



KATEDRA INFORMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

NAJMENŠÍ NIE MINIMÁLNY ZMYSEL PRE ORIENTÁCIU

(Diplomová práca)

PAVEL STRUHÁR

Študijný odbor: 9.2.1 Informatika

Vedúci: doc. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.

Bratislava, 2010

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu
vypracoval samostatne použitím citovaných zdrojov.

.....

Abstrakt

Témou tejto diplomovej práce je problém nájdania zmyslu pre orientáciu v grafe, kde počet značiek priradených hranám grafu je čo najmenší. Práca skúma topológie hyperkociek a zovšeobecnených Petersenových grafov. Na týchto topológiách sa zameriava na chordálny zmysel pre orientáciu.

Hľadajú sa podtriedy týchto grafov, na ktorých existuje minimálny chordálny zmysel pre orientáciu, čím sa vylúčia tie, v ktorých neexistuje a následne sa určujú horné a spodné ohraničenia pre počet značiek.

V práci dokazujeme, že hyperkocky nemajú minimálny chordálny zmysel pre orientáciu a určujeme ohraničenia najmenšieho počtu značiek pre dosiahnutie chordálneho zmyslu pre orientáciu. V triede zovšeobecnených Petersenových grafov nachádzame niekoľko podtried a určujeme ich najmenší zmysel pre orientáciu, resp. ohraničenia. V malom rozsahu sa venujeme aj výpočtovým metódam, ktoré, hoci málo úspešné, dávajú podnety na ďalšie skúmanie problematiky.

Kľúčové slová: distribuované výpočty, topológie regulárnych grafov, zmysel pre orientáciu

Obsah

1	Úvod	7
1.1	Zmysel pre orientáciu - intuitívny pohľad	7
1.2	Ako zmysel pre orientáciu pomáha pri riešení problémov	8
1.3	Doladenie modelu - lokálne označenie hrán	8
2	Definície a terminológia	10
2.1	Grafy s hranovým označením	10
2.2	Zmysel pre orientáciu	11
2.3	Lokálne pomenovania	12
2.4	Príklady hranových označení so zmyslom pre orientáciu	13
2.4.1	Chordálny zmysel pre orientáciu	13
2.4.2	Susednostný zmysel pre orientáciu	16
2.4.3	Súradnicový zmysel pre orientáciu	16
2.5	Najmenší počet hranových označení	17
3	Minimálny a najmenší zmysel pre orientáciu	18
3.1	Základné definície	18
3.2	Cyklická symetria a minimálnosť	19
3.3	Cayleyho grafy a minimálny zmysel pre orientáciu	21
3.4	Problém minimálneho počtu značiek	22
4	Najmenší chordálny zmysel pre orientáciu	23
4.1	Cayleyho grafy	23
4.1.1	Čirkulantné grafy	23

4.1.2	Minimálny chordálny zmysel pre orientáciu	24
4.2	Hyperkocky	26
4.2.1	Hyperkocka a jej dimenzionálne označenie hrán	26
4.2.2	Najmenší chordálny zmysel pre orientáciu nie je minimálny	27
4.2.3	Horné ohraničenia počtu značiek	30
4.3	Zovšeobecnené Petersenove grafy	33
4.3.1	Definícia zovšeobecneného Petersenovho grafu	33
4.3.2	Minimálny chordálny zmysel pre orientáciu	33
4.3.3	Horné ohraničenia počtu značiek	39
5	Výpočtové metódy	42
5.1	Algoritmus 1: Generovanie permutácií vrcholov	42
5.2	Algoritmus 2: Zisťovanie podgrafu cirkulantného grafu	43
5.3	Výsledky	44
5.3.1	Hyperkocky	44
5.3.2	Zovšeobecnené Petersenove grafy	45
6	Záver	46
	Literatúra	49

Kapitola 1

Úvod

Vo všeobecnosti, *distribuovaný systém* je množina výpočtových jednotiek (procesorov), ktoré medzi sebou môžu komunikovať výmenou konečného množstva informácií, ktoré nazývame správy. Existuje viacero modelov v závislosti od realizácie komunikácie. My sa obmedzíme na tzv. *point-to-point* model, v ktorom môžu priamo medzi sebou komunikovať iba navzájom susediace výpočtové jednotky cez obojsmerný komunikačný kanál. Tento model môžeme reprezentovať neorientovaným grafom ($G = (V, E)$). V ňom každý vrchol $v \in V$ reprezentuje výpočtovú jednotku a každá hrana $\langle x, y \rangle \in E$ reprezentuje susediace výpočtové jednotky, ktoré môžu priamo medzi sebou komunikovať.

1.1 Zmysel pre orientáciu - intuitívny pohľad

Zmysel pre orientáciu sa lokálne viaže na hrany incidentné k danému vrcholu. Každý uzol (vrchol grafu) sa primárne orientuje podľa toho, po akej hrane, k nemu incidentnej, prišla správa, alebo akou hranou odišla. Vrchol má teda lokálne označené hrany¹. V prípade, že máme anonymnú sieť, kde nevieme identifikovať ostatné sieťové uzly, vieme rozlíšiť aspoň susedov podľa označení liniek, ktoré k nim smerujú. Zmysel pre orientáciu však ide ešte ďalej. Celý

¹V praxi bývajú sieťové rozhrania pomenované, napr. eth0, eth1 a pod.

systém má *zmysel pre orientáciu*, ak každý uzol vie odlíšiť dva rôzne uzly v sieti iba na základe postupnosti označení liniek, ktoré ich navzájom spájajú a zároveň, ak existujú dve cesty k tomu istému uzlu, je schopný to rozoznať a identifikovať uzol použitím ľubovoľnej z nich.

Ako vidíme, zmysel pre orientáciu ponúka alternatívu ku globálnym identifikátorom v anonymnej sieti, s tým rozdielom, že identifikácia vrcholov prebieha na lokálnej úrovni. Úplný zmysel pre orientáciu máme vtedy, ak má systém vlastnosť, že každý uzol vie transformovať lokálny identifikátor iného uzla na svoj vlastný lokálny identifikátor.

Zmysel pre orientáciu si neskôr popíšeme podrobnejšie a formálnejšie.

1.2 Ako zmysel pre orientáciu pomáha pri riešení problémov

Jedna z klasických úloh, ktoré sa riešia v distribuovanom systéme, je *voľba šéfa*. Cieľom je, aby po skončení algoritmu bol v grafe jednoznačne určený jediný proces, ktorý budeme nazývať šéf.

Predpokladáme, že každý procesor má na začiatku pridelený unikátny identifikátor (ID), ktorý pozná len on sám. Procesory môžu medzi sebou komunikovať pomocou správ. Budeme predpokladať, že posielanie môže prebiehať asynchrónne. Celkovo sa snažíme nájsť taký algoritmus, pri ktorom bude počet správ asymptoticky najmenší možný.

Pre ľubovoľný náhodný graf poznáme algoritmus GHS, ktorý rieši voľbu šéfa s komunikačnou zložitou $O(N \log N)$, kde N je počet vrcholov.

V prípade grafu s topológiou hyperkocky vieme riešiť tento problém s komunikačnou zložitou $O(N)$ práve vďaka zmyslu pre orientáciu [15, 3]

1.3 Doladenie modelu - lokálne označenie hrán

V predošlých častiach sme sa mali možnosť presvedčiť o tom, že zmysel pre orientáciu súvisí s lokálnym označením hrán grafu vzhľadom na nejaký vrchol.

Náš model bude potom reprezentovaný hranovo označeným neorientovaným grafom (G, λ) , kde každý vrchol (procesor) x má označenú každú hranu k nemu incidentnú rozličnou značkou $\lambda_x(\langle x, y \rangle)$. Potom každá hrana $\langle x, y \rangle$ má práve dve označenia, $\lambda_x(\langle x, y \rangle)$, $\lambda_y(\langle y, x \rangle)$, jedno pre každý z vrcholov, ku ktorým je incidentná.

Takéto hranové označenie na grafe môže mať niekoľko vlastností, ktoré môžu pomôcť. Najzákladnejšou vlastnosťou je *lokálna orientácia* - schopnosť procesora odlíšiť medzi linkami, ktoré z neho vychádzajú. Túto vlastnosť sme využívali v prípade pravouhlej mriežky, kde boli hrany označené svetovými stranami a aj hyperkocky. Ďalšia zaujímavá vlastnosť je *hranová symetria*. Je to schopnosť rozoznať z označenia na jednom konci hrany, aké bude označenie na opačnom konci. Napríklad, ak mala hrana v mriežke označenie *sever* na jednom konci, na druhom konci muselo byť označenie *juh*. V hyperkocke sa, na druhej strane, hranové označenia na oboch koncoch zhodovali. V tomto prípade je funkcia hranovej symetrie *identita* a takéto hranové označenie grafu je ekvivalentné s *ofarbením* grafu, ako ho poznáme z klasickej teórie grafov.

Jedna z najdôležitejších vlastností hranového označenia je nakoniec samotný *zmysel pre orientáciu*, ktorý by sme mohli interpretovať ako *schopnosť zistiť, či rôzne cesty začínajúce v spoločnom vrchole končia v spoločnom vrchole alebo nie*. V nasledujúcej časti si definujeme základné pojmy, ktoré budeme používať neskôr.

Kapitola 2

Definície a terminológia

V tejto kapitole budeme používať definície z [6] a [7] v prípade, ak nebude uvedené inak.

2.1 Grafy s hranovým označením

Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý neorientovaný graf, nech $E(x)$ označuje množinu hrán, ktoré sú incidentné k vrcholu $x \in V$ a nech $d(x) = |E(x)|$ je stupeň vrcholu x .

Pre daný graf $G = (V, E)$ a množinu označení Σ , budeme *lokálnou orientáciou vrcholu x* nazývať každú prostú funkciu $\lambda_x : E(x) \rightarrow \Sigma$, ktorá každej hrane určuje značku. Potom množina $\lambda = \{\lambda_x : x \in V\}$ lokálnych orientácií sa bude nazývať *hranové označenie s lokálnou orientáciou* (alebo len hranové označenie) grafu G a usporiadaná dvojica (G, λ) bude označovať zodpovedajúci *hranovo označený graf*.

Hranové označenie λ je *minimálne*, ak používa $|\Sigma| = \Delta(G) = \max\{d(x) : x \in V\}$ označení. Je symetrické, ak existuje bijekcia $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ taká, že pre každú hranu $\langle x, y \rangle \in E$, $\lambda_y(\langle y, x \rangle) = \psi(\lambda_x(\langle x, y \rangle))$. Potom ψ je funkcia hranovej symetrie.

Sled π v grafe G je postupnosť hrán, v ktorej koncový vrchol jednej hrany je začiatočný vrchol ďalšej. Nech $P[x]$ označuje množinu všetkých ne-

prázdnych sledov, ktoré majú začiatok vo vrchole $x \in V$, a nech $P[x, y]$ označuje množinu sledov so začiatkom v $x \in V$ a koncom v $y \in V$. Nech $\Lambda_x : P[x] \rightarrow \Sigma^+$ a $\Lambda = \{\Lambda_x : x \in V\}$ označujú rozšírenie λ_x , resp. λ z hrán na sledy. Nech $\Lambda[x] = \Lambda_x(\pi) : \pi \in P[x]$ a $\Lambda[x, y] = \Lambda_x(\pi) : \pi \in P[x, y]$.

2.2 Zmysel pre orientáciu

V danom hranovo označenom grafe (G, λ) hovoríme, že systém má *zmysel pre orientáciu*, ak je možné na základe označení priradených k hranám zistiť, či rôzne sledy (alebo cesty) z ktoréhokoľvek vrcholu x končia v tom istom vrchole alebo nie. Presnejšie povedané, zmysel pre orientáciu si vyžaduje existenciu konzistentnej kódovacej a konzistentnej dekódovacej funkcie.

Pre daný hranovo označený graf (G, λ) *konzistentná kódovacia funkcia* (alebo iba *kódovacia funkcia*) f pre λ je akákoľvek funkcia s definičným oborom Σ^+ , taká, že sledy, ktoré vychádzajú z toho istého vrcholu sa zobrazia na tú istú hodnotu práve vtedy keď ich koniec je v tom istom vrchole. Teda $\forall x, y, z \in V, \forall \pi_1 \in P[x, y], \pi_2 \in P[x, z], f(\Lambda_x(\pi_1)) = f(\Lambda_x(\pi_2)) \Leftrightarrow y = z$. Písmenom \mathcal{N} budeme označovať obor hodnôt funkcie f . Hodnotu z \mathcal{N} , ktorá je funkčnou hodnotou funkcie $f(x)$ pre nejaký vrchol x , budeme nazývať *lokálne meno vrcholu*.

Definícia 1. *Slabý zmysel pre orientáciu*

Systém (G, λ) má slabý zmysel pre orientáciu práve vtedy keď existuje kódovacia funkcia f pre λ .

Pre danú kódovaciu funkciu f , k nej asociovaná dekódovacia funkcia h je akákoľvek funkcia $h : \Sigma \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ taká, že $\forall x, y, z \in V$, kde $\langle x, y \rangle \in E(x)$ a $\pi \in P[y, z] : h(\lambda_x(\langle x, y \rangle), f(\Lambda_y(\pi))) = f(\lambda_x(\langle x, y \rangle) \cdot \Lambda_y(\pi))$, kde \cdot je operátor zrefazenia.

Definícia 2. *Zmysel pre orientáciu*

Systém (G, λ) má zmysel pre orientáciu (\mathcal{SD})¹ práve vtedy keď sú splnené

¹angl.: sense of direction

nasledovné podmienky:

1. *existuje kódovacia funkcia f pre λ*
2. *existuje dekódovacia funkcia h pre f .*

Budeme tiež hovoriť, že (f, h) je zmysel pre orientáciu v (G, λ) .

Existujú hranovo označené grafy, ktoré majú slabý zmysel pre orientáciu, ale nemajú zmysel pre orientáciu.

2.3 Lokálne pomenovania

Pojem konzistentného kódovania, dekódovania a zmyslu pre orientáciu je možné vysvetliť pomocou lokálnych mien. Tento pohľad je intuitívnejší a bude nám preto veľmi nápomocný.

Každý vrchol x je schopný odkazovať na ostatné vrcholy grafu pomocou lokálnych pomenovaní z konečnej množiny \mathcal{N} , ktorú nazveme menný priestor. Nech $\beta_x(y)$ je meno, ktoré má vrchol x asociované s vrcholom y . Množinu $\{\beta_x(y) : y \in V\}$ nazveme *lokálny pohľad* vrcholu x . Musíme však zdôrazniť, že lokálne pomenovania nie sú vždy identity - nepoužívajú sa globálne identifikátory. Vo všeobecnosti predpokladáme, že systém je *anonymný*, čiže vrcholy nevedia o systéme nič okrem toho, že môžu predpokladať, že na druhom konci linky je vrchol. Rodinu prostých funkcií $\beta = \{\beta_x : V \rightarrow \mathcal{N} : x \in V\}$ budeme nazývať *lokálne názvoslovie* G .

Vyslovme znovu definíciu kódovacej funkcie, teraz však pomocou lokálnych názvov: *kódovacia funkcia* f grafu (G, λ) s lokálnym názvoslovím β je akákoľvek funkcia taká, že: $\forall x, y \in V, \forall \pi \in P[x, y], f(\Lambda_x(\pi)) = \beta_x(y)$. Inými slovami, kódovacia funkcia zobrazí postupnosť označení cesty z vrcholu x do vrcholu y na lokálny názov, ktorý x priradí y . Všimnime si, že zatiaľčo výsledné pomenovanie je lokálne (vrcholy x a z môžu mať rôzne pomenovanie pre ten istý vrchol y), kódovacia funkcia je globálna (rovnaká pre všetky vrcholy).

Vyslovme teraz definíciu dekodovacej funkcie pomocou lokálneho názvoslovía. Pre danú kódovaciu funkciu f , dekodovacia funkcia h je akékoľvek zobrazenie také, že $\forall x, y, z \in V$, kde $\langle x, y \rangle \in E(x)$, $h(\lambda_x(x, y), \beta_y(z)) = \beta_x(z)$. Aby sme porozumeli schopnosti dekodovacej funkcie z pohľadu lokálnych názvov, uvažujme situáciu, kde vrchol y posíla susednému vrcholu x správu, ktorá obsahuje informácie o vrchole z . Vrchol z je vrcholu y známy ako $\beta_y(z)$, takže správa, ktorú posíla vrchol y , obsahuje údaje o vrchole s názvom $\beta_y(z)$. Dekodovacia funkcia umožňuje vrcholu x preložiť tento názov na svoj vlastný názov pre ten istý vrchol z , čiže $\beta_x(z)$. Vrchol x pritom pozná iba označenie linky $\lambda_x(\langle x, y \rangle)$, po ktorej mu bola správa doručená.

2.4 Príklady hranových označení so zmyslom pre orientáciu

Existuje niekoľko spôsobov, ako na grafe vytvoriť zmysel pre orientáciu. Zatiaľ, čo niektoré z týchto spôsobov sú závislé na topológii a nie je ich možné vytvoriť na každom grafe, iné je možné použiť vo všeobecnosti. Uvedieme si niektoré typy hranových označení a z nich vyplývajúcich zmyslov pre orientáciu.

2.4.1 Chordálny zmysel pre orientáciu

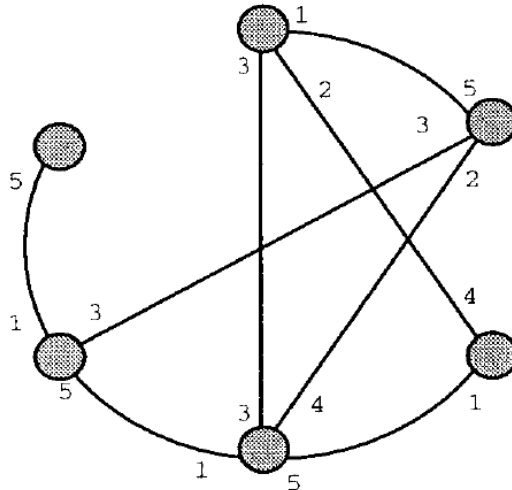
Je daný graf $G = (V, E)$, pričom $|V| = n$. Chordálne označenie v ňom vznikne zoradením vrcholov do nejakého cyklického usporiadania a hranovým označením každej incidentnej hrany vzdialenosťou v tomto cykle. Podľa [6] je definované nasledovne.

Definícia 3. *Nech γ je funkcia nasledovníka, ktorá definuje cyklické usporiadanie vrcholov v (G, λ) a nech $\gamma^k(x) = \gamma^{k-1}(\gamma(x))$ pre $k > 0$. Nech $\delta : V \times V \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ je funkcia, ktorá vracia vzdialenosť dvoch vrcholov. Potom $\delta(x, y)$ je najmenšie k také, že $\gamma^k(x) = y$. Hranové označenie*

λ je chordálne práve vtedy keď $\forall \langle x, y \rangle \in E(x)$ platí:

$$\lambda_x(\langle x, y \rangle) = \delta(x, y).$$

Inými slovami, chordálne označenie hrán môžeme získať tak, že zoberieme ľubovoľné cyklické zoradenie vrcholov a každú hranu označíme na príslušnej strane prirodzeným číslom, ktoré je hodnotou vzdialenosti vrcholu, pri ktorom je značka, od vrchola na druhej strane hrany v tomto zoradení. Je zrejmé, že pri rôznych cyklických usporiadaniach vzniknú spravidla rôzne hranové označenia. Príklad môžeme vidieť na obr 2.1.



Obr. 2.1: Graf s chordálnym hranovým označením [6]

Veta 2.1. *Nech λ je chordálne hranové označenie a $\forall x, y$ nech $\beta_x(y) = \gamma(x, y)$. Potom λ je \mathcal{SD} (zmysel pre orientáciu) [6].*

Dôkaz. Kódovacia funkcia f je definovaná nasledovne: $\forall \pi \in P[x_0], \pi =$

$(\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{m-1}, x_m \rangle)$,

$$\begin{aligned} f(\Lambda_{x_0}(\pi)) &= f(\lambda_{x_0}(\langle x_0, x_1 \rangle), \lambda_{x_1}(\langle x_1, x_2 \rangle), \dots, \lambda_{x_{m-1}}(\langle x_{m-1}, x_m \rangle)) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{x_i}(\langle x_i, x_{i+1} \rangle) \pmod n \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \delta(x_i, x_{i+1}) \pmod n \\ &= \delta(x_0, x_m) \end{aligned}$$

a dekodovacia funkcia h :

$$\forall \langle x_0, y_0 \rangle \in E(x_0), \forall \pi \in P[y_0]$$

$$h(\lambda_{x_0}(\langle x_0, y_0 \rangle), f(\Lambda_{y_0}(\pi))) = \lambda_{x_0}(\langle x_0, y_0 \rangle) + f(\Lambda_{y_0}(\pi)) \pmod n$$

Funkcia nasledovníka γ spolu s funkciou vzdialenosti δ nám zaručuje jednoznačnosť kódovacej funkcie. \square

Môžeme si všimnúť, že množina hranových označení sa zhoduje s množinou lokálnych pomenovaní: $\Sigma = \mathcal{N} = \mathbb{Z}_n$. Tento druh hranového označenia budeme volať chordálny zmysel pre orientáciu.

Definícia 4. *Zmysel pre orientáciu budeme nazývať symetrický, ak existuje dvojica funkcií $\phi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ a $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ taká, že pre každú dvojicu vrcholov u a v platí*

$$\beta_u(v) = \phi(\beta_v(u))$$

a pre každú hranu $\langle x, y \rangle$ v (G, λ) platí

$$\lambda_x(x, y) = \psi(\lambda_y(y, x))$$

Veta 2.2. *Chordálny zmysel pre orientáciu je symetrický.*

Dôkaz. Dĺžka cyklu je n , teda ak na jednej strane hrany je značka d (vzdialenosť medzi vrcholmi v smere cyklického usporiadania), tak na druhej strane je značka $n - d$. Rovnako to platí pre lokálne pomenovania. Z toho vyplýva, že $\phi = \psi$, $\psi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ a $\psi(d) = n - d$. \square

2.4.2 Susednostný zmysel pre orientáciu

Graf $G = (V, E)$ má *susednostný zmysel pre orientáciu*, keď funkciu lokálneho hranového značenia λ určíme nasledovne: $\forall \langle x, y \rangle \in E[x], \langle z, w \rangle \in E[z], \lambda_x(\langle x, y \rangle) = \lambda_z(\langle z, w \rangle)$ práve vtedy keď $y = w$.

To znamená, že všetky hrany, ktoré končia v tom istom vrchole, majú pridelené rovnaké označenie zo strany vrcholov susediacich s týmto spoločným vrcholom.

Nech Σ je množina označení. Kódovacia funkcia $f : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$ je určená nasledovne. Pre akúkoľvek postupnosť označení a_1, a_2, \dots, a_k , kde $a_k \in \Sigma$, $f(a_1, \dots, a_k) = a_k$. Príslušná dekodivacia funkcia bude teda popísaná nasledovne: $\forall a, b \in \Sigma, h(a, b) = b$.

Vidíme, že na rozdiel od chordálneho zmyslu pre orientáciu, kde každý vrchol vedel iba lokálne pomenovať všetky ostatné vrcholy v sieti, v susednostnom zmysle pre orientáciu pomenovania dostávajú globálny charakter. Pokiaľ ja takýto zmysel pre orientáciu prítomný v anonymnej sieti, vždy búra anonymitu, keďže prideluje vrcholom unikátne identifikátory.

2.4.3 Súradnicový zmysel pre orientáciu

Majme vnorenie² grafu G do roviny. Potom λ je súradnicové značenie práve vtedy keď $\forall \langle u, v \rangle \in E[u], \lambda_u(\langle u, v \rangle) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, kde (x_0, y_0) a (x_1, y_1) sú súradnice vrcholov u a v

Pri takomto označení (G, λ) má súradnicový zmysel pre orientáciu. Nech Σ je množina označení. Potom kódovacia funkcia $f : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$ je definovaná nasledovne: pre postupnosť označení $(x_1, y_1) \dots (x_m, y_m)$, kde $(x_i, y_i) \in \Sigma$, platí $f((x_1, y_1) \dots (x_m, y_m)) = (\sum_{i=1}^m x_i, \sum_{i=1}^m y_i)$. Následne pre dekodováciu funkciu h platí: $\forall (x, y), (x', y') \in \Sigma, h((x, y), (x', y')) = (x + x', y + y')$.

²embedding

2.5 Najmenší počet hranových označení

Jednou z otázok, ktoré nás pri štúdiu zmyslu pre orientáciu zaujímajú je, aký je čo najmenší počet označení potrebných na dosiahnutie zmyslu pre orientáciu na grafe a aké vlastnosti má zmysel pre orientáciu v grafoch označených minimálnym počtom. Tieto vlastnosti už boli značne preskúmané pri regulárnych grafoch.

V kapitole (3) si definujeme minimálny zmysel pre orientáciu a spomenieme si dosiahnuté výsledky týkajúce tejto oblasti. Nakoľko trieda grafov majúcich minimálny zmysel pre orientáciu bola charakterizovaná, v celom zvyšku práce sa budeme zaoberať triedami grafov, ktoré nemajú minimálny zmysel pre orientáciu a budeme hľadať ich najmenší zmysel pre orientáciu.

Kapitola 3

Minimálny a najmenší zmysel pre orientáciu

V tejto a v ďalších kapitolách nás už budú zaujímať iba regulárne grafy a ich rôzne podtriedy. V každej zo skúmaných tried regulárnych grafov sa budeme snažiť nájsť najmenší počet hranových označení potrebných na vytvorenie zmyslu pre orientáciu.

Je zrejmé, že veľkosť množiny hranových označení Σ je zdola ohraničená najväčším stupňom v grafe a zhora počtom vrcholov ($\Delta(G) \leq |\Sigma| \leq |V|$).

3.1 Základné definície

Nech Σ je množina značiek v hranovom značení λ . Nasledovné definície vychádzajú z [4].

Definícia 5. *Veľkosť hranového značenia λ je počet rôznych značiek v Σ .*

Definícia 6. *Minimálny zmysel pre orientáciu.*

Zmysel pre orientáciu λ v (G, λ, β) je minimálny práve vtedy keď jeho veľkosť je rovná maximálnemu stupňu G .

Ako neskôr vysvitne, nie všetky regulárne grafy majú minimálny zmysel pre orientáciu. Preto ak budeme chcieť hovoriť o zmysle pre orientáciu, ktorý

používa pre daný graf najmenší možný počet značiek, bez ohľadu na to, či je minimálny (podľa definície hore), budeme hovoriť o *najmenšom zmysle pre orientáciu*.

Definícia 7. *Najmenší zmysel pre orientáciu*

Zmysel pre orientáciu λ v (G, λ, β) je najmenší práve vtedy keď pre každé λ' v (G, λ', β) platí, že počet značiek je väčší alebo rovný ako v λ .

3.2 Cyklická symetria a minimálnosť

Minimálny zmysel pre orientáciu súvisí s *cyklickou* symetrickosťou grafu ([4]). Najskôr si však definujeme pojem vrcholovej tranzitívnosti.

Definícia 8. *Vrcholová tranzitívnosť¹. [4]*

Graf G je vrcholovo tranzitívny práve vtedy keď pre $\forall x, y \in V$ existuje automorfizmus α grafu G taký, že $y = \alpha(x)$.

Inými slovami, graf je vrcholovo tranzitívny, ak vyzerá rovnako z ľubovoľného vrchola. Nasleduje definícia samotnej cyklickej symetrickosti, kde označenie $C_x[i]$ znamená počet kružníc dĺžky i , ktoré prechádzajú vrcholom x .

Definícia 9. *Cyklická symetria. [4]*

Graf je cyklicky symetrický práve vtedy, keď

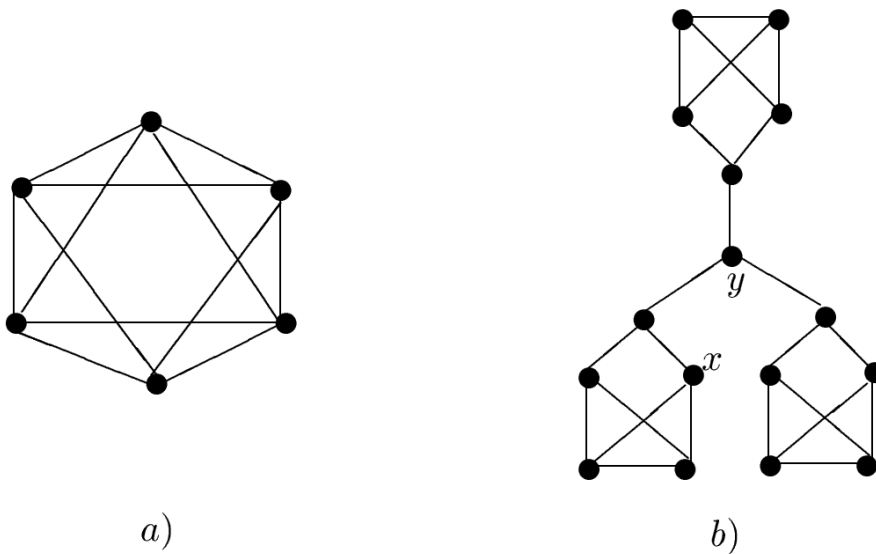
$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall x, y \in V, C_x[i] = C_y[i]$$

Inými slovami, graf je cyklicky symetrický, ak každý vrchol patrí do rovnakého počtu kružníc rovnakej dĺžky.

V súvislosti s týmito pojmami, bolo v [4] dokázané, že *vrcholová tranzitívnosť* implikuje *cyklickú symetriu*. Keďže vrcholovo tranzitívny graf je tiež cyklicky symetrický, vrcholovou tranzitívnosťou je daná slabšia nutná podmienka existencie minimálneho zmyslu pre orientáciu. Tieto dve vlastnosti

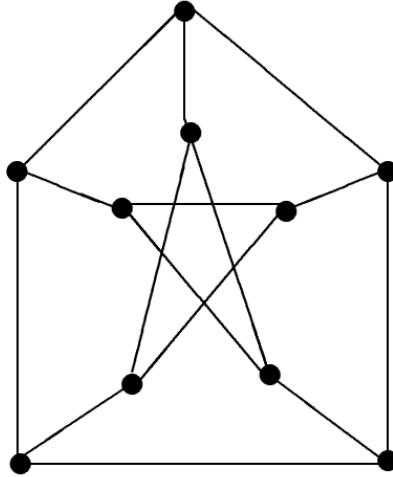
¹Niekedy označovaná aj ako vrcholová symetria

však nie sú ekvivalentné. V [10] bolo ukázané, že cyklicky symetrický graf nemusí byť nutne vrcholovo tranzitívny. Na obrázku 3.1 sú 3-regulárne grafy, z ktorých (b) nie je cyklicky symetrický, takže tento graf nevieme označiť použitím troch značiek aby sme dosiahli zmysel pre orientáciu. Na druhej strane, graf na obrázku (a) je cyklicky symetrický, takže v tomto prípade môžeme vidieť, že na ňom existuje minimálny zmysel pre orientáciu.



Obr. 3.1: Pre graf vľavo existuje minimálny \mathcal{SD} , pre graf vpravo nie.

V [4] bolo ďalej dokázané, že cyklická symetria je nutnou, ale nie postačujúcou podmienkou minimálneho zmyslu pre orientáciu v regulárnych grafoch. Ako protipríklad bol použitý Petersenov graf (obrázok 3.2), ktorý je síce vrcholovo tranzitívny a teda aj cyklicky symetrický, ale pre akékoľvek hranové označenie λ s 3 značkami nemá zmysel pre orientáciu. Aby sme ho dosiahli, potrebujeme aspoň ďalšiu štvrtú značku.



Obr. 3.2: Petersenov graf

3.3 Cayleyho grafy a minimálny zmysel pre orientáciu

Nutné a postačujúce podmienky pre minimálny zmysel pre orientáciu v hranovo značenom grafe (G, λ) boli nakoniec položené v [8] pre symetrické hranové značenia a v [9] pre nesymetrické. My sa ďalej budeme zaoberať iba symetrickými.

V článku [8], ktorý sa zaoberal zmyslom pre orientáciu pre symetrické označenia hrán, bolo dokázané, že regulárny graf so symetrickým hranovým označením má minimálny zmysel pre orientáciu, ak je symetrický čo do okolia². Táto vlastnosť sa však viaže iba triedu grafov, ktorú nazývame Cayleyho grafy.

Definícia 10. *Cayleyho graf*

Majme konečnú grupu \mathcal{G} a \mathcal{S} množinu jej generátorov. Cayleyho graf $G = CG(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ môžeme definovať nasledovne. Vrcholy budú prislúchať prvkom grupy

²surrounding symmetric

\mathcal{G} a hrany budú korešpondovať akciám generátorov. Vrcholy $u, v \in V$ budú spojené hranou práve vtedy, ak existuje generátor $g \in \mathcal{S}$ taký, že $ug = v$. Ak je množina generátorov \mathcal{S} uzavretá na inverzné prvky, potom je graf neorientovaný.

Definícia 11. *Cayleyho hranové značenie*

Graf má Cayleyho hranové značenie λ , ak je to Cayleyho graf a označenia hrán korešpondujú s prvkami množiny generátorov \mathcal{S}

My sa budeme zaoberať výlučne neorientovanými grafmi, teda pre každý prvok generujúcej množiny \mathcal{S} existuje inverzný prvok patriaci do množiny \mathcal{S} .

Všeobecná charakterizácia minimálneho zmyslu pre orientáciu v neregu­lárnych grafoch zostáva stále otvorenou otázkou.

3.4 Problém minimálneho počtu značiek

Konečne sa dostávame k tomu, čo je cieľom diplomovej práce. V sekciách tejto kapitoly sme definovali minimálny zmysel pre orientáciu a triedu grafov, pri ktorých sme schopní dosiahnuť minimálny zmysel pre orientáciu. Minimálny symetrický zmysel pre orientáciu má jedine trieda Cayleyho grafov. V ostatných prípadoch potrebujeme viac označení ako $d(G)$ na dosiahnutie zmyslu pre orientáciu. Existuje domnienka, že na dosiahnutie zmyslu pre orientáciu v ľubovoľnom grafe nám vo všeobecnosti postačí $d(G) + 1$ značiek. Tento počet sa však v niektorých prípadoch javí nedostatočný. Príkladom je práca [13], v ktorej autorka experimentálne (hrubou silou) našla najmenší chordálny zmysel pre orientáciu v Petersenovom grafe, pričom počet značiek bol 5. Dá sa tiež ukázať, že hoci kocka patrí do triedy Cayleyho grafov a teda pre ňu existuje minimálny zmysel pre orientáciu s Cayleyho hranovým značením, neexistuje však s chordálnym.

V ďalších kapitolách sa budeme zaoberať najmenším chordálnym zmyslom pre orientáciu Cayleyho grafov a Petersenových grafov.

Kapitola 4

Najmenší chordálny zmysel pre orientáciu

4.1 Cayleyho grafy

V podkapitole 3.3 sme definovali triedu Cayleyho grafov a tiež pojem Cayleyho hranového značenia v súvislosti so zmyslom pre orientáciu. Spomenuli sme, že práve trieda Cayleyho grafov je totožná s triedou grafov majúcich minimálny symetrický zmysel pre orientáciu. Do tohto spadá aj minimálny chordálny zmysel pre orientáciu.

Nasledovné podkapitoly budú venované podmienkam pre minimálny chordálny zmysel pre orientáciu v Cayleyho grafoch.

4.1.1 Cirkulantné grafy

Definícia 10 dáva za základ Cayleyho grafu vo všeobecnosti konečnú grupu. Cirkulantné grafy, ako podtriedu Cayleyho grafov, si definujeme nasledovne:

Definícia 12. *Cayleyho graf, ktorý má za základ konečnú cyklickú grupu, budeme nazývať cirkulantný graf.*

Bez ujmy na všeobecnosti¹ budeme v nasledovnom texte používať iba

¹všetky cyklické grupy n prvkov sú navzájom izomorfné

konečnú cyklickú grupu $(\mathbb{Z}_n, +)$.

4.1.2 Minimálny chordálny zmysel pre orientáciu

Chordálne označenie hrán sme si v časti 2.4.1 definovali pomocou cyklického usporiadania určeného funkciou nasledovníka. Ekvivalentnú definíciu chordálneho označenia hrán dostaneme nasledovne:

Definícia 13. *Je daný graf $G = (V, E)$, pričom $|V| = n$. Nech $\zeta : V \rightarrow \mathbb{Z}_n$ je prostá funkcia, ktorá priradí každému vrcholu číslo z konečnej množiny \mathbb{Z}_n . Nech $\delta : V \times V \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ je funkcia, ktorá vracia vzdialenosť dvoch vrcholov. Potom pre $x, y \in V$, $\zeta(x) < \zeta(y)$, $\delta(x, y)$ je $k < n$ také, že*

$$\zeta(x) + k \pmod n = \zeta(y)$$

. Hranové označenie λ je chordálne práve vtedy keď $\forall \langle x, y \rangle \in E(x)$ platí:

$$\lambda_x(\langle x, y \rangle) = \delta(x, y).$$

Rozdiel definícií (3) a (13) spočíva iba v spôsobe, ako je definovaná funkcia δ . Zatiaľ čo v prvom prípade sa vyhýbame identifikácii vrcholov, v druhom sme ju použili bez ujmy na všeobecnosti. Vlastnosť konečnej cyklickej grupy nám zaručuje cyklickosť usporiadania a ekvivalenciu oboch definícií.

Táto definícia nás približuje bližšie ku Cayleyho grafom, ktorých základnou črtou je stotožnenie vrcholov s prvkami grupy.

Veta 4.1. *Chordálny označenie hrán v kompletnom regulárnom grafe G je minimálne práve vtedy, keď graf patrí do triedy cirkulantných grafov.*

Dôkaz. “ \Rightarrow ” Máme regulárny graf G označený chordálnym označením hrán s minimálnym počtom značiek. Podľa [8] takýto graf musí byť Cayleyho graf s Cayleyho označením hrán. Podľa definície 13 chordálneho označenia hrán existuje zobrazenie ζ vrcholov do \mathbb{Z}_n . Pre každý vrchol $x \in V$ a značku $r \in \Sigma$ (pričom $\Sigma \subseteq \mathbb{Z}_n$) existuje vrchol y a hrana $\langle x, y \rangle$, že platí $\lambda_x(\langle x, y \rangle) = r$ a zároveň $\zeta(x) + r \pmod n = \zeta(y)$. Keďže graf je

kompletný, pre každú dvojicu vrcholov z V existuje cesta, čiže postupnosť hrán, ktorá ich spája. To je ekvivalentné tvrdeniu, že množina Σ generuje \mathbb{Z}_n . Teda G je cirkulantný graf.

“ \Leftarrow “ Nech G je cirkulantný graf nad grupou (\mathbb{Z}_n, \oplus) . Z definície Cayleyho grafov, nech zobrazenie z vrcholov do množiny \mathbb{Z}_n je funkciou ζ z definície 13. Potom, ak $\lambda_x(\langle x, y \rangle) = r$ pre $x, y \in V$ a $r \in \Sigma$, potom z definície Cayleyho grafov $\zeta(x) + r \pmod n = \zeta(y)$. Z toho vyplýva, že Cayleyho označenie hrán každého cirkulantného grafu je zároveň chordálne a minimálne.

□

Nasledovná veta bude užitočná v dôkazoch, ktoré budú nasledovať v ďalších kapitolách.

Veta 4.2. *Nech $G = CG((\mathbb{Z}_n, \oplus), \mathcal{S})$ je neorientovaný cirkulantný graf, teda $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$. Potom platia nasledovné tvrdenia:*

1. *Pre každý prvok $a \in \mathcal{S}$ a každý vrchol $v \in V$ existuje práve jedna kružnica obsahujúca iba hrany označené a resp. $-a$*
2. *Ak $r = NSD(n, a)$ potom dĺžka tejto kružnice je n/r a počet kružníc je r . Počet kružníc je r a tvoria 2-faktor grafu.*

Dôkaz. 1. Pre $\forall a \in \mathcal{S}$ v Cayleyho grafe každý vrchol obsahuje hranu k nemu incidentnú s označením a . Potom existuje ľubovoľne dlhý sled hrán označených a s počiatkom v ľubovoľnom vrchole. Ak dĺžka sledu je väčšia ako n , potom v slede existujú vrcholy, ktoré sa opakujú. Teraz dokážeme sporom, že všetky vrcholy v slede sa opakujú a že dostaneme kružnicu. Nech existujú vrcholy ktoré sa v slede nevyskytujú viac ako raz. Potom existujú susedné vrcholy v slede také, že jeden sa vyskytuje práve raz a druhý sa opakuje. Z toho vyplýva, že existujú hrany lokálne označené rovnakou značkou incidentné s vrcholom, ktorý sa v slede opakuje, čo je spor so základnou definíciou zmyslu pre orientáciu.

Každý vrchol patrí do práve jednej takejto kružnice, keďže je incidentný s práve jednou dvojicou hrán označených a a $-a$.

2. V Cayleyho grafe dĺžka kružnice obsahujúcej hrany iba jednej dĺžky (dvojice značiek) je rovná rádu prvku grupy. Rád prvku je z definície najmenšie také číslo k , že $ka \equiv n \pmod{n}$. Z toho hodnota ka je rovná $\text{nsn}(n,a)$. Nech $r = \text{NSD}(n, a)$. Potom keďže $kar = an$, platí $k = n/r$. Keďže každý prvok sa nachádza v práve jednej kružnici, týchto kružníc je spolu r a sú disjunktné, teda tvoria 2-faktor grafu.

□

4.2 Hyperkocky

Vo všeobecnosti zmysel pre orientáciu výrazne zlepšuje komunikačnú zložitosť (kapitola 1.2). So znalosťou topológie hyperkocky však vieme pri voľbe šéfa dosiahnuť omnoho nižšiu komunikačnú zložitosť. V prácach [14, 15, 3] autori prezentovali prístupy, ktorými na hyperkocke dosahovali algoritmy so zložitosťou $\Theta(n)$, pričom využívali tradičný dimenzionálny zmysel pre orientáciu. O to zaujímavejší a prekvapivý je výsledok $O(1)$ v práci [5] s použitím chordálneho zmyslu pre orientáciu, ktorým sa zaoberáme.

V podkapitole ?? sme dokázali, že kocka dimenzie 3 nemá minimálny chordálny zmysel pre orientáciu a tiež, že najmenší chordálny zmysel pre orientáciu na tejto kocke má počet hranových označení 4. Vystáva prirodzená otázka závislosti najmenšieho počtu hranových označení a zvyšovania dimenzie hyperkocky.

4.2.1 Hyperkocka a jej dimenzionálne označenie hrán

Nech Q_d je hyperkocká s dimenziou d . Jedna z možných definícií hyperkocky je nasledovná:

Definícia 14. *Hyperkocka Q_d je Cayleyho graf $CG((\mathbb{Z}_2^d, \oplus), \mathcal{S})$, kde generujúca množina $\mathcal{S} = \{(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 1, 0), (1, \dots, 0, 0)\}$.*

Hyperkocka Q_n je teda graf, ktorého vrcholy reprezentujú všetky binárne d -zložkov vektory. Hrana spája dva vrcholy práve vtedy, keď sa líšia práve v jednej zložke, čiže z jedného vektora dostaneme druhý vektor zmenou práve jedného bitu.

Podľa definície 11 hrany sú označované prvkami množiny \mathcal{S} . Každý vrchol má incidentných d hrán pričom každá hrana je lokálne vzhľadom k vrcholu označená iným vektorom z množiny \mathcal{S} . Hrana má na oboch koncoch tú istú značku, čiže symetrická funkcia je identita. Tým pádom nám na označenie každej hrany stačí jedna značka, čím dostaneme hranové ofarbenie d farbami. Takýto zmysel pre orientáciu nazývame dimenzionálny.

Pre zjednodušenie môžeme hrany označiť miesto vektora napríklad číslom zložky vektora sprava počnúc nulou, v ktorej sa nachádza bit 1 alebo hodnotou, ktorú dostaneme, ak číslo 2 umocníme na toto číslo. Následne sa podľa toho bude meniť aj kódovacia a dekódovacia funkcia, čo je už otázka konkrétnej realizácie. Takýto zmysel pre orientáciu nazývame dimenzionálny.

4.2.2 Najmenší chordálny zmysel pre orientáciu nie je minimálny

V podkapitole 4.1.2 bola dokázaná veta, že ak má graf G minimálny chordálny zmysel pre orientáciu, práve vtedy, keď graf G patrí do triedy cirkulantných Cayleyho grafov. Keďže kocka dimenzie 3 nemá minimálny chordálny zmysel pre orientáciu, nepatrí do triedy cirkulantných Cayleyho grafov. V prípade, že dokážeme vo všeobecnosti pre hyperkocky dimenzií $d > 2$, že nepatria do triedy cirkulantných Cayleyho grafov, potom spodná hranica pre počet hranových označení v najmenšom chordálnom zmysle pre orientáciu bude $d + 1$ vrátane.

Lema 4.3. *Každá dvojica hrán hyperkocky Q_d so spoločným vrcholom patrí práve do jednej kružnice dĺžky 4, čo je najkratšia dĺžka kružnice v grafe hyperkocky Q_d .*

Dôkaz. Ak d je dimenzia hyperkocky, potom každý vrchol je jednoznačne

určený vektorom zo \mathbb{Z}_2^d a platí, že hrana spája dva vrcholy, ak sa líšia v práve jednej z d súradníc vektora. Majme vrchol v a vrcholy u_1 a u_2 , ktoré sú oba spojené hranou s vrcholom v . Nech u_1 sa líši od v v i -tej súradnici a u_2 v j -tej súradnici, pričom $i \neq j$. Potom u_1 a u_2 sa navzájom líšia v dvoch súradniciach, teda neexistuje medzi nimi hrana. Majme ale vrchol w , ktorý sa líši od vrchola v v súradniciach i aj j . Vidíme, že existujú hrany, ktoré spájajú vrchol w s vrcholmi u_1 aj u_2 , čím dostávame kružnicu dĺžky 4. Ak vrchol v je daný súradnicami $(v_0, v_1, \dots, v_{d-1})$, potom existuje práve jeden vrchol, ktorý sa líši v práve dvoch súradniciach daných indexami i a j . Z toho vyplýva, že existuje práve jedna kružnica určená susednými hranami a to tá, ktorá je daná vrcholmi v, u_1, w, u_2 . \square

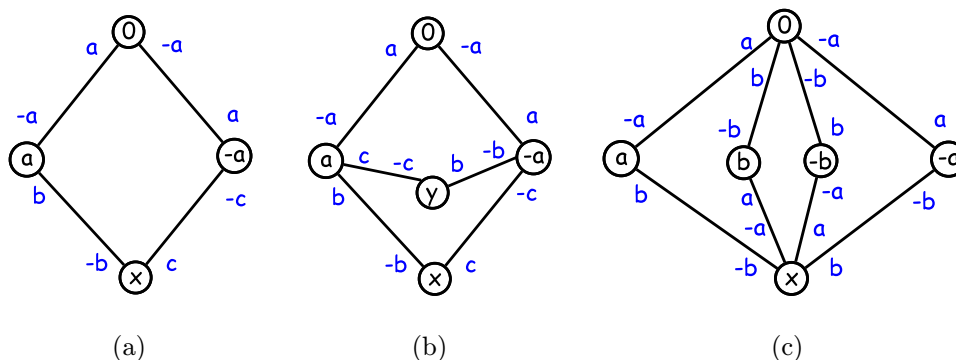
Lema 4.4. *Všetky kružnice hyperkocky Q_d majú párnú dĺžku.*

Dôkaz. Využijeme známy poznatok, že graf neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky práve vtedy, keď je bipartitný (dôkaz napr. v [2]). Množinu vrcholov hyperkocky rozdelíme na dve disjunktné podmnožiny. V jednej podmnožine budú vrcholy, ktorých zápis reprezentovaný vektorom bude obsahovať párny počet súradníc hodnoty 1, v druhej nepárny počet súradníc hodnoty 1. Keďže vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď v jednom vrchole zmenou práve jednej súradnice z 1 na 0 alebo naopak dostaneme súradnice druhého vrcholu. Z toho vyplýva, že v ani jednej z množín neexistujú dva vrcholy spojené hranou a teda graf hyperkocky s dimenziou d je bipartitný. \square

Veta 4.5. *Nech d je dimenzia hyperkocky. Potom pre každé $d > 2$ platí, že hyperkocka s touto dimenziou nie je izomorfná so žiadnym cirkulantným grafom.*

Dôkaz sporom. Majme hyperkocku Q_d a cirkulantný Cayleho graf $G = CG(\mathbb{Z}_n, \mathcal{S})$, kde $n = 2^d$ a $|\mathcal{S}| = d$. Budeme predpokladať, že grafy sú izomorfné.

Bez ujmy na všeobecnosti, zvoľme vrchol označený číslom 0 a k nemu dve incidentné hrany nech sú lokálne označené a a $-a$, pričom $a, -a \neq a$ sú navzájom inverzné prvky \mathcal{S} a reprezentujú prirodzené čísla zo \mathbb{Z}_n . Podľa lemy 4.3 táto dvojica hrán patrí práve jednej kružnici dĺžky 4. Uvažujúc b, c



Obr. 4.1: Pomocné obrázky k dôkazu vety 4.5

ako ďalšie prvky generujúcej množiny \mathcal{S} a tiež k nim inverzné prvky, $-b$ a $-c$, majme vo všeobecnosti vrcholy a hrany tejto kružnice označené ako na obrázku 4.5a. Platí $x \equiv a+b \equiv -a-c \pmod{n}$ a tiež $2a+b+c \equiv 0 \pmod{n}$.

Rozoberme nasledovné prípady:

- Všeobecný prípad, pre hranové označenia a, b, c .

Z uvedeného vyplýva, že existuje hrana incidentná k vrcholu označenému a , ktorá je lokálne označená c . Nech vrchol na opačnom konci hrany je označený $y = a + c$. Existuje hrana incidentná k vrcholu y , ktorá je lokálne označená b . Keďže $c + b \equiv b + c \pmod{n}$, potom na konci tejto hrany sa nachádza vrchol označený $-a$ ako na obr. 4.5b. Dostávame spor s lemov 4.3.

- Prípad, keď $b = c$ (výnimka z predošlého prípadu, keďže vrcholy ozn. x a y takto splývajú).

Existujú hrany incidentné k vrcholu označenému 0 , ktoré majú značky b a $-b$. Tieto hrany spájajú vrchol označený 0 s vrcholmi označenými b a $-b$. Z vrchola označeného b vychádza hrana s lokálnym označením a a podobne z vrchola označeného $-b$ vychádza hrana s lokálnym označením $-a$. Obe tieto hrany končia vo vrchole označenom x ako na obr. 4.4d. Keď sa pozrieme na vrchol označený a , tak si všimneme, že hrany z neho vychádzajúce, ktoré sú lokálne označené $-a$ a b , tvoria v grafe

nie jednu, ale tri kružnice, čo je v spore s lemov 4.3.

- Prípád, keď $a = b = c$ (výnimka z oboch predošlých prípadov).

Štvorec určený vrcholom označeným 0 a k nemu incidentnými hranami a a $-a$ bude mať teraz všetky hrany označené značkami a a $-a$, ako je to zobrazené na obrázku. Keďže $4a \equiv 0 \pmod{n}$ a $a < 2^{d-1}$ (inak by vrchol označený 0 bol totožný s vrcholom ozn. x), potom $a = 2^d/4 = 2^{d-2}$. Keďže počet vrcholov grafu je 2^d a graf je súvislý, musí existovať prvok $r \in \mathcal{S}$, ktorý je nepárny (párne prvky nestačia na vygenerovanie celej grupy). Potom každý vrchol v grafe má práve jednu hranu označenú r . Keďže prvok r je sám o sebe generátorom grupy (rád prvku je n), potom cesta tvorená hranami označenými r je Hamiltonovská kružnica. Z toho vyplýva, že existuje cesta z vrcholu označeného 0 do vrcholu označeného $a = 2^{d-2}$ tvorená iba hranami označenými r . Nech dĺžka tejto cesty je k . Z tejto cesty vytvoríme kružnicu dĺžky $k + 1$, keď pridáme hrany spájajúcu vrchol označený 0 s vrcholom označeným a . Potom platí:

$$kr - a \equiv 0 \pmod{n}$$

$$kr \equiv a \pmod{n}$$

Keďže r je nepárne číslo a čísla a a n sú párne, k musí byť párne číslo. Potom dĺžka kružnice je $k + 1$, čo je nepárne číslo a dostávame spor s lemov 4.4.

□

4.2.3 Horné ohraničenia počtu značiek

V predošlej kapitole sme dokázali, že pre Hyperkocku Q_d nestačí d značiek na dosiahnutie chordálneho zmyslu pre orientáciu, ktorý je zároveň minimálny. Potrebujeme aspoň $d + 1$. V tejto podkapitole ohraničíme najmenší potrebný počet značiek zhora.

Keďže prirodzeným hranovým označením hyperkocky je dimenzionálne (podkapitola 4.2.1), môže byť užitočné z neho vieme priamočiaro vytvoriť chordálne hranové označenie.

Veta 4.6. *Majme hyperkocku Q_d a zobrazenie $\zeta : V \rightarrow \mathbb{Z}_n$ také, ktoré zobrazí vrchol $v \in V$ na číslo $2^{a_{d-1}} + 2^{a_{d-2}} + \dots + 2^{a_0}$, kde $(a_{d-1}, a_{d-2}, \dots, a_0)$ je vektor zo \mathbb{Z}_2^d reprezentujúci vrchol v . Chordálne označenie vrcholov s takýmto cyklickým usporiadaním (podľa funkcie ζ) používa $2d - 1$ značiek.*

Dôkaz. Ekvivalentný pohľad na vektory z \mathbb{Z}_2^d je, že sa na ne môžeme pozeráť ako na d -bitové binárne čísla. Potom všetko, čo funkcia ζ robí, je preklad z binárneho do desiatkového zápisu. Keďže vektory sú spojené hranou práve vtedy keď sa líšia v práve jednom bite, v tomto preklade to znamená, že rozdiel dvoch čísel reprezentujúcich tieto vrcholy je 2^i , kde i je poradie bitu sprava počnúc nultým. Ak teda pre $v_1, v_2 \in V$ platí $\zeta(v_1) + 2^i \pmod{2^d} = \zeta(v_2)$, potom $\zeta(v_2) + (2^d - 2^i) \pmod{2^d} = \zeta(v_1)$. Vidíme, že hrany v tomto chordálnom označení budú označené navzájom inverznými dvojicami značiek 2^i a $(2^d - 2^i)$ pre $0 \leq i \leq d - 1$. Vzhľadom na to, že 2^{d-1} je v grupe $(\mathbb{Z}_{2^d}, \oplus)$ inverzný sám k sebe, bude počet značiek v tomto chordálnom označení rovný $2d - 1$. \square

Ukážeme si však spôsob označenia hrán, s ktorým sa nám podarí vylepšiť túto hornú hranicu o 1, čiže dostaneme chordálny zmysel pre orientáciu, ktorý bude používať $2d - 2$ hrán. Budeme postupovať indukčne:

Hyperkocka malej dimenzie, ktorú si môžeme zobrať za základ je štvorec Q_2 dimenzie, ktorý používa $2d - 2 = 2$ značiek.

Teraz urobme indukčný krok. Majme hyperkocku Q_k dimenzie k , ktorá používa $2k - 2$ značiek. Pomocou označenia hrán tejto hyperkocky vytvoríme označenie hrán na hyperkocke Q_{k+1} dimenzie $k + 1$. V kocke Q_{k+1} nájdeme dve vrcholovo disjunktne podkocky dimenzie k (ktoré sú navzájom oddelené hranami nejakého 1-faktoru). Nech zobrazenia $z_1 : V(Q_k) \rightarrow V(Q_{k+1})$ a $z_2 : V(Q_k) \rightarrow V(Q_{k+1})$ zobrazujú vrcholy z Q_k každé do príslušnej podkocky, pričom pre $v \in V(Q_k)$ a $w_1, w_2 \in V(Q_{k+1})$ platí $z_1(v) = w_1$ a $z_2(v) = w_2$

práve vtedy keď w_1 a w_2 sú spojené hranou, ktorá nepatrí ani do jednej z vybraných podkociek hyperkocky Q_{k+1} . Potom, ak ζ_k je zobrazenie reprezentujúce cyklické usporiadanie vrcholov v chordálnom hranovom označení Q_k , vytvoríme zobrazenie $\zeta_{k+1} : V(Q_{k+1}) \rightarrow \mathbb{Z}_{2^{d+1}}$ reprezentujúce cyklické usporiadanie vrcholov v Q_{k+1} . Nech pre $v \in V(Q_k)$ a $w \in V(Q_{k+1})$ platí:

$$\zeta_{k+1}(w) = \begin{cases} 2\zeta_k(v) & \text{ak } w = z_1(v) \\ 2\zeta_k(v) + 1 & \text{ak } w = z_2(v) \end{cases}$$

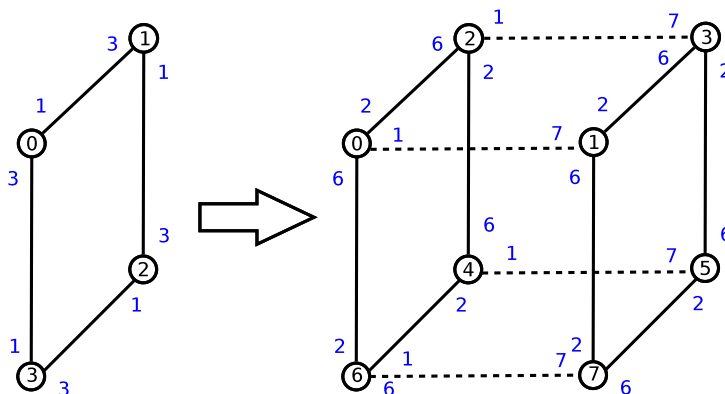
Následne môžeme chordálne označiť hrany celej Q_{k+1} podľa vzdialeností v tomto vytvorenom usporiadaní. Z definície ζ_{k+1} vyplýva, že hodnoty značiek v oboch podkockách sa zdvojnásobili, čiže sú všetky párne a ich počet zostal nezmenený. Pre $w_1 = z_1(v)$ a $w_2 = z_2(v)$ však platí:

$$\zeta_{k+1}(w_2) - \zeta_{k+1}(w_1) = 1$$

Tým vznikajú dve označenia hrán, a to 1 a $(2^{d+1} - 1)$, ktoré sú obe nepárne a označujú hrany spomínaného 1-faktoru.

Takto dostávame v $k + 1$ rozmernej hyperkocke Q_{k+1} počet hranových značiek rovný $2k - 2 + 2 = 2(k + 1) - 2$.

Indukčný krok pre Q_2 a Q_3 je ilustrovaný na obr. 4.2.



Obr. 4.2: Indukčný krok pre Q_2 a Q_3 .

4.3 Zovšeobecnené Petersenove grafy

V podkapitole 3.2 sme spomínali Petersenov graf ako príklad kubického grafu, ktorý je vrcholovo tranzitívny, teda aj cyklicky symetrický, a zároveň neexistuje hranové značenie λ , pre ktoré by mal tento graf minimálny zmysel pre orientáciu. Cieľom tejto podkapitoly je preskúmať nekonečnú triedu *zovšeobecnených Petersenových grafov*, ktorá sa javí ako vhodný kandidát spomedzi tried grafov, ktorých najmenší zmysel pre orientáciu nie je vo všeobecnosti minimálny.

Okrem toho, trieda zovšeobecnených Petersenových grafov je vhodná na skúmanie aj z praktického hľadiska. Podľa [12] bola navrhnutá ako topológia vhodná na zlepšenie latencie a krehkosti sietí s jednoduchou kruhovou topológiou (Ring).

4.3.1 Definícia zovšeobecneného Petersenovho grafu

Podľa [1], zovšeobecnený Petersenov graf $GP(n, k)$, kde $n \geq 3$ a $1 \leq k < n/2$ je graf, ktorý pozostáva

- z množiny vrcholov

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

- z množiny hrán

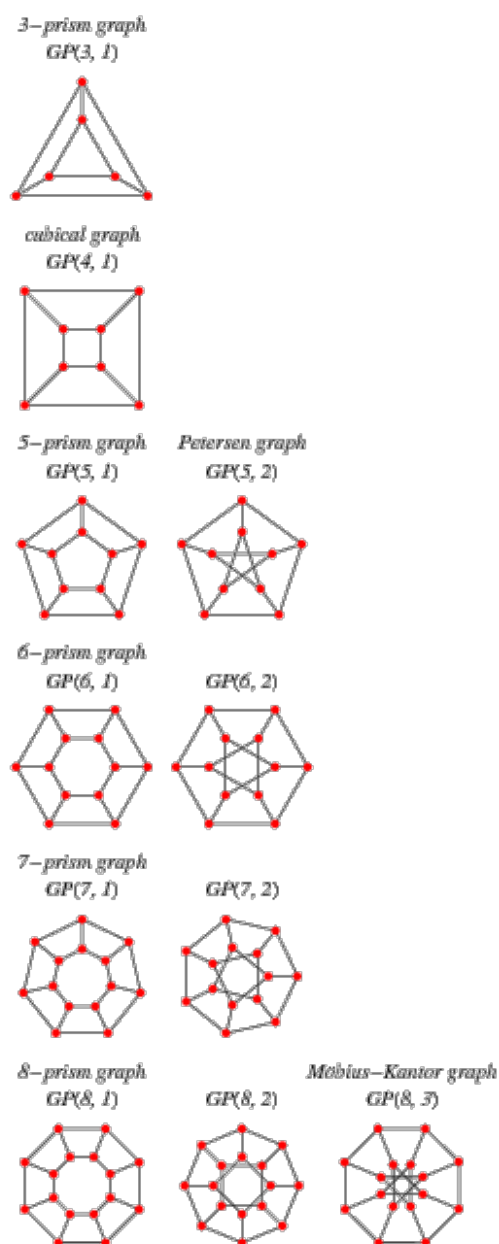
$$\{u_i u_{(i+1 \bmod n)}, u_i v_i, v_i v_{(i+k \bmod n)} : 0 \leq i \leq n-1\}$$

Graf teda pozostáva z vonkajšej kružnice tvorenej n vrcholmi, vnútro tvorí cirkulantný graf n vrcholov stupňa 2 a zodpovedajúce vrcholy vnútornej a vonkajšej časti sú spojené hranami tvoriacimi 1-faktor.

Na obrázku 4.4 vidíme zástupcov tejto triedy grafov.

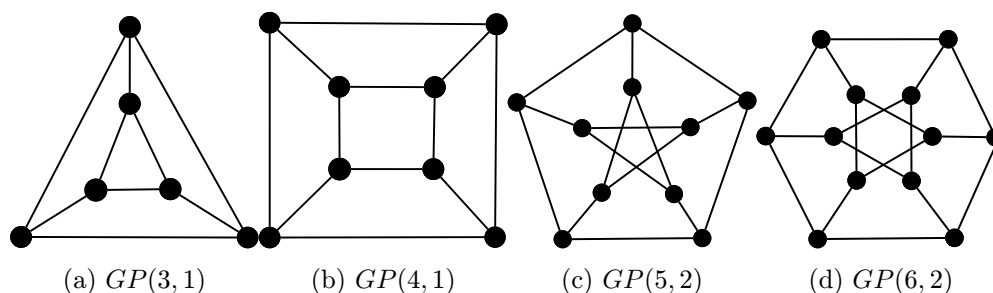
4.3.2 Minimálny chordálny zmysel pre orientáciu

Vo všeobecnosti minimálny zmysel pre orientáciu so symetrickým hranovým označením majú zovšeobecnené Petersenove grafy, ktoré sú zároveň Cayleho



Obr. 4.3: Zovšeobecnené Petersenove grafy $GP(n,k)$ pre $3 \leq n \leq 8$ (zdroj: <http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedPetersenGraph.html>)

grafy. V práci [11] autori dokázali, že zovšeobecnený Petersenov graf $GP(n, k)$ je Cayleyho graf práve vtedy keď $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$.



Obr. 4.4: Zástupcovia triedy zovšeobecnených Petersenových grafov 4.5

V nasledovnom texte dokážeme pomocné lemy a nakoniec sformulujeme tvrdenia charakterizujúcu podtriedy týchto grafov, ktoré sú zároveň cirkulantné grafy a teda majú minimálny zmysel pre orientáciu s chordálnym označením hrán.

Lema 4.7. *Zovšeobecný Petersenov graf $GP(n, k)$ je bipartitný práve vtedy keď n je párne a k je nepárne.*

Dôkaz. Vrcholy vonkajšej kružnice vieme zafarbiť dvomi farbami práve vtedy keď kružnica má párnú dĺžku, z toho n musí byť párne. Zafarbenie vrcholov na vonkajšej kružnici určuje zafarbenie vrcholov vo vnútornej časti grafu. Keďže pre ľubovoľné vrcholy na vonkajšej kružnici je ich vzdialenosť na tejto kružnici párna, potom vnútorné vrcholy rovnakej farby nie sú susedné práve vtedy, keď k je nepárne². \square

Lema 4.8. *Neorientovaný kubický súvislý cirkulantný graf s počtom vrcholov $2n$, kde n je párne číslo, obsahuje aspoň jednu kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. Veľkosť generujúcej množiny je 3, jeden z prvkov teda musí byť prvok, ktorý je sám k sebe inverzný a jeho hodnota je n , čo je párne číslo. Keďže máme úplný graf, zvyšné dva prvky generujúcej množiny sú nepárne. Nazvime ich a a $-a$. Bez ujmy na všeobecnosti, vezmime vrchol, ktorý je označený

²Dôkaz tejto lemy je priamočiary, preto je zrejmé, že bol uvedený v aspoň jednej práci predo mnou. Nepodarilo sa mi však nájsť ani jednu konkrétnu prácu, ktorú by som mohol citovať.

číslom 0. Tento vrchol je spojený s vrcholom s číslom n hranou označenou n . V cirkulantnom grafe existuje kružnica zložená iba z hrán označených jednou značkou. Pozrime sa na kružnicu prechádzajúcou vrcholom s číslom 0, ktorá obasahuje iba hrany označené a . Nech x je najväčší spoločný deliteľ čísel $2n$ a a , a zároveň n , keďže a je nepárne. Potom kružnica má dĺžku $2n/x$. Keďže n delí x , potom polovica kružnice so začiatkom vo vrchole s číslom 0 dosiahne svoj koniec práve vo vrchole s číslom n . Vzhľadom na to, že n je párne, kružnica, ktorá vznikne doplnením tejto polkružnice s hranou označenou n , má nepárnu dĺžku. \square

Veta 4.9. *Zovšeobecný Petersenov graf $GP(n, k)$ pre párne n nemá minimálny chordálny zmysel pre orientáciu.*

Dôkaz. Dôkaz rozdelíme na dva prípady:

- k je nepárne:

Nech $G = GP(n, k)$ s párnym n a nepárnym k . Z lemy 4.7 vyplýva, že všetky kružnice v G majú párnú dĺžku [2]. Následne ako dôsledok lemy 4.8 dostávame, že zovšeobecný Petersenov graf $GP(n, k)$ s párnym n a nepárnym k nie je izomorfný so žiadnym cirkulantným grafom a tým pádom preň neexistuje chordálne označenie hrán s minimálnym zmyslom pre orientáciu.

- k je párne:

Nech $G = GP(n, k)$ s párnymi n aj k . Potom v grafe G existuje kružnica dĺžky $k + 3$, ktorú popíšeme nasledovne: Kružnica sa skladá z oblúku vonkajšej kružnice grafu dĺžky k . K oblúku pridáme dve hrany, ktoré spájajú krajné vrcholy oblúka s vnútrom grafu v dvoch vrchole. Tieto dva vrcholy sú spojené hranou, čím dostávame kružnicu dĺžky $k + 3$.

Najmenší $GP(n, k)$ s párnymi n aj k je $GP(6, 2)$. Vyplýva to z definície všeobecných Petersenových grafov, kde platí nerovnosť $k < n/2$. V našom prípade $6 \leq n$ a teda $3 \leq n/3$. Z toho dostávame nerovnosť $k + 3 < n$.

Sporom. Nech graf G je izomorfný s cirkulantným grafom $CG((\mathbb{Z}_{2n}, \oplus), \{a, n, (2n-a)\})$. Keďže n je párne, potom a je nepárne a nesúdeliteľné s n aj $2n$.

Majme v tomto grafe kružnicu nepárnej dĺžky tvorenú hranami so značkami a , $(2n-a)$ a n . Keďže značky a a $(2n-a)$ sa po pároch sčítavaním zrušia, nech l je rozdiel počtu značiek a a $(2n-a)$ (značiek typu a je bez ujmy na všeobecnosti viac). Nech počet hrán označených n je m . Potom platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} l + m &\equiv 1 \pmod{2} \\ la + mn &\equiv 0 \pmod{2n} \end{aligned}$$

Z kongruencií vyplýva, že m je nepárne a l je párne. Potom platí:

$$\begin{aligned} la + n &\equiv 0 \pmod{2n} \\ la &\equiv n \pmod{2n} \end{aligned}$$

Tento vzťah vzhľadom na nesúdeliteľnosť a a n platí pre l , ktoré je nemulovým násobkom n , z čoho dostávame, že $l \geq n$, čo je spodnou hranicou dĺžky kružnice v cirkulantnom grafe a zároveň sporom s existenciou kružnice dĺžky $k + 3 < n$.

□

Veta 4.10. *Zovšeobecnený Petersenov graf $GP(n, k)$ s nepárnym n má minimálny zmysel pre orientáciu práve vtedy keď $k = 1$.*

Dôkaz. Nech $G = GP(n, k)$ s nepárnym n a $k = 1$. Potom vonkajšia aj vnútorná časť grafu G sú kružnice dĺžky n také, že ak existuje hrana $\langle u_1, u_2 \rangle$ na vonkajšej kružnici, hrana $\langle v_1, v_2 \rangle$ na vnútornej kružnici a hrana $\langle u_1, v_1 \rangle$ medzi nimi, potom existuje aj hrana $\langle u_2, v_2 \rangle$. Takýto graf je izomorfný s cirkulantným Cayleyho grafom $CG((\mathbb{Z}_{2n}, \oplus), \{a, n, (2n-a)\})$, pričom hrany na vonkajšej aj vnútornej kružnici sú označené značkami a a $(n-a)$, kde $a < n$ je párne číslo nesúdeliteľné s n a hrany medzi nimi (1-faktor) sú označené značkou n . Uvedená konštrukcia platí

vďaka tomu, že pre všetky párne $a < n$ nesúdeliteľné s n najväčší spoločný deliteľ a a $2n$ je 2. Platí to napríklad pre $a = 2$.

Teraz dokážeme, že 3-regulárny cirkulantný graf s počtom vrcholov $2n$, kde n je nepárne, je izomorfný s $GP(n, k)$ práve vtedy, keď spĺňa vyššie uvedené označenie hrán a teda platí, že $k = 1$.

Nech cirkulantný Cayleyho graf $G = CG((\mathbb{Z}_{2n}, \oplus), \{a, n, (2n - a)\})$ je izomorfný s grafom $GP(n, k)$ pre n nepárne. Nech vonkajšie kružnica je tvorená m hranami označenými n a nech l je rozdiel počtu značiek a a počtu značiek $(2n - a)$ v jednom smere prechádzanie kružnicou. Rozdielom sa zbavíme párneho počtu značiek a a $(2n - a)$, keďže $a + (2n - a) \pmod{2n} = 0$.

Bez ujmy na všeobecnosti značiek a je viac ako $(2n - a)$ (ak by to bolo naopak, tak budeme kružnicou prechádzať opačným smerom). Keďže dĺžka kružnice je nepárna a odstránením párneho počtu hrán sa parita zachováva rovnako ako aj odstránením dvojíc navzájom inverzných značiek, platí:

$$\begin{aligned} l + m &\equiv 1 \pmod{2} \\ la + mn &\equiv 0 \pmod{2n} \end{aligned}$$

Dostávame dve možnosti:

Nech m je nepárne a l je párne:

Potom mn je nepárne a la je párne, čím súčet $la + mn$ je nepárny a to je spor s druhou kongruenciou.

– Nech m je párne a l je nepárne:

Ak má byť zachovaná druhá kongruencia, čiže súčet $la + mn$ má byť párny, potom a je párne.

Nech r je najväčší spoločný deliteľ čísel a a $2n$. Potom podľa vety 4.2 každý vrchol grafu patrí do kružnice dĺžky $2n/r$ tvorenej iba hranami označenými číslom a . Z toho vyplýva, že takýchto kružníc

sa nachádza v grafe a , sú disjunktné a sú v nich obsiahnuté všetky hrany s označením a (resp. $(2n - a)$).

Jediné hrany, ktoré zostávajú zatiaľ neobsiahnuté, sú hrany s označením n . Tieto hrany spájajú vrcholy, ktorých vzájomná vzdialenosť je n . Ak vrchol s hodnotou c patrí kružnici dĺžky $2n/r$, potom ostatné vrcholy tejto kružnice majú hodnoty $c + r \pmod{2n}, c + 2r \pmod{2n}, \dots, c + (2n/r - 1)r \pmod{2n}$. Každý z vrcholov obsahuje práve jednu hranu, ktorá nepatrí do tejto kružnice, a to hranu s označením n . Tá spája vrchol s hodnotou c s vrcholom s hodnotou $c + n \pmod{2n}$ a podobne ostatné vymenované vrcholy kružnice s vrcholmi $c + r + n \pmod{2n}, c + 2r + n \pmod{2n}, \dots, c + (2n/r - 1)r + n \pmod{2n}$. Vidíme, že tieto vrcholy sú o seba vzdialené o vzdialenosť, ktorá je násobkom r , teda tiež tvoria kružnicu dĺžky $2n/r$.

Z toho vyplýva, že dve kružnice vytvárajú kružnicový pár vďaka hranám označeným n . Tento pár je disjunktný od zvyšku grafu. Dostávame teda $r/2$ -komponentový graf. Jedine v prípade, že $r = 2$, je graf súvislý.

Zatiaľ čo tento dôkaz je vo svojej forme zaujímavý, posledné myšlienky je možné zjednosúšiť nasledovne: Ak b je párne číslo, potom aj $(2n - b)$ je párne číslo a tieto dva navzájom inverzné prvky nie sú nesúdeliteľné a sami o sebe teda nemôžu generovať grupu \mathbb{Z}_{2n} . Preto, ak cirkulantný graf G je súvislý, je potrebné aby prvky generujúcej množiny b a n boli navzájom nesúdeliteľné. Ak b a n sú nesúdeliteľné, potom najväčší spoločný deliteľ b a $2n$ je 2.

□

4.3.3 Horné ohraňenia počtu značiek

Zatiaľ čo v predošlej podkapitole sme stanovili spodnú hranicu pre najmenší počet značiek v chordálnom zmysle pre orientáciu v zovšeobecnenom Petersenovom grafe, v tejto podkapitole nájdeme hornú hranicu pre všetky

zovšeobecnené Petersenove grafy.

Veta 4.11. *Pre ľubovoľný zovšeobecnený Petersenov graf $GP(n, k)$ existuje chordálne označenie hrán s počtom značiek menším alebo rovným 6. Ak n je nepárne, stačí 5 značiek.*

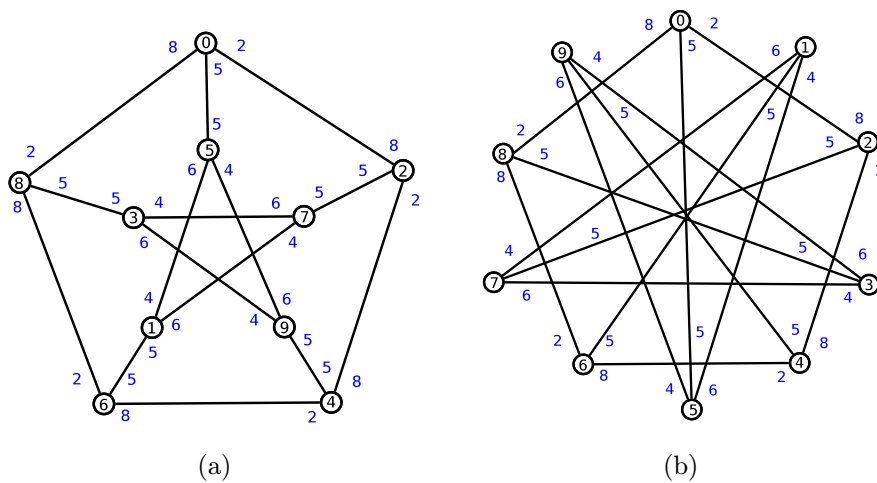
Dôkaz. Ukážeme si konkrétny príklad chordálneho označenia ľubovoľného zovšeobecneného Petersenovho grafu $GP(n, k)$ s počtom značiek najviac 6.

Majme zobrazenie $\zeta : V \rightarrow \mathbb{Z}_{2n}$, v ktorom sa vrcholy vonkajšej kružnice zobrazia na párne čísla, pričom cyklické poradie zostane zachované (zvolíme si nejaký smer na kružnici). Následne vrcholy vnútornej časti grafu zobrazíme na nepárne čísla tak, aby platilo, že ak vrchol v je z vonkajšej kružnice a vrchol w z vnútornej časti, tak hrana medzi týmito grafmi existuje práve vtedy, keď $\zeta(v) + 1 \pmod{2n} = \zeta(w)$. Následne medzi vrcholmi vnútornej časti bude hrana práve vtedy keď vzdialenosť medzi nimi je $2k$, čiže $\zeta(w_1) + 1 \pmod{2n} = \zeta(w_2)$. Vonkajšia kružnica bude teda tvorená hranami so značkami 2 a $2n - 2$, vnútro $2k$ a $2n - 2k$ a 1-faktor medzi nimi značkami 1 a $2n - 1$. Táto konštrukcia by sa dala zovšeobecniť pre 1-faktor so značkami a a $2n - a$ pre nepárne a .

V prípade nepárneho n platí $n = 2n - n$. Ak za a v predošlom odstavci dosadíme n , dosiahneme počet značiek 5. Príklad takéhoto označenia hrán je na obrázku 4.5. \square

Dôsledok 4.12. *Pre $GP(n, 1)$, kde n je párne má najmenší chordálny zmysel pre orientáciu počet značiek 4.*

Dôkaz. Ak za k v dôkaze predošlej vety dosadíme 1, dostávame označenia hrán vnútornej časti grafu rovnaké ako vonkajšej, čím dostávame počet 4. Ten je zhodný s dolnou hranicou vyplývajúcou z vety 4.9 pre n párne. \square



Obr. 4.5: Chordálne hranové označenie Petersenovho grafu $GP(5, 2)$ pomocou 5 značiek.

Kapitola 5

Výpočtové metódy

Na hľadanie najmenšieho počtu hranových označení chordálneho zmyslu pre orientáciu v hyperkockách pomocou počítača boli použité nasledovné dva algoritmy a pre malé prípady skúmaných tried grafov boli zistené výsledky, ktoré dávajú podnety pre ďalšie skúmanie týchto tried v súvislosti s najmenším počtom hrán potrebným na vytvorenie chordálneho zmyslu pre orientáciu.

5.1 Algoritmus 1: Generovanie permutácií vrcholov

Hyperkocka dimenzie d má $n = 2^d$ vrcholov. Permutácií všetkých vrcholov je $n! = 2^d!$.

Vstup:

Graf reprezentovaný množinou vrcholov a hrán.

Výstup:

Počet hrán najmenšieho chordálneho zmyslu pre orientáciu grafu.

Princíp:

V cykle (alebo pomocou rekurzie) generujeme všetky cyklické usporiadania vrcholov a pre každé z nich vytvoríme chordálne označenie hrán

a zistíme počet rôznych značiek. Pamätáme si zatiaľ najmenší počet značiek. Algoritmus skončí, ak boli overené všetky permutácie vrcholov.

Analýza:

Vzhľadom na to, že ide o cyklické usporiadanie vrcholov, zafixujeme si prvý prvok a permutujeme zvyšné prvky, čo robí $(n - 1)!$ permutácií.

Implementácia:

Algoritmus bol najprv implementovaný v jazyku Java a potom aj v C++ pre prípadné zníženie času výpočtu, ktoré však nenastalo.

5.2 Algoritmus 2: Zisťovanie podgrafu cirkulantného grafu

Ide o úspešnejší algoritmus, avšak využívajúci zložitejší princíp. Algoritmus využíval nasledovný poznatok: Ak chordálny zmysel pre orientáciu na k -regulárnom grafe G využíva $m \geq k$ hranových označení, potom existuje podgraf cirkulantného grafu nad grupou $(\mathbb{Z}_n, +)$ s generujúcou množinou veľkosti m , kde $n = 2^d$, taký, že G je izomorfný s týmto podgrafom. Prípad, že nastane rovnosť $k = m$ by znamenal, že graf G by bol sám cirkulantným grafom.

Počet hrán cirkulantného grafu nad grupou $(\mathbb{Z}_n, +)$ s generujúcou množinou veľkosti m je $nm/2$, zatiaľ čo počet hrán k -regulárneho grafu je $nk/2$. To znamená, že ak existuje chordálne označenie hrán hyperkocky využívajúce m hranových značiek, potom existuje $n(m - k)/2$ hrán takých, že ak ich odstránim z uvedeného cirkulantného grafu, dostanem graf spomenutej hyperkocky.

Algoritmus bol navrhnutý kvôli testovaniu bipartitných grafov, o ktorých bolo navyše známe, že nemajú minimálny zmysel pre orientáciu. Testovaný bol teda počet $k + 1$ hranových značiek.

Vstup:

Graf reprezentovaný množinou vrcholov a hrán.

Výstup:

Algoritmus vrátil FALSE, ak po odstránení $n(m-k)/2$ hrán z cirkulantného grafu tento obsahoval stále kružnicu nepárnej dĺžky. Algoritmus vrátil TRUE, ak po odstránení $n(m-k)/2$ hrán z cirkulantného grafu boli všetky kružnice v grafe párnej dĺžky.

Princíp:

V cykle generujeme všetky kombinácie a pre každú z nich backtrackom prehľadávame graf, pričom testujeme dĺžky všetkých kružníc. Akonáhle zistíme kružnicu nepárnej dĺžky, skončíme backtrack.

Implementácia:

Algoritmus bol najprv implementovaný v jazyku Java s použitím objektového prístupu.

5.3 Výsledky

5.3.1 Hyperkocky

Algoritmus 1

Implementovaný algoritmus bol testovaný iba pre hyperkocky dimenzií 3 a 4. Pre kocku dimenzie 3 algoritmus v zanedbateľne malom čase potvrdil výsledok 4 hranových označení. Pre hyperkocku dimenzie 4 algoritmus nikdy nedopočítal do konca, pretože bol manuálne prerušený vzhľadom na dlhú dobu výpočtu (odhad 10-11 dní na 2.2 GHz jadre procesora) a pre dosiahnutie očakávaného výsledku pomocou iného prístupu v omnoho nižšom reálnom čase. Z uvedených príčin algoritmus nebol testovaný pre žiadne väčšie vstupy.

Algoritmus 2

Druhý implementovaný algoritmus bol použitý na testovanie toho, či hyperkocka dimenzie $d = 4$ je podgrafom nejakého 5-regulárneho cirkulantného grafu s počtom vrcholov 2^4 . Algoritmus vrátil zápornú odpoveď, čoho dôsledok je, že najmenší chordálny zmysel pre orientáciu hyperkocky Q_4 má označenie so 6 značkami.

5.3.2 Zovšeobecnené Petersenove grafy

Algoritmus 1

Implementovaný algoritmus bol testovaný na $GP(n, k)$ pre všetky $n \leq 7$ a všetky platné $k < n/2$. Výsledky sú nasledovné:

- **Najmenší počet značiek 3:** Zo skúmaných grafov dosahovali tie, ktoré mali n nepárne a $k = 1$.
- **Najmenší počet značiek 4:** Zo skúmaných grafov dosahovali tie, ktoré mali n párne a $k = 1$.
- **Najmenší počet značiek 5:** Zo skúmaných grafov dosahovali tie, ktoré mali $k = 1$.

Pre $n > 7$ výpočet trval dlho a bol z rovnakých príčin ako pri hyperkockách prerušený.

Algoritmus 2

Pri zovšeobecnených Petersenových grafoch bol druhý z algoritmov použitý iba pre $GP(8, 3)$, keďže je to najmenší bipartitný zovšeobecnený Petersenov graf, pre ktorý $k > 1$. Keďže z vety 4.9 vyplýva, že bipartitné zovšeobecnené grafy nemajú zmysel pre orientáciu, bolo testované, či graf $GP(8, 3)$ môže mať najmenší chordálny zmysel pre orientáciu s počtom značiek 4. Pre každý 4-regulárny cirkulantný graf však algoritmus vrátil zápornú odpoveď, čím sa spodná hranica zvýšila na 5.

Kapitola 6

Záver

V práci sme preskúmali dve triedy regulárnych grafov, hyperkocky a zovšeobecnené Petersenove grafy, pričom sme hľadali podmienky pre chordálny zmysel pre orientáciu s čo najmenším počtom hranových značiek.

Napriek tomu, že nadpis práce hovorí o najmenšom zmysle pre orientáciu, ktorý nie je minimálny, výsledky práce hovoria aj o podtriedach grafov pri ktorých dosahujeme minimálny chordálny zmysel pre orientáciu.

Najmenší nie minimálny zmysel pre orientáciu sa podarilo nájsť iba pre malú triedu grafov. Väčšina dosiahnutých výsledkov hovorí o hodnote, pod ktorú počet značiek v najmenšom neminimálnom zmysle pre orientáciu nemôže ísť alebo o konštrukcii chordálneho zmyslu pre orientáciu so zatiaľ najmenším počtom značiek, ktorý sa podarilo dosiahnuť. Vtedy hovoríme o dolnom, resp. hornom ohraničení najmenšieho zmyslu pre orientáciu.

Pre triedu hyperkociek Q_d s dimenziou d bolo dokázané, že napriek tomu, že sú podtriedou Cayleyho grafov, nedosahujú minimálny chordálny zmysel pre orientáciu. To určuje spodné ohraničenie $d + 1$ pre najmenší chordálny zmysel pre orientáciu. Bolo ukázané, že pre každú hyperkocku Q_d existuje chordálny zmysel pre orientáciu s počtom značiek $2d - 2$, čím bola určené horné ohraničenie.

Výpočtovými metódami bol algoritmicke overený najmenší chordálny zmysel pre orientáciu hyperkocky Q_4 a bol stanovený na hodnotu 6 značiek.

To vzbudzuje domnienku, že počet značiek $2d - 2$ je zároveň spodným ohraničením pre všetky hyperkocky. Pre vyššie dimenzie sa ukázal čas výpočtu algoritmu príliš dlhý, preto nebol realizovaný.

Pre triedu zovšeobecnených Petersenových grafov $GP(n, k)$ boli dosiahnuté nasledovné výsledky:

- Pre párne n graf nemá minimálny chordálny zmysel pre orientáciu, teda spodným ohraničením najmenšieho chordálneho zmyslu pre orientáciu je počet značiek 4.
- Pre párne n a $k = 1$ bola nájdená konštrukcia chordálneho zmyslu pre orientáciu, ktorá používa 4 značky, čo je zhodné so spodným ohraničením. Tým sme dostali najmenší chordálny zmysel pre orientáciu v tomto grafe.
- Pre nepárne n má graf minimálny chordálny zmysel pre orientáciu práve vtedy, keď $k = 1$. Tým bola stanovená spodné ohraničenie 4 pre grafy s nepárnym n a $k > 1$.
- Vo všeobecnosti bolo nájdené horné ohraničenie 5 pre $GP(n, k)$ s nepárnym n a 6 s párnym n .

Výpočty s použitím prvého z algoritmov pre $GP(n, k)$ s $n \leq 7$ ukázali pre $k > 1$ najmenší chordálny zmysel pre orientáciu s počtom značiek 5. V prípadoch $k = 1$ výsledky súhlasili so všeobecnými tvrdeniami dokázanými v tejto práci. Graf $GP(8, 3)$ mohol byť vďaka svojej bipartitnosti prehľadávaný druhým algoritmom, avšak ten potvrdil spodnú ohraničenie 5 pre tento graf.

Podnety pre ďalšiu prácu

Dolné ohraničenie pre počet značiek v najmenšom chordálnom zmysle pre orientáciu v hyperkockách bolo zatiaľ zistené iba o rozdiel veľkosti 1 nad veľkosťou dimenzie kocky. Motiváciou pre ďalšiu prácu je nájsť funkciu $f(d)$ asymptoticky väčšiu ako konštantnú, že spodné ohraničenie počtu značiek

bude $d + f(d)$, v ideálnom prípade dokázať, že $f(d) = d - 2$. Ďalšou možnosťou je asymptoticky znížiť hornú hranicu $2d - 2$. Toto sa však nepredpokladá, keďže horná hranica dosahuje aspoň pre $2 \leq d \leq 4$ zároveň najmenšiu hodnotu.

Napriek nájdeným ohraňčeniam, otvoreným problémom zostáva nájdenie najmenšieho nie minimálneho zmyslu pre orientáciu v Petersenových grafoch $GP(n, k)$ s $k > 1$.

Literatúra

- [1] Brian Alspach. The classification of hamiltonian generalized Petersen graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 34(3):293–312, 1983.
- [2] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [3] Stefan Dobrev and Peter Ruzicka. Yet another modular technique for efficient leader election. In *SOFSEM '98: Proceedings of the 25th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pages 312–321, London, UK, 1998. Springer-Verlag.
- [4] Paola Flocchini. Minimal sense of direction in regular networks. *Information Processing Letters*, 61:331–338, 1997.
- [5] Paola Flocchini and Bernard Mans. Optimal elections in labeled hypercubes. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 33(1):76–83, 1996.
- [6] Paola Flocchini, Bernard Mans, and Nicola Santoro. Sense of direction: Definitions, properties and classes, 1995.
- [7] Paola Flocchini, Bernard Mans, and Nicola Santoro. Sense of direction in distributed computing. In *In 12th International Symposium on Distributed Computing (DISC)*, pages 1–15. Springer-Verlag, 1998.
- [8] Paola Flocchini, Alessandro Roncato, and Nicola Santoro. Symmetries and sense of direction in labeled graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 87:99–115, 1996.

-
- [9] S. Foldes and J. Urrutia. Sense of direction, semigroups and cayley graphs. 1998.
- [10] Jean-Luc Fouquet and Geňa Hahn. Cycle regular graphs need not be transitive. *Discrete Appl. Math.*, 113(2-3):261–264, 2001.
- [11] Roman Nedela and Martin Škoviera. Which generalized petersen graphs are cayley graphs? *J. Graph Theory*, 19(1):1–11, 1995.
- [12] Behrooz Parhami. On isomorphisms and similarities between generalized petersen networks and periodically regular chordal rings. *Inf. Process. Lett.*, 107(6):246–251, 2008.
- [13] Laila Rissafi. Sense of direction. 2005.
- [14] S. Robbins and K.A. Robbins. Choosing a leader on a hypercube. *Proc. Internat. Conf. on Databases, Parallel Architectures and their Applications*, pages 469–471, 1990.
- [15] G. Tel. Linear election for oriented hypercube, 1993.