



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra informatiky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Zložitosťné aspekty optických sietí

Bratislava, 2006

Michal Gondek



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY

Zložitosťné aspekty optických sietí

Autor: Michal Gondek
Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.

2006

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce
doc. RNDr. Rastislavovi Královičovi, PhD.
za pomoc a cenné pripomienky pri
vypracovávaní diplomovej práce.

Čestne prehlasujem, že diplomovú prácu
som vypracoval samostatne s použitím
uvedenej literatúry.

.....

Abstrakt

V tejto práci uvažujeme problém návrhu sietí používajúcich plne optickú routovaciu technológiu s istou mierou odolnosti voči výpadku určitého počtu hrán (tzv. prežiteľnosť komunikácie, vlastnosť prežiteľnosti). V takýchto sieťach sú všetky správy prenášané v optickej forme od zdroja až k cieľu, a smerovanie sa vykonáva na optickom signále. Optické signály môžu použitím rôznych vlnových dĺžok používať rovnakú hranu. Signály používajúce rovnakú vlnovú dĺžku však musia používať hranovo nezávislé cesty. Odolnosť pri výpadku hrán realizujeme technikou pokrytia siete podsietami, ktoré sú chránené nezávislé jedna od druhej. Nadväzujeme na práce zaoberajúce sa touto problematikou a prinášame nové výsledky pri routovacích algoritmoch zahrňujúcich kvalitatívnu vlastnosť prežiteľnosti na fyzickej sieti s topológiou torusu, 2-rozmernej mriežky, 3-rozmernej toroidnej mriežky a 3-rozmernej mriežky. Ako podsieť uvažujeme cykly na komunikačnej schéme (inštancie) úplnej výmeny I_A (all-to-all, všetky uzly navzájom komunikujú). Odhadli sme dolné hranice počtu potrebných vlnových dĺžok. Navrhli sme univerzálny spôsob (algoritmus), ktorým sme sa na skúmaných topológiách k týmto odhadom asymptoticky priblížili.

Kľúčové slová: WDM fault-tolerance, routing cycles over d-dimensional square and tori,

Obsah

1. Úvod	1
1.1. Motivácia	1
1.2. Vývoj	1
1.3. Optický model	3
1.4. Nastavenie prepínačov.....	4
1.5. Spoľahlivosť.....	4
2. Definície	6
2.1. Označenia	6
2.2. Ďalšie skúmané problémy.....	6
2.3. Druhy inštancií.....	7
2.4. Problém spoľahlivosti (prežiteľnosti)	7
3. Prehľad v oblasti	9
3.1. Všeobecné poznatky	9
3.2. Efektívne routovacie algoritmy	9
3.3. Pokrývanie grafu podgrafmi	11
3.4. Prežiteľnosť komunikácie na kruhoch pre all-to-all komunikáciu	12
4. Naše výsledky	13
4.1. Dolný odhad pokrytím cyklov	15
4.1.1. Dolný odhad na toruse.....	15
4.1.2. Dolný odhad pre mriežku	18
4.1.3. Dolný odhad pre m-rozmernú mriežku a m-rozmernú toroidnú mriežku	21
4.2. Algoritmy realizujúce komunikáciu I_A na toruse	23
4.2.1. Rozdelenie požiadaviek do množín M_l	23
4.2.2. Realizácia požiadaviek množiny M_l	25
4.2.3. Komunikácia na kruhoch	25
4.2.4. Realizácia cyklov	29
4.2.5. Komunikácia medzi dvoma štvorcami	30
4.2.6. Ohraničenie počtu vlnových dĺžok.....	34
4.3. Algoritmus realizujúci I_A na mriežke.....	37

4.4.	<i>Náčrt algoritmu</i>	41
4.5.	<i>Algoritmy pre 3 – rozmernú mriežku a torus</i>	42
4.6.	<i>Algoritmus n^3 pre torus $n \times n$</i>	46
5.	Zhrnutie	50
6.	Použitá literatúra	51

1. Úvod

Táto práca sa zaoberá teoretickými poznatkami dosiahnutými v oblasti optických sietí s optickým routovaním podľa vlnovej dĺžky. Prihliada pri tom na vlastnosť prežiteľnosti siete, čo je akýmsi atribútom spoľahlivosti pri výpadkoch niektorých jej častí. Snaží sa plynulo nadviazať na práce zaoberajúce sa touto problematikou a prináša nové výsledky pri routovacích algoritmoch zahrňujúcich túto kvalitatívnu vlastnosť na fyzickej sieti s topológiou torusu, 2-rozmernej mriežky, 3-rozmernej toroidnej mriežky a 3-rozmernej mriežky. Prináša tiež dolné ohraničenie pre m -rozmernú mriežku a m -rozmernú toroidnú mriežku.

1.1. Motivácia

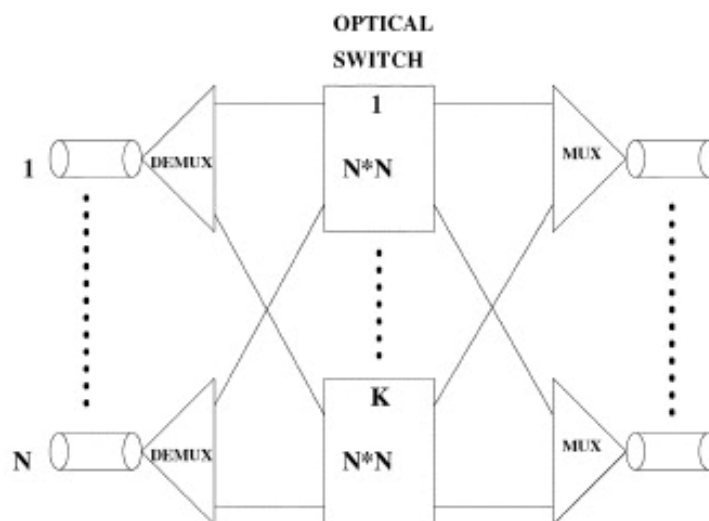
Optické siete ponúkajú možnosť vzájomného prepojenia stovkám až tisíckam užívateľov. Umožňujú pokrytie od lokálnych oblastí až po široko vzdialené. Odolávajú rušivým vplyvom prostredia a poskytujú kapacity rádovo prevyšujúce tradičné technológie. Tradičné siete používajú elektrickú formu na prepínanie signálov, ktoré môžu byť modulované elektronicky s maximálnou priepustnosťou rádovo okolo 10 Gbps, zatiaľ čo šírka pásma optického vlákna je približne 10THz. Pri takejto šírke pásma, uvažujúc binárny prenos sa podľa Nyquista teoreticky môžeme dostať až na 20 Tbps. Z toho dôvodu sú všetky prepínacie uzly takejto siete, kde sa musí signál v optickej forme meniť na elektrickú a potom nasledovne späť na optickú formu, znížením jej priepustnosti.

Celo-optické komunikačné siete využívajú fotonické technológie na implementáciu oboch, prepínacej aj prenosovej funkcie. V týchto sieťach je široké pásmo optického vlákna spravované a udržiavané cez delenie a skladanie vlnových dĺžok (wavelength division multiplexing). Jedná fyzická optická linka môže niesť niekoľko logických signálov vysielaných na rôznych vlnových dĺžkach. Informácia, raz vyslaná do siete ako svetlo, dosiahne svoj cieľ bez konvertovania do elektrickej formy počas jej cesty. Tým sa dosahuje maximálna komunikačná rýchlosť svetla.

1.2. Vývoj

Zrejme netreba nikoho priveľmi dlho presviedčať o opodstatnenosti výskumu v tejto oblasti super-rýchlych plne-optických sietí. S príchodom technologických novín a inovácií sa často menia aj ciele teoretického výskumu a modelovania, a pribúdajú aj stále nové a nové problémy. Niektoré problémy sa riešia teoretickým výskumom a iné zas príchodom novej a modernejšej technológie, čím na sebe umožnia aplikáciu iných teoretických modelov. S pokrokom technológie sa musia meniť aj algoritmy riadiace tieto super rýchle prúdy dát v týchto sieťach.

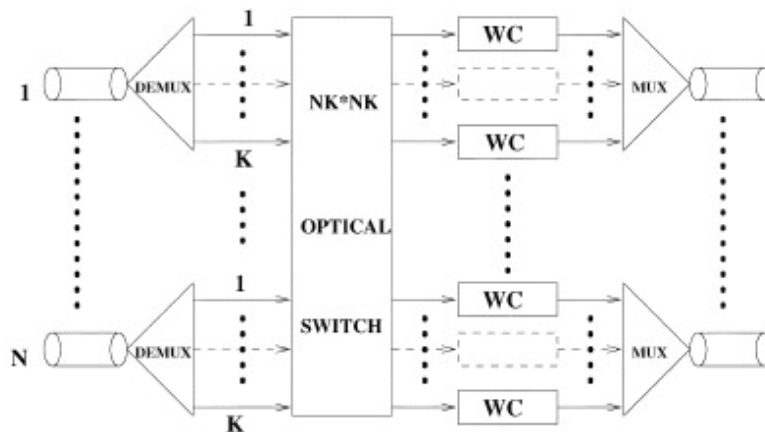
Pri počiatkoch optickej technológie bolo možné technicky posielat' v jednom optickom vlákne len jeden svetelný signál. Neskôr sa už v jednom vlákne dalo viesť aj viacero signálov, vzájomne sa od seba líšiacich vlnovou dĺžkou. Takáto technika je tiež známa ako wavelength-division multiplexing (WDM). Keďže frekvencia a vlnová dĺžka sú závislé ($f \cdot \lambda = c$, rýchlosť svetla), je WDM konceptuálne podobná frequency division multiplexing FDM. Svetelný signál tiež po ceste vo vlákne slabne a treba ho zosilňovať. Donedávna sa signál zosilňoval len elektronicky. Elektronické zosilňovače však predstavovali pri možnostiach využitia pásma optickej siete výrazne zdržanie. S príchodom optického zosilňovača založeného na Erbiových-dávkach bol tento problém vyriešený. Ďalším zdržaním boli elektronické routre používané v týchto sieťach. S príchodom plne optických smerovačov, ktoré dokázali smerovať signály prichádzajúce na rôznych vlnových dĺžkach na rôzne výstupy (Obr.1) bol aj tento problém vyriešený. Avšak aj tu boli obmedzenia a to hlavne neschopnosť meniť v smerovači vlnovú dĺžku. To sa riešilo rafinovaným pridelovaním ciest v sieti a vlnovej dĺžky týmto cestám. Vo výskumných laboratóriách už boli skúšané aj smerovače, schopné pri



Obr.1. Optický smerovač

smerovaní konvertovať vlnovú dĺžku signálu (čiastočne, ale aj úplne) (Obr. 2). Na komerčnom trhu sa však zatiaľ neobjavili, ale v blízkej budúcnosti sa to dá očakávať. Táto novinka zasa ponúka nové možnosti. Jedna úloha v tejto oblasti sa však nemení. A to minimalizovať cenu plno-optickej siete, kde sa prihliada na množstvo použitia jednotlivých sieťových prvkov vzhľadom na komunikačnú potrebu v sieti a topológiu.

Napriek tomu že majú optické siete veľmi nízku chybovosť, vznikla potreba skúmať vlastnosť spoľahlivosti takej siete. Ide hlavne o prežitie komunikácie pri výpadku niektorých z liniek. Tým sa do istej miery zaoberá aj táto práca.



Obr.2 :Optický smerovač so schopnosťou konvertovať vlnové dĺžky signálov

1.3. Optický model

Vo všeobecnosti, WDM optická sieť pozostáva z prepínacích uzlov, vzájomne pospájaných optickými linkami, ktoré môžu podporovať prenos určitého množstva vlnových dĺžok. Rovnaké vlnové dĺžky na dvoch vstupných portoch nemožu byť nasmerované na rovnaký výstup z dôvodu elektromagnetickej interferencie. V tejto práci budeme uvažovať prepínacie siete s všeobecnými prepínačmi, založenými na akusto-optických filtroch. V tomto type sietí signál, pre dve rôzne požiadavky, môže cestovať na tej istej komunikačnej linke do uzla v (používajúc rôzne vlnové dĺžky) a opustiť uzol v použijúc rôzne komunikačné linky. Teda fotonický prepínač (switch) dokáže rozlíšiť komunikáciu prichádzajúcu z komunikačnej linky na rôznych vlnových dĺžkach a určiť pre každú vlnovú dĺžku rôzny výstup prepínača. Platí však obmedzenie, že žiadne dve cesty v sieti zdieľajúce optickú linku nemajú priradenú rovnakú vlnovú dĺžku. V prepínacích optických sieťach je umožnené znovupoužitie vlnovej dĺžky, čo dramaticky redukuje počet potrebných vlnových dĺžok v porovnaní so sieťami neprepínajúcimi.

Prepínacie optické siete teda pozostávajú zo vzájomne pospájaných uzlov, ktoré môžu byť terminály, prepínače, alebo oboje. Terminály posielajú a primajú signály a prepínače smerujú svoje vstupné signály na jeden alebo viac zo svojich výstupov. Každá linka je obojsmerná a v skutočnosti pozostáva z páru jednosmerných liniek.

Niektorí autori uvažovali topológie s neorientovanými optickými linkami nesúcimi neorientované cesty. No čoraz viac bolo zrejme, že optické zosilňovače umiestnené na vlákne budú orientované zariadenia. Preto modelujeme optickú sieť ako symetrický orientovaný graf $G=(V(G), A(G))$, kde každá orientovaná hrana reprezentuje point-to-point jednosmernú optickú linku. Požiadavka *request* pozostáva z páru uzlov, dožadujúcich sa komunikácie. A inštanciu budeme chápať ako množinu požiadaviek. Riešenie pozostáva z nastavenia

prepínačov a priradenia vlnových dĺžok požiadavkám tak, že medzi párami uzlov všetkých požiadaviek existuje v grafe G cesta (jedným aj druhým smerom) a žiadna orientovaná hrana nenesie dva rôzne signály na rovnakej vlnovej dĺžke.

Cena a realizovateľnosť prepínačov a zosilňovacích zariadení závisí od počtu vlnových dĺžok, ktoré dokážu tieto zariadenia spracovať. Zatiaľ čo experimentálne systémy vyhlasujú do 100 vlnových dĺžok na vlákno, komerčné WDM multiplexery (skladače) dokážu spracovať do 20(IBM) vlnových dĺžok. Preto je snaha minimalizovať počet vlnových dĺžok použitých v riešení. Ak je požadovaný väčší počet vlnových dĺžok ako je v sieti aktuálne k dispozícii je nemožné uspokojiť všetky požiadavky na spojenie.

Optické prepínače nemenia vlnovú dĺžku signálov cez ne prechádzajúcich. Ak by uzol mohol meniť vlnovú dĺžku, na ktorej bol signál do siete vyslaný, smerovať inštanciu použijúc minimálne množstvo vlnových dĺžok by bolo ekvivalentné nájdeniu minimálneho toku v grafe.

1.4. Nastavenie prepínačov

Skutočný proces nastavenia prepínačov, určenie ciest pre požiadavky a priradenie vlnových dĺžok je realizované za pomoci elektronickej chrbtovej kontrolnej siete. Môžeme si klásť otázku použitia relatívne pomalej elektronickej siete (tradičná sieť s elektronickými prepínačmi) na nastavenie vysoko rýchlostných spojení. V skutočnosti, prevažné použitie týchto vysoko rýchlostných sietí požaduje spojenia potrebujúce raz nastaviť a trvajúce relatívne dlhšiu dobu. Požiadavka o spojenie je akceptovaná a spojenie je nastavené akonáhle je požiadavka uskutočniteľná.

Využitie takýchto sietí sa počíta hlavne v telekomunikačnom priemysle, a to na uskutočnenie telefónnych spojení bez zdržania. Tieto siete je možné použiť všade, kde je potrebné vytvárať rýchle a spoľahlivé spojenia na relatívne dlhšiu dobu (napr. video telefóny, video konferencie).

1.5. Spoľahlivosť

Spoľahlivosť siete, prežiteľnosť, resp. jej schopnosť obnoviť prenos ovplyvnený chybami sa stáva ďalšou kľúčovou témou pri návrhu týchto extrémne-vysoko kapacitných sietí založených na WDM technológií. Uvažujeme návrh prežiteľnej WDM siete založenej na pokrytí počítačovej siete podsietami, ktoré sú jedna od druhej nezávisle chránené.

Plánovanie optickej vrstvy môže byť rozložené na dva podproblémy:

- problém routovania: spočítať smerovanie požiadaviek vlnových dĺžok na fyzickú vrstvu
- problém priradenia zdrojov: alokácia zdrojov požiadavkám routovania

Teda problém prežiteľnosti oproti vybaveniu alebo chyby linky pozostáva z vypočítania nových nasmerovaní pre požiadavky ovplyvnené chybou. Teda optická vrstva musí byť predimenzovaná.

Je možné implementovať dve schémy vlastnosti prežiteľnosti: ochrana (protection) a obnovenie (restoration)

- *Ochrana* môže byť implementovaná použitím dopredu priradenej kapacity medzi uzlami za účelom nahradenia zlyhajúcej transportnej entity
- *Obnovenie* môže byť realizované použitým ľubovoľnej voľnej kapacity medzi uzlami v snahe nájsť transportnú entitu, ktorá by mohla nahradiť tú, čo zlyhala. Obnovenie je založené na presmerovávacích algoritmoch, ktoré hľadajú novú cestu aby prekryli zlyhajúcu sieťovú entitu v čase, kedy chyba nastala.

Rozdelenie siete do nezávislých podsietí prináša stredné riešenie pre vlastnosť prežiteľnosti. Samozrejme to dovoľuje zdieľanie zdrojov v rámci danej pod-siete, a tiež využíva rýchlu automatickú ochranu v prípade zlyhania nejakej sieťovej entity.

V tejto práci sa zaujímate o návrh optickej vrstvy založenej na pod-sieťach s vlastnosťou prežiteľnosti. Cieľom je pokryť inštanciu požiadaviek, množinou cyklov. Ako podsieť je zvolená ring topológia, keďže minimalizuje komplexnosť problému routovania s plnou podporou prežiteľnosti pri nastatí jednoduchej chyby. Samozrejme, používame polovicu kapacity cyklu pre uspokojenie požiadaviek a v prípade zlyhania presmerujeme komunikáciu idúcu chybnou linkou cez zostávajúcu časť cyklu využívajúc druhú polovicu kapacity. Zaujímavé je používať ako podsiete veľmi malé cykly, keďže sú ľahšie manažovateľné a ľahšie presmerovateľné. Taktiež, každému cyklu priradíme vlnovú dĺžku. (v skutočnosti dve: jednu pre normálny prenos, a jednu pre rezervný.) Navyše musí byť splnená podmienka (vlastnosť) disjunktného smerovania každého cyklu (disjoint routing cycle) vo fyzickom grafe. To znamená, že v jednom cykle nesmie byť použitá tá istá hrana viackrát ako raz.

Cieľom je minimalizovať funkciu ceny siete. Je to veľmi komplexná funkcia závislá na mnohých parametroch a je ťažké študovať ju vo všeobecnosti. My ju budeme redukovať na minimalizáciu počtu cyklov v pokrytí.

2. Definície

Existuje viacero spôsobov ako by sa dala modelovať plne-optická sieť. V tejto práci ju budeme modelovať symetrickým digrafom $G(V,A)$, čo je orientovaný graf s množinou vrcholov $V(G)$ a množinou orientovaných hrán $A(G)$ taký, že ak hrana $\alpha = (v, v) \in A(G)$, potom aj $\alpha' = (v, u) \in A(G)$. Ako N budeme označovať počet vrcholov v G , teda $N = |V(G)|$.

2.1. Označenia

Budeme používať nasledujúce označenia a pojmy:

- $G(V, A)$ - symetrický digraf
- $P(x, y)$ - cesta z vrcholu x do vrcholu y
- $\delta(x, y)$ - vzdialenosť z vrcholu x do vrcholu y , dĺžka najkratšej cesty $P(x, y)$
- *požiadavka* - usporiadaná dvojica (x, y) , označuje požiadavku x komunikovať s y
- *inštancia* I - súbor požiadaviek
- *smerovanie* R - (routovanie) pre *inštanciu* I v G je množina ciest

$$R = \{P(x, y) | (x, y) \in I\}$$
- *konfliktný graf* - spojený s routovaním R je neorientovaný graf (R, E) s množinou vrcholov R a hrana je medzi cestami, ktoré si zdieľajú hranu v G

➤ Problém routovania (G, I)

- pozostáva z nájdenia *routovania* R pre *inštanciu* I a priradenia vlnovej dĺžky každej *požiadavke* z I tak, aby žiadne dve cesty z R zdieľajúce hranu v G nemali priradenú rovnakú vlnovú dĺžku.
- Priradenie vlnových dĺžok \approx vrcholové farbenie konfliktného grafu

Hovoríme, že algoritmus efektívny ak skončí svoj výpočet v polynomiálnom čase.

2.2. Ďalšie skúmané problémy

V tejto kapitole si uvedieme ďalšie označenia a súvisiace parametre.

- $\bar{w}(G, I, R)$
 - chromatické číslo konfliktného grafu
 - najmenší počet vlnových dĺžok pre R
- $\bar{w}(G, I)$
 - najmenšie $w(G, I, R)$ cez všetky R
 - najmenší počet vlnových dĺžok zo všetkých R

- $\bar{\pi}(G, I, R, a)$
 - load hrany a v R
 - počet ciest v R obsahujúci hranu a
- $\bar{\pi}(G, I, R)$
 - load G v R
 - maximálny load hrany v G , teda $\bar{\pi}(G, I, R) = \max\{\bar{\pi}(G, I, R, a) \mid \forall a \in A(G)\}$
- $\bar{\pi}(G, I)$
 - minimálny $\bar{\pi}(G, I, R)$ cez všetky R

2.3. Druhy inštancií

Uvedieme si nejaké špeciálne inštancie, na ktorých sa zvyknú skúmať problémy v tejto oblasti ak je to samozrejme zmysluplné.

- All-to-All (I_A)
 - komunikácia každý s každým
 - $I_A = \{(x, y) \mid x \in V(G), y \in V(G), x \neq y\}$
- One-to-All
 - komunikácia jeden zvolený s každým
- One-to-Many
 - komunikácia jeden s niekoľkými
- k-relácie
 - každý vrchol komunikuje s maximálne k vrcholmi

Ukazuje sa zmysluplné pozeráť sa na inštanciu ako na komunikačný logický graf, kde $V(G)$ je množina vrcholov a hranu reprezentujú páry vrcholov, ktoré chcú vzájomne komunikovať.

2.4. Problém spoľahlivosti (prežiteľnosti)

Uvažujme komunikačnú inštanciu I a prežiteľné routovanie R pre danú dvojicu (G, I) (Sieť a jej komunikácia).

- každému prvku z inštancie I je priradená svetelná cesta v grafe G (túto množinu voláme základnou množinou ciest na G realizujúc I)
- rozšírime základnú množinu ciest, virtuálny graf (berúc svetelné cesty ako hrany v grafe) tak, že každá svetelná cesta virtuálneho grafu bude obsiahnutá v nejakom DRC pod-grafe.

DRC pod-graf (disjoint routing constraint pod-graf) virtuálneho grafu je taký pod-graf, ktorý môže byť vložený do fyzickej siete (grafu G) bez prekrytia hrán a každá svetelná cesta DRC pod-grafu sa nachádza v jednoduchom cykle fyzického grafu.

Môžeme uvažovať nasledujúce miery efektívnosti:

- počet DRC podgrafov
- suma veľkosti DRC podgrafov,
ktoré pokrývajú základnú množinu virtuálneho grafu.

Snažíme sa teda riešiť problém, v ktorom pre danú sieť a komunikačnú inštanciu musíme určiť prežiteľné routovanie ciest také, aby počet a veľkosť DRC podgrafov, ktoré pokrývajú základnú množinu ciest boli minimálne.

3. Prehľad v oblasti

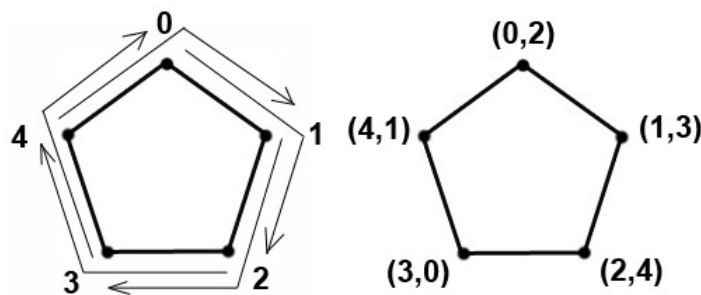
V tejto kapitole a stručne popíšeme niektoré výsledky dosiahnuté v tejto oblasti plne optických sietí.

3.1. Všeobecné poznatky

Z nasledujúceho tvrdenia by sa nám mala ozrejmiť opodstatnenosť niektorých definovaných mier a parametrov z 2. kapitoly.

Veta 1. *Pre ľubovoľnú inštanciu I v ľubovoľnej sieti G platí, že $\bar{w}(G, I) \geq \bar{\pi}(G, I)$.*

Dôkaz: Pri riešení daného (G, I) musíme použiť prinajmenšom počet vlnových dĺžok rovnajúci sa maximálnemu množstvu, ktoré si vzájomne zdieľajú v grafe G orientovanú hranu. Nerovnosť ukážeme na príklade (obr. 3.1), analogickému v [1].



Obr. 3.1: Routovanie piatich požiadaviek v päťuholníku a súvisiaci konfliktný graf.

Pre inštanciu I v grafe G je load $\bar{\pi}(G, I) = 2$, ale $\bar{w}(G, I) = 3$, keďže konfliktný graf je pentagon s chromatickým číslom 3 a klikou 2. ■

Vo všeobecnosti to znamená, že minimalizovanie počtu vlnových dĺžok (G, I) nieje to isté ako nájdenie routovania, ktoré minimalizuje počet ciest zdieľajúcich tú istú orientovanú hranu. Tvrdenie platí aj v neorientovanom modeli.

3.2. Efektívne routovacie algoritmy

V tejto kapitole uvádzame prehľad optimálnosti existujúcich efektívnych algoritmov pre riešenie problému (G, I) na rôznych topológiach. Prvá tabuľka poskytuje dosiahnuté výsledky pre orientovaný model, teda pre orientované požiadavky. Druhá zasa poskytuje výsledky pre neorientovaný model.

Efektívne algoritmy v orientovanom modeli			
	$\forall I$	I_A	I_1
Strom	$\leq 5\bar{\pi}(G, I)/3$ (Kaklamaniš, Persiano)	$\bar{w}(G, I_A) = \bar{\pi}(G, I_A)$ (Gargano, Hell, Perennes)	
Kruh	$\leq 2\bar{\pi}(G, I, R) - 1$ (Tucker)	$\leq 2 \left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{N^2}{4} \right\rceil \right\rceil - 1$	
Mriežka	$poly(\log \log N) \cdot \bar{w}(G, I)$ (Rabani)		
Hyperkocka		$\bar{w}(G, I_A) = \bar{\pi}(G, I_A)$ (Beauquier)	$O(1)$ (Aumann, Rabani)

Môžeme si všimnúť, že na stromoch pre I_A inštanciu poznáme optimálny efektívny algoritmus. Vo všeobecnosti sú výsledky o čosi horšie. Pre $\bar{w}(G, I)$ je dokázané tvrdenie:

Veta 2. Pre $\forall k$ existuje problém (G, I) v strome G taký, že $\bar{\pi}(G, I) \geq k$ a platí:

$$\frac{5\bar{\pi}(G, I)}{4} \leq \bar{w}(G, I) \leq \frac{3\bar{\pi}(G, I)}{2}$$

Pravá nerovnosť tvrdenia platí aj všeobecne a dokázali ju Mihail, Kaklamaniš a Rao. Vidíme, že algoritmus riešiaci na stromoch všeobecný prípad s maximálne $5\bar{\pi}(G, I)/3$ vlnovými dĺžkami pomerne dobre aproximuje optimálne riešenie. Pri stromoch je tiež zaujímavý prípad, keď graf G je rozvetvená hviezda, čo je symetrický strom s maximálne jedným vrcholom stupňa väčšieho ako 2. V takomto grafe a iba v takomto grafe G pre všetky inštancie I platí $\bar{w}(G, I) = \bar{\pi}(G, I)$.

Na kruhoch Frank našiel algoritmus, ktorý v lineárnom čase nájde routovanie R , pre ktoré platí: $\pi(G, I, R) = \pi(G, I)$. Využívajúc tento poznatok Tucker priniesol efektívny algoritmus, ktorý rieši problém priradenia vlnových dĺžok routovaniu R , použijúc najviac $2\pi(G, I, R) - 1$. Použitím podobných myšlienok bol dokázaný tento výsledok v orientovanom aj neorientovanom modeli.

Pre All-to-All inštancie na kruhu bolo dokázané nasledujúce tvrdenie:

Veta 3. (Bermond) Pre I_A na kruhu G s N vrcholmi platí:

$$\bar{w}(G, I_A) = \bar{\pi}(G, I_A) = \left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{N^2}{4} \right\rceil \right\rceil$$

Použitím vety 3. v predchádzajúcom Tuckerovom algoritme dostávame horné ohraničenie vlnových dĺžok pre All-to-All inštancie na kruhoch.

Efektívne algoritmy v neorientovanom modeli			
	$\forall I$	I_1	I_k
Strom	$\leq \lfloor 1.1w(G, I) + 0.8 \rfloor$ (Erlebach, Jansen)		
Kruh	$\leq 2\pi(G, I, R) - 1$ (Frank)		
Torus	$O(\log N \log I w(G, I))$ (Aumann, Rabani)		
d-rozmerná Mriežka			$O(kdn^{1/d})$ (Raghavan, Upfal)
Hyperkocka		$O(1)$ (Aumann, Rabani)	

V neorientovanom modeli boli pri algoritmoch na stromoch dosiahnuté o čosi lepšie výsledky oproti orientovanému modelu. Na kruhoch sú výsledky dosť podobné tým v orientovanom modeli. Isté výsledky sa podarilo dosiahnuť aj na toruse a hyperkockách. Pri d-rozmernej mriežke je tiež známy algoritmus pre I_k , ktorý s vysokou pravdepodobnosťou používa $O(kdn^{1/d})$ vlnových dĺžok.

3.3. Pokryvanie grafu podgrafmi

Nech K_n je kompletný graf s n vrcholmi. Vo všeobecnosti pre pokrývanie kompletného grafu cyklami veľkosti 3 a 4 platia nasledujúce tvrdenia určujúce dolnú hranicu počtu cyklov potrebných na pokrytie (viď [11]).

Veta 4. Minimálny počet 3-cyklov potrebných na pokrytie hrán K_n je

$$\left\lceil \frac{n}{3} \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right\rceil$$

Veta 5. Minimálny počet 4-cyklov potrebných na pokrytie hrán K_n je

$$\left\lceil \frac{n}{4} \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right\rceil + \varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{ak } n \equiv 3 \pmod{8} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

3.4. Prežiteľnosť komunikácie na kruhoch pre all-to-all komunikáciu

V tejto časti uvažujme graf G ako cyklus C_n , kde n je počet vrcholov. Označme vrcholy celými číslami z $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Cyklus C_k spĺňa DRC podmienku vtedy a len vtedy ak vrcholy cyklu môžu byť zoradené do vzostupnej postupnosti. Teda či sa dajú vrcholy zapísať ako (a_1, a_2, \dots, a_k) tak, že platí $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n-1$. Takto formulovaná podmienka je DRC podmienkou pre cykly, ako podgrafy grafu K_n , platná iba na kruhoch. Odráža fakt, že ak podgraf je cyklický a má byť vložiteľný do fyzického grafu G , ktorý je v tomto prípade kruh, musia byť vrcholy cyklicky usporiadateľné, aby sa hrany podgrafu vo fyzickom grafe neprekrývali.

Označme $P(n)$ ako minimálny počet cyklov potrebných na pokrytie komunikačného grafu daného inštanciu I_a v sieti topológie kruhu s n vrcholmi so splnenou DRC podmienkou platí:

Veta 6.

$$P(2p+1) \geq \frac{p(p+1)}{2}, \text{ ak } p \geq 1$$

$$P(2p) \geq \frac{p^2+1}{2}, \text{ ak } p \geq 2$$

Dôkaz tvrdenia môže čitateľ nájsť v [2]. Veľkosť cyklov, ktorými K_n pokrývame nemá žiaden vplyv na dolnú hranicu počtu cyklov potrebných na jeho pokrytie.

Veta 7.

Pokrytie cyklami so splnenou DRC podmienkou grafu

$$K_{2p+1} \text{ - pozostáva z } p C_3 \text{ a } \frac{p(p-1)}{2} C_4$$

$$K_{4q} \text{ - pozostáva z } 4 C_3 \text{ a } 2q^2 - 3 C_4$$

$$K_{4q+1} \text{ - pozostáva z } 2 C_3 \text{ a } 2q^2 + 2q - 1 C_4$$

Na kruhu minimalizáciou počtu cyklov, ktoré pokrývajú inštanciu sme minimalizovali aj počet vlnových dĺžok potrebných na uskutočnenie požadovanej komunikácie v tejto sieti. A to z jednoduchého dôvodu. Pokrývali sme jednotlivé požiadavky z inštancie množinou cyklov, pričom pre každú takú požiadavku sme vo fyzickom grafe museli zvoliť dve alternatívne trasy. Lenže vo fyzickom grafe s topológiou kruhu máme práve dve cesty vedúce medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi. Problém routovania takej komunikácie bol v podstate vyriešený. Problém s priradeným vlnových dĺžok sa tiež zjednodušuje, keďže každému cyklu priradzujem $O(1)$ vlnových dĺžok. Teda na kruhoch s prežiteľnosťou je počet cyklov úmerný počtu vlnových dĺžok potrebných na uskutočnenie požadovanej komunikácie.

4. Naše výsledky

V tejto kapitole ukážeme ako je to s vlastnosťou prežiteľnosti na mriežke, toruse, viac rozmernej mriežke a viac rozmernej toroidnej mriežke. Spravíme dolný odhad minimálneho počtu cyklov potrebných pre pokrytie požiadaviek I_A na uvedených topológiách. Ukážeme si tiež, že minimálny počet vlnových dĺžok dokážeme zdola ohraničiť počtom vlnových dĺžok potrebných na realizáciu minimálneho počtu cyklov. Neskôr si popíšeme nejaké algoritmy asymptoticky dosahujúce naše dolné ohraničenia. Označme $wp(G)$ ako počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu požiadaviek I_A v grafe G s vlastnosťou prežiteľnosti.

Pripomeňme si, že dve disjunktné cesty v grafe môžu používať na komunikáciu rovnakú vlnovú dĺžku. Vlastnosť prežiteľnosti implementujeme tak, že pre každú komunikačnú požiadavku I_A priradíme dve nezávislé cesty. Jednu komunikačnú a jednu rezervnú, pre prípad výpadku komunikačnej. Tieto cesty budeme realizovať pomocou cyklov vnorených do grafu G . Urobíme to tak, že každej komunikačnej ceste požiadavky z I_A priradíme jeden cyklus, ktorý musí byť po vnorení do grafu G hranovo disjunktný. Taký cyklus môže obsahovať viac hranovo disjunktných komunikačných ciest. Každému z cyklov priradíme dve vlnové dĺžky (farby), komunikačnú a rezervnú. Dva cykly môžu používať rovnaké vlnové dĺžky ak sú hranovo disjunktné. Všetky cesty v cykle sú realizované komunikačnou vlnovou dĺžkou. V prípade prerušenia nejakej linky cyklu, presmerujeme komunikáciu prechádzajúcu chybnu linkou, opačnou stranou cyklu použitím alternatívnej vlnovej dĺžky. Problém $wp(G)$ je teda ekvivalentný problému nájdenia množiny cyklov takých, aby každá cesta požiadavky z I_A bola realizovaná v jednom z cyklov, a pre ktoré je počet vlnových dĺžok (farieb) potrebných na ich realizáciu po vnorení do grafu G minimálny.

Nasledujúca tabuľka zachytáva stručný prehľad výsledkov, ktoré sa nám podarilo dosiahnuť.

Prehľad dosiahnutých výsledkov pre I_A			
G	$wp(G)$		
Mriežka	$\geq \frac{n(n^2 - 1)}{3}$	$\leq c \frac{16}{7}(n^3 - 1)$	
Torus	$\geq \frac{n(n^2 - 1)}{4}, n = 2k + 1$ $\geq \frac{n^3}{4}, n = 2k$	$\leq c \frac{8}{7}(n^3 - 1)$	$\leq n^3$
3-rozmerná Mriežka		$\leq c \frac{32}{15}(n^4 - 1)$	
3-rozmerný Torus		$\leq c \frac{16}{15}(n^4 - 1)$	
m-rozmerná mriežka	$\geq \frac{n^{(m-2)}n(n^2 - 1)}{3}, m \geq 2$		
m-rozmerná toroidná mriežka	$\geq \frac{n^{(m-2)}n(n^2 - 1)}{4}, m \geq 2, n = 2k + 1$ $\geq \frac{n^{(m-2)}n^3}{4}, m \geq 2, n = 2k$		

V ďalších častiach tejto práce si dosiahnuté výsledky dokážeme.

4.1. Dolný odhad pokrytím cyklov

Podme si stručne opísať spôsob akým odhadneme dolnú hranicu počtu potrebných vlnových dĺžok. Ako sme už spomínali, uvažujeme inštanciu All-to-All komunikáciu, teda I_A . Každá požiadavka tejto inštancie musí byť realizovaná, pokrytá v nejakom cykle. Do cyklu samozrejme prispieva svojou dĺžkou. Dĺžka cyklu je pritom väčšia alebo rovná sume dĺžok požiadaviek, ktoré tento cyklus pokrýva. Teda ak si zrátame dĺžku všetkých požiadaviek inštancie I_A a predelíme maximálnou dĺžkou cyklu, dostávame minimálny počet cyklov, ktorými dokážeme tieto požiadavky realizovať. Využitím Dirichletovho princípu dokážeme odhadnúť minimálny load a podľa vety 1 (kap. 3) to bude minimálny počet vlnových dĺžok potrebných na pokrytie všetkých požiadaviek I_A .

4.1.1. Dolný odhad na toruse

Označme si $p(G, I)$ ako minimálny počet cyklov potrebných na pokrytie všetkých požiadaviek inštancie I v grafe G . Keďže v ďalšom texte budeme uvažovať len inštanciu I_A budeme pre zjednodušenie $p(G, I_A)$ označovať len ako $p(G)$. Taktiež $wc(G, I_A)$ budeme označovať len $wc(G)$ ako minimálny počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu všetkých cyklov pokrývajúcich všetky požiadavky inštancie I v grafe G . Vrcholy v G budeme reprezentovať súradnicami kartézskom súradnicovom systéme. Každý vrchol (x, y) má štyroch susedov.

Lema 4.1 *Nech $n \geq 2$, graf G je torus $n \times n$, potom*

$$p(G) \geq n(n^2 - 1) / 8, \text{ ak je } n \text{ nepárne,}$$

$$p(G) \geq n^3 / 8, \text{ ak je } n \text{ párne}$$

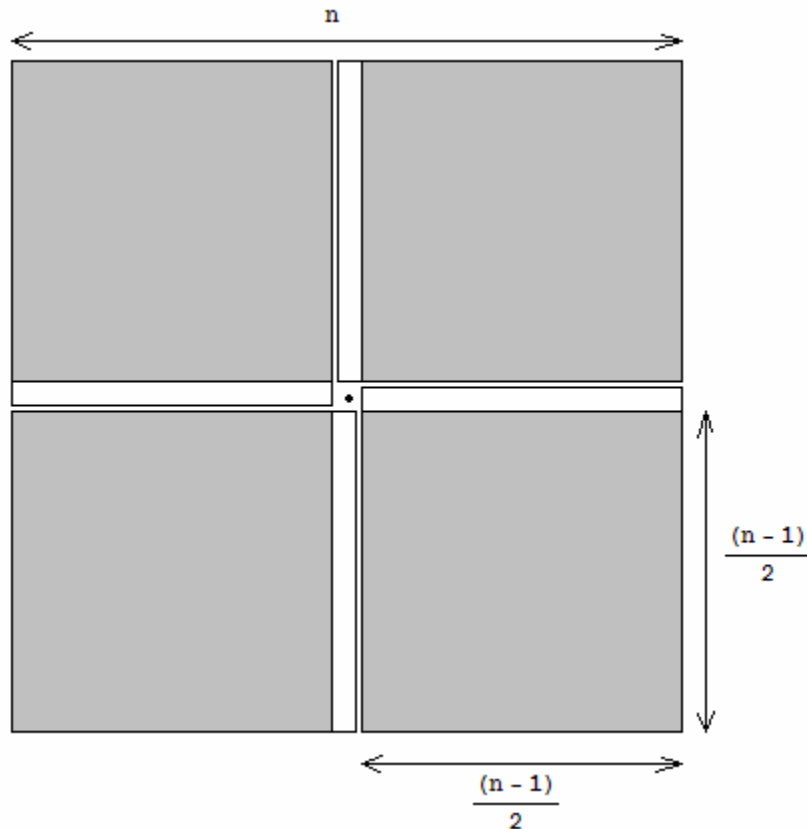
Dôkaz: Nech u a v sú dva ľubovoľné vrcholy v G . $\delta(u, v)$ je vzdialenosť najkratšej cesty medzi nimi. Je zrejmé, že $\sum_w \delta(u, w) = \sum_w \delta(v, w)$.

Nech $n = 2k + 1$. Vrcholy $V(G) - u$ môžeme rozdeliť do štyroch množín A, B, C, D , tak ako na obr. 4.1. Každá z týchto štyroch častí má tvar obdĺžnika rozmerov $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$.

Je jasné, že platí $\sum_{w \in A} \delta(u, w) = \sum_{w \in B} \delta(u, w) = \sum_{w \in C} \delta(u, w) = \sum_{w \in D} \delta(u, w)$. Nech A', B', C', D' sú ich štvorcové časti rozmerov $\frac{(n-1)}{2} \times \frac{(n-1)}{2}$. Je vidieť, že pre $X \in \{A, B, C, D\}$ a k nej

príslušnej X' platí $\sum_{w \in X} \delta(u, w) = \sum_{w \in X'} \delta(u, w) + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i$. Suma vzdialeností x-ových súradníc

štvorca X je rovná sume y-ových súradníc, a tá sa rovná $\frac{(n-1)}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i$

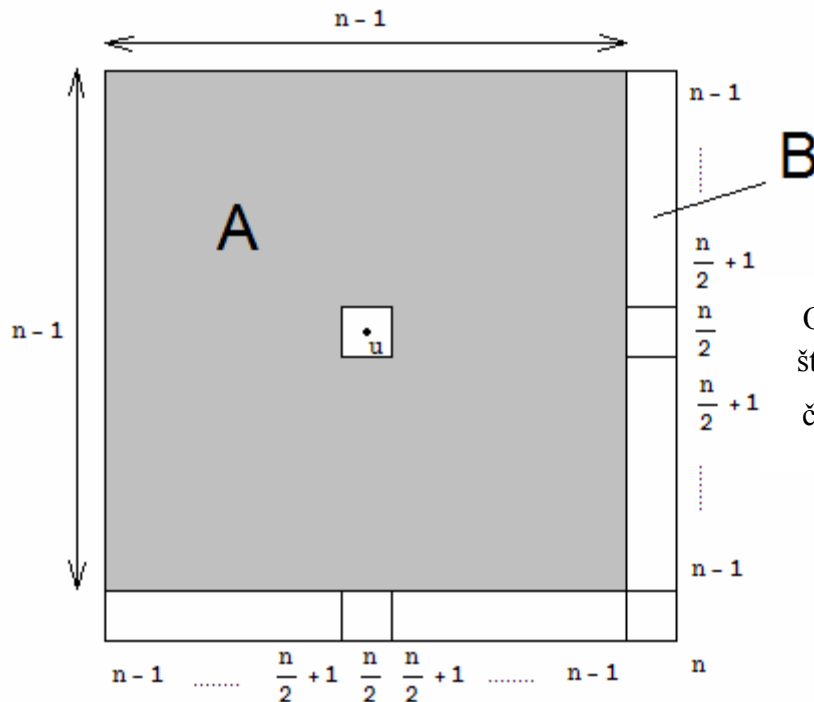
Obr.4.1 :Rozdelenie vrcholov $V(G) - u$ do štyroch disjunktných množín A, B, C, D

Celkovú sumu vzdialeností medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi grafu G môžeme teda spočítať nasledovne:

$$\begin{aligned} \sum_{u,v} \delta(u,v) &= \frac{n^2}{2} \sum_v \delta(u,v) = \frac{n^2}{2} \cdot 4 \cdot \sum_{w \in X} \delta(u,w) = \frac{n^2}{2} \cdot 4 \cdot \left[\sum_{w \in X'} \delta(u,w) + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i \right] = \\ &= \frac{n^2}{2} \cdot 4 \cdot \left[2 \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i \right] = \frac{n^2}{2} \cdot 4 \cdot \left[2 \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{n^2-1}{8} + \frac{n^2-1}{8} \right] = \\ &= \frac{n^2}{2} \cdot 4 \cdot \left[\frac{n^3-n^2-n+1}{8} + \frac{n^2-1}{8} \right] = \frac{n^2}{2} \cdot 4 \cdot \left[\frac{n^3-n}{8} \right] = \frac{n^3(n^2-1)}{4} \end{aligned}$$

Keďže cykly musia byť hranovo disjunktné, môžu mať maximálne dĺžku všetkých hrán v grafe G (torus - $n \times n$) a to $2n^2$. Dostávame teda minimálny počet cyklov potrebných na realizáciu všetkých požiadaviek v grafe G : $p(G) \geq \frac{n^3-n}{8}$.

Nech $n = 2k$. Vrcholy si rozdelíme na 2 časti. Na štvorec rozmerov $(n-1) \times (n-1)$ tak ako na obr. 4.2, časť A a ostatné vrcholy, časť B. Sumu $\sum_{w \in V(A)} \delta(u,w)$ vyrátame, podobne ako pre nepárne n .



Obr.4.2 :Rozdelenie vrcholov na štvorec rozmerov $(n-1) \times (n-1)$, časť A a ostatné vrcholy, časť B.

Zostáva teda vypočítať sumu vzdialeností medzi u a vrcholmi časti B $\sum_{w \in V(B)} \delta(u, w)$. Na obr. 4.2 máme vyznačené ako vyzerajú vzdialenosti vrcholov časti B od vrcholu u . Teda

$$\begin{aligned} \sum_{w \in V(B)} \delta(u, w) &= 2 \frac{n}{2} + 4 \left[\frac{n}{2} \left(\frac{n-2}{2} \right) + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i \right] + n = \\ &= 2n + 4 \left[\frac{n^2 - 2n}{4} + \frac{n^2 - 2n}{8} \right] = n^2 + \frac{n^2 - 2n}{2} = \frac{3n^2 - 2n}{2} \end{aligned}$$

Celkovú sumu spočítame nasledovne:

$$\begin{aligned} \sum_{u,v} \delta(u,v) &= \frac{n^2}{2} \sum_v \delta(u,v) = \frac{n^2}{2} \left[\sum_{v \in A} \delta(u,v) + \sum_{v \in B} \delta(u,v) \right] = \frac{n^2}{2} \left[4 \cdot \sum_{w \in X} \delta(u,w) + \sum_{v \in B} \delta(u,v) \right] = \\ &= \frac{n^2}{2} \left[4 \cdot \left[\frac{(n-1)^3 - (n-1)}{8} \right] + \frac{3n^2 - 2n}{2} \right] = \frac{n^2}{2} \left[\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{2} + \frac{3n^2 - 2n}{2} \right] = \frac{n^5}{4} \end{aligned}$$

Z rovnakého dôvodu ako v predchádzajúcom prípade dostávame minimálny počet cyklov potrebných na realizáciu všetkých požiadaviek v grafe $G : p(G) \geq \frac{n^3}{8}$. ■

Lema 4.2 *Ľubovoľným množstvom cyklov, navzájom sa neovplyvňujúcich (nemajú spoločné hrany) nie je možné pokryť dĺžku požiadaviek väčšiu ako $2n^2$, čo je suma dĺžok všetkých hrán v grafe G , kde G je torus rozmerov $n \times n$.*

Dôkaz: Keďže cykly nemôžu mať spoločné hrany, každá hrana grafu G môže byť časťou najviac jedného cyklu. Teda suma dĺžok všetkých cyklov nepresiahne sumu dĺžok všetkých hrán v G . ■

Veta 4.3 *Nech $n \geq 2$, graf G je torus $n \times n$, potom*

$$wc(G) \geq n(n^2 - 1)/4, \text{ ak je } n \text{ nepárne,}$$

$$wc(G) \geq n^3/4, \text{ ak je } n \text{ párne}$$

Dôkaz: Z lemy 4.1 máme minimálny počet cyklov potrebných na pokrytie požiadaviek v grafe G . Uvažovali sme samozrejme cykly s maximálnou možnou dĺžkou $2n^2$. Teda pre každý cyklus musíme prideliť rozdielne vlnové dĺžky. Z lemy 4.2 vyplýva, že aj keď nahradíme niektorý z cyklov niekoľkými navzájom sa neovplyvňujúcimi, aby sme nezvýšili počet potrebných vlnových dĺžok nedokážeme pokryť väčšiu dĺžku požiadaviek ako ten ktorý sme nimi nahradili. To znamená, že počet vlnových dĺžok potrebných pre minimálny počet maximálnych cyklov je optimálny. Keďže pre každý cyklus sú potrebné 2 vlnové dĺžky, dostávame naše tvrdenie. ■

Uvedomme si, že na realizáciu všetkých požiadaviek potrebujeme minimálne iba $p(G)$ vlnových dĺžok. Ostatné vlnové dĺžky sú pre prípad výpadku, a teda pre zachovanie vlastnosti prežiteľnosti siete. Na to by snáď bolo možné použiť aj nejakú spoločnú množinu rezervných vlnových dĺžok. Cyklu by sa tak priradila rezervná dĺžka až po nastaní výpadku.

4.1.2. Dolný odhad pre mriežku

Podobne ako pre torus, si teraz ukážeme dolný odhad pre mriežku.

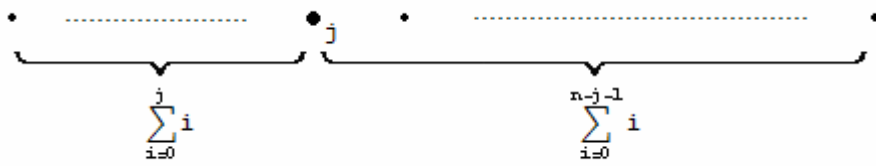
Lema 4.4 *Nech $n \geq 2$, graf G je mriežka $n \times n$, potom*

$$p(G) \geq n(n^2 - 1)/6.$$

Dôkaz: Pozrime sa na jeden riadok mriežky ako na graf G' (obr. 4.3). $|V(G)| = n$. Pokúsime sa zrátať sumu vzdialeností medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v grafe G' , $\sum_{u,v} \delta_{G'}(u,v)$.

Vezmime si ľubovoľný vrchol u v grafe G' a spočítame sumu vzdialenosti k všetkým ostatným vrcholom v tomto grafe, $\sum_v \delta_{G'}(u,v)$. Túto sumu si môžeme napísať ako súčet

dvoch súm v závislosti od pozície vrcholu u podobne ako na obr. 4.3.

Obr.4.3 : Suma vzdialeností od vrcholu u_j k vrcholom $V(G') - u_j$

Pre sumu medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi G' , $\sum_{u,v} \delta_{G'}(u,v)$ platí

$$\sum_{u,v} \delta_{G'}(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_v \delta_{G'}(u_j, v) \right],$$

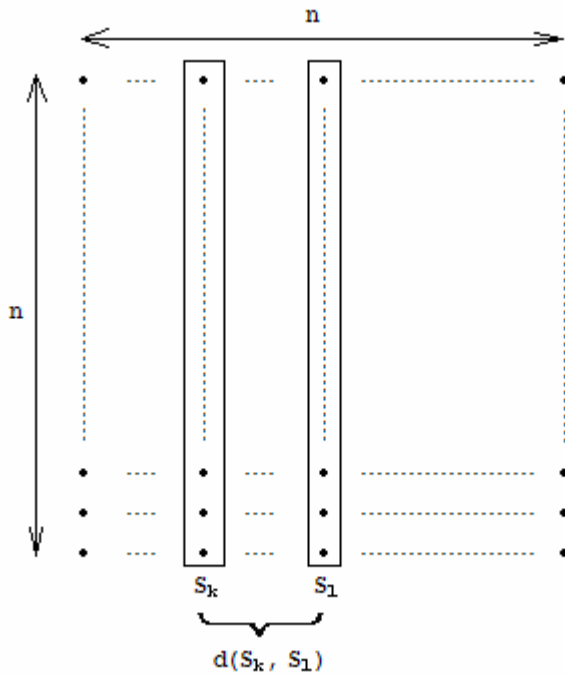
keďže každú vzdialenosť medzi dvoma vrcholmi zarátavame takto v $\sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_v \delta_{G'}(u_j, v) \right]$ dvakrát. Sumu vzdialeností ciest od vrcholu u_j (j je jeho pozícia v G') k všetkým ostatným vrcholom grafu G' zrátame nasledovne

$$\sum_v \delta_{G'}(u_j, v) = \sum_{i=0}^j i + \sum_{i=0}^{n-j-1} i.$$

Celková suma medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v grafe G' je

$$\begin{aligned} \sum_{u,v} \delta_{G'}(u,v) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_v \delta_{G'}(u_j, v) \right] = \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^y i + \sum_{i=0}^{n-1-y} i \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{n-1} \left[\frac{y(y+1)}{2} + \frac{(n-y-1) \cdot (n-y)}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{n-1} \left[\frac{y^2 + y}{2} + \frac{n^2 + y^2 - 2ny - n + y}{2} \right] = \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{n-1} \left[\frac{n^2 + 2y^2 + 2y - 2ny - n}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{n-1} \left[\frac{n^2 + 2y^2 + 2y - 2ny - n}{2} \right] = \frac{1}{4} \left[\sum_{y=0}^{n-1} n^2 + 2 \sum_{y=0}^{n-1} y^2 + \sum_{y=0}^{n-1} y - 2n \sum_{y=0}^{n-1} y - n^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[n^3 + 2 \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + 2 \frac{(n-1)n}{2} - 2n \frac{(n-1)n}{2} - n^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[n^3 + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{3} + n^2 - n - n^3 + n^2 - n^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2n^3 - 2n}{3} \right] = \frac{n^3 - n}{6} \end{aligned}$$

Keďže šírka grafu G je rovná jeho dĺžke, suma x-ových vzdialeností a y-ových vzdialeností ľubovoľných jeho dvoch vrcholov je rovnaká. Stačí teda spočítať jednu z nich. Predstavme si teraz dva stĺpce S_k, S_l , každý o n vrcholoch.



Obr.4.4 :Rozdelenie vrcholov na stĺpce.

Nech ich vzájomná vzdialenosť je rovná $d(S_k, S_l)$. Pričom $d(S_k, S_l)$ chápeme ako najkratšiu vzdialenosť od ľubovoľného vrcholu v stĺpci S_k k najbližšiemu vrcholu stĺpca S_l . Pozrime sa na sumu x-ových vzdialeností najkratších ciest, medzi ľubovoľnými vrcholmi u a v , kde u patrí stĺpcu S_k a v patrí stĺpcu S_l . Tá sa dá vyjadriť ako $n^2 \cdot d(S_k, S_l)$, keďže medzi stĺpcami S_k a S_l je potrebných n^2 ciest na realizáciu ich vzájomných požiadaviek. Môžeme si všimnúť, že $\sum_{k,l} d(S_k, S_l) = \sum_{u,v} \delta_G(u, v)$. Suma x-ových vzdialeností medzi ľubovoľnými

dvoma vrcholmi grafu G je teda rovná $n^2 \sum_{k,l} d(S_k, S_l) = n^2 \sum_{u,v} \delta_G(u, v) = \frac{n^3(n^2-1)}{6}$. Celková suma medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v grafe G je $\frac{n^3(n^2-1)}{3}$. Maximálna dĺžka cyklu na mriežke nikdy nepresiahne $2n^2$. Minimálny počet cyklov na pokrytie všetkých požiadaviek na mriežke je teda $\frac{n(n^2-1)}{6}$. ■

Lema 4.5 *Ľubovoľným množstvom cyklov, navzájom sa neovplyvňujúcich (nemajú spoločné hrany) nie je možné pokryť dĺžku požiadaviek väčšiu ako $2n^2$, čo je suma dĺžok všetkých hrán v grafe G , kde G je mriežka rozmerov $n \times n$.*

Dôkaz: Obdobne ako lema 4.2. Poznámka: netvrdíme, že cykly dĺžky $2n^2$ vieme v mriežke realizovať. ■

Veta 4.6 *Nech $n \geq 2$, graf G je mriežka $n \times n$, potom*

$$wc(G) \geq n(n^2 - 1) / 3$$

Dôkaz: Obdobne ako veta 4.3. Tvrdenie vyplýva z lemy 4.4 a lemy 4.5. ■

4.1.3. Dolný odhad pre m-rozmernú mriežku a m-rozmernú toroidnú mriežku

Podme si teraz odvodiť tvrdenia pre m-dimenzionálnu mriežku a m-dimenzionálnu toroidnú mriežku.

Veta 4.7 *Nech $n \geq 2$, graf G je m-dimenzionálna toroidná mriežka so stranou n vrcholov,*

potom

$$p(G) \geq \frac{n^{m-2}n(n^2-1)}{8}, \text{ ak je } n \text{ nepárne,}$$

$$p(G) \geq \frac{n^{m-2}n^3}{8}, \text{ ak je } n \text{ párne}$$

Dôkaz: Keďže náš graf je vo všetkých dimenziách rovnako veľký, zrejme aj sumy vzdialeností medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v jednotlivých dimenziách budú rovnako veľké. Rozdeľme si vrcholy grafu G na n rovnakých množín S_1, \dots, S_n podľa m -tej dimenzie. Teda vrcholy u a v budú patriť tej istej množine ak budú mať rovnaké súradnice v dimenzii m . Zrátame si sumu vzdialenosti v dimenzii m medzi jednotlivými množinami, $\sum_{S_k, S_l} d(S_k, S_l)$. Na realizovanie všetkých požiadaviek medzi množinami S_k a S_l je potrebné preklenúť vzdialenosť $d(S_k, S_l)$ v dimenzii m práve $|S_k| \cdot |S_l|$ krát. Keďže $|S_k| = |S_l| = n^{(m-1)}$, je to presne $n^{(m-1)} \cdot n^{(m-1)}$ krát, čo treba vzdialenosť $d(S_k, S_l)$ preklenúť v dimenzii m na realizáciu všetkých požiadaviek medzi množinami S_k a S_l . Teda celková suma vzdialeností medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi v grafe G v dimenzii m bude $n^{2(m-1)} \cdot \sum_{S_k, S_l} d(S_k, S_l)$. Počet dimenzií je m . Ako najväčšiu možnú dĺžku cyklu, zoberieme

dĺžku súčtu všetkých hrán v grafe G a to je mn^m . Pre $p(G)$ tým dostaneme

$$p(G) \geq \frac{n^{2(m-1)}}{mn^m} \cdot m \cdot \sum_{S_k, S_l} d(S_k, S_l) = n^{(m-2)} \cdot \sum_{S_k, S_l} d(S_k, S_l)$$

Podme si teda zrátat' $\sum_{S_k, S_l} d(S_k, S_l)$. Zrátame to analogicky ako v leme 4.4 pre mriežku.

Nech $n = 2k + 1$.

$$\sum_{S_k, S_l} d(S_k, S_l) = \frac{n}{2} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2i = n \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i = \frac{n(n^2-1)}{8}$$

Nech $n = 2k$.

$$\sum_{S_k, S_l} d(S_k, S_l) = \frac{n}{2} \left[\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2i + \frac{n}{2} \right] = n \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} i + \frac{n^2}{4} = n \frac{n^2 - 2n}{8} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^3}{8}. \blacksquare$$

Veta 4.8 Nech $n \geq 2$, graf G je m -dimenzionálna mriežka so stranou n vrcholov, potom

$$p(G) \geq \frac{n^{(m-2)}n(n^2 - 1)}{6}$$

Dôkaz: Dokážeme podobne ako vetu 4.7. ■

Veta 4.7b Nech $n \geq 2$, graf G je m -dimenzionálna toroidná mriežka so stranou n vrcholov, potom

$$wc(G) \geq \frac{n^{m-2}n(n^2 - 1)}{4}, \text{ ak je } n \text{ nepárne,}$$

$$wc(G) \geq \frac{n^{m-2}n^3}{4}, \text{ ak je } n \text{ párne}$$

Dôkaz: Veta 4.7b logicky vyplýva z vety 4.7 ak uvažujeme 2 vlnové dĺžky pre každý cyklus.

■

Veta 4.8b Nech $n \geq 2$, graf G je m -dimenzionálna mriežka so stranou n vrcholov, potom

$$wc(G) \geq \frac{n^{(m-2)}n(n^2 - 1)}{3}$$

Dôkaz: Veta 4.8b logicky vyplýva z vety 4.8 ak uvažujeme 2 vlnové dĺžky pre každý cyklus.

Poznámka: Môžeme si všimnúť, že lema 4.1 je tiež alternatívnym dôkazom pre $w(T(n), K_{n^2})$ (viď [9] [10] [12]). ■

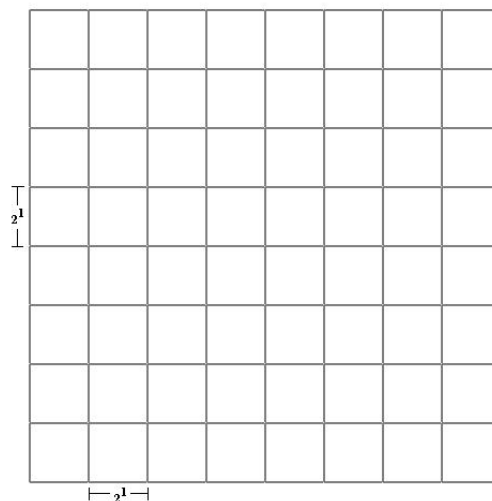
4.2. Algoritmy realizujúce komunikáciu I_A na toruse

V tejto časti si popíšeme, nejaké spôsoby ako realizovať požiadavky inštancie I_A na toruse, mriežke, trojrozmernej mriežke a trojrozmernej toroidnej mriežke. Ukážeme si univerzálny spôsob ako skonštruovať asymptoticky optimálne algoritmy pre všetky vyššie uvedené topológie. Neskôr si pre torus ukážeme lepší algoritmus, avšak nepoužiteľný na ostatných spomínaných topológiách.

Spomínaný univerzálny spôsob bude spočívať v rozdelení množiny požiadaviek I_A do množín M_l , kde $l = 1, 2, \dots, \log n$ (nie nutne disjunktných), kde každú z množín budeme realizovať inou sadou vlnových dĺžok. Samozrejme musí platiť $\bigcup_{l=1}^{\log n} M_l \equiv I_A$. Teda suma počtu vlnových dĺžok potrebných na realizáciu každej z množín bude stačiť na realizáciu všetkých požiadaviek inštancie I_A .

4.2.1. Rozdelenie požiadaviek do množín M_l

Nech G je torus s rozmermi $n \times n$. Pre každé $l = 0, 1, \dots, \log n - 1$, si rozdelíme G do štvorcov s dĺžkou strany 2^l (Obr. 4.5.). Pod dĺžkou strany budeme rozumieť počet vrcholov nachádzajúcich sa na tejto strane. Do množiny M_l všetky požiadavky medzi vrcholmi



Obr. 4.5: Jedno rozdelenie torusu na mriežky hrany 2^l

všetkých susedných štvorcov v rozdelení l . Medzi susedov rátame aj diagonálne štvorce. Množinu M_l budeme nazývať požiadavkami úrovne l alebo požiadavky rozdelenia l . Aby sme sa mohli zaoberať s požiadavkami týchto množín jednotlivo, musíme najprv ukázať, že každá požiadavka inštancie I_A patrí aspoň do jednej z množín M_l .

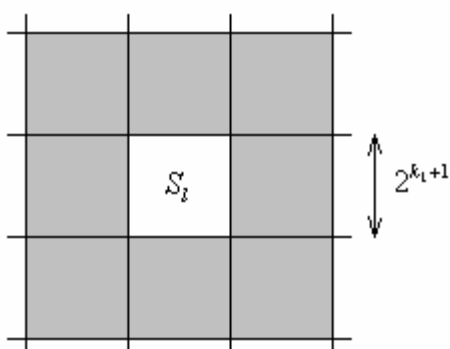
Lema (o rozdelení) Každá požiadavka I_A grafu G (mriežka, torus) patrí do jednej z množín M_l , kde $l = 0, 1, \dots, \log n - 1$.

Dôkaz: Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme ľubovoľnú požiadavku (v_1, v_2) v grafe G . Vzdialenosť medzi vrcholmi v_1 a v_2 si môžeme zapísať ako súčet x-ovej a y-ovej vzdialenosti. Teda $\delta(v_1, v_2) = dx(v_1, v_2) + dy(v_1, v_2)$. $dx(v_1, v_2)$ a $dy(v_1, v_2)$ budeme ďalej označovať len ako dx a dy . Tieto vzdialenosti si môžeme zapísať nasledovne v tvare:

$$dx = 2^{k_1} + z_1$$

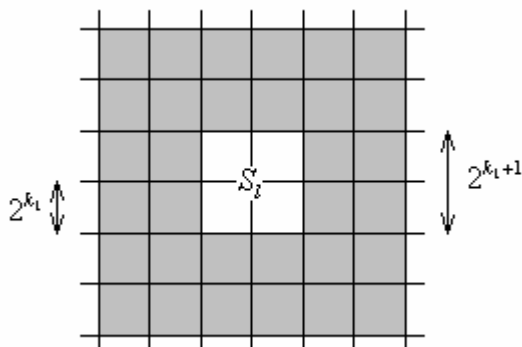
$$dy = 2^{k_2} + z_2, \quad k_1, k_2, z_1, z_2 \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq \log n - 1; \quad 0 \leq z_1 \leq 2^{k_1}, 0 \leq z_2 \leq 2^{k_2}$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $dx \geq dy$ a teda aj $k_1 \geq k_2$. Vezmime si rozdelenie úrovne $l = k_1 + 1$. A bez ujmy na všeobecnosti nech $v_1 \in S_l$, kde S_l je štvorec v tomto rozdelení. Z definície dx a dy sa vrchol v_2 nemôže nachádzať ďalej ako v jednom so susediacich štvorcov (vid' obrázok, sivá farba znázorňuje oblasť susediacich štvorcov).



Môžu nastať 2 možnosti. Ak v_2 patrí jednému zo susediacich štvorcov S_l potom požiadavka $(v_1, v_2) \in M_l$, kde $l = k_1 + 1$ a naše tvrdenie platí.

Nech však v_2 nepatrí žiadnemu zo susediacich štvorcov S_l , potom $v_2 \in S_l$ a teda $(v_1, v_2) \notin M_l$, kde $l = k_1 + 1$. Vezmime si teraz jemnejšie rozdelenie úrovne $l = k_1$. To nám každý z predchádzajúcich štvorcov rozdelí na 4 menšie (vid' obrázok).



Ak vrcholy v_1 a v_2 patria rôznym zo štyroch štvorcov štvorca S_l , potom požiadavka $(v_1, v_2) \in M_l$, kde $l = k_1 + 1$, keďže všetky 4 štvorce navzájom susedia. Naše tvrdenie v tomto prípade znovu platí.

Nech však vrcholy v_1 a v_2 patria tomu istému štvorcu zo štyroch štvorcov S_l . Použijeme ešte jemnejšie rozdelenie úrovne $l = k_1 - 1$. To nám rozdelí každý zo štyroch štvorcov predchádzajúceho rozdelenia na ďalšie 4. Z definície dx a dy už nemôžu oba vrcholy v_1 a v_2 patriť jednému štvorcu rozdelenia úrovne $l = k_1 - 1$. Teda v_1 a v_2 patria rôznym zo

štyroch štvorcov štvorca S_l , kde $l = k_1$. Všetky 4 tieto štvorce navzájom susedia a teda požiadavka $(v_1, v_2) \in M_l$, kde $l = k_1 - 1$. Teda požiadavka $(v_1, v_2) \in M_{k_1+1} \cup M_{k_1} \cup M_{k_1-1}$. Tým sme teda ukázali, že každá požiadavka I_A musí patriť aspoň do jednej z množín rozdelenia. ■

4.2.2. Realizácia požiadaviek množiny M_l

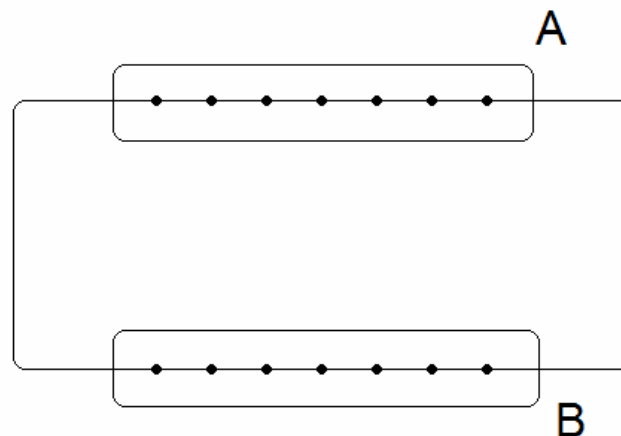
Ako sme si už ukázali, vieme, že každá požiadavka I_A patrí do nejakej z M_l . Otázka je koľko vlnových dĺžok potrebujeme na realizáciu jednej množiny požiadaviek M_l s vlastnosťou prežiteľnosti. A ako ju realizovať?

Uvažujme dva susediace štvorce S a T v ľubovoľnom rozdelení. Ukážeme si ako budeme medzi dvoma takými štvorcami realizovať ich vzájomné požiadavky. Bez ujmy na všeobecnosti nech T je nad S . Vrcholy oboch štvorcov si rozdelíme do riadkov. Je viditeľné, že na uskutočnenie komunikácie všetkých požiadaviek medzi štvorcami S a T budeme musieť realizovať komunikáciu každého riadka štvorca S s každým riadkom štvorca T .

Predstavme si teda, že máme prepojený riadok štvorca S s riadkom štvorca T do kruhu. O tom koľko vlnových dĺžok a koľko cyklov potrebujeme na realizáciu požiadaviek medzi vrcholmi týchto riadkov prepojených do kruhu si ukážeme v nasledujúcej časti komunikácie na kruhoch.

4.2.3. Komunikácia na kruhoch

Uvažujme fyzickú sieť ako na obr. 4.6. Uvažujeme topológiu kruhu, kde vrcholy sú rozdelené do množín A a B . Nech $|A| = |B|$. Zaujímá nás, koľko vlnových dĺžok potrebujeme,



Obr. 4.6: Komunikácia na kruhu medzi množinami A a B

ak chceme uspokojiť všetky požiadavky medzi vrcholmi množiny A a množiny B . Nech množina S je množina všetkých takých požiadaviek a teda $S = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$. Je zrejmé, že $|S| = n \times n$, kde $n = |A| = |B|$.

Lema 4.9 *Nech A a B sú množiny vrcholov na kruhu rozdeľujúce kruh na dve polovice a $|A| = |B| = n$. Množina $S = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ nech je množinou všetkých požiadaviek medzi množinami A a B . Potom počet cyklov potrebných na pokrytie požiadaviek množiny S je*

$$\frac{n^2}{2} \quad (n = 2k)$$

$$\frac{n^2 + 1}{2} \quad (n = 2k + 1)$$

Dôkaz: Dôkaz bude pozostávať z dvoch častí. Najprv ukážeme, že menším počtom cyklov sa požiadavky množiny S realizovať nedajú. A neskôr predvedieme, že týmto množstvom cyklov sa realizovať naozaj dajú.

Počet požiadaviek medzi množinami A a B je $|S| = n^2$. V každom cykle môžu byť realizované najviac dve komunikačné požiadavky z množiny S . (Z množiny vrcholov A do množiny vrcholov B vedú len dve cesty.) Uvažujme dva prípady:

$$(n = 2k)$$

Pre ľubovoľný vrchol $u \in A$, môžeme v jednom cykle realizovať najviac dve požiadavky tvaru (u, v) , $v \in B$. $|B| = n$. V každom cykle realizujeme 2 požiadavky vrcholu u s dvoma vrcholmi množiny B . Teda na to, aby sme zrealizovali všetky požiadavky jedného vrcholu z množiny A voči všetkým vrcholom množiny B potrebujeme $n/2$ cyklov. A keďže $|A| = n$, dostávame, že na realizáciu všetkých požiadaviek množiny S potrebujeme $n \cdot (n/2)$ cyklov.

$$(n = 2k + 1)$$

Ako sme si už ukázali v predchádzajúcom prípade pre párne čísla, v jednom cykle môžeme realizovať najviac 2 požiadavky. Požiadaviek v množine S je n^2 . Keďže n je nepárne číslo a súčin nepárnych čísel je vždy nepárny, nemôžeme v každom cykle realizovať presne 2 požiadavky. Teda musí existovať cyklus ktorý realizuje len jednu požiadavku. Teda na realizáciu všetkých požiadaviek S potrebujeme najmenej $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ cyklov, čo je za predpokladu,

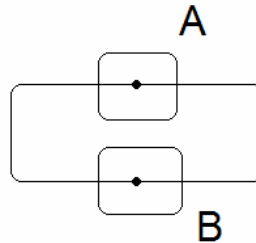
že n je nepárne presne $\frac{n^2 + 1}{2}$.

Takto sme ukázali, že menším počtom cyklov nejde realizovať všetky požiadavky množiny S . My však potrebujeme ešte ukázať, že sa všetky požiadavky S takýmto množstvom cyklov naozaj realizovať dajú. Náš dôkaz je konštruktívny, čím zároveň dáva návod ako požiadavky pre realizáciu v jednotlivých cykloch z množiny S vyberať.

Dôkaz urobíme indukciou na nepárne n .

I_0 :

$n = 1$



Na realizáciu všetkých požiadaviek množiny S teda potrebujeme $\frac{1^2 + 1}{2} = 1$ cyklov. A naozaj na realizovanie jednej požiadavky S potrebujeme aspoň jeden cyklus.

IP: n - nepárne, všetky požiadavky S vieme realizovať v $\frac{n^2 + 1}{2}$ cykloch.

IK: Pre $m = n + 2$, potrebujeme ukázať, že všetky požiadavky S' dokážeme realizovať v $\frac{m^2 + 1}{2}$ cykloch.

$$\frac{m^2 + 1}{2} = \frac{(n + 2)^2 + 1}{2} = \frac{n^2 + 4n + 4 + 1}{2} = \frac{n^2 + 1}{2} + 2n + 2$$

Potrebujeme ukázať, že ak sme dokázali realizovať všetky požiadavky S v $\frac{n^2 + 1}{2}$ cykloch, potom pridaním $2n + 2$ cyklov dokážeme realizovať všetky požiadavky množiny S' . (Množina S' má oproti množine S požiadavky, ktoré vznikli pridaním dvoch vrcholov do množín A a B).

Označme:

A - množina z IP, n – vrcholov

B - množina z IP, n – vrcholov

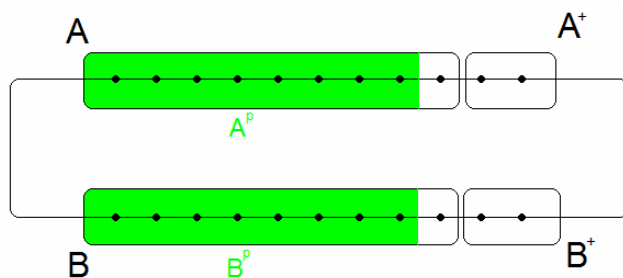
A^p - párna časť množiny A

B^p - párna časť množiny B

A^+ - množina 2 pridaných vrcholov k množine A

B^+ - množina 2 pridaných vrcholov k množine B

My teda potrebujeme v $2n + 2$ cykloch realizovať všetky požiadavky medzi vrcholmi A^+ a B^+ , medzi A^+ a B , a medzi B^+ a A .



Na realizáciu všetkých požiadaviek medzi množinami A^+ a B^+ je potrebných $\frac{2^2}{2} = 2$ cyklov.

Požiadavky medzi A^+ a B môžeme rozdeliť do dvoch skupín.

P_1 – požiadavky medzi A^+ a B^P

P_2 – požiadavky medzi A^+ a $B - B^P$

Je ľahko vidieť, že $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ a $P_1 \cup P_2$ sú všetky požiadavky medzi A^+ a B .

$|B^P| = n - 1$, $|A^+| = 2 \Rightarrow$ počet cyklov potrebných na realizáciu požiadaviek P_1 je $\frac{2(n-1)}{2}$.

Mohutnosti oboch množín sú párne a teda postupujeme ako pri párnom prípade s tým rozdielom, že máme rozdielne množiny. V každom cykle realizujeme práve 2 požiadavky, a počet týchto požiadaviek je tiež párný.

Množina P_2 obsahuje presne dve požiadavky. A to medzi vrcholom $B - B^P$ a vrcholmi A^+ .

Tieto požiadavky dokážeme obe realizovať v jednom cykle.

Požiadavky P_1 a P_2 teda dokážeme realizovať v $\frac{2(n-1)}{2} + 1$ cykloch.

Požiadavky medzi B^+ a A realizujeme spôsobom ako požiadavky A^+ a B .

Dokážeme ich teda realizovať tiež v $\frac{2(n-1)}{2} + 1$ cykloch.

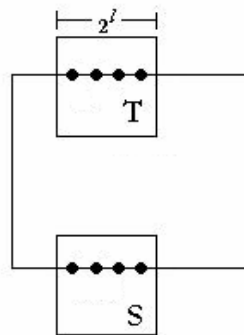
Všetky požiadavky vzniknuté pridaním dvoch vrcholov do A a dvoch vrcholov do B teda dokážeme realizovať v

$$2 \left(\frac{2(n-1)}{2} + 1 \right) + 2 = 2(n-1) + 2 + 2 = 2n + 2$$

cykloch. ■

4.2.4. Realizácia cyklov

Budeme uvažovať dva štvorce S a T v ľubovoľnom delení (T je nad S , tak ako na Obr. 4.8). Uvažujme vrcholy štvorcov rozdelené podľa riadkov, prípadne stĺpcov. Vezmime si dva ľubovoľné riadky. Jeden zo štvorca S a druhý zo štvorca T a prepojíme ich do kruhu ako na obrázku 4.7. Počet cyklov potrebných na realizáciu požiadaviek medzi vrcholmi týchto



Obr. 4.7: realizácia cyklu pre požiadavky (s_1, t_1) a (s_1, t_1)

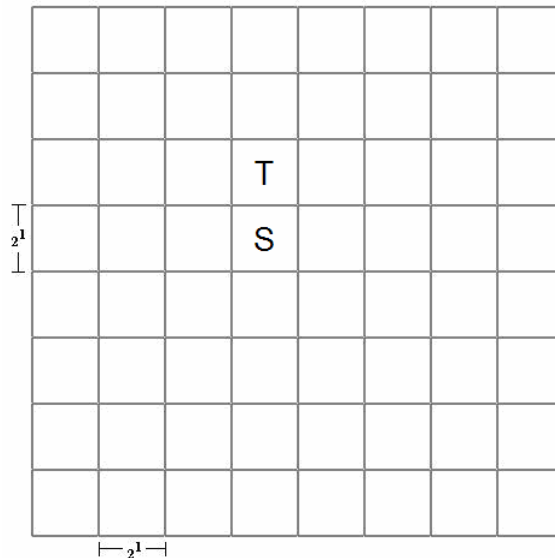
riadkov na tomto kruhu nám určuje lema 4.9. Zároveň nám dáva návod ako tieto cykly konštruovať.

Všimnime si, že ak by sa nám podarilo prepojiť do kruhov všetky riadky štvorca S so všetkými riadkami štvorca T hranovo disjunktnými cestami, mohli by sme na realizáciu cyklov na týchto kruhoch použiť tie isté sady vlnových dĺžok.

To ako budeme prepájanie riadkov, či stĺpcov navzájom susediacich štvorcov realizovať a koľko priestoru okolo budeme potrebovať, si ukážeme v nasledujúcej časti.

4.2.5. Komunikácia medzi dvoma štvorcami

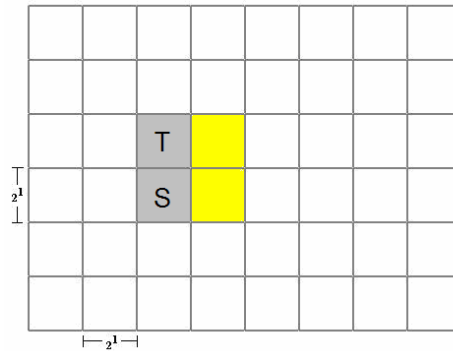
Podme si ukázať realizáciu komunikácie všetkých požiadaviek dvoch štvorcov nad sebou ako na obr. 4.8.



Obr. 4.8: Komunikácia v delení l medzi štvorcami S a T

Hrany vychádzajúce zo štvorca budeme nazývať sloty (hrany, ktorých jeden z vrcholov patrí štvorcu a druhý štvorcu nepatrí). Každý štvorec má presne $4 \cdot 2^l$ slotov. Každá realizovaná komunikačná požiadavka medzi vrcholom vo vnútri štvorca a vrcholom mimo štvorca, musí prechádzať jedným zo slotov tohto štvorca. Všimnime si, že počet slotov štvorca nám udáva maximálne množstvo požiadaviek, ktoré dokážeme realizovať jednou vlnovou dĺžkou medzi štvorcom a jeho okolím.

Uvažujme dva štvorce S a T v ľubovoľnom delení. Štvorec T sa nachádza priamo nad štvorcom S . Predpokladajme, že z každého z pravých slotov štvorca S potrebujeme cestu k práve jednému z pravých slotov štvorca T , ktorá sa celá nachádza mimo štvorcov S a T . Navyše potrebujeme, aby všetky tieto cesty boli hranovo nezávislé. Označme si pravé sloty štvorca S ako s_1, s_2, \dots, s_n a pravé sloty štvorca T ako t_1, t_2, \dots, t_n . (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $x_j = x_k \Rightarrow j = k$, je n -tica, ktorá určuje priradenie medzi pravými slotmi S a pravými slotmi T .

Obr. 4.9: Oblasť komunikácie v delení l medzi slotmi štvorcov S a T

Lema 4.10: *Nech S a T sú dva štvorce v toruse nad sebou (obr. 4.9) Nech $s_1, s_2 \dots s_n$ sú pravé sloty S , a nech $t_1, t_2 \dots t_n$ sú pravé sloty T . Pre ľubovoľnú n -ticu (permutáciu) $(x_1, x_2 \dots x_n)$, $x_i \in \{t_1, t_2 \dots t_n\}$, $x_j = x_k \Rightarrow j = k$, existujú hranovo nezávislé cesty, medzi s_1 a x_1 , s_2 a $x_2 \dots s_n$ a x_n . Všetky cesty pri tom zostanú v rámci obdĺžnika $n \times 2n$, napravo od štvorcov S a T (viď obrázok).*

Dôkaz: Keďže sú štvorce nad sebou, na komunikáciu medzi ich pravými slotmi potrebujeme použiť vertikálne linky. Nech $(x_1, x_2 \dots x_n)$, $x_i \in \{t_1, t_2 \dots t_n\}$, $x_j = x_k \Rightarrow j = k$, je ľubovoľná n -tica. Potrebujeme ukázať existenciu ciest medzi s_1 a x_1 , s_2 a $x_2 \dots s_n$ a x_n . Obdĺžnik, napravo od štvorcov S a T , obsahuje presne n vertikálnych liniek. Vytvoríme cestu medzi s_1 a x_1 . Od vrcholu s postupujeme doprava, až po prvú voľnú vertikálnu linku obdĺžnika (takú, na ktorej neprebíha žiadna komunikácia medzi S a T po celej dĺžke obdĺžnika). Po nej vedieme cestu až na úroveň x_1 štvorca T , odkiaľ postupujeme po horizontálne linke naľavo až k slotu x_1 štvorca T . Takto postupujeme pri vytváraní všetkých n ciest. Keďže každá cesta spotrebuje práve jednu vertikálnu linku obdĺžnika, napravo od S a T , obdĺžnik teda obsahuje dostatok miesta pre všetkých n ciest. Všetkých n ciest teda zostane v rámci obdĺžnika $n \times 2n$, napravo od S a T . ■

Podobné tvrdenie platí pre ľavé sloty S a T (pre cesty sa použije oblasť obdĺžnika naľavo od štvorcov S a T), ale neplatí pre sloty severné a ani pre južné. Ľavé sloty štvorcov S a T môžeme cestami spájať rovnako ako pravé, čím dostaneme n nezávislých kruhov. To znamená, že všetky riadky štvorca S dokážeme pripojiť s ľubovoľnou permutáciou riadkov T tak, aby spolu s cestami, spájajúcimi ich pravé a ich ľavé sloty tvorili n nezávislých kruhov.

To nás vedie k formulácii ďalšieho tvrdenia:

Lema 4.11: *Nech S a T sú dva štvorce v toruse nad sebou. Potom všetky ich vzájomné komunikačné požiadavky dokážeme realizovať s n^3 pre $(n = 2k)$ a $(n^3 + n)$ pre $(n = 2k + 1)$*

vlnovými dĺžkami s vlastnosťou spoľahlivosti používajúc iba ľavé a pravé sloty štvorcov S a T . Všetky cesty pritom zostanú v rámci obdĺžnikov $n \times 2n$, napravo a naľavo od štvorcov S a T .

Dôkaz: Pravé sloty štvorcov môžeme podľa lemy 4.10 pospájať tak, aby z každého pravého slotu štvorca S viedla cesta k práve jednému pravému slotu štvorca T a naopak z každého pravého slotu štvorca T viedla cesta k práve jednému pravému slotu štvorca S a to všetko v potrebnej vzdialenosti.

Ľavé sloty štvorcov S a T môžeme cestami pospájať rovnako ako pravé a to v potrebnej vzdialenosti. (Použitím ľavej verzie Lemy 4.10). Tým dostávame n nezávislých kruhov.

Polovica vrcholov každého kruhu patrí štvorcu S a druhá polovica štvorcu T . Žiadny z kruhov nepoužíva hranu iného kruhu. Podľa lemy 4.9 na pokrytie požiadaviek v rámci jedného kruhu medzi vrcholmi štvorca S a T potrebujeme pre párne n najmenej $n^2/2$ cyklov. Každý cyklus potrebuje inú vlnovú dĺžku (reálne dve, komunikačnú a rezervnú).

Keďže sú všetky kruhy hranovo nezávislé, môžu používať tie isté sady vlnových dĺžok. Aby sme realizovali všetky požiadavky S voči T , musíme realizovať n permutácií kruhov, lebo každý riadok z S musí byť raz v kruhu s každým riadkom z n riadkov T . Takých n permutácií, aby každý riadok z S bol raz v kruhu s každým riadkom z n riadkov T , môžeme realizovať napríklad pomocou n permutácií, kde v permutácii i posunieme každý prvok o i prvkov doprava, kde $i = 1..n$. Každú z týchto permutácií dokážeme realizovať s n^2 vlnovými dĺžkami pre párne n a s $n^2 + 1$ pre nepárne n , keďže každý cyklus potrebuje reálne 2 vlnové dĺžky. Z toho dostávame n^3 pre párne n a $n^3 + n$ pre nepárne n , potrebných vlnových dĺžok na realizáciu všetkých požiadaviek S voči T . ■

Rovnaké tvrdenia platia aj pre dva štvorce vedľa seba s tým rozdielom, že pre kružnice budú využívať severné a južné sloty štvorcov a všetky cesty zostanú v rámci obdĺžnikov $2n \times n$ severne a $2n \times n$ južne od štvorcov S a T vedľa seba.

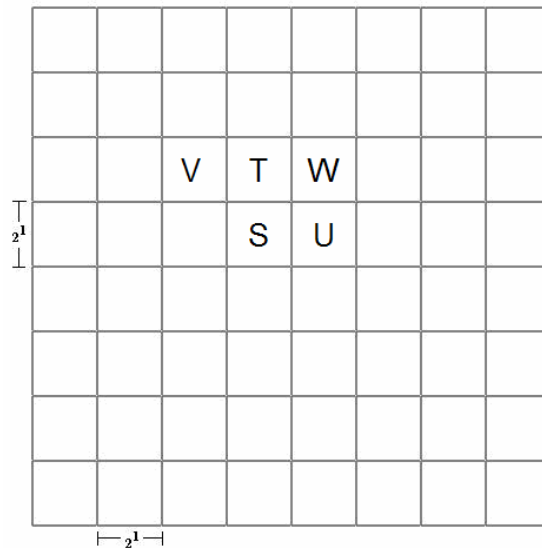
Rovnako môžeme realizovať množinu požiadaviek medzi štvorcom S a jeho diagonálnym susedom označeným ako V , a tiež do štvorca W , na jeho druhej diagonále (Obr. 4.10) s tým rozdielom, že pre diagonálne štvorce potrebujeme o niečo viac priestoru na okolo.

Uvažujme množinu S_l ako množinu všetkých štvorcov v rozdelení úrovne l . Pre každý štvorec $S \in S_l$ a nech T_S, U_S, V_S, W_S sú štvorce nad, na pravo, diagonálne vľavo a diagonálne napravo. Definujeme množinu $\Gamma(S) = \{T_S, U_S, V_S, W_S\}$. Uvažujme tiež nasledovné množiny:

$$Y_l = \{I(S, X) : S \in S_l, X \in \Gamma(S)\}$$

$$I_l = \bigcup_{I(S, X) \in Y_l} I(S, X)$$

Množinu I_l budeme nazývať množinou všetkých požiadaviek v rozdelení úrovne l .



Obr. 4.10: uvažované štvorce v grafe G a rozdelení úrovne l

Lema 4.12 *Nech k je počet vlnových dĺžok, ktorými vieme realizovať vzájomné požiadavky medzi dvoma susednými štvorcami v rozdelení úrovne l . Všetky požiadavky množiny I_l môžu byť realizované pokrytím cyklami používajúc $O(k)$ vlnových dĺžok.*

Dôkaz: Nech k je počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu medzi dvoma susednými štvorcami v rozdelení úrovne l . Aby sme pokryli všetky požiadavky množiny M_l musíme pre každý štvorec S v rozdelení l pokryť množinu požiadaviek $I(S, X)$. Podľa lemy 4.11 na vzájomnú komunikáciu susedných oblastí štvorcov použijeme len ich blízke okolie. Označme si túto oblasť komunikácie ako $A(S, X)$. Takúto oblasť uvažujeme pre všetky navzájom susediace štvorce rozdelenia l . Keďže každý štvorec má v ľubovoľnom rozdelení konštantný počet susedov, má aj každá oblasť $A(S, X)$ konštantný počet iných susedných oblastí s ktorými sa prekrýva. Oblasti, ktoré sa neprekrývajú môžeme realizovať rovnakými sadami vlnových dĺžok. Ak teda dokážeme $I(S, X)$ realizovať k vlnovými dĺžkami, potom na realizáciu I_l potrebujeme $O(k)$ vlnových dĺžok. ■

Ukázali sme, že každá oblasť komunikácie dvoch štvorcov, v ľubovoľnom delení, sa prekrýva s konštantným množstvom iných oblastí. Preto pre asymptotické odhadnutie potrebujeme zrátať komunikáciu dvoch štvorcov v každom delení.

4.2.6. Ohraničenie počtu vlnových dĺžok

V tejto kapitole si dokážeme tvrdenie, ktoré ohraničuje počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu I_A inštancie na toruse s vlastnosťou prežiteľnosti.

Najprv si ale zadefinujeme komunikačný región dvoch susedných štvorcov ako oblasť štvorcov a ich najbližšieho okolia potrebná na realizáciu všetkých ich vzájomných požiadaviek.

Veta 4.13. *Nech graf G je torus rozmerov $n \times n$ a nech $n = 2^j$ kde $j \in \mathbb{N}$. Potom všetky požiadavky I_A v grafe G s vlastnosťou prežiteľnosti vieme efektívne realizovať použitím najviac*

$$c \frac{8}{7} (n^3 - 1)$$

vlnových dĺžok, kde c je kladná konštanta udávajúca maximálny počet oblastí komunikácie navzájom sa ovplyvňujúcich v ľubovoľnom rozdelení.

Dôkaz: Z lemy 4.12 vieme, že ak všetky požiadavky medzi dvoma susednými štvorcami v rozdelení l vieme realizovať k vlnovými dĺžkami, potom všetky požiadavky M_l vieme realizovať použitím $O(k)$ vlnových dĺžok. Keďže sa teda v každom rozdelení každý komunikačný región ovplyvňuje s konštantným počtom susedných regiónov, stačí uvažovať jeden komunikačný región v každom rozdelení. Z Lemy 4.11, dostávame počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu jedného komunikačného regiónu v závislosti od veľkosti rozdelenia (s^3 , kde s je veľkosť hrany vzájomne komunikujúcich štvorcov v komunikačnom regióne). Všetkých rozdelení máme $\log n$. Každá požiadavka sa vyskytne len v jednom rozdelení. Pre každé rozdelenie navyše musíme použiť rôzne vlnové dĺžky na realizáciu jeho požiadaviek.

Teraz ešte potrebujeme vyrátať počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu požiadaviek komunikačného regiónu v každom rozdelení.

Dostávame:

$$\sum_{l=1}^{\log n} s^3 \quad \text{a keďže pre } s \text{ v rozdelení } l \text{ platí } s = 2^l \text{ dostaneme } \sum_{l=1}^{\log n} 2^{3l}$$

Použijeme známy vzťah pre sumu geometrickej postupnosti

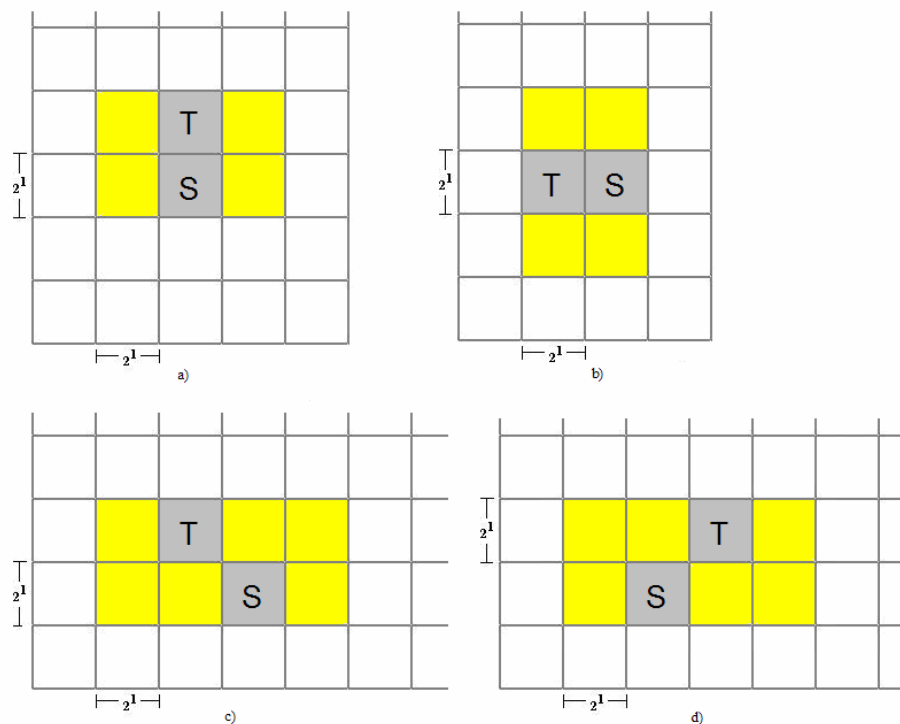
$$\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

a dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\log n} 8^k = \frac{8^{\log n + 1} - 1}{7} = \frac{8}{7}(8^{\log n} - 1) = \frac{8}{7}(2^{3 \log n} - 1) = \frac{8}{7}(n^3 - 1)$$

Dostali sme teda počet vlnových dĺžok na realizáciu jedného regiónu v každom delení. Každý región sa však ešte prekrýva z konštantným počtom c regiónov v delení. ■

Nás by však zaujíma aj tá konštanta. Pozrime sa teda ako môžeme realizovať komunikáciu v ľubovoľnom delení. Na obrázku 4.11 vidíme štyri rôzne tvary, ako môže komunikačný región vyzerať.

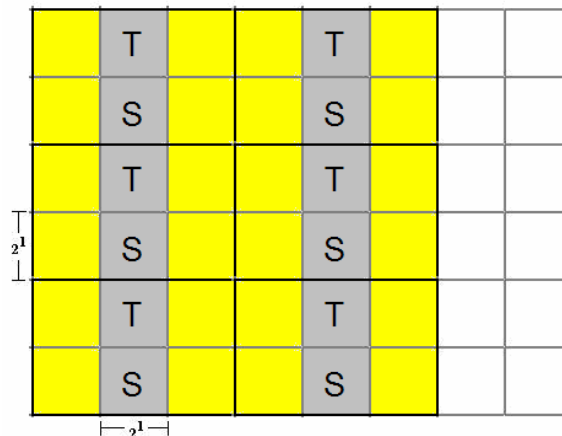


Obr. 4.11: Možné komunikačné regióny

Na uskutočnenie celkovej komunikácie všetkých susediacich štvorcov v danej úrovni l , potrebujeme komunikačné regióny ukladať, čo najtesnejšie vedľa seba tak, aby medzi nimi podľa možnosti nebolo žiadne nevyužitú miesto. Podobne ako na obrázku 4.12, kde región typu a) ukladáme tesne vedľa seba. Ak sa komunikačné regióny navzájom neovplyvňujú, môžu používať rovnakú sadu vlnových dĺžok. Na uskutočnenie celej komunikácie daného typu, ľubovoľný štvorec sa bude musieť nachádzať raz na každej z pozícií daného typu komunikačného regiónu. Aby bol každý štvorec raz v každej pozícií daného komunikačného regiónu, musí byť obsiahnutý v toľkých regiónov daného typu koľko štvorcov ten daný región obsahuje. Ak by sme uvažovali komunikačný región, kde počet jeho štvorcov na jeho ľubovoľnej strane delí celkový počet štvorcov veľkosti 2^l na strane v celom grafe G , na

realizáciu celkovej komunikácie daného typu by sme potrebovali len toľko sád vlnových dĺžok, koľko je štvorcov v danom komunikačnom regióne toho typu. Pre región typu a) je to 6 sád.

Avšak môže nastať aj situácia, kde nemôžeme vedľa seba tesne poukladať komunikačné regióny, ktoré sa neovplyvňujú. Počet štvorcov v delení l na celej mriežke totiž nemusí byť



Obr. 4.12: Tesné umiestnenie regiónov používajúcich rovnaké sady vlnových dĺžok

deliteľný počtom štvorcov na hrane komunikačného regiónu. My však musíme uvažovať aj najväčší zvyšok, ktorý môžeme dostať pri delení celkového počtu štvorcov na stranu v G a počtu štvorcov na strane daného regiónu. Označme si $mz(x)$ ako maximálny možný zvyšok po delení x . Je zrejmé, že $mz(x) = x - 1$. Uvažujme, pre každý komunikačný región so stranami x a y , región so stranami $(x + mz(x))$ a $(y + mz(y))$, čo je v podstate región daného typu rozšírený o maximálny možný zvyšok po delení príslušnými stranami. Totiž musíme predpokladať, že sa každý zo štvorcov, môže ocitnúť na jednej zo zvyškových pozícií, kedy nie je súčasťou žiadnej komunikačnej oblasti. Na celkovú realizáciu komunikácie daného typu budeme teda potrebovať maximálne $(x + mz(x)) \times (y + mz(y))$ sád vlnových dĺžok.

Označme $ps(t)$ ako počet sád potrebných vlnových dĺžok pre realizáciu požiadaviek typu t v ľubovoľnom rozdelení l . Potom potrebný počet sád pre realizáciu jedného delenia je $cps = ps(a) + ps(b) + ps(c) + ps(d) = 15 + 15 + 21 + 21 = 72$.

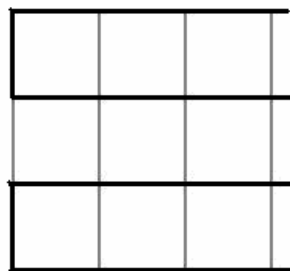
Tento počet sád je konštanta c , ktorú hľadáme. Dohromady teda potrebujeme $72 \frac{8}{7} (n^3 - 1)$ vlnových dĺžok.

4.3. Algoritmus realizujúci I_A na mriežke

Uvažujme podobné rozdelenie do štvorcov ako pri toruse. Pri mriežke, na rozdiel od torusu, dostaneme štvorce, ktoré sa budú nachádzať na okraji, prípadne na rohoch mriežky. Teda predchádzajúca verzia algoritmu pre torus sa tu nedá použiť. Poďme sa pokúsiť predchádzajúci algoritmus trochu prispôbiť pre podmienky mriežky.

Lema 4.14: *Nech S a T sú dva štvorce v mriežke nad sebou. Potom všetky ich vzájomné komunikačné požiadavky dokážeme realizovať s $2n^3$ pre $(n = 2k)$ vlnovými dĺžkami s vlastnosťou spoľahlivosti používajúc iba pravé sloty štvorcov S a T . Všetky cesty pritom zostanú v rámci obdĺžnika $n \times 2n$, napravo od štvorcov S a T .*

Dôkaz: Budeme dokazovať podobne ako lemu 4.11 avšak tu musíme obmedziť komunikáciu na oblasť jedného obdĺžnika $n \times 2n$. Riadky štvorcov budeme párovať do dvojíc. Riadok $2n - 1$ bude v dvojici s riadkom $2n$, tak ako je to na obr. 4.13.



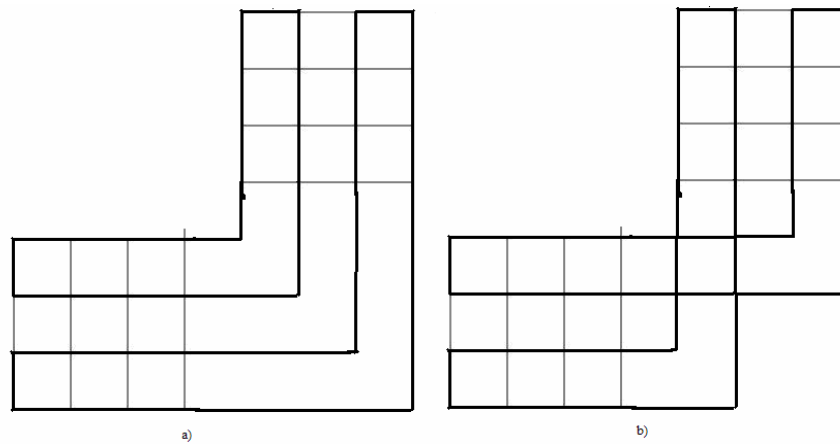
Obr. 4.13: Spárovanie riadkov štvorca S do dvojíc

Tak ako sme mohli v leme 4.11 podľa lemy 4.10 spojiť ľubovoľný pravý slot štvorca S s ľubovoľným pravým slotom štvorca T nad ním, tak aj tu môžeme ľubovoľnú dvojicu pravých slotov štvorca S spojiť s ľubovoľnou dvojicou pravých slotov štvorca T pričom použijeme len oblasť obdĺžnika $n \times 2n$ napravo od štvorcov S a T .

Získame tak kruhy o veľkosti $4n$ vrcholov, kde $2n - tica$ vrcholov S chce komunikovať s $2n - ticou$ vrcholov T . Podľa lemy 4.9 potrebujeme na túto komunikáciu minimálne $2n^2$ cyklov. Každú dvojicu riadkov štvorca S potrebujeme raz prepojiť z každou z $(n/2)$ dvojíc riadkov štvorca T . Keďže každú z dvojíc riadkov štvorca S podľa lemy 4.10 dokážeme prepojiť s jednou z dvojíc riadkov T disjunktnými cestami, potrebujeme na celkovú realizáciu požiadaviek medzi S a T práve $2n^2 \cdot (n/2) = n^3$ cyklov. Keďže na každý cyklus rátame 2 vlnové dĺžky, potrebujeme celkovo $2n^3$ vlnových dĺžok, pričom všetky cesty zostanú v rámci jedného obdĺžnika $n \times 2n$ napravo od S a T . ■

Rovnaké tvrdenie platí tiež pre dva štvorce v ľubovoľnom delení navzájom vedľa seba s tým rozdielom, že sa používajú dvojice stĺpcov. Podobné tvrdenie platí aj pre diagonálnych

susedov avšak s tým rozdielom, že budeme využívať dvojice riadkov jedného štvorca a dvojice stĺpcov druhého štvorca. Tu bude stačiť na komunikáciu navyše len jeden štvorec $n \times n$. Realizácia spárovania dvojíc stĺpcov a riadkov štvorcov 4×4 susediacich diagonálne je načrtnutá na obr. 4.14.



Obr. 4.14: Realizácia komunikácie diagonálnych susedov 4×4

Teda pre mriežku dostaneme dostávame nasledovné horné ohraničenie.

Veta 4.15. *Nech graf G je mriežka rozmerov $n \times n$ a nech $n = 2^j$ kde $j \in \mathbb{N}$. Potom všetky požiadavky I_A s vlastnosťou prežiteľnosti v grafe G vieme efektívne realizovať použitím najviac*

$$c \frac{16}{7} (n^3 - 1)$$

vlnových dĺžok, kde c je kladná konštanta udávajúca maximálny počet oblastí komunikácie navzájom sa ovplyvňujúcich v ľubovoľnom rozdelení.

Dôkaz: Postupujeme podobne ako pri vete 4.13. Z lemy 4.12 vieme, že ak všetky požiadavky medzi dvoma susednými štvorcami v rozdelení l vieme realizovať k vlnovými dĺžkami, potom všetky požiadavky M_l vieme realizovať použitím $O(k)$ vlnových dĺžok. Keďže sa teda v každom rozdelení každý komunikačný región ovplyvňuje s konštantným počtom susedných regiónov, stačí uvažovať jeden komunikačný región v každom rozdelení. Z Lemy 4.14, dostávame počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu jedného komunikačného regiónu v závislosti od veľkosti rozdelenia ($2s^3$, kde s je veľkosť hrany vzájomne komunikujúcich štvorcov v komunikačnom regióne).

Teraz ešte potrebujeme vyrátať počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu požiadaviek komunikačného regiónu v každom rozdelení.

Dostávame:

$$\sum_{l=1}^{\log n} 2s^3 \text{ a keďže pre } s \text{ v rozdelení } l \text{ platí } s = 2^l \text{ dostaneme } 2 \sum_{l=1}^{\log n} 2^{3l}$$

Použijeme známy vzťah pre sumu geometrickej postupnosti

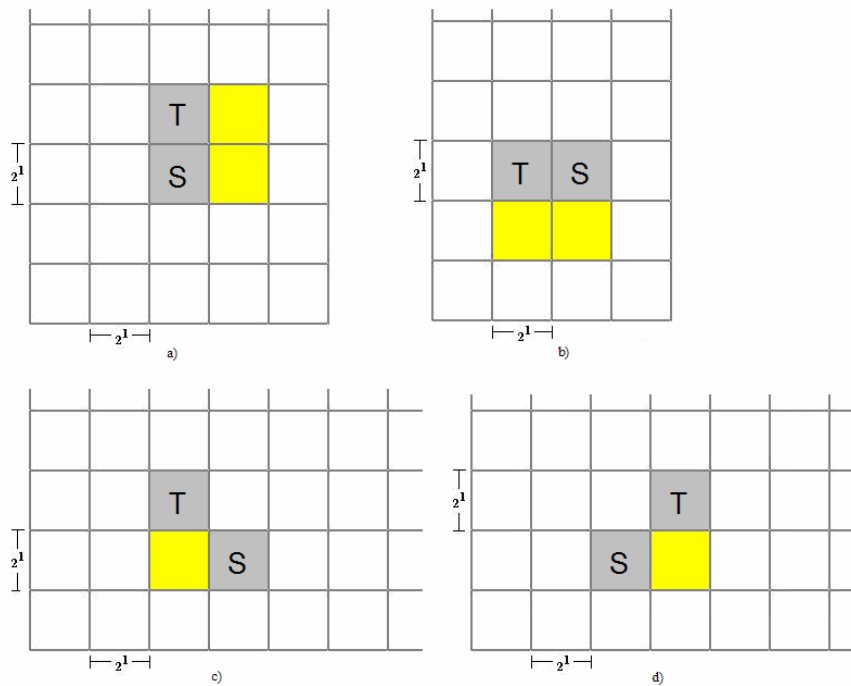
$$\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

a dostaneme

$$2 \sum_{k=1}^{\log n} 8^k = \frac{8^{\log n + 1} - 1}{7} = 2 \frac{8}{7} (8^{\log n} - 1) = 2 \frac{8}{7} (2^{3 \log n} - 1) = \frac{16}{7} (n^3 - 1)$$

Dostali sme teda počet vlnových dĺžok na realizáciu jedného regiónu v každom delení. Každý región sa však ešte prekrýva z konštantným počtom c regiónov v delení. ■

Na obr. 4.15 máme zobrazené, ako môžu vyzerat' komunikačné regióny v tomto prípade.



Obr. 4.15: Možné komunikačné regióny

Označme $ps(t)$ ako počet sád potrebných vlnových dĺžok pre realizáciu požiadaviek typu t v ľubovoľnom rozdelení l . Potom potrebný počet sád pre realizáciu jedného delenia je $cps = ps(a) + ps(b) + ps(c) + ps(d) = 9 + 9 + 9 + 9 = 36$.

Naša konštanta c teda v tomto prípade nadobudne hodnotu 36. Dohromady teda potrebujeme $36 \frac{16}{7} (n^3 - 1) = 72 \frac{8}{7} (n^3 - 1)$.

Pre mriežku sa nám týmto spôsobom podarilo z hora ohraničiť počet potrebných vlnových dĺžok teda rovnako dobre ako pre torus.

4.4. Náčrt algoritmu

V tejto kapitole uvádzame náčrt algoritmus pokrytia torusu cyklami, realizujúcimi všetky komunikačné požiadavky inštancie I_A .

- For $l=0$ až $\log n - 1$ do
 - Rozdeľ G do štvorcov strany 2^l
 - Realizuj oblasti typu (T nad S) tak, aby ich komunikačné regióny boli teste vedľa seba // cyklami
 - Realizuj všetky ich posunutia

 - Realizuj oblasti typu (T nad S) tak, aby ich komunikačné regióny boli teste vedľa seba // cyklami
 - Realizuj všetky ich posunutia

 - Realizuj oblasti typu (T ľavo diagonálne od S) tak, aby ich komunikačné regióny boli teste vedľa seba // cyklami
 - Realizuj všetky ich posunutia

 - Realizuj oblasti typu (T pravo diagonálne od S) tak, aby ich komunikačné regióny boli teste vedľa seba // cyklami
 - Realizuj všetky ich posunutia

4.5. Algoritmy pre 3-rozmernú mriežku a torus

V tejto kapitole sa pokúsime popísať jednoduchý algoritmus aj pre graf G ako 3-rozmerný torus a mriežku. Podobne ako sme v dvojrozmernom prípade rozdelili graf do štvorcov o hrane 2^l , kde $l = 0.. \log n$, si v trojrozmernom prípade rozdelíme graf do kociek (v našom prípade uvažujeme o kocke ako o 3-rozmernej mriežke) o hrane dĺžky 2^l . Podstata rozdelenia je aby každé rozdelenie zachytilo požiadavky rôznych dĺžok v grafe. V každom rozdelení budeme uvažovať komunikáciu medzi navzájom susednými kockami. Taká komunikácia medzi dvoma susednými kockami v ľubovoľnom rozdelení grafu využíva len ohraničené okolie týchto kociek, nazývame komunikačný región kociek. Každý komunikačný región je v prieniku z konštantným počtom iných komunikačných regiónov, v každom rozdelení. Teda ak spočítame sumu potrebných vlnových dĺžok na jeden región v každom rozdelení, odhadneme konštantu, koľko krát musíme pre komunikačný región v každom rozdelení použiť rôzne sady vlnových dĺžok, dostaneme počet vlnových dĺžok, ktorými je možné realizovať daný graf.

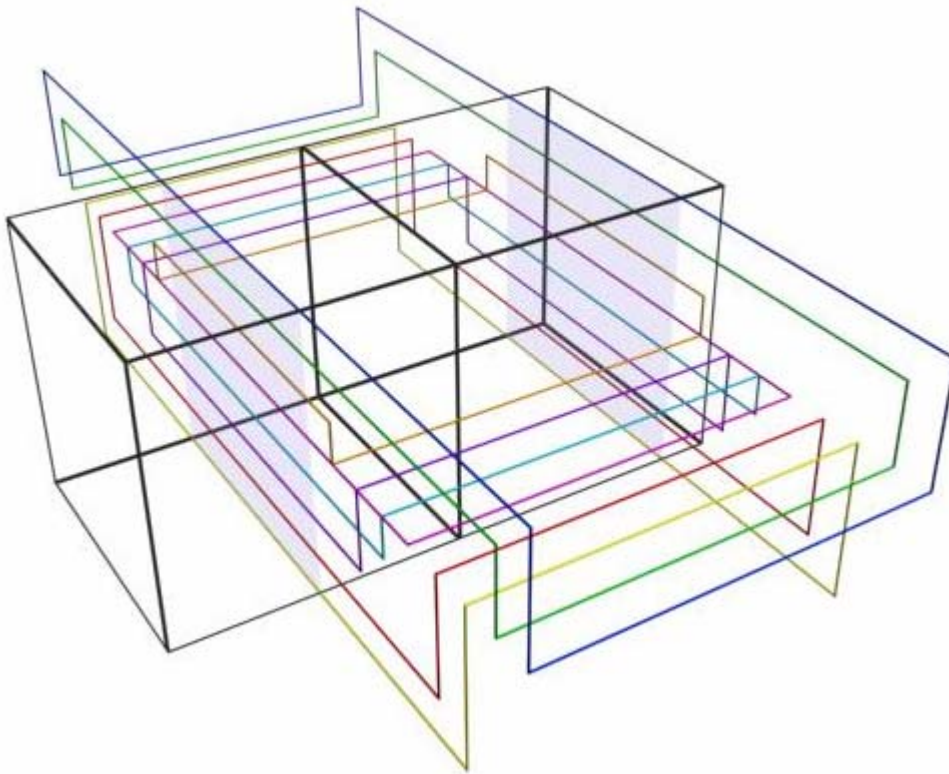
Komunikáciu medzi dvoma 2-rozmernými štvorcami nám popisuje lema 4.11, resp. lema 4.14, kde používame menší komunikačný región. Každá kocka o hrane n vrcholoch v ľubovoľnom rozdelení sa skladá z práve n 2-rozmerných štvorcov rozmerov $n \times n$. My potrebujeme odhadnúť potrebný počet vlnových dĺžok potrebných na komunikáciu medzi dvoma susednými kockami v závislosti od veľkosti kocky. Teda bude potrebné prepájať navzájom jednotlivé komunikačné roviny susedných kociek. Lemma 4.11, resp. lema 4.14 nám popisuje koľko vlnových dĺžok potrebujeme na realizáciu spoľahlivej komunikácie medzi dvoma 2-rozmernými štvorcami. Poďme si teda odhadnúť potrebný počet vlnových dĺžok a oblasť potrebnú na komunikáciu medzi dvoma kockami v ľubovoľnom rozdelení grafu.

Lema 4.16: *Nech S a T sú dva kocky v 3-rozmernom toruse nad sebou. Potom všetky ich vzájomné komunikačné požiadavky dokážeme realizovať s n^4 pre $(n = 2k)$ vlnovými dĺžkami s vlastnosťou spoľahlivosti používajúc iba ľavé a pravé sloty štvorcov S a T . Všetky cesty pritom zostanú v rámci kvádrov $n \times n \times 2n$, napravo a naľavo od štvorcov S a T .*

Dôkaz(náčrt): Podľa lemy 4.11 dokážeme ľubovoľné 2 štvorce rozmerov $n \times n$ realizovať n^3 vlnovými dĺžkami, za predpokladu, že vieme ľubovoľne permutovať ich riadky navzájom disjunktnými cestami. My teda potrebujeme ukázať, že dokážeme ľubovoľnú permutáciu štvorcov kocky S , prepojiť s ľubovoľnou permutáciou štvorcov kocky T . A v rámci ľubovoľne zvolenej permutácie štvorcov ukázať, že je možné ľubovoľne permutovať riadky štvorcov, a to všetko disjunktnými cestami v obmedzenom okolí.

Na obr. 4.16 máme načrtnutú komunikáciu medzi dvoma štvorcami navzájom susediacich kociek. Na komunikáciu týchto dvoch štvorcov je použitá jedna z n horizontálnych rovín kvádra. To znamená, že týmto spôsobom je možné spojiť ľubovoľnú permutáciu štvorcov

kocky S s ľubovoľnou permutáciou štvorcov kocky T . Na vertikálnej rovine, na ktorej sa



Obr. 4.16: Komunikácia štvorcov susediacich kociek

nachádza jeden zo štvorcov je možné riadky ľubovoľne permutovať. Ako vidíme, dostávame kružnice. Pre kružnice štvorcov platí lema 4.11. Teda jednu permutáciu n štvorcov medzi kockami S a T dokážeme realizovať tou istou sadou vlnových dĺžok ako komunikáciu medzi dvoma 2 -rozmernými štvorcami. Keďže každý z n štvorcov kocky S musí komunikovať s každým zo štvorcov kocky T potrebujeme realizovať n rôznych permutácií. Keďže každú permutáciu musíme realizovať novou sadou n^3 vlnových dĺžok, celkovo teda potrebujeme $n^3 \cdot n = n^4$ vlnových dĺžok. ■

Lema 4.17: *Nech S a T sú dva štvorce v 3 -rozmernej mriežke nad sebou. Potom všetky ich vzájomné komunikačné požiadavky dokážeme realizovať s $2n^4$ pre $(n = 2k)$ vlnovými dĺžkami s vlastnosťou spoľahlivosti používajúc iba pravé sloty štvorcov S a T . Všetky cesty pritom zostanú v rámci kvádra $n \times n \times 2n$, napravo od štvorcov S a T .*

Dôkaz(náčrt): Podobne ako pri leme 4.16 avšak tu použijeme lemu 4.14 a kváder len na jednej strane kociek S a T . ■

Podobné tvrdenia si môžeme dokázať medzi ľubovoľnými dvoma susediacimi kockami samozrejme s rozdielnou komunikačnou oblasťou, regiónom. Za susediace kocky,

považujeme budeme považovať tie dve kocky S a T , ak existuje cesta maximálne cesta z kocky S do kocky T cesta maximálnej dĺžky troch hrán. Každá taká kocka v ľubovoľnom delení má v 3 -rozmernom toruse práve 26 susediacich kociek. Pre graf 3 -rozmernej mriežky bude počet susediacich kociek závislý od toho, či sa daná kocka nachádza na okraji, na hrane, alebo v rohu grafu.

Podme si teda sformulovať tvrdenie určujúce potrebný počet vlnových dĺžok v našom algoritme.

Veta 4.18. *Nech graf G je 3 -rozmerná toroidná mriežka rozmerov $n \times n \times n$ a nech $n = 2^j$ kde $j \in \mathbb{N}$. Potom všetky požiadavky I_A v grafe G s vlastnosťou prežiteľnosti vieme efektívne realizovať použitím najviac*

$$c \frac{16}{15} (n^4 - 1)$$

vlnových dĺžok, kde c je kladná konštanta udávajúca maximálny počet oblastí komunikácie navzájom sa ovplyvňujúcich v ľubovoľnom rozdelení.

Dôkaz: Postupujeme podobne ako pri vete 4.13 alebo 4.15. Keďže sa v každom rozdelení každý komunikačný región ovplyvňuje s konštantným počtom susedných regiónov, stačí uvažovať jeden komunikačný región v každom rozdelení. Z Lemy 4.16, dostávame počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu jedného komunikačného regiónu v závislosti od veľkosti rozdelenia (s^4 , kde s je veľkosť hrany vzájomne komunikujúcich kociek v komunikačnom regióne).

Teraz ešte potrebujeme vyrátať počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu požiadaviek komunikačného regiónu v každom rozdelení.

Dostávame:

$$\sum_{l=1}^{\log n} s^4 \text{ a keďže pre } s \text{ v rozdelení } l \text{ platí } s = 2^l \text{ dostaneme } \sum_{l=1}^{\log n} 2^{4l}$$

Použijeme známy vzťah pre sumu geometrickej postupnosti

$$\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

a dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\log n} 16^k = \frac{16^{\log n+1} - 1}{15} = \frac{16}{15}(16^{\log n} - 1) = \frac{16}{15}(2^{4\log n} - 1) = \frac{16}{15}(n^4 - 1)$$

Dostali sme teda počet vlnových dĺžok na realizáciu jedného regiónu v každom delení. Každý región sa však ešte prekrýva z konštantným počtom c regiónov v delení. ■

Veta 4.19. *Nech graf G je 3-rozmerná toroidná mriežka rozmerov $n \times n \times n$ a nech $n = 2^j$ kde $j \in \mathbb{N}$. Potom všetky požiadavky I_A v grafe G s vlastnosťou prežiteľnosti vieme efektívne realizovať použitím najviac*

$$c \frac{32}{15} (n^4 - 1)$$

vlnových dĺžok, kde c je kladná konštanta udávajúca maximálny počet oblastí komunikácie navzájom sa ovplyvňujúcich v ľubovoľnom rozdelení.

Dôkaz: Postupujeme podobne ako pri vete 4.18 ale vychádzame z lemy 4.17. Pre počet vlnových dĺžok potrebných na realizáciu požiadaviek komunikačného regiónu v každom rozdelení dostávame:

$$\sum_{l=1}^{\log n} 2s^4 \text{ a keďže pre } s \text{ v rozdelení } l \text{ platí } s = 2^l \text{ dostaneme } 2 \sum_{l=1}^{\log n} 2^{4l}$$

Použijeme známy vzťah pre sumu geometrickej postupnosti

$$\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

a dostaneme

$$2 \sum_{k=1}^{\log n} 16^k = 2 \frac{16^{\log n+1} - 1}{15} = 2 \frac{16}{15} (16^{\log n} - 1) = 2 \frac{16}{15} (2^{4\log n} - 1) = \frac{32}{15} (n^4 - 1)$$

Každý komunikačný región sa však ešte prekrýva z konštantným počtom c regiónov v delení. ■

Odhad veľkostí komunikačných regiónov a konštanty c môžeme vyrátať analogicky ako v dvojrozmernom prípade.

4.6. Algoritmus n^3 pre torus $n \times n$

Hoci naše ohraňovania počtu vlnových dĺžok pre uvedené topológie sú asymptoticky tesné, stále ešte poskytujú priestor na zlepšenie. Popíšeme si algoritmus, ktorý dokáže našu I_A realizovať pre torus rozmerov $n \times n$, ako náš graf G , použitím n^3 vlnových dĺžok.

Najprv si ukážeme, ako realizovať na toruse kružnice medzi ľubovoľným párením stĺpcov. (Tým rozumieme 1-faktorizáciu na grafe G' . V grafe G' bude vrchol predstavovať stĺpec v pôvodnom grafe G a hrany budú medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi.) Využijeme nasledujúce tvrdenie dokázané v [7]:

Lema 4.20: (Vizing) *Pre každý graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$*

$\Delta(G)$ označuje maximálny stupeň vrcholu v grafe (maximálny počet hrán vychádzajúcich z jedného vrcholu). A $\chi'(G)$ je minimálny počet farieb potrebných na zafarbenie hrán grafu G tak, aby žiadne 2 hrany vychádzajúce z jedného vrcholu neboli zafarbené rovnakou farbou. Formálnejšie definície môžeme nájsť v [7].

Všimnime si, že farby rozdeľujú hrany grafu do disjunktných množín. Hrany jednej množiny (jednej farby) reprezentujú dvojice stĺpcov v G , medzi ktorými dokážeme realizovať ich vzájomnú komunikáciu (t.j. komunikáciu medzi všetkými ich vrcholmi) súčasne. Teraz si ukážeme, ako to budeme realizovať.

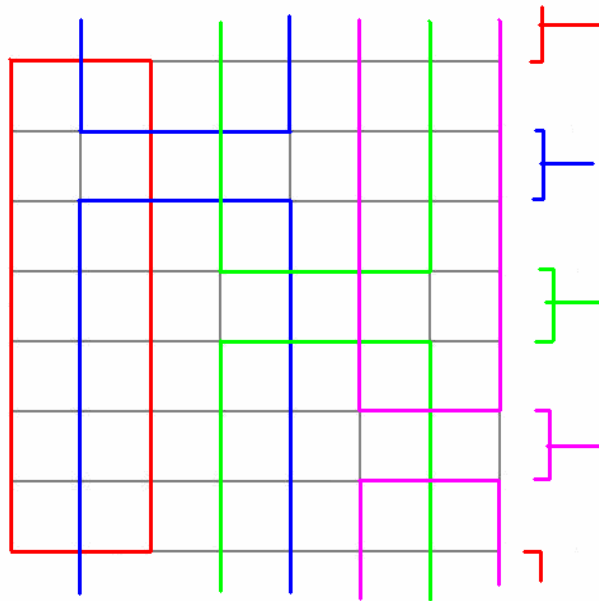
Lema 4.21: *Nech G je torus $n \times n$. Z dvojíc stĺpcov G , určené množinou hrán jednej farby pri hranovom farbení grafu G' (G' - popísaný vyššie v texte), je možné vytvoriť disjunktné kružnice. Počet týchto kružníc je určený počtom hrán v tejto množine.*

Dôkaz(náčrt): Graf G obsahuje n riadkov a n stĺpcov vrcholov. Ak chceme z párov stĺpcov vytvárať kružnice, potrebujeme 2 horizontálne cesty na prepojenie každého z nich. Maximálny počet hrán zafarbených jednou farbou v G' je $\lfloor n/2 \rfloor$. Máme teda dostatočný počet riadkov pre horizontálne cesty. Musíme ešte nájsť vhodný spôsob ako všetky kružnice realizovať. Môžeme to realizovať nasledujúcim spôsobom:

1. Vyberieme si ľubovoľný pár stĺpcov na vytvorenie kružnice.
2. Vezmeme si pár susediacich riadkov, ktorých hrany nie sú použité v žiadnej horizontálnej ceste a pokiaľ je to možné jeden z riadkov susedí z riadkom, ktorého hrany už nejaká horizontálna cesta používa.
3. Tento pár susediacich riadkov použijeme ako 2 horizontálne cesty spájajúce náš vybraný pár stĺpcov.
4. Kružnicu prepojíme od jednej horizontálnej cesty k druhej tak, aby obsahovala všetky vrcholy našich stĺpcov.

5. Pokračuj v bode 1. pokiaľ zo všetkých párov stĺpcov nemáme vytvorené kružnice.

Týmto spôsobom teda vytvoríme pre každý pár stĺpcov určený množinou hrán jednej farby pri hranovom farbení G' kružnicu, obsahujúcu všetky vrcholy nášho páru stĺpcov. Zároveň budú všetky kružnice hranovo disjunktné. Prácu tohto algoritmu máme graficky znázornenú na príklade pre torus 8×8 (obr. 4.17). ■



Obr. 4.17: Realizácia 4-och kružníc zo 4-roch párov stĺpcov na toruse

Môžeme teda sformulovať tvrdenie, kde ukážeme existenciu algoritmu realizujúceho všetky požiadavky I_A torusu $n \times n$ použitím najviac n^3 vlnových dĺžok.

Veta 4.22: *Nech G je torus $n \times n$. Existuje algoritmus realizujúci všetky požiadavky inštancie I_A v grafe G s vlastnosťou prežiteľnosti použitím najviac n^3 vlnových dĺžok.*

Dôkaz(náčrt): Realizáciu požiadaviek navzájom medzi všetkými vrcholmi grafu G môžeme rozdeliť do množín, ktorých zjednotením dostaneme všetky požiadavky I_A v G . Graf G obsahuje n riadkov a n stĺpcov vrcholov. Uvažujme požiadavky medzi vrcholmi stĺpcov. Každý z n stĺpcov vrcholov potrebuje komunikovať z každým z ostatných $(n-1)$ stĺpcov vrcholov. Počet vlnových dĺžok na komunikáciu medzi vrcholmi dvoch stĺpcov prepojených do kružnice určuje lema 4.9.

Uvažujme kompletný graf G' , kde vrcholmi sú stĺpce G . Keďže chceme, aby každá sada vlnových dĺžok pre komunikáciu jedného páru stĺpcov mohla realizovať maximálne množstvo párov stĺpcov, musíme rozdeliť množinu hrán G' do minimálneho množstva disjunktných

množín takých, aby žiadny z vrcholov hrán grafu G' nebol v jednej z množín 2 krát (t.j. ak je hrana (v_1, v_2) v množine, tak hrana (v_2, v_3) sa v nej nachádzať nesmie). Tento problém je ekvivalentný problému minimálneho hranového farbenia kompletneho grafu, kde minimálny počet disjunktných množín určuje $\chi'(G')$.

Počet hrán kompletneho grafu K_n je $n(n-1)/2$, čo je počet párov stĺpcov, ktoré musia vzájomne komunikovať. Keďže $\Delta(K_n) = n-1$, podľa lemy 4.20 je $\chi'(K_n) \leq n$.

Hranové farbenie G' nám určuje množiny párov stĺpcov. Pre všetky páry stĺpcov každej takej množiny párov môžeme podľa lemy 4.21 realizovať disjunktné kružnice. Keďže množín je maximálne n , každá množina obsahuje minimálne $(n-1)/2$ párov stĺpcov.

Uvažujme dva prípady:

$$(n = 2k)$$

Požiadavky medzi párom stĺpcov dokážeme podľa lemy 4.9 realizovať pomocou $(n^2/2)$ vlnových dĺžok. Teda súčasne môžeme realizovať minimálne $(n-1)/2$ párov stĺpcov použitím $(n^2/2)$ vlnových dĺžok. Komunikáciu medzi navzájom všetkými stĺpcami teda môžeme realizovať použitím $n^2/2$ vlnových dĺžok. Ešte však potrebujeme vyriešiť vzájomnú komunikáciu jednotlivých vrcholov v rámci stĺpcov. Je zrejmé, že operácie, ktoré sme robili na stĺpoch je možné robiť aj na riadkoch. To nám vyrieši vzájomnú komunikáciu vrcholov v rámci jednotlivých stĺpcov a celkový počet potrebných vlnových dĺžok bude rovný n^3 .

$$(n = 2k + 1)$$

Požiadavky medzi párom stĺpcov dokážeme podľa lemy 4.9 realizovať pomocou $(n^2 + 1)/2$ vlnových dĺžok. Teda súčasne môžeme realizovať minimálne $(n-1)/2$ párov stĺpcov použitím $(n^2 + 1)/2$ vlnových dĺžok. Komunikáciu medzi navzájom všetkými stĺpcami teda môžeme realizovať použitím $n(n^2 + 1)/2$ vlnových dĺžok. Ešte však potrebujeme vyriešiť vzájomnú komunikáciu jednotlivých vrcholov v rámci stĺpcov. Tak ako v predchádzajúcom prípade, operácie, ktoré sme robili na stĺpoch je možné robiť aj na riadkoch. To nám vyrieši vzájomnú komunikáciu vrcholov v rámci jednotlivých stĺpcov a celkový počet potrebných vlnových dĺžok bude rovný $n(n^2 + 1)$.

Pozornému čitateľovi iste neušlo, že sme v oboch prípadoch riešili niektoré požiadavky dvakrát. Po odstránení tejto anomálie bude počet potrebných vlnových dĺžok na realizáciu všetkých požiadaviek v grafe G v oboch prípadoch $\leq n^3$ ■

Poznámka: Pri realizácii párov riadkov nemusíme uvažovať požiadavky všetkých vrcholov riadka voči všetkým vrcholom iného riadka, ale len požiadaviek vrcholov v rámci rovnakých stĺpcov. To znamená, že ak je v oboch riadkoch po n vrcholov, počet potrebných vzájomných

požiadaviek nebude n^2 ale len n . Ostatné požiadavky už totiž boli realizované v prípade komunikácie stĺpcov.

5. Zhrnutie

V tejto práci sme skúmali problém návrhu prežiteľných (istým spôsobom fault-tolerantných) sietí založených na routovaní podľa vlnovej dĺžky. Zaoberali sme sa prípadom s fyzickou sieťou topológie mriežky, torusu, 3-rozmernej mriežky, 3-rozmernej toroidnej mriežky, m -rozmernej mriežky a m -rozmernej toroidnej mriežky s all-to-all komunikačnou inštanciou I_A . Oproti fyzickej sieti kruhu, kde minimalizáciou počtu cyklov v pokrytí sa minimalizoval počet vlnových dĺžok, je situácia na týchto topológiách trocha iná. Dva cykly navzájom sa neovplyvňujúce môžu totiž používať rovnakú vlnovú dĺžku.

Odhadli sme dolné hranice počtu potrebných vlnových dĺžok. Navrhli sme univerzálny spôsob (algoritmus), ktorým sme sa na týchto topológiách asymptoticky k týmto odhadom priblížili. Pre torus sme skonštruovali algoritmus n^3 , ktorým sme sa ešte viac priblížili k našim dolným odhadom. Avšak tento algoritmus nie je použiteľný pre ostatné z uvedených skúmaných topológií. V priebehu prípravy tejto práce bol nezávisle publikovaný článok [8], kde Bermond a Yu dokonca dosiahli optimálne routovanie s vlastnosťou prežiteľnosti na toruse s nepárnym n . Avšak podobne ako náš algoritmus n^3 pre torus nie je možné priamočiaro upraviť pre ostatné z našej množiny skúmaných topológií.

Zaujímavé by bolo takéto problémy skúmať na I_k (k -relácie) inštanciách, prípadne iných komunikačných inštanciách. Tiež by bolo zaujímavé skúmať model, kde by sa požiadavky dynamicky menili. Ako by sa v takomto modeli vyberali požiadavky pre pokrytie cyklom? Ako by sa riešila rôzna dĺžka trvania požiadaviek? Ako efektívne by sme dokázali realizovať takéto požiadavky?

Ďalším cieľom by mohla byť optimalizácia skutočnej ceny siete. Množstvo a veľkosť použitých ADM, počet vlnových dĺžok, cena regenerácie a pod. Tiež by sme mohli zohľadniť aj routre s konvertormi vlnových dĺžok. Používať model s routami, ktoré dokážu konvertovať vlnovú dĺžku spolu s klasickými, ktoré ju konvertovať nedokážu, kde by sa zohľadnila aj rozdielna cena routrov.

V tejto oblasti zostáva množstvo problémov na skúmanie. Optické siete však stále ponúkajú veľké rezervy v prenosovej kapacite a preto je vhodné zaoberať sa tým ako ju v maximálnej miere využiť.

6. Použitá literatúra

- [1] B. Beauquier, J-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Perennes, and U. Vaccaro. Graph problems arising from Wavelength--Routing in All--Optical Networks. In Proc. Conference WOCS97, Geneva, April 1997, 1997.
- [2] J-C. Bermond, L. Chacon, D. Coudert, and F. Tillerot. Cycle Covering. In International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity -- SIROCCO, pages 21-34, 27-29 June 2001.
- [3] Y. Aumann and Y. Rabani. Improved bounds for all optical routing. In Proceedings of the 6th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 567 -- 576, 1995.
- [4] P. Mederly. Introduction to Computer Networks. Comenius University, Bratislava, 1997
- [5] S. Chatterjee, S. Pawlowski. All optical networks: Enlightening the effects and implications of nearly infinite bandwidth. Communications of the ACM, 42 (6), pages 74-83, 1999.
- [6] A. K. Somani, M. Mina, L. Li. On trading wavelengths with fibers: A cost performance based study. IEEE/ACM Transaction on networking, 2004
- [7] R. Diestel. Graph Theory, Springer-Verlag New York 1997, 2000
- [8] J.-C. Bermond and M-L. Yu. Vertex disjoint routings of cycles over tori. Networks, submitted, 2004.
- [9] B. Beauquier. All-to-all communication in some wavelength-routed all optical networks. Networks, Wiley-Interscience, 1999, 179-187
- [10] J-C. Bermond, L. Gargano, S. Perennes, A.A. Rescigno, and U. Vaccaro. Efficient Collective Communications in Optical Networks. In Proc. 23rd ICALP96, Paderborn, Germany Lecture Notes in Computer Science, 1099, pages 574-585, 1996. Springer verlag.
- [11] J-C. Bermond, D. Coudert, M.-L. Yu. On DRC-covering of K_n by Cycles. In Journal of Combinatorial Design, 11:100-112, 2003.
- [12] Schroder, H., Sykora, O., Vrt'o, I., Optical all-to-all communication for some product graphs, in: Proc. SOFSEM'97: Theory and Practice of Informatics, Lecture Notes in Computer Science 1338, Springer, Berlin, 1997, 555-562.