha}\Box P_k, k \geq 3$ má SCDC s najviac $nk - n - k + 2$ cyklami.*

Dôkaz 3.2.4. Uvedomme si podobnosť s vetou 3.1.6. Táto veta je širšia, lebo pojednáva grafy, kde $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}]$ je ľubovoľná permutácia na rozdiel od prípadu, kde sme riešili automorfizmy na grafe $P_k - p_0 - p_{k-1}$, čo možné permutácie obmedzilo na dve a to $[1, 2, \ldots, k-2]$ a $[k-2, k-3, \ldots, 1]$. Nakoľko však prvá časť dôkazu zostáva rovnaká, ako vo vete 3.1.6, lebo prvý a posledný člen permutácie ostáva zachovaný, resp. navzájom vymenený, ostáva ukázať, že $X' = \bigcup_{i=1}^{k-2} G_i$ má SCDC s najviac $nk - 2n - k + 2$. To je však zachované, lebo G má SCDC a graf X' je nakrývajúcim grafom grafu G a teda počet cyklov v CDC grafu X' je najviac $(n-1)(k-2)$.

Hypotéza 3.2.1. *$G\,^{\alpha}\Box T$ má SCDC s nejakými podmienkami.*

$G\,^{\alpha}\Box C$ má SCDC s nejakými podmienkami.

Záver

V tejto práci sme dokázali, že všetky karteziánske súčiny grafov s párnym počtom vrcholov a s vlastnosťou, že majú eulerovské perfektné dvojité pokrytie cestami, majú malé dvojité cyklové pokrytie. Ukázali sme, že ak graf nakrytia grafu G má SCDC, tak G má SCDC. Taktiež, že šikmý súčin ľubovoľného grafu s grafom P_2, resp. P_n s nejakými podmienkami má SCDC. Ďalej sme ukázali, že šikmý súčin stromu s ľubovoľnýgrafom s nejakými podmienkami má SCDC. Pozreli sme sa na voľné súčiny a ukázali sme, že voľný súčin ľubovoľného grafu s grafom P_n s nejakými podmienkami má SCDC. Dokázali sme vety 2.1.2, 2.1.3, 2.3.1, 3.1.1, 3.1.2, s vetami, ktoré sú od nej odvodené, lemy 3.1.1, 3.1.2, vety zo sekcií 3.1.2 a 3.2.2.

Zaujímavým pokračovaním by mohlo byť rozšírenie poznatkov o existencii SCDC na triede zovšeobecnených karteziánskych súčinov grafov. Intuitívne by sa dalo uvažovať o zovšeobecnení niektorých ďalších typov súčinov. Pre porovnanie uvádzame definíciu priameho súčinu grafov.

Definícia 3.2.2. (priamy súčin grafov)

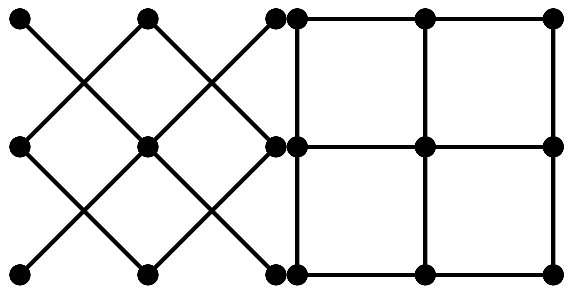
Priamy súčin $G \times H$ grafov G, H je graf s

$$V(G \times H) = \{v_1 v_2 \,|\, v_1 \in V(G), v_2 \in V(H)\}$$

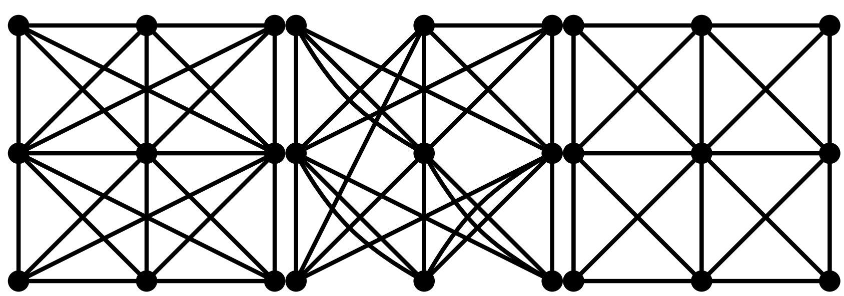
a

$$E(G \times H) = \{(uv, xy) | (u, x) \in E(G) \text{ a } (v, y) \in E(H)\}$$

Inými súčinmi skúmanými napríklad v [NS08] sú lexikografické súčiny. Problémom zovšeobecenných lexikografických súčinov by však bola existencia násobných hrán. Ďalšími možnými súčinmi sú silné súčiny, ktoré sú kombináciou priamych súčinov s karteziánskymi.



Obr. 3.9: Porovnanie priameho a karteziánskeho súčinu.



Obr. 3.10: lexikografický súčin, lexikografický šikmý súčin, silný súčin

Literatúra

[Bon88] A. Bondy. *Small cycle double covers of graphs*. Research report (University of Waterloo. Faculty of Mathematics). Faculty of Mathematics, University of Waterloo, 1988.

[Bon90] J. A. Bondy. Perfect path double covers of graphs. *Journal of Graph Theory*, 14(2):259–272, 1990.

[Cha09] Melody Chan. A survey of the cycle double cover conjecture, 2009.

[FKS02] J.M. Fish, R. Klimmek, and K. Seyffarth. Line graphs of complete multipartite graphs have small cycle double covers. *Discrete Mathematics*, 257(1):39 – 61, 2002.

[Gaz10] Peter Gazdík. Platnosť berge-fulkersonovej hypotézy pre špeciálne triedy snarkov, 2010.

[Gre09] František Grega. Malé cyklové pokrytia grafov, 2009.

[IKR08] Wilfried Imrich, Sandi Klavzar, and Douglas F. Rall. *Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Product*. AK Peters Ltd, 2008.

[Jae85] Francois Jaeger. A survey of the cycle double cover conjecture. In B.R. Alspach and C.D. Godsil, editors, *Annals of Discrete Mathematics 27 - Cycles in Graphs*, volume 115 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 1 – 12. North-Holland, 1985.

[Li90] Hao Li. Perfect path double covers in every simple graph. *Journal of Graph Theory*, 14(6):645–650, 1990.

[MPv88] Bojan Mohar, Tomaž Pisanski, and Martin Škoviera. The maximum genus of graph bundles. *Eur. J. Comb.*, 9:215–224, May 1988.

[NS08] R. J. Nowakowski and K. Seyffarth. Small cycle double covers of products i: Lexicographic product with paths and cycles. *Journal of Graph Theory*, 57(2):99–123, 2008.

[NS09] R. J. Nowakowski and K. Seyffarth. Small cycle double covers of products ii: Categorical and strong products with paths and cycles. *Graph. Comb.*, 25:385–400, August 2009.

[PV82] Tomaž Pisanski and Jože Vrabec. Graph bundles, 1982.

[Sey93] Karen Seyffarth. Small cycle double covers of 4-connected planar graphs. *Combinatorica*, 13:477–482, 1993. 10.1007/BF01303519.

[Sey01] K. Seyffarth. Classes of line graphs with small cycle double covers. *Australasian Journal of Combinatorics*, 24:91–114, 2001.

[SW05] K. Seyffarth and Chengde Wang. On eulerian and regular perfect path double covers of graphs. *Discrete Mathematics*, 293(1-3):237 – 250, 2005. 19th British Combinatorial Conference.