UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
Katedra informatiky

PLATNOSŤ BERGE-FULKERSONOVEJ HYPOTÉZY PRE ŠPECIÁLNE TRIEDY SNARKOV

Peter Gazdík

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

BRATISLAVA 2010

ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 6. 5. 2010 ....

Peter Gazdík

POĎAKOVANIE

Ďakujem prof. RNDr. Martinovi Škovierovi, PhD. za odborné rady a cenné pripomienky, ktoré mi poskytol pri písaní tejto práce.

Abstrakt

Berge-Fulkersonova hypotéza hovorí, že v každom bezmostovom kubickom grafe G existuje šesť 1-faktorov takých, že každá hrana grafu G sa nachádza v práve dvoch z týchto 1-faktorov. Keďže táto podmienka je triviálne splnená pre hranovo 3-zafarbiteľné grafy, zaujímavé je v tejto súvislosti študovať bezmostové kubické grafy s chromatickým indexom štyri, takzvané snarky.

V tejto práci zhrnieme niektoré nedávno publikované poznatky o tejto hypotéze, a ukážeme pomocou týchto poznatkov platnosť hypotézy pre triedy grafov, pre ktoré hypotéza nebola doteraz overená. Ukážeme, že hypotéza platí pre obe triedy zovšeobecnených Blanušových snarkov a triedu zovšeobecnených Szekeresovych snarkov, ako aj pre niektoré triedy snarkov skonštruované pomocou súčinu kubických grafov.

Kľúčové slová: snark, Berge-Fulkersonova hypotéza, súčin kubických grafov

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Z množstva otvorených problémov v teórii grafov priťahujú najväčšiu pozornosť tri z nich: hypotéza o 5-toku, hypotéza o dvojitom cyklovom pokrytí, a Berge-Fulkersonova hypotéza.

Hypotéza o 5-toku, ktorú vyslovil Tutte v roku 1954 [21], tvrdí, že každý bezmostový graf má nikde nulový 5-tok. Hypotéza o dvojitom cyklovom pokrytí, ktorú nezávisle publikovali Seymour [18] a Szekeres [20], hovorí, že v každom bezmostovom grafe G existuje množina kružníc takých, že každá hrana grafu G sa nachádza v práve dvoch z týchto kružníc. Berge-Fulkersonova hypotéza hovorí, že v každom bezmostovom kubickom grafe G existuje šesť 1-faktorov takých, že každá hrana grafu G sa nachádza v práve dvoch z týchto 1-faktorov. Zaujímavé je, že pre dokázanie ktorejkoľvek z týchto hypotéz, stačí ukázať jej platnosť na snarkoch, teda bezmostových kubických grafoch s chromatickým indexom štyri.

Aj keď sa zatiaľ nepodarilo dokázať či vyvrátiť žiadnu z týchto troch hypotéz, pokiaľ ide o prvé dve, existujú v súvislosti s nimi aspoň čiastočné výsledky. Seymour dokázal v [19], že každý bezmostový graf má nikde nulový 6-tok, a z Jaegerovej vety o 4-toku [13] vyplýva, že každý hranovo 4-súvislý graf má dvojité cyklové pokrytie. Pokiaľ ide o Berge-Fulkersonovu hypotézu, nie sú v jej súvislosti známe žiadne "významnejšie" výsledky.

V tejto práci sa budeme zaoberať práve Berge-Fulkersonovou hypotézou. Uvedieme výsledok charakterizujúci platnosť tejto hypotézy pre daný graf [10], a budeme sa zaoberať otázkou, ako táto hypotéza súvisí s Fan-Raspaudovou hypotézou, podľa ktorej existuje v každom bezmostovom kubickom grafe trojica 1-faktorov s prázdnym prienikom [7]. V tejto súvislosti uvedieme na pravú mieru niektoré výsledky publikované Fouquetom a Vanherpom [8], konkrétne zmeníme jednu definíciu, mierne upravíme znenia niektorých tvrdení, a adekvátne týmto zmenám upravíme dôkazy. Ďalej použijeme výsledky publikované v [10] na dokázanie platnosti Berge-Fulkersonovej hypotézy pre triedy zovšeobecnených Blanušovych snarkov a zovšeobecnených Szekeresovych snarkov. Nakoniec sa budeme zaoberať operáciou násobenia kubických grafov, kde ukážeme platnosť hypotézy pre špeciálne triedy grafov, ktoré sú pomocou tejto operácie skonštruované. Špeciálne ukážeme, že súčin grafu spĺňajúceho hypotézu a silne bikritického snarku je opäť graf, ktorý spĺňa hypotézu.

Kapitola 2

Hypotézy

2.1 Berge-Fulkersonova hypotéza

Berge-Fulkersonova hypotéza patrí medzi najznámejšie otvorené problémy v teórii grafov a prvýkrát bola sformulovaná v [9].

Hypotéza 2.1.1 (Berge, Fulkerson). *Každý kubický graf bez mostov má šesť* 1*-faktorov s vlastnosťou, že každá hrana grafu je obsiahnutá v presne dvoch* 1*-faktoroch.*

Ak si uvedomíme, že komplement 1-faktoru v kubickom grafe je 2-faktor, môžeme hypotézu ekvivalentne vyjadriť tak, že každý kubický bezmostový graf obsahuje šesť cyklov s vlastnosťou, že každá hrana grafu je obsiahnutá v presne štyroch cykloch. Bermond, Jackson a Jaeger dokázali v [1], že každý bezmostový kubický graf má sedem cyklov, takých, že každá hrana je pokrytá práve štyrmi cyklami. Okrem toho v [6] Fan dokázal, že každý bezmostový kubický graf má desať cyklov, takých, že každá hrana je pokrytá práve šiestimi cyklami.

Ďalší spôsob, ako vyjadriť túto hypotézu je, že ak v kubickom bezmostovom grafe zdvojíme hrany, je možné takto vzniknutý graf hranovo ofarbiť šiestimi farbami (teda tak, aby bol každý vrchol incidentný s hranami všetkých šiestich farieb).

2.2 Súvisiace hypotézy

Definícia 2.2.1. *Nech r je prirodzené číslo a nech G je graf s párnym počtom vrcholov. G nazveme r-graf, ak každý hranový rez v G, ktorý rozdeľuje vrcholy grafu G do dvoch množín s nepárnym počtom vrcholov, má veľkosť aspoň r.*

Poznamenajme, že kubický graf je 3-graf práve vtedy, keď neobsahuje most. Všimnime si, že ak G je r-regulárny graf, ktorý je hranovo r-zafarbiteľný, potom pre dané farbenie tvorí množina hrán ofarbená jednou farbou 1-faktor. Teda graf G musí mať párny rád, a každý hranový rez, rozdeľujúci vrcholy do dvoch množín s nepárnym počtom vrcholov, musí obsahovať hranu každej farby. Z toho vyplýva, že každý r-regulárny hranovo r-zafarbiteľný graf je r-graf. Dalo by sa povedať, že r-graf je r-regulárny graf, ktorý spĺňa základné nutné podmienky na to, aby bol r-zafarbiteľný. Seymour v [17] definoval r-graf a vyslovil nasledujúcu hypotézu:

Hypotéza 2.2.2 (Zovšeobecnená Berge-Fulkersonova hypotéza (Seymour)). *Nech G je r-graf. Potom v G existuje $2r$ 1-faktorov s vlastnosťou, že každá hrana grafu G je obsiahnutá v presne dvoch 1-faktoroch.*

Všimnime si, že ak pre graf G platí Berge-Fulkersonova hypotéza, potom ak zo šiestich 1-faktorov, ktoré ho dvakrát pokrývajú, jeden odoberieme, dostávame päť 1-faktorov, ktorých zjednotenie pokrýva graf G. Nasledujúca hypotéza, ktorú vyslovil Berge, a ktorá predstavuje "zjednodušenie" Berge-Fulkersonovej hypotézy, ostáva tiež stále otvorená.

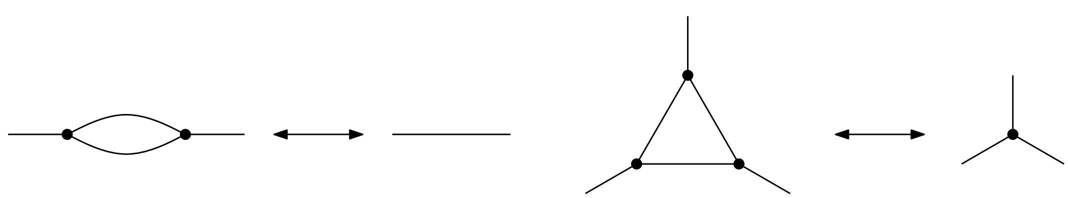
Hypotéza 2.2.3 (Berge). *Každý kubický graf bez mostov sa dá pokryť piatimi 1-faktormi.*

Poznamenajme, že hodnotu päť v hypotéze 2.2.3 nie je možné znížiť, keďže Petersenov graf sa nedá pokryť menej ako piatimi 1-faktormi. Zaujímavé je, že aj keby sme číslo päť zo znenia tejto hypotézy nahradili akýmkoľvek väčším prirodzeným, nie je známy žiadny výsledok o platnosti takéhoto tvrdenia.

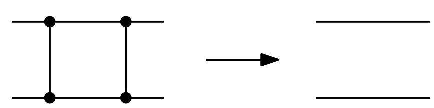
2.3 Snarky

Ľahko vidieť, že Berge-Fulkersonova hypotéza platí pre všetky kubické grafy, ktoré sú hranovo 3-zafarbiteľné. Zaujímavé je teda zaoberať sa kubickými grafmi s chromatickým indexom 4, ktoré sa nazývajú snarky. Pri bližšom pohľade však zistíme, že niektoré snarky sa dajú skonštruovať triviálnym spôsobom z iných snarkov, preto sa budeme zaoberať len "základnými" snarkami.

Zoberme si napríklad kubický graf G, ktorý obsahuje kružnicu dĺžky tri. Nech G' je graf, ktorý dostaneme z G nahradením tejto kružnice jediným vrcholom. Je zrejmé, že oba grafy majú rovnaký chromatický index. Zároveň platí, že ak pre graf G' platí Berge-Fulkersonova hypotéza, musí nutne platiť aj pre graf G. Rovnaké úvahy platia pre prípad dvojice vrcholov s dvomi hranami medzi sebou, a ich nahradenie jedinou hranou. V prípade, že snark obsahuje kružnicu dĺžky štyri, môžeme ju nahradiť dvojicou hrán a výsledný graf bude znova snark. Budeme sa teda zaoberať výhradne grafmi, ktorých obvod je aspoň päť.



Obrázok 2.1: Nahradenie kružnice dĺžky 2 a 3



Obrázok 2.2: Nahradenie kružnice dĺžky 4

Ďalšia vlastnosť grafu, ktorá nás pri štúdiu chromatického indexu kubických grafov zaujíma, je cyklická hranová súvislosť. Okamžite vylúčime grafy, ktoré obsahujú most. Obvykle sa tieto grafy pri úvahách o snarkoch vynechávajú z toho dôvodu, že sa dá jednoducho ukázať, že žiadne z nich nie sú hranovo 3-zafarbiteľné. V prípade Berge-Fulkersonovej hypotézy však samotné znenie hovorí o bezmostových grafoch, keďže ak graf obsahuje most, musí sa tento most nachádzať v každom z jeho 1-faktorov, teda pre žiadny takýto graf hypotéza neplatí. Nebudeme sa však ani zaoberať grafmi, ktorých cyklická hranová súvislosť je dva alebo tri. Dá sa totiž jednoducho ukázať, že ak máme graf z tejto kategórie, pre ktorý hypotéza neplatí, potom z neho vieme dostať menší graf, pre ktorý hypotéza tiež neplatí. Budeme teda používať štandardnú definíciu netriviálnych snarkov ako kubických grafov s chromatickým indexom 4, ktoré sú cyklicky hranovo 4-súvislé a majú obvod aspoň päť.

2.4 Lema o Berge-Fulkersonovej hypotéze

Definícia 2.4.1. *Nech G je graf. Potom $2G$ je graf, ktorý dostaneme z grafu G tak, že každú hranu pôvodného grafu zdvojíme, čím medzi každými dvomi vrcholmi grafu $2G$ dostaneme dvakrát toľko hrán, ako to bolo v grafe G.*

Definícia 2.4.2. *BF-zafarbenie kubického grafu G je zobrazenie:*

$$c : E(2G) \;\rightarrow\; \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2\}$$

ktoré každej šestici hrán z $2G$ incidentných s tým istým vrcholom priradí rôzne farby. Hovoríme, že kubický graf G je BF-zafarbiteľný, ak má nejaké BF-zafarbenie.

Definícia 2.4.3. *Nech G je graf. Potom $\overline{G}$ je graf, ktorý dostaneme z G vyhladením všetkých vrcholov stupňa dva.*

Poznámka Ak G je graf, ktorý obsahuje 2-regulárne komponenty, potom v grafe $\overline{G}$ dostávame takzvané bezvrcholové slučky. My budeme operáciu vyhladenia používať výhradne na grafy, ktorých vrcholy majú stupne dva alebo tri, a teda $\overline{G}$ bude v našom prípade vždy kubický graf, ktorý ale môže obsahovať niekoľko bezvrcholových slučiek. Tieto však nemusíme brať do úvahy, keďže sa budeme zaoberať problémom zafarbenia takéhoto grafu tromi farbami, teda otázkou, či všetky hrany incidentné s daným vrcholom majú rôznu farbu.

Nasledujúce tvrdenie bolo spolu s dôkazom publikované v článku [10].

Lema 2.4.4. *Nech G je kubický graf. Potom G je BF-zafarbiteľný vtedy a len vtedy, keď v grafe G existujú dve hranovo disjunktné párenia M_1 a M_2 také, že $M_1 \cup M_2$ tvorí cyklus v G a zároveň $\overline{G \setminus M_i}$ je hranovo 3-zafarbiteľný pre $i \in \{1, 2\}$.*

Dôkaz. "$\Rightarrow$": Nech G je BF-zafarbiteľný. Ak G je zároveň hranovo 3-zafarbiteľný, potom položme $M_1 = M_2 = \emptyset$.

Nech G nie je hranovo 3-zafarbiteľný a nech $c : E(2G) \to \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2\}$ je jeho BF-zafarbenie. Pre $i \in \{1, 2\}$ označme $F_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ a nech G_i je podgraf grafu $2G$ indukovaný hranami, ktoré sú ofarbené farbou z F_i. Je zrejmé, že G_i má násobné hrany, lebo inak by bol izomorfný s grafom G, ktorý by tým pádom musel byť hranovo 3-zafarbiteľný.

Nech M_i je množina tých hrán z G, ktorých obe im zodpovedajúce hrany v $2G$ majú farbu z F_i. Všimnime si, že ak je vrchol $v \in G$ incidentný s hranou z množiny M_i, potom musí byť incidentný aj s hranou z množiny M_j, kde $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Zároveň platí, že žiadne dve hrany patriace do M_i nie sú incidentné s tým istým vrcholom. Z toho vyplýva, že M_1 aj M_2 sú párenia v grafe G a zároveň $M_1 \cup M_2$ tvorí cyklus v grafe G.

Zostáva ukázať, že $\overline{G \setminus M_i}$ je hranovo 3-zafarbiteľný. Stačí ukázať, že graf $G \setminus M_i$ vieme zafarbiť tak, že pri každom vrchole stupňa tri sú všetky farby rôzne a pri každom vrchole stupňa dva sú obe farby rovnaké. Nech $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Treba si uvedomiť, že $G \setminus M_i$ vieme dostať z grafu G_j tak, že dvojice paralelných hrán v G_j nahradíme jednou hranou. Ak táto dvojica hrán mala v G_j farby x_j, y_j, dáme zodpovedajúcej hrane v $G \setminus M_i$ farbu z_j, kde $\{x_j, y_j, z_j\} = \{a_j, b_j, c_j\}$. Takto dostaneme hľadané zafarbenie grafu $G \setminus M_i$ tromi farbami.

"$\Leftarrow$": Nech teraz v grafe G existujú párenia M_1, M_2 s požadovanými vlastnosťami. Nech $\overline{G \setminus M_i}$ je ofarbený farbami $\{a_i, b_i, c_i\}$ pre $i \in \{1, 2\}$. Z tohto ofarbenia získame zafarbenie grafu $G \setminus M_i$, ktoré obe hrany incidentné s vrcholom stupňa dva zafarbí rovnakou farbou, a hrany pri vrchole stupňa tri zafarbí rôznymi farbami.

Zafarbenie grafu $2G$ šiestimi farbami získame nasledovne. Nech e_1, e_2 sú paralelné hrany medzi vrcholmi u a v v grafe $2G$.

Ak existuje hrana medzi vrcholmi u a v v grafe $G \setminus M_1$ a aj v grafe $G \setminus M_2$, potom e_i dostane takú farbu, akú má hrana uv v grafe $G \setminus M_i$.

Ak hrana medzi vrcholmi u a v existuje iba v jednom z grafov $G \setminus M_i$, a jej farba je v tomto grafe x_i, potom e_1 dostane farbu y_i a e_2 dostane farbu z_i, kde $\{x_i, y_i, z_i\} = \{a_i, b_i, c_i\}$. $\square$

Poznámka Autori v článku [10] pomocou tohto tvrdenia dokázali, že Goldbergove snarky a Isaacsove snarky sú BF-zafarbiteľné. My v ďalších kapitolách tejto práce pomocou tohto tvrdenia ukážeme platnosť hypotézy pre niektoré ďalšie triedy snarkov.

2.5 Fan-Raspaudova hypotéza

Hypotéza 2.5.1. *Existuje prirodzené číslo k také, že každý bezmostový kubický graf má k 1-faktorov s prázdnym prienikom.*

Pre $k = 3$ je táto hypotéza známa ako Fan-Raspaudova hypotéza.

Hypotéza 2.5.2 (Fan, Raspaud). *Každý bezmostový kubický graf má 1-faktory M_1, M_2, M_3, pre ktoré platí:*

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$$

Poznámka Všimnime si, že ak by platila Berge-Fulkersonova hypotéza, potom musí platiť aj Fan-Raspaudova hypotéza. Stačilo by ako požadované tri 1-faktory zobrať ľubovoľnú trojicu 1-faktorov zo šiestich, ktoré spĺňajú Berge-Fulkersonovu hypotézu.

2.6 FR-trojice a ich vzťah k Berge-Fulkersonovej hypotéze

Nasledujúca sekcia predstavuje zhrnutie druhej časti článku [8]. Niektoré tvrdenia a dôkazy však uvádzame v pozmenenej podobe. V prípade, že nebude uvedené ináč, jedná sa o prevzatie pôvodného textu.

Nech G je kubický graf, ktorý má tri 1-faktory M_1, M_2 a M_3, ktoré spĺňajú Fan-Raspaudovu hypotézu. Hovoríme, že trojica $T = \{M_1, M_2, M_3\}$ je FR-trojicou. Označme $T_i \subset E(G)$ pre $i \in \{0, 1, 2\}$ ako množinu hrán grafu G, ktoré sú FR-trojicou T pokryté práve i-krát.

Lema 2.6.1. *Nech T je FR-trojica v kubickom grafe G. Potom T_0 a T_2 sú disjunktné párenia a $T_0 \cup T_2$ tvorí kružnice párnej dĺžky.*

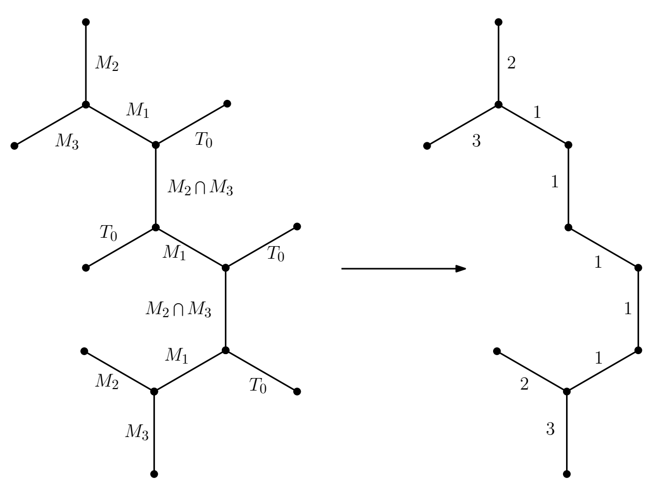
Dôkaz. Nech v je vrchol incidentný s hranou z T_0. Keďže T tvoria tri 1-faktory, musí jedna zo zvyšných dvoch hrán pri tomto vrchole patriť do T_2 a druhá do T_1. Podobne, ak by sme uvažovali vrchol incidentný s hranou z T_2, vieme, že zvyšné dve hrany patria jedna do T_0 a druhá do T_1. Teda hrany z T_0, resp. T_2 tvoria párenia, keďže každý vrchol je incidentný len s jednou hranou z danej množiny. A keďže ak má vrchol hranu z jednej z týchto množín, musí mať aj hranu z druhej z množín, tvorí zjednotenie týchto dvoch množín kružnice párnej dĺžky. □

Nasledujúce dve tvrdenia, a teda aj ich dôkazy, boli oproti pôvodnému článku zmenené.

Lema 2.6.2. *Ak v bezmostovom kubickom grafe G existuje FR-trojica T, potom $\overline{G \setminus T_0}$ je hranovo 3-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Uvažujme, podobne ako pri predošlých dôkazoch, graf $G \setminus T_0$ a hľadajme také jeho ofarbenie tromi farbami, že všetky hrany incidentné s daným vrcholom stupňa tri majú rôzne farby a obe hrany incidentné s vrcholom stupňa dva majú rovnaké farby.

Definujme farbenie $c : E(G \setminus T_0) \to \{1, 2, 3\}$ nasledovne: $c(e) = i$, za predpokladu, že $e \in T_1$ a zároveň $e \in M_i$, alebo $e \in T_2$ a zároveň $e \in M_j \cap M_k$, kde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Situáciu popisuje nasledujúci obrázok:



Obrázok 2.3: Farbenie grafu $G \setminus T_0$

Je zrejmé, že toto zobrazenie, je definované korektne, keďže každý vrchol grafu $G \setminus T_0$ patrí buď do T_1, alebo T_2. Ak vrchol v má v tomto grafe stupeň tri, potom každá z hrán s ním incidentná patrí do T_1, a teda každá do inej z množín M_1, M_2, M_3, a preto dostane každá inú farbu. Ak má vrchol v v tomto grafe stupeň dva, tak jedna z jeho hrán musí patriť do T_1, označme ju e, a druhá do T_2. Nech e patrí do M_i, potom obe hrany incidentné s vrcholom v dostanú farbu i. □

Lema 2.6.3. *Nech A_1, A_2 sú párenia v kubickom grafe G také, že $A_1 \cup A_2$ tvorí zjednotenie kružníc párnej dĺžky a graf $\overline{G \setminus A_1}$ je hranovo 3-zafarbiteľný. Potom G má FR-trojicu T takú, že $T_0 = A_1$ a $T_2 = A_2$.*

Dôkaz. Myšlienka dôkazu spočíva v tom, že máme tri rôzne 1-faktory grafu $\overline{G \setminus A_1}$ (keďže je tento graf hranovo 3-zafarbiteľný), a pre každý z týchto 1-faktorov vieme nájsť zodpovedajúci 1-faktor grafu $G \setminus A_1$, ktorý je zároveň 1-faktor grafu G. Pozrime sa bližšie práve na graf $G \setminus A_1$.

Keďže A_1 je párenie v grafe G, má graf $G \setminus A_1$ vrcholy stupňa dva alebo tri. A keďže $\overline{G \setminus A_1}$ je hranovo 3-zafarbiteľný, dá sa graf $G \setminus A_1$ ofarbiť tak, že pri vrcholoch stupňa tri majú všetky hrany rôznu farbu a pri vrcholoch stupňa dva obe hrany rovnakú farbu. Nech $c : E(G \setminus A_1) \to \{1, 2, 3\}$ je niektoré z farbení s touto vlastnosťou.

Ďalej je dôležité si uvedomiť, že vrcholy v tomto grafe, ktoré sú incidentné s hranou z množiny A_2, sú práve vrcholy, ktoré majú stupeň 2.

Tri 1-faktory grafu $G \setminus A_1$ vyberieme nasledovne. Ak e je hrana patriaca do A_2, potom ak $c(e) = i$, tak hranu e dáme do párení M_j a M_k, kde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Ak hrana e nepatrí do A_2, potom ak $c(e) = i$, tak hranu e dáme do M_i. (Ide o obrátenie postupu zobrazeného na obrázku 2.3.)

Ukážme najprv, že každá z množín M_i pre $i \in \{1, 2, 3\}$ je 1-faktor. Ak v je vrchol stupňa tri, znamená to, že žiadna z hrán s ním incidentná nepatrí do A_2. Keďže každá z hrán pri tomto vrchole dostane vo farbení c inú farbu, patrí každá z hrán pri tomto vrchole do inej z množín M_1, M_2, M_3, a teda je tento vrchol každou množinou pokrytý. Nech vrchol v má stupeň dva, a nech hrany s ním incidentné sú e_1 a e_2, pričom nech bez ujmy na všeobecnosti $e_1 \in A_2$. Nech ďalej $c(e_1) = c(e_2) = i$. Potom $e_1 \in M_j$ a zároveň $e_1 \in M_k$ a $e_2 \in M_i$, kde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Teda opäť vidíme, že vrchol v je pokrytý každou z množín M_1, M_2, M_3. V oboch prípadoch je evidentné, že žiadny vrchol nemôže byť pokrytý viac ako raz, teda každá z troch definovaných množín tvorí v grafe $G \setminus A_1$ 1-faktor.

Rovnako tak je zrejmé, že žiadna z hrán z A_1 sa nenachádza v žiadnom 1-faktore, a že každá z hrán z A_2 sa nachádza v dvoch rôznych 1-faktoroch, čím je dôkaz ukončený. □

Dôsledok 2.6.4. *Ak G je bezmostový kubický graf, potom G má FR-trojicu práve vtedy, keď v G existujú dve párenia A_1, A_2, také, že ich zjednotenie tvorí kružnice párnej dĺžky, a zároveň $\overline{G \setminus A_1}$ alebo $\overline{G \setminus A_1}$ je hranovo 3-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Ak G má FR-trojicu, potom existencia dvoch párení s požadovanými vlastnosťami vyplýva z tvrdenia 2.6.1 a tvrdenia 2.6.2. Opačne, ak G má dve párenia s požadovanými vlastnosťami, potom existencia FR-trojice vyplýva z tvrdenia 2.6.3. □

Definícia 2.6.5. *FR-trojice T a T' nazývame kompatibilné, ak $T_0 = T'_2$ a $T_2 = T'_0$*

Nasledujúce dve tvrdenia sú uvedené s iným dôkazom než v pôvodnom článku. Autori v pôvodnom článku totiž volili také poradie tvrdení, ktoré vedie k dokázaniu tvrdenia 2.4.4. My však uvádzame tieto tvrdenia, aby sme ukázali súvislosti medzi dvoma otvorenými hypotézami.

Lema 2.6.6. *V kubickom grafe G existujú dve kompatibilné FR-trojice práve vtedy, keď v G existujú dva 1-faktory M_1 a M_2 také, že $M_1 \cup M_2$ tvorí v G kružnice párnej dĺžky a zároveň $\overline{G \setminus M_i}$ je hranovo 3-zafarbiteľný pre $i \in \{1, 2\}$.*

Dôkaz. "⇒:" Nech v G existujú dve kompatibilné FR-trojice, ktoré označíme T a T'. Potom podľa tvrdenia 2.6.2 sú grafy $\overline{G \setminus T_0}$ a $\overline{G \setminus T'_0}$ oba hranovo 3-zafarbiteľné. A keďže sú tieto dve trojice kompatibilné, $T'_0 = T_2$. Z tvrdenia 2.6.1 zasa vyplýva, že T_0 a T_2 sú párenia, ktorých zjednotenie tvorí kružnice párnej dĺžky. Teda ak položíme $M_1 = T_0$ a $M_2 = T_2\,(= T'_0)$, dostávame hľadané perfektné párenia.

"⇐": Nech v G existujú párenia M_1 a M_2 s danými vlastnosťami. Potom z tvrdenia 2.6.3 vyplýva, že v G existuje FR-trojica T taká, že $T_2 = M_2$ a $T_0 = M_1$, a zároveň existuje FR-trojica T' taká, že $T'_2 = M_1$ a $T'_0 = M_2$. Že sú obe tieto trojice kompatibilné vyplýva priamo z definície. □

Lema 2.6.7. *Kubický graf G má Fulkersonovo pokrytie práve vtedy, keď G má dve kompatibilné FR-trojice.*

Dôkaz. Dôkaz vyplýva priamo z predchádzajúceho tvrdenia a tvrdenia 2.4.4. $\square$

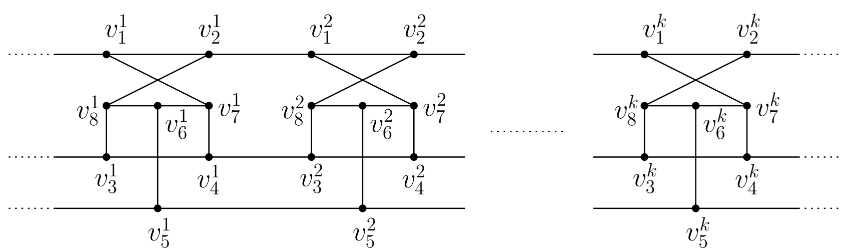
Kapitola 3

Goldbergove a Isaacsove snarky

V tejto kapitole zhrnieme výsledky z článku [10] týkajúce sa BF-zafarbiteľnosti Goldbergovych a Isaacsovych snarkov.

3.1 Goldbergove snarky

Pre nepárne $k \geq 3$ skonštruujeme Goldbergov snark G_k tak, že zoberieme k základných blokov, ktoré pospájame ako na obrázku 3.1.



Obrázok 3.1: Goldbergov snark G_k

3.1.1 Dôkaz o BF-zafarbiteľnosti

Lema 3.1.1. *Trieda Goldbergovych snarkov je BF-zafarbiteľná.*

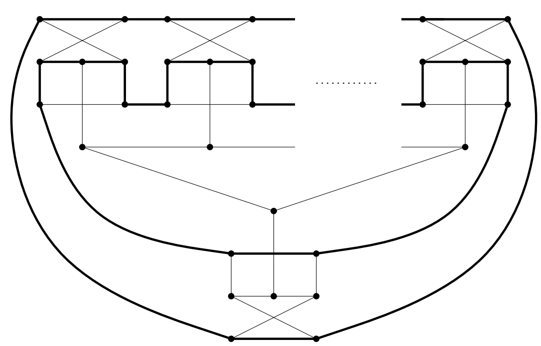
Dôkaz. Nech G_k je Goldbergov snark, ktorý vznikol spojením k blokov. Aby sme ukázali, že graf G_k je BF-zafarbiteľný, stačí podľa tvrdenia 2.4.4, aby sme v ňom našli dve párenia M_1 a M_2, ktorých zjednotenie tvorí kružnice párnej dĺžky, pričom grafy $\overline{G_k \backslash M_1}$ a $\overline{G_k \backslash M_2}$ sú hranovo 3-zafarbiteľné.

Párenia M_1 a M_2 vyberieme ako nasledujúce množiny hrán:

$$M_1 = \{v_2^1 v_1^2, v_2^2 v_1^3, \dots, v_2^k v_1^1,\} \cup \{v_3^1 v_4^1, v_3^2 v_8^2, v_6^2 v_7^2, v_4^2 v_3^3, \dots, v_8^k v_6^k, v_7^k v_4^k\}$$

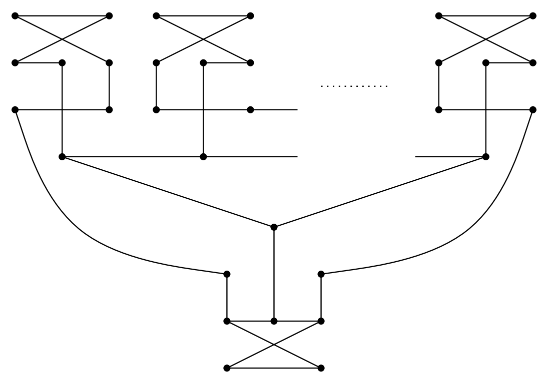
$$M_2 = \{v_1^1 v_2^1, v_1^2 v_2^2, \dots, v_1^k v_2^k,\} \cup \{v_4^1 v_3^2, v_8^2 v_6^2, v_7^2 v_4^2, \dots, v_3^k v_8^k, v_6^k v_7^k, v_4^k v_3^1\}$$

Zdôraznime, že hrany z bloku B_1 vyberáme odlišným spôsobom ako hrany z ostatných blokov.



Obrázok 3.2: $M_1 \cup M_2$

Na záver dôkazu ukážeme, že kubické grafy $\overline{G_k \backslash M_1}$ a $\overline{G_k \backslash M_2}$ sú oba hamiltonovské, teda hranovo 3-zafarbiteľné. Uvažujme najprv graf $\overline{G_k \backslash M_1}$, ktorý vznikne vyhladením vrcholov stupňa dva v grafe zobrazenom na obrázku 3.3.



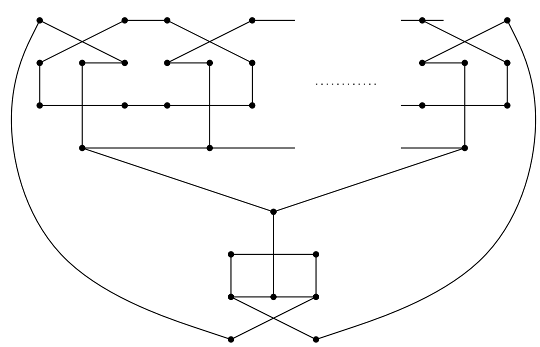
Obrázok 3.3: $G_k \backslash M_1$

Hamiltonovská kružnica grafu $\overline{G_k \backslash M_1}$ je určená nasledujúcou postupnosťou vrcholov:

$$v_5^1 v_6^1 v_8^1 v_7^1 v_5^2 v_2^3 \dots v_5^k$$

.

Pozrime sa teraz na graf $\overline{G_k \backslash M_2}$, ktorý vznikne vyhladením vrcholov stupňa dva v grafe zobrazenom na obrázku 3.4.



Obrázok 3.4: $\overline{G_k \backslash M_1}$

Tento graf pozostáva z $(k-1)/(2)$ bezvrcholových slučiek a jedného komponentu, ktorého hamiltonovskú kružnicu tvorí nasledujúca postupnosť vrcholov:

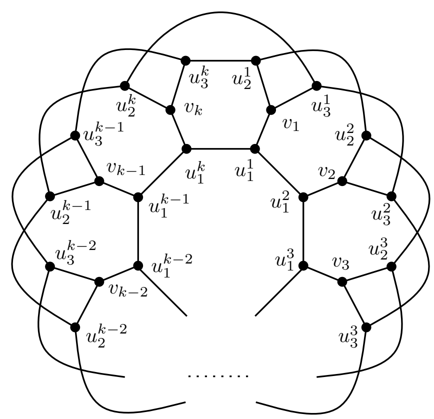
$$v_5^1 v_6^1 v_7^1 v_8^1 v_5^2 v_5^3 \dots v_5^k$$

.

□

3.2 Isaacsove snarky

Pre nepárne $k \geq 3$ skonštruujeme Isaacsov snark I_k pospájaním k blokov ako na obrázku 3.5.



Obrázok 3.5: Isaacsov snark I_k

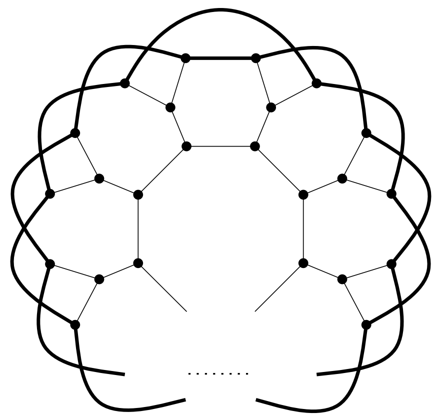
3.2.1 Dôkaz o BF-zafarbiteľnosti

Lema 3.2.1. *Trieda Isaacsovych snarkov je BF-zafarbiteľná.*

Dôkaz. Na dôkaz znovu použijeme lemu 2.4.4. Zoberme si Isaacsov snark I_k, ktorý vznikol spojením k blokov. Ukážeme, že v grafe I_k existujú dve párenia M_1 a M_2, ktorých zjednotenie tvorí kružnicu párnej dĺžky, pričom grafy $\overline{I_k \backslash M_1}$ a $\overline{I_k \backslash M_2}$ sú oba hamiltonovské, a teda hranovo 3-zafarbiteľné.

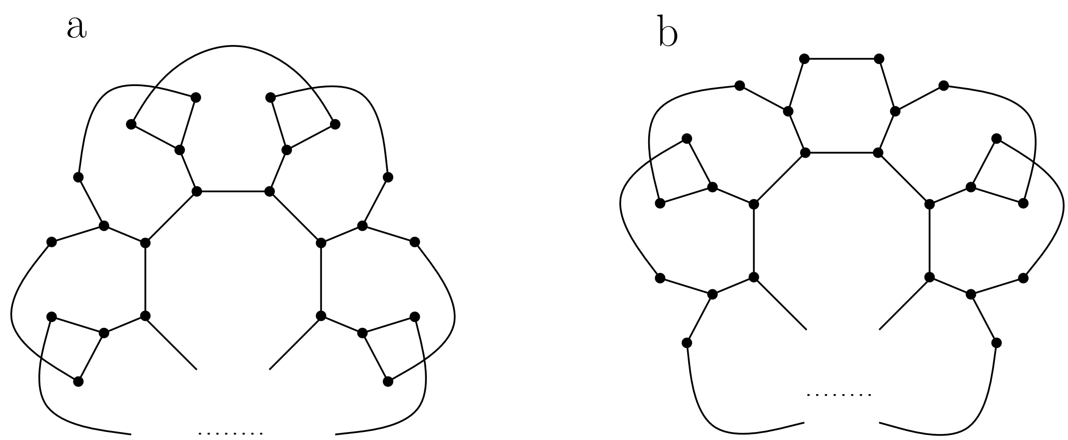
Párenie M_1 (M_2) vyberieme ako každú párnu (nepárnu) hranu nasledujúcej kružnice:

$$C = \{u_2^1 u_2^2 u_2^3 \dots u_2^k u_3^1 u_3^2 u_3^3 \dots u_3^k\}$$



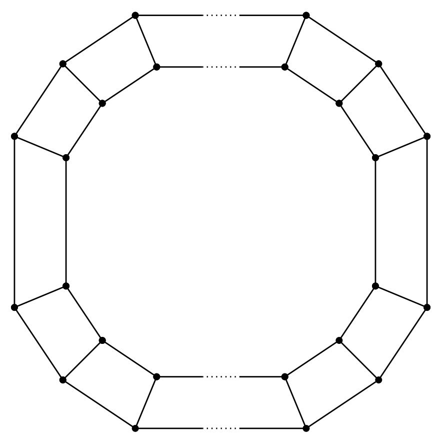
Obrázok 3.6: Kružnica v grafe I_k

Grafy $I_k \backslash M_1$ a $I_k \backslash M_2$ vyzerajú nasledovne:



Obrázok 3.7: (a) $I_k \backslash M_1$; (b) $I_k \backslash M_2$

Z obrázku vidíme, že oba grafy $\overline{I_k \backslash M_1}$ aj $\overline{I_k \backslash M_2}$ sú izomorfné s grafom na obrázku 3.8, ktorý je evidentne hamiltonovský.



Obrázok 3.8: $\overline{I_k \backslash M_i}$

□

Kapitola 4

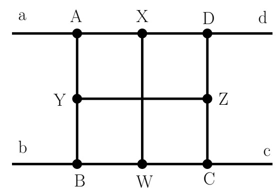
Zovšeobecnené Blanušove snarky

Blanuša v [2] popísal dva snarky, oba na 18-tich vrcholoch. Boli to dva z prvých známych snarkov a nazývajú sa Blanušove snarky. Isaacs ukázal v [12], že sa tieto snarky dajú zostrojiť pomocou súčinu kubických grafov z dvoch Petersenovych grafov. V [22] ukázal Watkins ako možno zostrojiť dve nekonečné triedy snarkov rádu $10 + 8n$, ktoré obsahujú Blanušove snarky. V tejto kapitole popíšeme obe triedy zovšeobecnených Blanušovych snarkov a pomocou tvrdenia 2.4.4 ukážeme platnosť Berge-Fulkersonovej hypotézy pre tieto snarky.

4.1 Popis

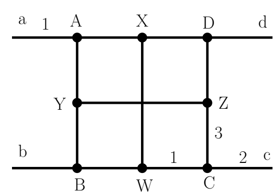
4.1.1 Bloky

Existujú dva typy zovšeobecnených Blanušovych snarkov, oba sú však konštruované podobným spôsobom. Skladajú sa z konkrétnej konfigurácie a reťaze, ktorá vznikne pospájaním n rovnakých blokov za seba (viď obr. 4.1).



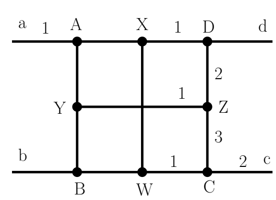
Obrázok 4.1: A-blok

Pre tento blok, budeme ho nazývať A-blok, platí, že ak by sme ho chceli hranovo zafarbiť tromi farbami, museli by sme pre dvojicu hrán a a c (a teda aj pre dvojicu hrán b a d) použiť tú istú farbu. Môžeme sa o tom ľahko presvedčiť sporom. Skúsme ofarbiť tento blok farbami z množiny $1, 2, 3$ tak, aby hrana a dostala farbu 1 a hrana c farbu 2. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že hrana CW má farbu 1 a teda hrana CZ má farbu 3.



Obrázok 4.2: Farbenie A-bloku

Pozrime sa teraz na vrchol X. Niektorá z hrán s ním incidentná musí mať farbu 1, ale nemôže to byť ani AX ani WX, musí to byť teda XS. Toto pozorovanie nám určí farby ďalších hrán, až dostávame:

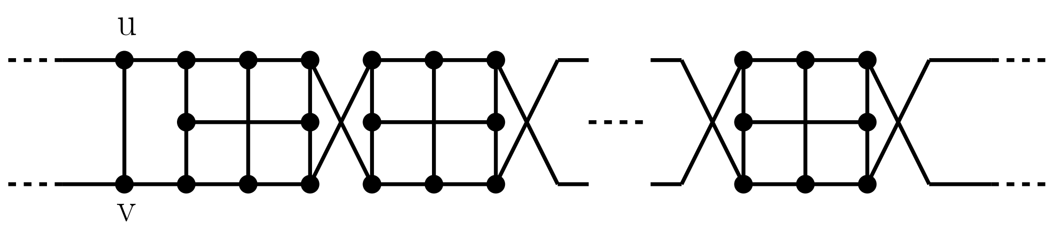


Obrázok 4.3: Farbenie A-bloku

Všimnime si kružnicu A, Y, B, W, X. Keďže je to kružnica nepárnej dĺžky, musí byť každá z troch farieb použitá aspoň na jednu z jej hrán. Ale ako vidíme, žiadna z hrán nemôže dostať farbu 1, keďže už štyri z vrcholov na tejto kružnici sú incidentné s hranou farby 1. Teda sa nám tento blok takýmto spôsobom ofarbiť nepodarí.

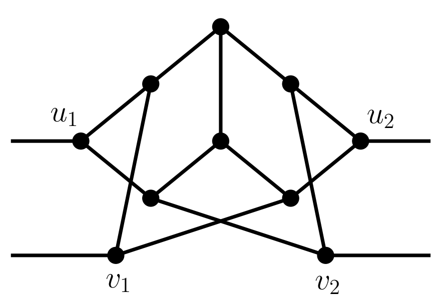
4.1.2 Zovšeobecnené Blanušove snarky typu 1 a 2

Zovšeobecnené Blanušove snarky prvého typu dostaneme tak, že zoberieme dva vrcholy spojené hranou. Označme tieto vrcholy u a v. K týmto vrcholom pripojíme reťaz tvorenú z n A-blokov, pospájaných ako na obrázku 4.4. Vidíme, že výsledný graf musí byť snark, pretože ak by sme chceli reťaz A-blokov hranovo ofarbiť tromi farbami, dostali by sme rovnaké farby pre hrany z vrchola u, ktoré vedú k vrcholom tejto reťaze (rovnako platí aj pre vrchol v).



Obrázok 4.4: Zovšeobecnené Blanušove snarky prvého typu

Zovšeobecnené Blanušove snarky druhého typu dostaneme podobným spôsobom, ale s tým rozdielom, že dvojicu vrcholov u a v nahradíme nasledujúcou konfiguráciou:



Obrázok 4.5:

Aj v tomto prípade dostávame snark, pretože táto konfigurácia ma rovnakú vlastnosť ako dva vrcholy spojené hranou, a síce, že ak ju chceme zafarbiť tromi farbami, musíme pre hrany z vrcholov u_1 a u_2 použiť rôzne farby (rovnako platí pre vrcholy v_1 a v_2). Tento fakt je možné ľahko nahliadnuť, ak si uvedomíme, že spojením polhrán incidentných s vrcholmi u_1 a u_2, a spojením polhrán incidentných s v_1 a v_2, dostaneme Petersenov graf. Ak by teda existovalo farbenie, ktoré zodpovedajúcim polhranám priradí rovnakú farbu, existovalo by aj farbenie Petersenovho grafu.

Poznamenajme, že miesto pôvodnej dvojice vrcholov by sme mohli zobrať ľubovoľnú konfiguráciu, ktorú dostaneme z nejakého snarku rozdelením dvoch hrán. Ak by sme ju pripojili podobným spôsobom ako v predchádzajúcom prípade, mali by sme z rovnakých dôvodov zaručené, že výsledný graf nie je hranovo 3-zafarbiteľný. Táto operácia (nahradenie dvojice susedných vrcholov konfiguráciou získanou z nejakého grafu rozdelením dvoch hrán) sa nazýva súčin kubických grafov a v ďalšej časti práce je jej venovaná samostatná kapitola.

4.2 Dôkaz o BF-zafarbiteľnosti

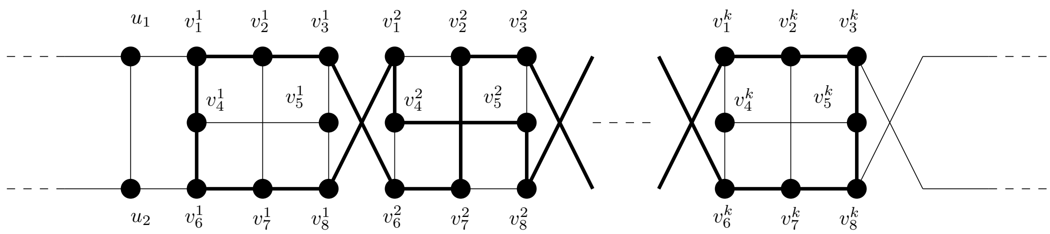
Tvrdenie 4.2.1. *Ak G je zovšeobecnený Blanušov snark (prvého, alebo druhého typu), potom G je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Na dôkaz samozrejme využijeme tvrdenie 2.4.4. Nech G je zovšeobecnený Blanušov snark rádu n. Ukážeme, že v tomto grafe existuje kružnica dĺžky $n-4$ s vlastnosťou, že ak odstránime z grafu každú druhú hranu tejto kružnice (jedným či druhým spôsobom) a následne aplikujeme operáciu vyhladenia, dostaneme graf K_4, ktorý je evidentne hranovo 3-zafarbiteľný.

Nech G je graf prvého typu, a nech obsahuje k A-blokov. Hľadanú kružnicu získame zjednotením nasledujúcich ciest (obrázok 4.6):

- z prvého A-bloku vyberieme cestu: $(v_8^1, v_7^1, v_6^1, v_4^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1)$,
- z posledného (k-teho) A-bloku vyberieme cestu: $(v_1^k, v_2^k, v_3^k, v_5^k, v_8^k, v_7^k, v_6^k)$,
- pre $i \in \{2, ..., k-1\}$ vyberieme z i-teho A-bloku dve cesty: $(v_1^i, v_4^i, v_5^i, v_8^i)$ a $(v_6^i, v_7^i, v_2^i, v_3^i)$,

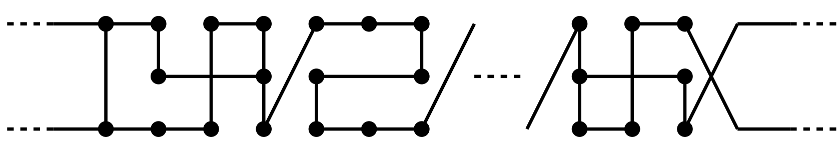
- pre $i \in \{1, ..., k-1\}$ spojíme dva bloky hranami (v_3^i, v_6^{i+1}) a (v_8^i, v_1^{i+1}).



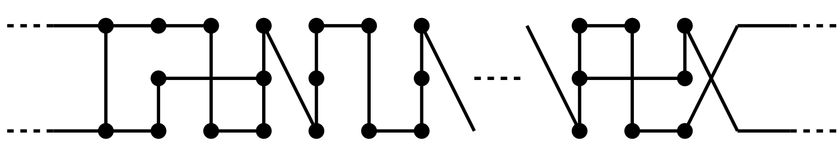
Obrázok 4.6: Kružnica párnej dĺžky predstavujúca $M_1 \cup M_2$

Samozrejme na to, aby sme vybrali takúto kružnicu, musí graf obsahovať aspoň dva bloky. V prípade, že obsahuje iba jeden, ide o Petersenov graf, o ktorom je známe, že je BF-zafarbiteľný, preto tento špeciálny prípad dokazovať nebudeme.

Po odstránení každej druhej hrany z tejto kružnice môžu nastať dva prípady, podľa toho, ktoré párovanie zvolíme:



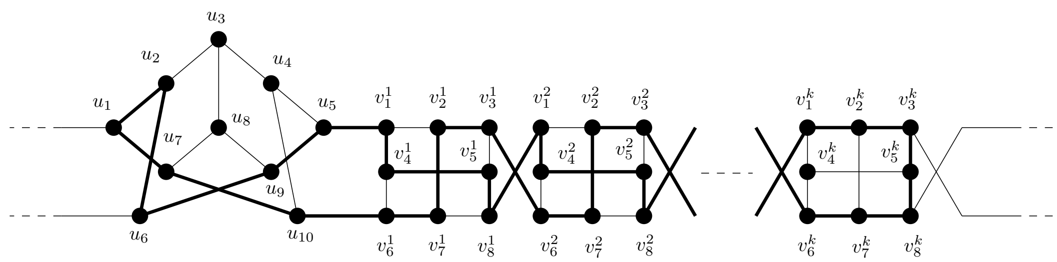
Obrázok 4.7: Odstránenie M_1



Obrázok 4.8: Odstránenie M_2

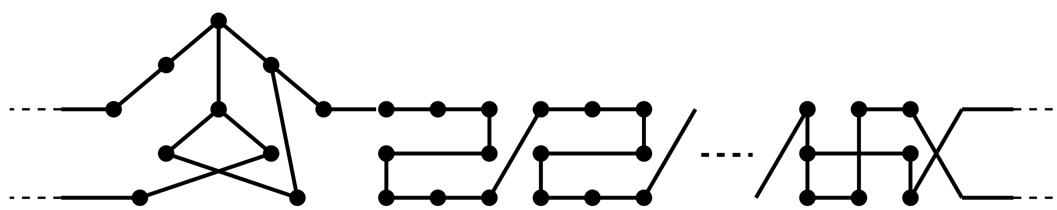
V oboch prípadoch je zrejmé, že po vyhladení hrán dostávame graf K_4.

Pre prípad zovšeobecnených Blanušovych snarkov druhého typu vyberieme kružnicu podobne. Pokiaľ ide o postupnosť A-blokov, rozdiel je len pri výbere hrán v prvom bloku, z ktorého kružnica prechádza na časť grafu, ktorá vznikla nahradením dvojice vrcholov u a v. Situáciu popisuje nasledujúci obrázok:

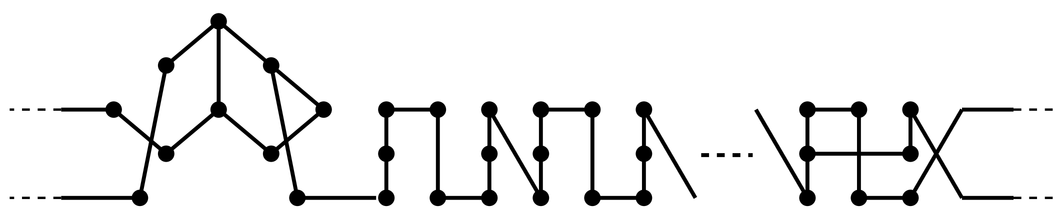


Obrázok 4.9: Kružnica párnej dĺžky predstavujúca $M_1 \cup M_2$

Odstránením niektorého z párovaní dostávame tieto grafy:



Obrázok 4.10: Odstránenie M_1



Obrázok 4.11: Odstránenie M_2

Znova je zrejmé, že po vyhladení hrán dostávame K_4. □

Kapitola 5

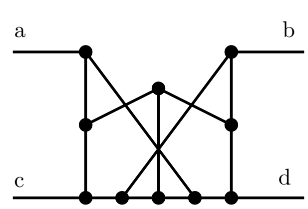
Zovšeobecnené Szekeresove snarky

Szekeresov snark bol objavený v roku 1973 [20]. Má 50 vrcholov a bol to piaty známy snark vôbec. Watkins popísal v [22] nekonečnú triedu snarkov s rádmi $50 + 40n$, ktorá obsahuje Szekeresov snark. V tejto kapitole popíšeme triedu zovšeobecnených Szekeresovych snarkov a ukážeme pre ňu platnosť Berge-Fulkersonovej hypotézy.

5.1 Popis

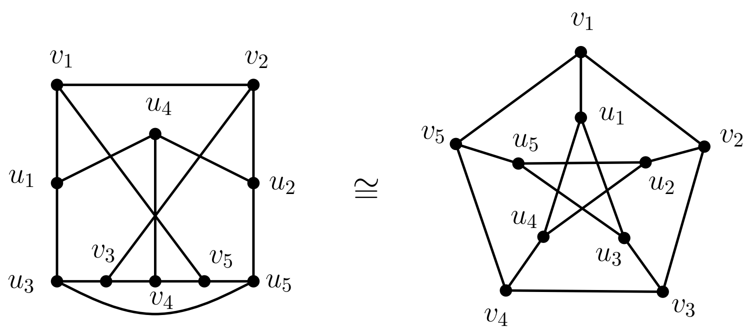
5.1.1 Szekeresov snark

Podobne ako pri zovšeobecnených Blanušovych snarkoch, budeme pre popis triedy snarkov využívať konfigurácie s istými vlastnosťami. Základnými budú nasledujúce bloky:



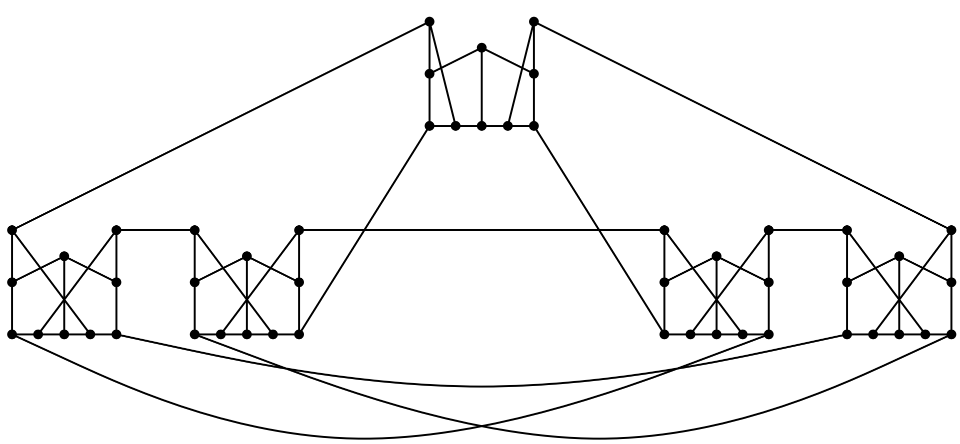
Obrázok 5.1: Petersenov blok

O tejto konfigurácii platí, že ak chceme jej hrany ofarbiť tromi farbami, polhrany a a b musia mať rôznu farbu a zároveň polhrany c a d musia byť ofarbené rôzne. Ide v tomto prípade o rovnakú konfiguráciu, akú sme využili pri Blanušovych snarkoch druhého typu, teda takú, ktorá vznikla z Petersenovho grafu rozdelením dvoch hrán. Ďalej budeme túto konfiguráciu označovať ako Petersenov blok.



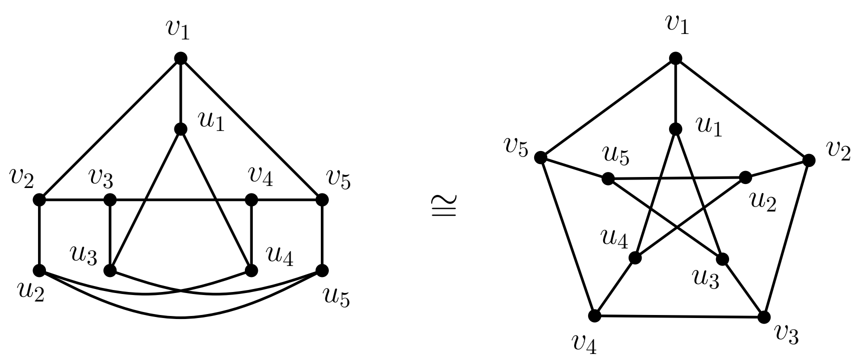
Obrázok 5.2: Petersenov graf

Samotný Szekeresov snark vyzerá nasledovne:



Obrázok 5.3: Szekeresov snark

Ukážme teraz, že tento graf je naozaj snark. Využijeme už spomínaný fakt, že ak v nejakom snarku nahradíme dvojicu spojených vrcholov konfiguráciou, ktorú dostaneme z nejakého snarku rozdelením dvoch hrán, bude výsledný graf znovu snark. V našom prípade si za pôvodný graf zoberieme Petersenov graf a urobíme v ňom takúto výmenu päťkrát:

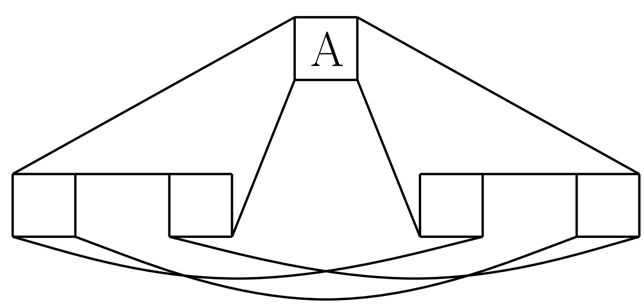


Obrázok 5.4: Petersenov graf

Z obrázku 5.4 je zrejmé, že ak v tomto grafe nahradíme Petersenovym blokom každú z dvojíc vrcholov (u_i, v_i), pre $i \in \{1, ..., 5\}$, dostaneme Szekeresov snark.

5.1.2 Zovšeobecnené Szekeresove snarky

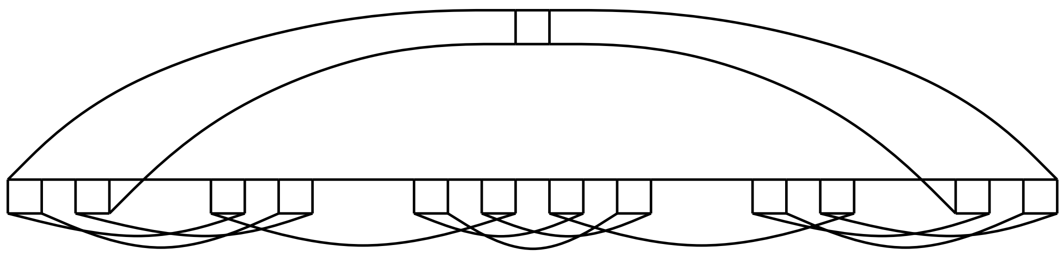
Štruktúra Szekeresovho snarku vyzerá nasledovne:



Obrázok 5.5: Štruktúra Szekeresovho snarku

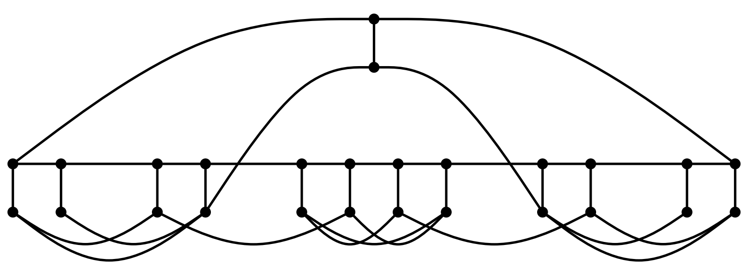
Štvorec so štyrmi polhranami na obrázku reprezentuje Petersenov blok.

Blok označený písmenom A budeme nazývať hlavný blok, všetky ostatné bloky budeme nazývať vedľajšie. Nekonečnú triedu snarkov dostaneme tak, že pridávame štvorice vedľajších blokov, každú tvorenú 40-timi vrcholmi, pričom tieto štvorice spájame nasledujúcim spôsobom:



Obrázok 5.6: Zovšeobecnený Szekeresov snark na 130 vrcholoch

Že v takomto prípade ide o snark ukážeme podobným spôsobom ako v predchádzajúcom prípade. Tentokrát si za základný graf zoberieme zovšeobecnený Blanušov snark prvého typu a v ňom nahradíme dvojice susedných vrcholov Petersenovymi blokmi:

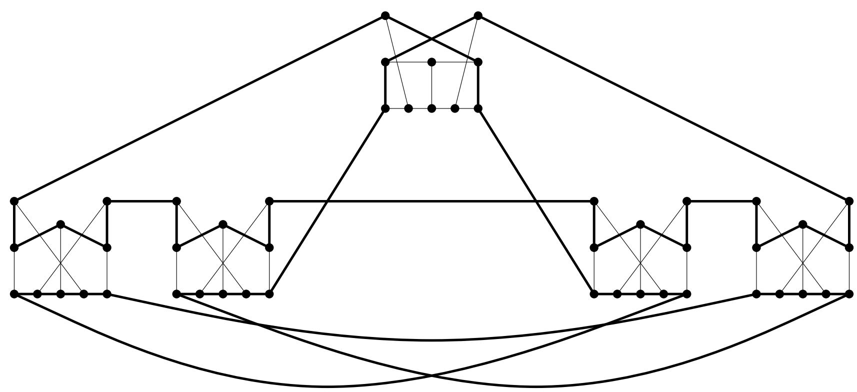


Obrázok 5.7: Zovšeobecnený Blanušov snark na 26 vrcholoch

5.2 Dôkaz o zafarbiteľnosti

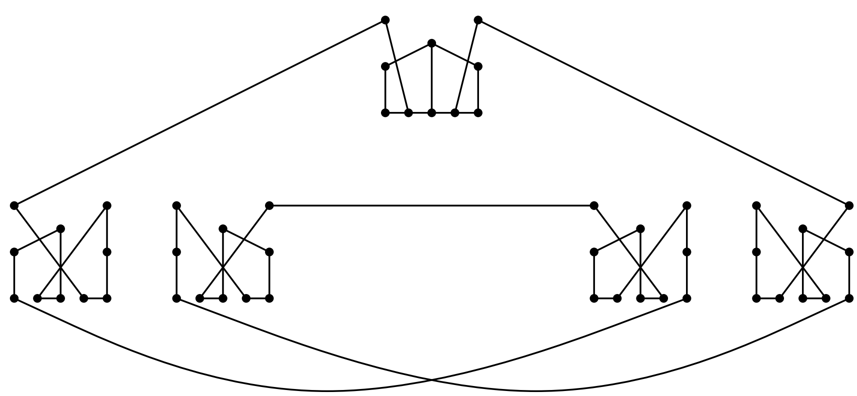
Tvrdenie 5.2.1. *Ak G je zovšeobecnený Szekeresov snark, potom G je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Najprv ukážeme, že vieme nájsť vhodnú kružnicu párnej dĺžky, z ktorej vieme odvodiť BF-zafarbenie pre Szekeresov snark, potom ukážeme, ako možno túto kružnicu zostrojiť podobným spôsobom pre ľubovoľný graf z triedy zovšeobecnených Szekeresovych snarkov. Kružnicu pre Szekeresov snark vyberieme nasledujúcim spôsobom:

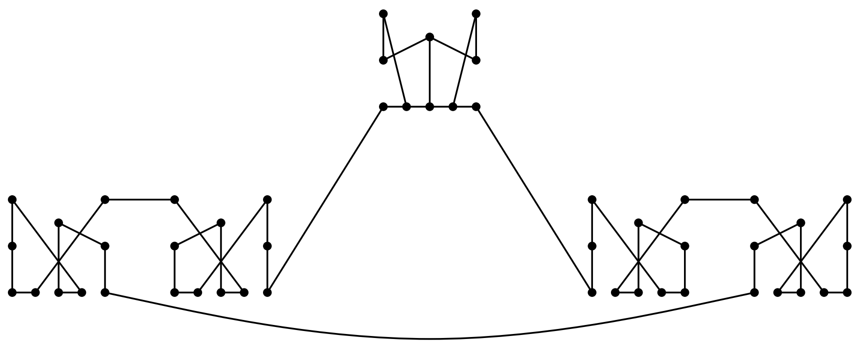


Obrázok 5.8: Kružnica párnej dĺžky predstavujúca $M_1 \cup M_2$

Po odstránení každej druhej hrany z kružnice, jedným a druhým spôsobom, dostávame tieto dva grafy:



Obrázok 5.9: Odstránenie M_1

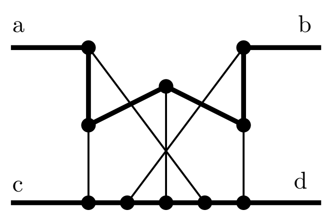


Obrázok 5.10: Odstránenie M_2

Na základe obrázkov je zrejmé, že v oboch prípadoch po vyhladení hrán dostaneme graf K_4, ktorý je hranovo 3-zafarbiteľný, a teda podľa tvrdenia 2.4.4 je Szekeresov snark BF-zafarbiteľný.

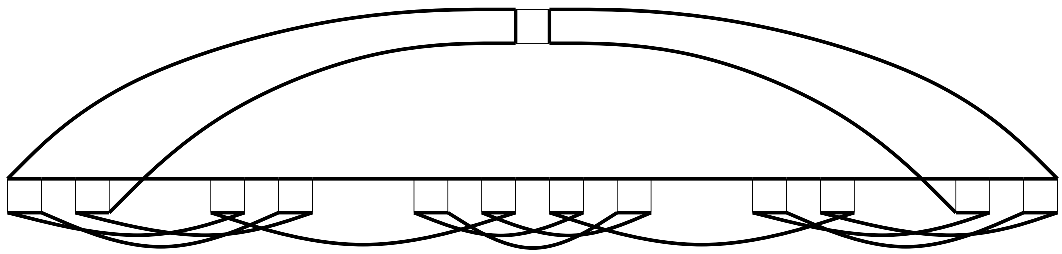
Pozrime sa teraz na všeobecný prípad grafu z triedy zovšeobecnených Szekeresovych snarkov. V prípade Szekeresovho snarku sme našli jednu kružnicu, ktorá v hlavnom bloku pokryla všetky vrcholy okrem štyroch, a v ostatných blokoch pokryla všetky vrcholy. Ukážeme, že aj vo všeobecnom prípade vieme nájsť kružnicu s týmito vlastnosťami.

Vedľajšie bloky budeme prechádzať rovnakým spôsobom, ako v prípade Szekeresovho snarku, teda v každom bloku prejdeme dve cesty, jednu z a do b a druhú z c do d:



Obrázok 5.11: Cesty vo vedľajších blokoch

Ďalej potrebujeme ukázať, že vieme prechádzať medzi jednotlivými blokmi tak, aby sme prešli cez každý z nich dvakrát, raz po každej zo spomínaných ciest:



Obrázok 5.12: Výber kružnice pre zovšeobecnené Szekeresove snarky

Pozrime sa teraz na to, ako v prípade Szekeresovho snarku vyzerali hrany kružnice, ktoré prechádzali cez hlavný blok. V podstate bola kružnica tvorená dvomi cestami, ktoré vedú po hranách mimo hlavného bloku, jedna z a do b a druhá z c do d, a dvomi cestami v rámci hlavného bloku, jedna z a do c a druhá z b do d.

Ukážme teraz, že obe cesty mimo hlavného bloku sú nepárnej dĺžky. Každá z ciest sa skladá z hrán, ktoré sú v rámci niektorého z vedľajších blokov a z hrán ktoré sú medzi dvomi susednými blokmi. Keďže týchto blokov je párny počet, je párny aj počet hrán cesty, ktoré sa nachádzajú v rámci týchto blokov. Hrany medzi hlavným blokom a vedľajšími blokmi sú dve, a hrán medzi vedľajšími blokmi je nepárny počet. To znamená, že celkový počet hrán je nepárny.

Táto skutočnosť nám zaručuje, že po odstránení každej druhej hrany kružnice nastane vždy situácia ako v prípade grafu s 50 vrcholmi, a síce, že pokiaľ ide o hrany medzi hlavným blokom a vedľajšími blokmi, v grafe ostanú buď obe hrany vedúce z vrcholov a, b, alebo obe hrany z vrcholov c, d. Tým ukážeme, že po odstránení každej druhej hrany kružnice z grafu a následnom vyhladení hrán, dostávame opäť rovnaký graf (K_4) ako v prípade Szekeresovho snarku. Vyplýva to z toho, že každý vrchol mimo hlavný blok leží na kružnici, teda po odstránení hrán bude mať stupeň dva, a teda po vyhladení ostanú len vrcholy v hlavnom bloku. Mohlo by sa možno stať, že nám po vyhladení ostanú nejaké bezvrcholové slučky, ale ako vyplýva z dôkazu tvrdenia 2.4.4, tieto nám nijako neprekážajú. □

Kapitola 6

Súčin kubických grafov

V tejto kapitole sa pozrieme bližšie na techniku hľadania BF-zafarbenia pomocou párení s vhodnými vlastnosťami, a získané poznatky použijeme na ukázanie platnosti Berge-Fulkersonovej hypotézy pre špeciálne prípady grafov zostrojených pomocou súčinu kubických grafov.

6.1 Kružnice párnej dĺžky

Vráťme sa späť k dôkazu tvrdenia 2.4.4. Konkrétne k implikácii, že ak je kubický graf G BF-zafarbiteľný, potom v ňom existujú dve párenia s istými vlastnosťami, špeciálne také, ktoré v grafe G tvoria kružnice párnej dĺžky. V dôkaze sme postupovali tak, že sme predpokladali existenciu BF-zafarbenia, zvolili sme si rozdelenie šiestich farieb do dvoch skupín po troch, a následne sme na základe konkrétneho farbenia a konkrétneho rozdelenia vybrali kružnice párnej dĺžky. Je teda zrejmé, že ak by aj existovalo len jediné BF-zafarbenie grafu G (až na izomorfizmus), existuje viacero spôsobov, ako vybrať kružnice párnej dĺžky. Ak si totiž zoberieme iné rozdelenie farieb do dvoch skupín, dostaneme iné kružnice v grafe.

Pre účely nasledujúcej časti práce zaveďme tieto konvencie. Ak budeme kubický graf farbiť tromi farbami, tieto farby budú prvky množiny $\{1, 2, 3\}$. Ak budeme graf $2G$ farbiť šiestimi farbami, budú tieto farby prvky množiny

$\{1, 2, 3, 1', 2', 3'\}$, pričom naše rozdelenie farieb do dvoch skupín bude:

$$C = \{1, 2, 3\}$$

$$C' = \{1', 2', 3'\}$$

Navyše, ak budeme predpokladať, že x je nejaká farba z množiny C, potom x' je príslušná farba z množiny C'. Ak e je hrana grafu G, potom dvojicu paralelných hrán v grafe $2G$, ktoré zodpovedajú hrane e, budeme označovať e_1, e_2.

Pozrime sa teraz na to, aké kružnice párnej dĺžky vieme v grafe nájsť, na základe toho, aké ofarbenie (resp. rozdelenie do skupín), si zvolíme. Pripomeňme, že hrana grafu G patrí do niektorej kružnice práve vtedy, keď dve jej zodpovedajúce hrany v grafe $2G$ sú ofarbené farbou z tej istej skupiny (C alebo C'). Dve základné tvrdenia sú očividné, zaveďme však najprv pomocnú definíciu:

Definícia 6.1.1. *Nech G je kubický bezmostový graf, ktorý je BF-zafarbiteľný. Potom cyklus pozostávajúci z kružníc párnej dĺžky, s vhodnými vlastnosťami, ktorého existencia vyplýva z tvrdenia 2.4.4, nazveme riešenie problému BF-zafarbenia pre graf G.*

Tvrdenie 6.1.2. *Nech G je kubický BF-zafarbiteľný graf a nech e je hrana grafu G. Potom pre graf G existujú dve rôzne riešenia problému BF-zafarbenia $K_1, K_2 \subseteq E(G)$, pričom $e \in K_1$, $e \notin K_2$.*

Dôkaz. V prípade K_1 zoberieme také farbenie, ktoré hranám v grafe $2G$, zodpovedajúcim hrane e, dá farby 1 a 2, v prípade K_2 to budú farby 1 a $1'$. □

Tvrdenie 6.1.3. *Nech G je kubický BF-zafarbiteľný graf a nech v je vrchol grafu G. Nech v je incidentný s hranami e, f, g. Potom pre graf G existujú dve rôzne riešenia problému BF-zafarbenia $K_1, K_2 \subseteq E(G)$, pričom $e, f \in K_1$, $e, f, g \notin K_2$.*

Dôkaz. V prípade K_1 zoberieme také farbenie c grafu $2G$, pre ktoré platí:

$$c(e_1) = 1, c(e_2) = 2, c(f_1) = 1', c(f_2) = 2', c(g_1) = 3, c(g_2) = 3'$$

V prípade K_2 zoberieme farbenie c:

$$c(e_1) = 1, c(e_2) = 1', c(f_1) = 2, c(f_2) = 2', c(g_1) = 3, c(g_2) = 3'$$

□

Všimnime si, že v oboch prípadoch môže ísť o to isté zafarbenie, rozdiel je len v rozdelení do skupín C, C'. Pri podrobnejšom skúmaní však možno o existujúcich riešeniach povedať ešte viac.

Definícia 6.1.4. *Nech G je graf, C nech je množina farieb a p nech je permutácia množiny C. Nech c je farbenie grafu G farbami z množiny C. Farbenie $c(p)$ je farbenie grafu G farbami z množiny C, pre ktoré platí:*

$$c(p)(e) = p(c(e)),\ kde\, e \in \{E(G)\}$$

Tvrdenie 6.1.5. *Nech G je kubický BF-zafarbiteľný graf a nech e, f sú ľubovoľné hrany grafu G. Potom pre graf G existujú dve rôzne riešenia problému BF-zafarbenia $K_1, K_2 \subseteq E(G)$, pričom $e, f \in K_1$, $e, f \notin K_2$.*

Dôkaz. Zoberme si také farbenie c grafu $2G$, pre ktoré hrana e leží na niektorej z kružníc párnej dĺžky. Ak aj hrana f leží na nejakej kružnici, niet čo dokazovať. Predpokladajme teda, že hrana f na kružnici neleží. Nech bez ujmy na všeobecnosti $c(e_1) = 1, c(e_2) = 2$. Ďalej nech $c(f_1) = x, c(f_2) = y'$, pre $x \in C, y' \in C'$. Nastane jedna z týchto dvoch možností:

Ak $x \in \{1, 2\}$, potom zoberme farbenie $c' = c(y', 3)$. Pri farbení c' budú farby pre e_1, e_2 rovnaké ako pri farbení c, a dostaneme $c'(f_1) = x, c'(f_2) = 3$, teda pri farbení c' majú všetky štyri uvažované hrany farbu z množiny C a teda e aj f ležia na niektorej z kružníc.

Ak $x = 3$, potom zoberme farbenie $c' = c(z', 3)$, kde $z' \in C'$, pričom $z' \neq y'$. Farby pre e_1, e_2 ostávajú opäť rovnaké, ale obe farby pre hrany f_1, f_2 sú teraz z množiny C', teda e aj f ležia na kružnici.

V prípade, že chceme, aby ani jedna z hrán e, f neležala na kružnici, postupujeme podobne. □

Tvrdenie 6.1.6. *Nech G je kubický BF-zafarbiteľný graf a nech u, v sú susedné vrcholy grafu G. Potom existuje riešenie problému BF-zafarbenia grafu G také, že žiadna z hrán tohto riešenia nie je incidentná ani s u, ani s v.*

Dôkaz. Nech $e = uv$. Nech vrchol v je okrem e incidentný s hranami f, g a nech u je okrem e incidentný s hranami s, t. Zoberme si farbenie c grafu $2G$, pre ktoré platí:

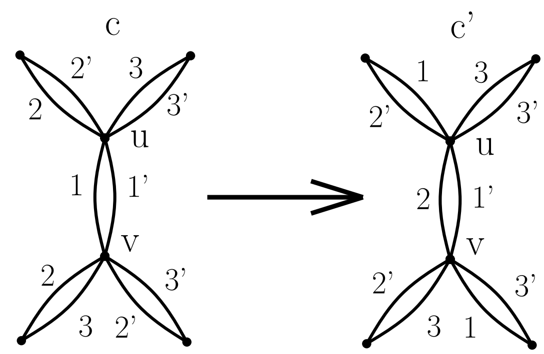
$$c(e_1) = 1, c(e_2) = 1', c(f_1) = 2, c(f_2) = 2', c(g_1) = 3, c(g_2) = 3'$$

Teda máme zaručené, že žiadna z hrán e, f, g neleží na kružnici. Nastáva teraz jedna z dvoch možností, buď ani jedna z hrán s, t neleží na žiadnej kružnici, alebo na niektorej ležia obe tieto hrany. V prvom prípade niet čo dokazovať, pozrime sa teda na druhú možnosť. Aby obe hrany ležali na kružnici, musí byť jedna dvojica paralelných hrán v $2G$ ofarbená farbami $2, 3$ a druhá farbami $2', 3'$.

Nech teda bez ujmy na všeobecnosti $c(s_1) = 2, c(s_2) = 3, c(t_1) = 2', c(t_2) = 3'$. Zoberme si farbenie $c' = c(1, 2, 2')$. Dostávame (obr. 6.1):

$$c'(e_1) = 2, c'(e_2) = 1', c'(f_1) = 2', c'(f_2) = 1, c'(g_1) = 3, c'(g_2) = 3'$$

$$c'(s_1) = 2', c'(s_2) = 3, c'(t_1) = 1, c'(t_2) = 3'$$



Obrázok 6.1: Farbenia c a c'

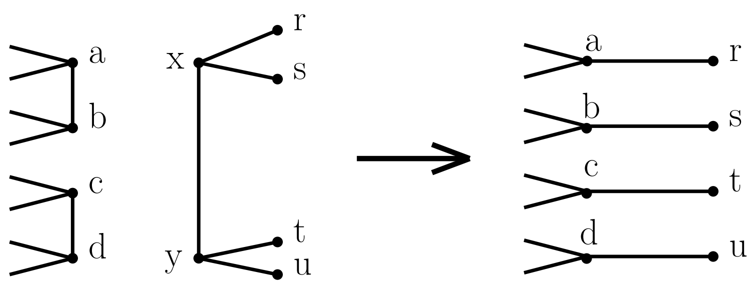
Vidíme teda, že pri farbení c' neleží žiadna z hrán z množiny $\{e, f, g, s, t\}$ na žiadnej kružnici. $\square$

6.2 Súčin kubických grafov

Súčin kubických grafov je operácia, ktorá z dvoch kubických grafov vyrobí tretí kubický graf. Táto operácia má tú vlastnosť, že ak G_1 aj G_2 sú snarky, potom aj G je snark. Jej autorom je Isaacs, a je to vôbec prvá známa operácia tohto druhu [12].

6.2.1 Definícia

Nech G_1 a G_2 sú kubické grafy. Nech $e_1 = ab$ a $e_2 = cd$ sú dve nesusedné hrany grafu G_1. Nech x a y sú susedné vrcholy v grafe G_2 a nech x má okrem y susedov r, s a y má susedov t, u. Graf $G = G_1.G_2$ dostaneme tak, že v grafe G_1 odstránime hrany e_1, e_2, v grafe G_2 odstránime vrcholy x, y, a tieto dva grafy spojíme novými hranami: ar, bs, ct, du.



Obrázok 6.2: Súčin kubických grafov

Aby sme ukázali, že súčinom dvoch snarkov je opäť snark, použijeme tvrdenie známe ako paritná lema, ktorej dôkaz je možné nájsť napríklad v [5, 12, 14].

Lema 6.2.1. *Nech G je kubický hranovo 3-zafarbiteľný graf. Nech A je rez v grafe G, pozostávajúci z n hrán. Uvažujme zafarbenie hrán grafu G farbami $(1, 2, 3)$ a pre $i \in \{1, 2, 3\}$ označme n_i ako počet hrán rezu A, ktoré sú ofarbené farbou i. Potom*

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv n\,(mod\ 2)$$

Uvažujme graf $G = G_1.G_2$, pričom G_1 a G_2 sú snarky. Ak by existovalo hranové zafarbenie tohto grafu tromi farbami, museli by sme pre štyri novopridané hrany použiť buď štyrikrát tú istú farbu, alebo dve rôzne farby, každú dvakrát. Keby sme hrany z vrcholov a a b zafarbili rovnako (a teda aj hrany z vrcholov c a d by boli zafarbené rovnako), vedeli by sme z tohto farbenia odvodiť farbenie grafu G_1. Ak by sme ale hrany z vrcholov a a b ofarbili rôzne, museli by aj hrany z vrcholov c a d byť ofarbené rôzne, a navyše pre obe dvojice hrán by sme museli použiť tú istú dvojicu farieb. Z toho vyplýva, že by sme vedeli odvodiť hranové farbenie grafu G_2 pomocou troch farieb. Teda ak ani jeden z grafov G_i nebol hranovo 3-zafarbiteľný, nebude zafarbiteľný ani graf G.

Nie je takisto ťažké vidieť, že ak sú dva grafy hranovo cyklicky 4-súvislé a majú obvod aspoň päť, bude mať tieto dve vlastnosti aj graf, ktorý vznikne z týchto dvoch grafov pomocou súčinu kubických grafov.

6.2.2 Vzťah BF-zafarbiteľnosti a súčinu kubických grafov

Pozrime sa teraz na vzťah medzi BF-zafarbiteľnosťou a súčinom kubických grafov. Zaujíma nás, či vieme povedať niečo o BF-zafarbiteľnosti grafu, ktorý dostaneme pomocou tejto operácie, ak vieme niečo o grafoch, na ktoré sme operáciu aplikovali.

Budeme sa zaoberať špeciálnym prípadom súčinu kubických grafov, a síce, že konfigurácia so štyrmi polhranami, ktorú dostaneme z jedného zo snarkov, je hranovo 3-zafarbiteľná. Pozrime sa najprv na prípad, kedy takáto situácia nastane pre snark, z ktorého odstránime dva vrcholy.

Nech teda G je snark, a nech u, v sú susedné vrcholy v grafe G. Nech $e = uv$. Nech vrchol u je okrem hrany e incidentný s hranami f a g a nech vrchol v je okrem hrany e incidentný s hranami s a t. Nech konfigurácia $G \setminus \{u, v\}$ je hranovo 3-zafarbiteľná a nech c je farbenie tejto konfigurácie tromi farbami. Je zrejmé, že musí platiť: $c(f) = c(g)$ a $c(s) = c(t)$. Môžu teda nastať dve situácie, buď sú všetky štyri polhrany ofarbené tou istou farbou, alebo majú po dvoch rovnaké farby. Treba si však uvedomiť, že ak nastane jedna z možností, potom vieme nájsť aj také farbenie, kedy nastane druhá z možností.

Nech napríklad $c(f) = c(g) = 1$ a $c(s) = c(t) = 2$. Zoberme si cestu začínajúcu polhranou s, ktorá vedie striedavo hranami s farbou 1 a 2. Táto cesta musí nutne končiť polhranou t, lebo ak by končila polhranou f alebo g, dostali by sme výmenou farieb 1 a 2 na tejto ceste také farbenie, ktoré sa dá rozšíriť na farbenie pôvodného grafu G. Ak teraz prehodíme farby na ceste z

s do t, dostávame farbenie, ktoré všetkým štyrom polhranám priradí farbu 1.

Opačný prípad sa dá ukázať rovnakým spôsobom.

Definícia 6.2.2. *Nech G je snark. Hranu uv grafu G nazývame nepotlačiteľnou, ak graf $\overline{G \setminus \{uv\}}$ je hranovo 3-zafarbiteľný.*

Všimnime si, že hrana uv snarku G je nepotlačiteľná práve vtedy, keď konfigurácia $G \setminus \{u, v\}$ je hranovo 3-zafarbiteľná.

Tvrdenie 6.2.3. *Nech G_1 je kubický BF-zafarbiteľný graf, a nech G_2 je snark, pričom uv je nepotlačiteľná hrana grafu G_2. Nech $G = G_1.G_2$, pričom sme pri súčine grafov z grafu G_2 odstránili vrcholy u a v. Potom graf G je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Nech e a f sú hrany grafu G_1, ktoré sme pri konštrukcii G rozdelili na polhrany. Keďže G_1 bol BF-zafarbiteľný, existujú kružnice párnej dĺžky v tomto grafe, ktoré predstavujú riešenie tohto problému. Podľa tvrdenia 6.1.5 existuje také riešenie, že ani jedna z hrán e a f neleží na žiadnej z kružníc. Označme párenia, ktoré tvoria toto riešenie, ako M_1 a M_2. Z toho, čo vieme o grafe G_1 a o páreniach M_1 a M_2 vyplýva, že graf $\overline{G_1 \setminus M_i}$ je hranovo 3-zafarbiteľný a obsahuje hrany e a f (respektíve hrany, ktoré vznikli vyhladením vrcholov incidentných s týmito hranami, ktoré v takom prípade pre jednoduchosť tiež označme ako e a f).

Budeme sa teraz snažiť ukázať, že pre $i \in \{1, 2\}$ je graf $\overline{G_1 \setminus M_i}.G_2$ hranovo 3-zafarbiteľný, za predpokladu, že hrany, ktoré pri tejto konštrukcii rozdelíme, sú e a f a vrcholy, ktoré sme odstránili z G_2, sú u a v. Pozrime sa na graf $\overline{G_1 \setminus M_i}$. Vieme, že konfigurácia, ktorú z tohto grafu dostaneme rozdelením hrán e a f je hranovo 3-zafarbiteľná. Takisto vieme, že existuje také jej ofarbenie, v ktorom polhrany, ktoré vznikli z tej istej hrany, budú mať rovnakú farbu.

Ak sa teraz pozrieme na konfiguráciu $G_2 \setminus \{u, v\}$, vieme podľa predošlého pozorovania, že sme schopní túto konfiguráciu zafarbiť tak, aby polhrany, ktoré vznikli z toho istého vrchola, mali rovnakú farbu, či už aby boli po dvoch rovnaké, alebo aby boli všetky štyri rovnaké.

Je teda zrejmé, že ak by sme v grafe G vybrali kružnice zodpovedajúce $M_1 \cup M_2$, vedeli by sme graf $\overline{G \setminus M_i}$ zafarbiť tromi farbami, teda je graf G BF-zafarbiteľný. $\square$

Definícia 6.2.4. *Snark G nazývame kritický, ak každá hrana v grafe G je nepotlačiteľná.*

Dôsledok 6.2.5. *Ak G_1 je kubický BF-zafarbiteľný graf a G_2 je kritický snark, potom graf $G_1.G_2$ je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Vyplýva priamo z predchádzajúceho tvrdenia. □

Dôsledok 6.2.6. *Ak G je kubický BF-zafarbiteľný graf a P je Petersenov graf, potom graf $G.P$ je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia a faktu, že Petersenov graf je kritický. To sa ľahko overí, keďže Petersenov graf je hranovo tranzitívny, a teda existuje až na izomorfizmus jediná konfigurácia, ktorá môže odstránením dvoch susedných vrcholov z tohto grafu vzniknúť. □

Pozrime sa teraz na druhú z možností, kedy konfigurácia, ktorá vznikla zo snarku rozdelením dvoch nesusedných hrán na polhrany, je hranovo 3-zafarbiteľná. Označme hrany, ktoré sme rozdelili na polhrany, ako e a f. Označme ďalej polhrany pochádzajúce z e ako e_1 a e_2, a polhrany pochádzajúce z f ako f_1 a f_2. Je zrejmé, že akékoľvek ofarbenie hrán tromi farbami musí dať polhranám pochádzajúcim z tej istej hrany rôzne farby. Navyše ide v oboch prípadoch o tú istú dvojicu farieb. Nech sú to bez ujmy na všeobecnosti farby 1 a 2.

Všimnime si, že ak si v tomto grafe zoberieme cestu, ktorá začína polhranou e_1 a pokračuje striedavo hranami s farbami 1 a 2, musí táto cesta nutne končiť polhranou e_2. Ak by totiž končila niektorou z polhrán f_i, dostali by sme zámenou farieb na tejto ceste také ofarbenie, ktoré polhranám pochádzajúcim z tej istej hrany priradí rovnakú farbu, teda by pôvodný graf nemohol byť snark. Z tohto pozorovania vyplýva, že vieme nájsť farbenia c a c', pre ktoré platí:

$$c(e_1) = c(f_1) = 1, c(e_2) = c(f_2) = 2$$

$$c(e_1) = c(f_2) = 1, c(e_2) = c(f_1) = 2$$

Definícia 6.2.7. *Nech G je snark. Dvojicu hrán $\{e, f\}$ grafu G nazývame neodstrániteľnou dvojicou hrán, ak graf $G \setminus \{e, f\}$ je hranovo 3-zafarbiteľný (teda ak konfigurácia, ktorá vznikla rozdelením hrán e a f na dve polhrany, je hranovo 3-zafarbiteľná).*

Tvrdenie 6.2.8. *Nech G_2 je kubický BF-zafarbiteľný graf, a nech G_1 je snark, pričom e a f tvoria neodstrániteľnú dvojicu hrán grafu G_1. Nech $G = G_1.G_2$, pričom sme pri aplikácii operácie súčinu kubických grafov v grafe G_1 rozdelili hrany e a f. Potom G je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Nech u a v sú susedné vrcholy grafu G_2, ktoré sme pri konštrukcii grafu G z G_2 odstránili. Z predpokladu, že G_2 je BF-zafarbiteľný a z tvrdenia 6.1.6 vyplýva, že v tomto grafe existuje riešenie problému BF-zafarbenia, pričom žiadna z hrán incidentných s u alebo s v neleží na žiadnej z kružníc. Nech toto riešenie je tvorené páreniami M_1 a M_2. Z toho, že ani u ani v neležia na žiadnej z kružníc vyplýva, že $G_1.\overline{G_2 \setminus \{M_i\}}$ je hranovo 3-zafarbiteľný a obsahuje vrcholy u aj v.

Ukážme teraz, že pre $i \in \{1, 2\}$ je graf $G_1.\overline{G_2 \setminus \{M_i\}}$ hranovo 3-zafarbiteľný, za predpokladu, že pri konštrukcii rozdelíme hrany e a f a odstránime vrcholy u a v. Pozrieme sa na konfiguráciu, ktorá vznikla z $\overline{G_2 \setminus \{M_i\}}$ odstránením vrcholov u a v. Vieme, že existuje také zafarbenie tejto konfigurácie tromi farbami, ktoré polhranám prislúchajúcim k tomu istému vrcholu, priradí rôznu farbu. Podľa predpokladu vieme, že konfigurácia, ktorá vznikne z grafu G_1 rozdelením hrán e a f, je hranovo 3-zafarbiteľná. Navyše z predchádzajúceho pozorovania vyplýva, že vieme nájsť farbenie pre obe možnosti, kedy polhrany patriace k tej istej hrane majú rôznu farbu.

Je teda zrejmé, že farbenie grafu $\overline{G_2 \setminus \{M_i\}}$ vieme rozšíriť na farbenie grafu $G_1.\overline{G_2 \setminus \{M_i\}}$, a teda $M_1 \cup M_2$ predstavuje riešenie problému BF-zafarbenia grafu G. □

Nasledujúce definície sú prevzaté z článku [14].

Definícia 6.2.9. *Dvojicu vrcholov $\{u, v\}$ snarku G nazývame neodstrániteľnou, ak graf $G \setminus \{u, v\}$ je hranovo 3-zafarbiteľný.*

Nasledujúca definícia kritického snarku je ekvivalentná s už zavedenou definíciou, uvádzame ju však ako kontext pre definície, ktoré po nej nasledujú.

Definícia 6.2.10. *Snark G nazývame kritický, ak každá dvojica susedných vrcholov grafu G tvorí neodstrániteľnú dvojicu.*

Definícia 6.2.11. *Snark G nazývame kokritický, ak každá dvojica nesusedných vrcholov grafu G tvorí neodstrániteľnú dvojicu.*

Definícia 6.2.12. *Snark G nazývame bikritický, ak je kritický a zároveň kokritický.*

Definícia 6.2.13. *Snark G nazývame silne bikritický, ak každá dvojica nesusedných hrán grafu G tvorí neodstrániteľnú dvojicu hrán.*

Dôvod pre nazývanie takéhoto grafu silne bikritickým spôčíva v tom, že takýto graf musí nutne byť bikritický. Ak totiž z kubického grafu odstránime ľubovoľné dva vrcholy, potom určite musíme odstrániť aj nejaké dve nesusedné hrany (a ešte nejaké ďalšie). Ak teda odstránením ľubovoľných dvoch nesusedných hrán zo snarku G dostávame hranovo 3-zafarbiteľný graf, musí aj graf, ktorý vznikne zo snarku G odstránením ľubovoľnej dvojice vrcholov, byť hranovo 3-zafarbiteľný.

Tvrdenie 6.2.14. *Ak G_2 je kubický BF-zafarbiteľný graf a G_1 je silne bikritický snark, potom graf $G_1.G_2$ je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Vyplýva priamo z tvrdenia 6.2.8. □

Dôsledok 6.2.15. *Ak G je kubický BF-zafarbiteľný graf a P je Petersenov graf, potom graf P.G je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia a faktu, že Petersenov graf je silne bikritický. Ľahko vidieť, že až na izomorfizmus existujú iba dve konfigurácie, ktoré možno dostať z Petersenovho grafu odstránením dvoch nesusedných hrán, podľa toho, či dve vybrané hrany ležia na spoločnej kružnici dĺžky päť, alebo nie. □

Definícia 6.2.16. *Nech M je množina kubických grafov. Multiplikatívny uzáver množiny M je množina kubických grafov $[M]$ spĺňajúca nasledujúce podmienky:*

1. *$M \subseteq [M]$.*
2. *Ak $G \in M$ a $H \in [M]$, tak aj $G.H \in [M]$, aj $H.G \in [M]$.*
3. *Pre každú množinu X, ktorá spĺňa 1. a 2. nahradením za $[M]$, platí $[M] \subseteq X$.*

Tvrdenie 6.2.17. *Nech M je ľubovoľná množina silne bikritických BF-zafarbiteľných snarkov. Potom každý snark z $[M]$ je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Vyplýva z tvrdení 6.2.3 a 6.2.8 a faktu, že každý silne bikritický snark je kritický. □

Nasledujúcu definíciu zaviedol Isaacs v [12].

Definícia 6.2.18. *Nech P je Petersenov graf. Triedu snarkov $[P]$ nazývame BDS-triedou.*

Dôsledok 6.2.19. *Každý snark z BDS-triedy je BF-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Vyplýva z tvrdenia 6.2.17 a faktu, že Petersenov graf je BF-zafarbiteľný a silne bikritický. □

Dôsledok 6.2.20. *Obe triedy zovšeobecnených Blanušovych snarkov a trieda zovšeobecnených Szekeresovych snarkov sú BF-zafarbiteľné.*

Dôkaz. Ide o špeciálny prípad dôsledku 6.2.19. Ako sme totiž uviedli v kapitolách venovaných týmto triedam snarkov, ľubovoľný graf z niektorej z týchto tried vieme dostať pomocou operácie súčinu kubických grafov spôsobom:

$$(P.(P.(\dots(P.(P.P))\dots)))$$

Teda obe triedy snarkov tvoria podmnožinu BDS-triedy. □

Poznámka Akronym BDS je odvodený z mien Blanuša, Descartes a Szekeres, keďže táto trieda obsahuje oba Blanušove snarky, Descartesov snark aj Szekeresov snark, ktoré boli začiatkom sedemdesiatych rokov dvadsiateho storočia spolu s Petersenovym grafom jediné známe snarky.

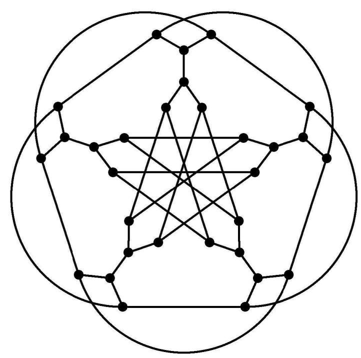
Uvažujme teraz nasledujúcu triedu snarkov $\mathcal{I} = \{I_n; n \geq 5 \text{ nepárne}\} \cup \{P\}$, kde I_n je Isaacsov snark a P je Petersenov graf. Je to teda mierne modifikovaná trieda Isaacsovych snarkov, kde miesto I_3 zoberieme Petersenov graf (I_3 dostaneme z Petersenovho grafu nahradením jedného vrchola kružnicou dĺžky tri). Nasledujúce tvrdenie je dokázané v článku [11].

Tvrdenie 6.2.21. *Každý graf z množiny $\mathcal{I}$ je silne bikritický.*

Nasledujúce tvrdenie je priamym dôsledkom predchádzajúceho tvrdenia, tvrdenia 6.2.17 a lemy 3.2.1 (o BF-zafarbiteľnosti Isaacsovych snarkov).

Tvrdenie 6.2.22. *Každý snark z množiny* $[\mathcal{I}]$ *je BF-zafarbiteľný.*

Uveďme pre zaujímavosť, že pokiaľ ide o snarky rádu najviac 30, je medzi nimi okrem troch grafov z množiny $[\mathcal{I}]$ iba jeden silne bikritický snark. Je to takzvaný "double-star snark", ktorý má práve 30 vrcholov. Táto jeho vlastnosť je uvedená napríklad v [11], informácia, že žiadne iné snarky do 30 vrcholov nie sú silne bikritické, vyplýva z počítačových výpočtov, ktoré urobila RNDr. Edita Máčajová, PhD.



Obrázok 6.3: Double-star snark

Kapitola 7

Záver

7.1 Prehľad dosiahnutých výsledkov

Berge-Fulkersonova hypotéza hovorí o existencii skupiny šiestich 1-faktorov s akousi vlastnosťou, ktorá by mala existovať v každom bezmostovom kubickom grafe. Ako sme však poznamenali, z tohto hľadiska je zaujímavá práve oblasť snarkov. Vzhľadom na zložitosť tejto hypotézy sme si za cieľ zobrali pozrieť sa na špeciálne prípady snarkov, a pre ne skúmať platnosť tejto hypotézy.

Začali sme skúmaním dvoch známych tried grafov, konkrétne zovšeobecnených Blanušovych snarkov a zovšeobecnených Szekeresovych snarkov, ktorých štruktúra je presne definovaná. Aj keď sme ukázali, že pre obe tieto triedy snarkov hypotéza platí, išlo skôr o demonštráciu elegancie použitej techniky dokazovania, než nejaký významný prínos pri objasnení samotnej hypotézy. Keďže snarky z oboch tried majú veľmi pravidelnú štruktúru, ktorej znalosť sme navyše pri dôkazoch využívali, nedajú sa z týchto výsledkov odvodzovať nejaké všeobecnejšie závery ohľadom platnosti Berge-Fulkersonovej hypotézy. Pozreli sme sa teda na všeobecnejší spôsob konštrukcie snarkov, a to pomocou súčinu kubických grafov.

Ak by sa ukázalo, že súčin dvoch kubických grafov G a H je BF-zafarbiteľný, za predpokladu, že grafy G aj H sú BF-zafarbiteľné, znamenalo by to, že najmenší možný kontrapríklad pre túto hypotézu by musel byť hranovo cyklicky 5-súvislý. Táto otázka je však stále príliš zložitá, preto sme skúmali špeciálne prípady grafov, na ktoré operáciu aplikujeme.

Pozreli sme sa v tejto súvislosti na operáciu súčinu kubických grafov z dvoch uhlov pohľadu, keďže táto operácia nie je symetrická. Buď sme v BF-zafarbiteľnom grafe rozdelili dve hrany, alebo sme z BF-zafarbiteľného grafu odstránili dva vrcholy. V oboch prípadoch sme našli triedu grafov, ktoré sú z príslušnej strany neutrálne v tom zmysle, že pri násobení s BF-zafarbiteľným grafom dávajú opäť BF-zafarbiteľný graf. Boli to konkrétne triedy kritických, respektíve silne bikritických snarkov. Keďže každý silne bikritický snark je nutne kritický, našli sme dokonca triedu, ktorá je v uvedenom zmysle neutrálna z oboch strán.

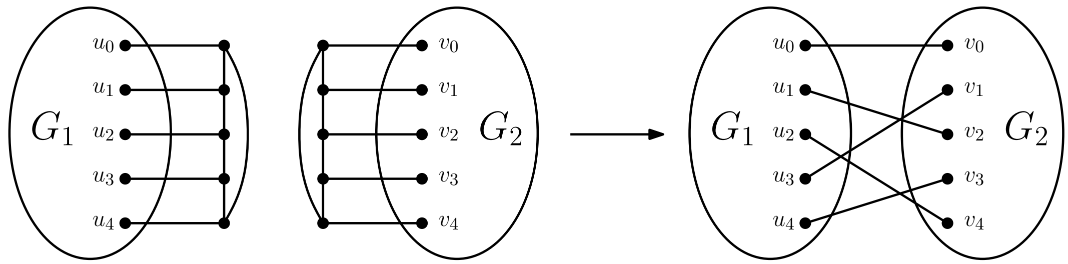
7.2 Ďalšie možnosti štúdia

V súvislosti s takouto neutralitou nejakej triedy grafov sa vynára otázka, či vieme nájsť (ak existuje) triedu snarkov, ktorá je BF-zafarbiteľná, a ktorá je uzavretá vzhľadom na operáciu súčinu kubických grafov.

Ako sme uviedli, Petersenov graf je BF-zafarbiteľný, a je v spomínanom zmysle neutrálny pri násobení z obidvoch strán. Dá sa však ukázať, že ani jeden z Blanušovych snarkov, ktoré oba vznikajú súčinom dvoch kópií Petersenovho grafu, nie je silne bikritický. Vidíme teda, že pokiaľ ide o najmenšiu triedu snarkov, ktorá obsahuje Petersenov graf a je uzavretá na súčin kubických grafov, nevieme zatiaľ dokázať, že každý graf z tejto triedy je BF-zafarbiteľný. Rovnako však vidíme, ktorým smerom sa je možné ďalej uberať.

Druhou prirodzenou možnosťou, ako nadviazať na výsledky popísané v tejto práci, je zaoberať sa inými konštrukciami snarkov. Existuje napríklad postup, podobný súčinu kubických grafov, ktorý pri aplikácii na dva snarky dáva znovu snark. Tento postup sa nazýva 5-súčin a vyzerá nasledovne:

Nech G_1 a G_2 sú snarky, a nech C_i je kružnica dĺžky päť v grafe G_i pre $i \in \{1, 2\}$. Nech $\{u_0, \ldots, u_4\}$ je množina vrcholov incidentných s vrcholmi kružnice C_1 a nech $\{v_0, \ldots, v_4\}$ je množina vrcholov incidentných s vrcholmi kružnice C_2, pričom žiaden z vrcholov z týchto dvoch množín neleží na žiadnej z kružníc. Graf G skonštruujeme tak, že v grafe G_1 odstránime kružnicu C_1, v grafe G_2 odstránime kružnicu C_2, a pre každé $i \in \{0, \ldots, 4\}$ pridáme hranu medzi vrcholmi u_i a $v_{2i \bmod 5}$.



Obrázok 7.1: Konštrukcia grafu G

Otázka je, či graf, ktorý dostaneme ako 5-súčinu dvoch BF-zafarbiteľných grafov, je tiež BF-zafarbiteľný. My sme sa v práci touto otázkou nezaoberali vôbec, ale je zrejmé, že použitím výsledkov o kružniciach párnej dĺžky z predchádzajúcej kapitoly je aspoň možné znížiť počet prípadov, ktoré môžu pri spájaní piatich polhrán nastať.

Literatúra

[1] J.C. Bermond, B. Jackson, F. Jaeger, *Shortest coverings of graphs with cycles*, J. Combin. Theory Ser. B. 35 (1983), 297-308

[2] D. Blanuša, *Problem cetiriju boja*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II. 1 (1946), 31-42.

[3] A. Cavicchioli, T.E. Murgolo, B. Ruini, F. Spaggiari, *Special classes of snarks*, Acta Appl. Math. 76 (2003), 57-88.

[4] U.A. Clemins, E.R. Swart, *The Construction of Snarks*, Dept. of Combinatorics and Optimization, Univ. of Waterloo, Research Report CORR (1979), 79-18

[5] B. Descartes, Network colourings, Math. Gazette 32 (1948), 67-69

[6] G. Fan, *Covering graphs by cycles*, SIAM J. Discrete Math. 5 (4) (1992), 491-496

[7] G. Fan,A. Raspaud, *Fulkerson's Conjecture and circuit cover*s, J. Combin. Theory Ser. B 61 (1994), 133–138.

[8] J.L. Fouquet, J.M. Vanherpe, *On Fulkerson conjecture*, preprint (2009)

[9] D.R. Fulkerson, *Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra*, Math. Programming 1 (1971), 168-194.

[10] R. X. Hao, R. B. Niu, X. F. Wang, C.Q. Zhang and T. Y. Zhang, *A note on Berge-Fulkerson coloring*, Discrete Mathematics in Press (2009).

[11] M. Chladný, M. Škoviera, *Factorisation of snarks*, Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 17(1) (2010).

[12] R. Isaacs, *Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable*, Amer. Math. Monthly, Vol. 82, No. 3. (Mar., 1975), 221-239.

[13] F. Jaeger, *Flows and generalized coloring theorems in Graphs*, J. Combinatorial Theory Ser. B 26 (1979), 205-216.

[14] R. Nedela, M. Skoviera, *Decompositions and reductions of snarks.*, Journal of Graph Theory, Vol. 22 (1996), 253-279.

[15] S. Norine, T. Kaiser, D. Kráľ, *Unions of perfect matchings in cubic graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 22 (2005), 341-345.

[16] P.D. Seymour, *Some unsolved problems on one-factorizations of graphs, Graph theory and Related Topics*, J.A. Bondy and U.S.R. Murty (Editors), Academic, New York (1979), 367-368.

[17] P.D. Seymour, *On multi-colourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte*, Proc. London Math Soc. 38 (1979), 423-460.

[18] P.D. Seymour, *Sums of circuits.*, Graph Theory and Related Topics (eds. J. A. Bondy and U. S. R.. Murty), Academic Press (1978), 341-355.

[19] P.D. Seymour, *Nowhere-zero 6-flows*, J. Combinatorial Theory Ser. B 30 (1981), 130-135.

[20] G. Szekeres, *Polyhedral decompositions of cubic graphs*, Bull. Austral. Math. Soc. 8 (1973), 367-387.

[21] W.T. Tutte, *A Contribution on the Theory of Chromatic Polynomials*, Canad. J. Math. 6 (1954), 80-91.

[22] J.J. Watkins, *On the construction of snarks*, Ars Comb. 16-B (1983), 111-123

[23] J.J. Watkins, R.J. Wilson, *A survey of snarks*, Graph Theory, Combinatorics and Applications Vol. 2, Y. Alavi et al. (eds.), Wiley-Interscience, New York (1991), 1129-1144

[24] J.J. Watkins, *Snarks*, Ann. New York Acad. Sci. 576 (1989), 606-622.