



KATEDRA INFORMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

GRAF FARBENÍ

(diplomová práca)

BC. MATEJ DUNÍK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Graf farbení

Diplomová práca

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: RNDr. Edita Máčajová, PhD.
Evidenčné číslo: 9f52b692-38f2-4903-a7f5-b5a258c0e23b

Bratislava, 2012

Bc. Matej Duník



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Matej Duník
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Graf farbení

Cieľ : Cieľom práce je dokázať niektoré vlastnosti grafu farbení s dôrazom na súvislosť s hranovou k-vyberateľnosťou grafu.

Vedúci : Mgr. Edita Mačajová, PhD.

Dátum zadania: 04.04.2011

Dátum schválenia: 04.04.2011

.....
prof. RNDr. Branislav Rován, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu prístupnenia)

.....
vedúci práce

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracoval samostatne všetky použité informačné zdroje uvádzam v zozname literatúry a každé ich použitie som v texte riadne označil.

Bratislava 2012

Ďakujem RNDr. Edite Máčajovej, PhD. za cenné rady,
pripomienky a odborné vedenie pri vypracovávaní dip-
lomovej práce.

Abstrakt

Autor: Matej Duník
Názov: Graf farbení
Univerzita: Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra: Katedra informatiky
Školiteľ: RNDr. Edita Máčajová, PhD.
Rok: 2012

Majme jednoduchý neorientovaný graf G a všetky jeho vrcholové farbenia \mathcal{C} . Množina vrcholov grafu farbení je totožná s množinou farbení \mathcal{C} . Hrany grafu farbení závisia od toho, akú operáciu na farbeniach si zvolíme. Najčastejšie sa skúmajú 2 typy: výmena farieb vrcholov na komponente grafu indukovaného dvomi farbami (Kempe-prepnutie) a zmena farby jedného vrchola. V práci sa zaoberáme prvým typom na hranových grafoch. Kempe-ekvivalentné farbenia sú také, že medzi vrcholmi týchto farbení existuje cesta v grafe farbení. Ak sú všetky farbenia grafu navzájom Kempe-ekvivalentné, hovoríme, že graf je Kempe-ekvivalentný. V práci ukážeme vzťah medzi Kempe-ekvivalenciou a hranovou k -vyberateľnosťou grafu. Dokážeme niektoré vlastnosti grafu farbení pre hranové grafy, najmä že izomorfné farbenia sú Kempe-ekvivalentné. Dokážeme, že ak bipartitný graf G nie je Kempe-ekvivalentný, potom akýkoľvek bipartitný graf, ktorý obsahuje podgraf izomorfný s G , tiež nie je Kempe-ekvivalentný. Tento poznatok v práci využívame na analýzu Kempe-ekvivalencie subkubických grafov s chromatickým indexom nanajvýš 3. Práve na tieto grafy je možné použiť poznatky o k -vyberateľnosti grafu. Zavedieme operáciu na subkubických grafoch, ktorá zachováva Kempe-ekvivalenciu a ukážeme nekonečnú množinu blokov, ktorými je možné grafy rozširovať

Kľúčové slová: Kempe-ekvivalencia, graf farbení, k -vyberateľnosť, hranové farbenie

Abstract

Author: Matej Duník
Title: Graf farbení
University: Univerzita Komenského v Bratislave
Faculty: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Department: Katedra informatiky
Supervisor: RNDr. Edita Máčajová, PhD.
Year: 2012

Let G be a simple undirected graph and \mathcal{C} all of its vertex colorings. Let the set of vertices of *graph of colorings* be equal to \mathcal{C} . The edges of graph of colorings depends on what operation on colorings we choose. Most frequently two types of operations are studied: switch the colors of vertices of one component of graph induced by two colors (Kempe-switch) and change of color of one vertex. In this thesis we are studying the former type on linegraphs. Two colorings are called Kempe-equivalent if there exists a path in graph of colorings connectig them. If all of the colorings of a graph are Kempe-equivalent, we call such graph Kempe-equivalent. In this thesis we show relationship between Kempe-equivalence and k -edge choosability for regular graphs. We proove some properties of a graph of colorings, especially that coloring which are isomorphic are also Kempe-equivalent. We proove that if bipartite graph G is not Kempe-equivalent, then any bipartite graph that contains subgraph isomorphic to G is also not Kempe-equivalent. We use this to analyze Kempe-equivalence of subcubic graphs with chromatic index less or equal to 3 as it is a class of graphs to which the k -edge choosability and Kempe-equivalence relationship can be applied. We introduce an operation on subcubic graphs that preserves Kempe-equivalence and we show infinite set of graph segments that can be used to extend non-Kempe-equivalent graphs.

Keywords: Kempe-equivalence, graph of coloring, k -edge choosability, edge coloring

Obsah

Úvod	5
1 Základné pojmy	7
2 Kempe-ekvivalencia	9
2.1 Kempe-prepnutie	9
2.2 Graf farbení	10
2.3 Štandardný tvar farbenia	11
3 Hranová k -vyberateľnosť grafu	18
3.1 Rozklad komponentov grafu farbení	20
4 Známe výsledky o K -ekvivalencii	22
4.1 Hranové farbenia	22
4.2 Vrcholové farbenia	27
5 Testovanie grafov	29
5.1 Hľadanie Kempe-neekvivalentných podgrafov (jadier)	30
6 Kempe-neekvivalentné podgrafy (jadrá)	34
6.1 Kempe-ekvivalencia bipartitných kubických grafov	39
6.2 Kempe-zachovávajúca expanzia	40
Záver	48
A Programy vytvorené ako súčasť tejto práce	49

B Použité nástroje a formáty grafov	51
B.1 Nástroje	51
B.2 Formáty grafov	52
Literatúra	58

Zoznam obrázkov

2.1	Príklad K-prepnutia. Hranové 3-farbenie grafu CL_4 , K-komponent $CL_4(1, 2)$, K-komponent $CL_4(1, 2)$ po K-prepnutí, Nové hranové 3-farbenie grafu CL_4	10
2.2	Príklad grafu	11
2.3	Príklad grafu farbení	11
2.4	Príklad grafu farbení s nakreslenými farbeniami	11
2.5	Grafy farbení (vľavo farbenia v štandardnom tvare, vpravo všetky farbenia)	14
2.6	Graf farbení, implikácia zľava doprava	15
2.7	Graf	17
2.8	Graf farbení v štandardnom tvare	17
2.9	Graf všetkých farbení grafu z obr. 2.7	17
3.1	Príklad grafu	21
4.1	Graf farbení pre kontrapríklad 4.9	25
4.2	Graf farbení pre kontrapříklad 4.10	25
4.3	Graf farbení pre kontrapříklad 4.11	26
4.4	Dve navzájom neizomorfné perfektné 1-faktorizácie K_8	26
5.1	Kompletný graf na 5 vrchoch (K_5)	31
5.2	Najmenšie neekvivalentné grafy na 6 vrchoch vzhľadom na 5-farbenie . .	31
6.1	Graf farbení K_5	35
6.2	Graf farbení grafu (K_5 po odstránení jednej hrany)	36
6.3	Graf farbení grafu (K_5 po odstránení dvoch hrán)	37
6.4	Najmenší graf, pre ktorý neplatí hypotéza 6.1 pre hranové 4-farbenie . . .	38
6.5	Pôvodný graf	38

6.6	Graf H – bez hrany	38
6.7	Graf H'	38
6.8	Príklady kubických bipartitných jadier pre 3-farbenia	41
6.9	Vrcholové bloky	42
6.10	Príklady rebríkových grafov	43
6.11	Hranový blok pre L_2	43
6.12	Vrcholový blok pre L_2	43
6.13	Farbenie L_3	44
6.14	Farbenie L_3	44
6.15	Označenie hrán L_k	44
6.16	Multihrana v kubickom grafe	46
6.17	Príklad inverznej operácie ku Kz-expanzii	47
B.1	Príklad grafu	54

Úvod

Teória grafov sa zaoberá mnohými zaujímavými problémami, z ktorých jedným z najdlhšie skúmaných je problém farbenia grafov. Venoval sa mu aj Alfred Kempe, ktorého matematická obec pozná najmä vďaka jeho dôkazu tvrdenia, ktoré sa dá zjednodušene formulovať tak, že v každom rovinnom grafe je možné oblasti zafarbiť 4 farbami tak, že susediace oblasti majú vždy rôzne farby. V tomto dôkaze využíval operáciu na farbení grafu, ktorú dnes poznáme pod pojmom Kempe-prepnutie. V tejto práci sa venujeme najmä štúdiu K-prepnutiu a otázkam, napríklad „dá sa z každého farbenia získať ľubovoľné iné iba postupnosťou K-prepnutí?“ pre rôzne triedy grafov. Graf, v ktorom by bola odpoveď na ponúknutú otázku „áno“ je tzv. Kempe-ekvivalentný graf.

Motiváciou pre tento problém je samotný problém. Ukazuje sa totiž, že sa za ním skrýva množstvo zaujímavej matematiky a vedie k relevantným výsledkom z iných oblastí teórie grafov. Ako ukážeme, existuje vzťah medzi Kempe-prepnutím hranových farbení grafu a jeho hranovou k -vyberateľnosťou. Ponúkame však aj ďalšiu motiváciu pre skúmanie tejto teórie.

V štatistickej mechanike sa skúma tzv. Pottssov model, čo je model interakcií spinov na kryštalickej mriežke. Štúdium tohto modelu má význam pre pochopenie feromagnetizmu. Na spomínanej kryštalickej mriežke sú miesta, ktoré môžu nadobúdať rôzne stavy pre rôzne časy. Blízke miesta sú zviazané väzbami. Na simuláciu tohto modelu sa používajú rôzne algoritmy, jedným z nich je, tzv. Wang-Swendsen-Kotecký algoritmus [20], ktorý si v jednej iterácii najprv zvolí dva stavy (farby) a potom na väziach, ktoré sú v jednom z týchto dvoch stavov, nájde zhľuky týchto miest (Kempe-komponenty) a v nich zamieňa stavy (Kempe-prepnutie). Tento algoritmus je ergodický práve vtedy, ak je možné prejsť z každej počiatočnej konfigurácie do každej inej (Kempe-ekvivalencia). Wang-Swendsen-Kotecký je teda ergodický práve vtedy, ak príslušný graf farbení je Kempe-ekvivalentný [20].

V prvej a druhej kapitole zadefinujeme potrebné termíny a v druhej navyše zavedieme farbenie v štandardnom tvare, o ktorom dokážeme užitočné vlastnosti pre ďalšie skúmanie Kempe-ekvivalencie. V tretej kapitole sa zaoberáme vzťahom medzi grafom farbení a hranovou k -vyberateľnosťou. V štvrtej kapitole uvedieme, pre ktoré triedy grafov a počty farieb sa už podarilo dokázať, že sú Kempe-ekvivalentné a zároveň ponúkneme dôkaz Kempe-ekvivalencie pre jednu triedu grafov a niekoľko príkladov grafov, ktoré slúžia ako kontrapríklady pre iné triedy. V piatej kapitole prezentujeme výsledky niektorých z experimentov, ktoré sme previedli. V šiestej kapitole sa venujeme Kempe-ekvivalencii grafov s maximálnym stupňom 3 a chromatickým číslom 3.

Kapitola 1

Základné pojmy

V tejto kapitole zhrnieme základné pojmy. Budeme používať štandardné definície termínov z teórie grafov, aké sa dajú nájsť napríklad v [4]. Okrem toho popíšeme konvenciu v označovaní, čo by malo napomôcť k jednoduchšiemu čítaniu tejto práce.

Definícia 1.1. *Graf* G je usporiadaná dvojica (V, E) , kde V je množina a E je množina dvojprvkových podmnožín množiny V . Prvky množiny V sa nazývajú *vrcholy* a prvky množiny E sa nazývajú *hrany*. Množinu vrcholov grafu G označujeme aj $V(G)$. Množinu hrán grafu G označujeme aj $E(G)$.

Pojem *graf* bude v tejto práci vždy znamenať jednoduchý neorientovaný graf. Grafy budeme označovať najmä písmenami G, H . Vrcholy grafu budeme označovať najmä písmenami u, v, w, \dots , hrany označujeme buď písmenom e alebo ako neusporiadanú dvojicu vrcholov (v_1, v_2) .

Definícia 1.2. Hrana (u, v) je *incidentná* s vrcholom w , ak platí, $w \in (u, v)$.

Definícia 1.3. Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ sú *izomorfné*, ak existuje bijektívne zobrazenie $f: V_1 \rightarrow V_2$, že pre každú dvojicu vrcholov $(v, w) \subset V_1$ platí $(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E_2$.

Definícia 1.4. *Stupeň vrchola* v grafe je počet hrán incidentných s vrcholom. Stupeň vrchola v v grafe G budeme označovať $\deg_G(v)$.

Definícia 1.5. Dve hrany (u_1, u_2) a (v_1, v_2) sú *incidentné*, ak nie sú totožné a súčasne ak v grafe existuje vrchol w , s ktorým sú incidentné.

Definícia 1.6. *Regulárne hranové k -farbenie* grafu je zobrazenie $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ také, že pre každé dve incidentné hrany e, e' platí, $c(e) \neq c(e')$. Množina $\{1, \dots, k\}$ je množina farieb, jej prvky sú farby.

Pojmom *k -farbenie* budeme v ďalšom texte označovať regulárne hranové k -farbenie, ak nie je napísané inak. Na označenie konkrétnych farbení budeme používať najmä písmená c, d .

Definícia 1.7. Najmenšie prirodzené číslo k také, že existuje regulárne hranové k -farbenie grafu G sa nazýva *chromatický index* grafu G a budeme ho označovať $\chi'(G)$.

Definícia 1.8. Dve *hranové farbenia* c_1, c_2 grafu G sú *izomorfné*, ak $\forall e_1, e_2 \in E(G)$ platí $c_1(e_1) = c_1(e_2) \Leftrightarrow c_2(e_1) = c_2(e_2)$.

Definícia 1.9. Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafu $G(V, E)$, ak platí $V' \subseteq V$ a súčasne $E' \subseteq E$.

Pre vyjadrenie skutočnosti, že graf G je izomorfný s podgrafom grafu H budeme používať ten istý pojem, teda že graf G je podgrafom grafu H . To, či je graf G naozaj podgrafom grafu H , alebo je s jeho podgrafom iba izomorfný vyplynie z kontextu.

Definícia 1.10. Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafu $G(V, E)$ *indukovaný množinou hrán* $D \subseteq E$, ak platí, že graf G' obsahuje práve hrany D a všetky vrcholy, ktoré susedia s hranami z D , teda formálne pre hrany grafu G' platí $E' = D$ a pre vrcholy platí $v \in V'$ práve vtedy, keď $v \in V$ a súčasne existuje hrana e v množine D taká, že e a v sú incidentné. Graf G' označujeme $G(D)$.

Kapitola 2

Kempe-ekvivalencia

2.1 Kempe-prepnutie

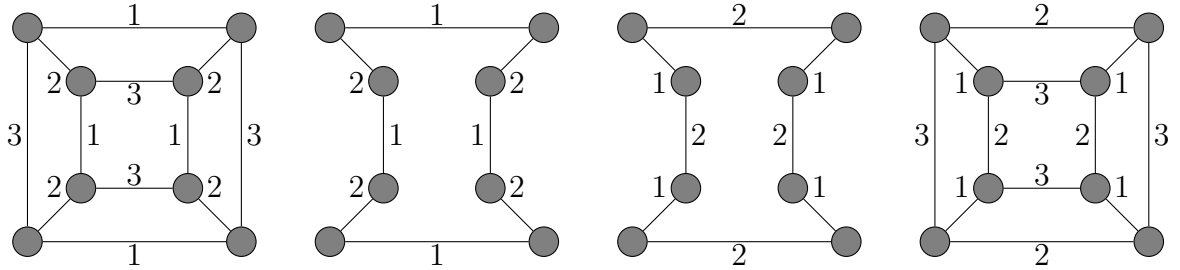
Kempe-prepnutie je operácia na farbení grafu. Majme graf, ktorého hrany sú zafarbené nejakým k -farbením. Zvoľme si dve rôzne farby a nájdime v grafe množinu hrán, pre ktorú platí, že

- každá hrana má jednu z dvoch vybraných farieb
- graf indukovaný touto množinou je súvislý
- množina je maximálna vzhľadom na inklúziu.

Kempe-prepnutím nazývame operáciu, ktorá navzájom vymení farby hrán v tejto množine. Príklad Kempe-prepnutia môžeme vidieť na obrázku 2.1. Zdefinujme teda Kempe-prepnutie formálne.

Definícia 2.1. Majme graf G a k -farbenie c . Nech $a, b \in \{1, \dots, k\}$ sú rôzne farby. Graf indukovaný dvojicou farieb $G(a, b)$ bude podgraf grafu G indukovaný množinou tých hrán $\{e_1, \dots, e_i, \dots\}$, pre ktoré platí, že ich farba $c(e_i)$ je buď a alebo b .

Definícia 2.2. Každý súvislý komponent K grafu $G(a, b)$, kde a, b sú rôzne farby, nazývame K -komponent (skratka od Kempe komponent). Výmenou farieb a a b v niektorom komponente dostaneme nové regulárne hranové farbenie. Túto operáciu nazývame *Kempe-prepnutie*.



Obr. 2.1: Príklad K-prepnutia. Hranové 3-farbenie grafu CL_4 , K-komponent $CL_4(1, 2)$, K-komponent $CL_4(1, 2)$ po K-prepnutí, Nové hranové 3-farbenie grafu CL_4

Ďalej zavedieme reláciu *Kempe-ekvivalencia*.

Definícia 2.3. Dve k -farbenia c_1, c_2 sú *Kempe-ekvivalentné* (označujeme aj K^k -ekvivalentné, ak chceme zdôrazniť počet farieb vo farbení), ak existuje postupnosť Kempe-prepnutí, pomocou ktorých zmeníme farbenie c_1 na c_2 .

V práci [5] sme ukázali, že táto relácia je reláciou ekvivalencie. Preto je možné rozložiť množinu všetkých farbení na triedy ekvivalencie. Práce [15], [10] sa zaoberajú počtom týchto tried pre rôzne parametre grafov. Detailnejší pohľad na vnútornú štruktúru týchto tried nám ponúkne graf farbení.

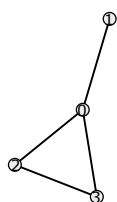
2.2 Graf farbení

Definícia 2.4. Majme graf G . Množinu všetkých k -farbení grafu G označíme V' . Nech E' je taká množina dvojprvkových podmnožín V' , že platí $c_1, c_2 \in E'$ práve vtedy, keď existuje K-prepnutie, pomocou ktorého z c_1 dostaneme c_2 . Dvojicu (V', E') nazveme *graf k -farbení grafu G* .

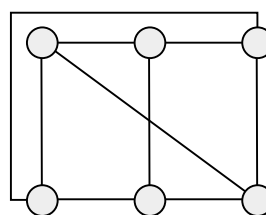
V grafe farbení teda vrcholy predstavujú farbenia iného grafu a dva vrcholy (dve farbenia) sú spojené hranou vtedy, ak môžeme medzi týmito farbeniami Kempe-prepnúť. Môžeme teda vidieť vzťah medzi grafom farbení a triedami ekvivalencie - vrcholy, ktoré patria do jedného komponentu grafu farbení predstavujú také farbenia, že sa dá meniť jedno na druhé pomocou konečného počtu prepnutí. Takže počet tried ekvivalencie je rovný počtu komponentov grafu. Počet tried ekvivalencie označujeme $Ke(G, k)$, ak farbíme hrany grafu G , k farbami.

Ak sa dá prepnúť medzi všetkými k -farbeniami navzájom, teda ak je graf farbení súvislý, hovoríme, že graf G je Kempe-ekvivalentný a zapisujeme $Ke(G, k) = 1$.

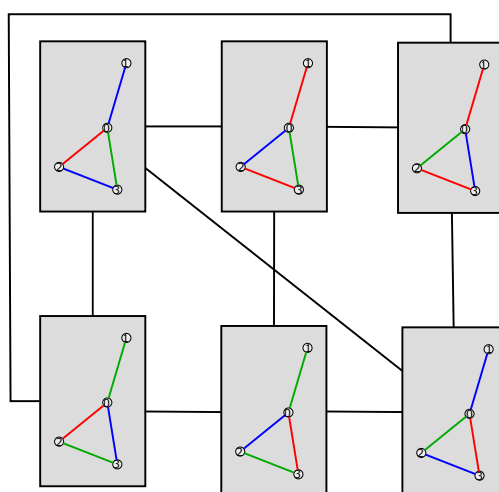
Na obrázku 2.2 je príklad grafu, ktorý zafarbíme všetkými možnými 3-farbeniami. Rôznych farbení je 6 a dá sa medzi nimi prepínať. Na obrázku 2.3 je graf farbení, ktorý k tejto množine farbení prislúcha. Obrázok 2.4 vyjadruje ten istý graf farbení, len v každom vrchole je nakreslené farbenie, ktoré daný vrchol reprezentuje.



Obr. 2.2: Príklad grafu



Obr. 2.3: Príklad grafu farbení



Obr. 2.4: Príklad grafu farbení s nakreslenými farbeniami

2.3 Štandardný tvar farbenia

Je veľmi nepraktické pracovať so všetkými farbeniami grafov. So zvyšujúcim sa počtom farieb totiž rastie počet izomorfných farbení. Pre k farieb je počet izomorfných farbení grafu $k!$, pretože existuje $k!$ permutácií k farieb. Napríklad 1-faktorizácia grafu je taká

trieda izomorfných farbení v špeciálnom prípade, keď graf je regulárny a stupeň vrcholov je rovnaký ako počet farieb.

Budeme preto uvažovať štandardný tvar farbenia tak, že v grafe farbení bude namiesto $k!$ vrcholov reprezentujúcich rôzne, navzájom izomorfné farbenia, len jedno farbenie v štandardnom tvare. Prirodzenou otázkou je, či počet komponentov takéhoto nového grafu farbení, v ktorom sú len štandardné farbenia, bude rovnaký, ako počet komponentov pôvodného grafu farbení, v ktorom sú všetky farbenia.

V [5] sme ukázali pre špeciálny prípad – pre kubické grafy a 3 a 4 farby – že ak je graf farbení s iba štandardnými farbami súvislý, tak aj prislúchajúci graf farbení so všetkými farbami je súvislý. Teraz ukážeme, že pre tieto aj pre ďalšie triedy grafov platí silnejšie tvrdenie, a to, že počet komponentov grafu farbení je ekvivalentný počtu komponentov grafu farbení s iba štandardnými farbeniami. Vďaka tomu bude možné analyzovať omnoho jednoduchšie grafy farbení, čo sa ukáže zvlášť užitočné pri vyššom počte farieb.

Definícia 2.5. Majme graf G , ktorý má hranové k -farbenie. Maximálny stupeň vrchola v takomto grafe je teda nanajvýš k . Nech maximálny stupeň vrchola v grafe je aspoň $k - 1$. Označme niektorý vrchol s maximálnym stupňom v a jeho susedov w_1, w_2, \dots, w_{k-1} (prípadne ešte w_k). *Farbenie v štandardnom tvare* je také farbenie $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, pre ktoré platí $\forall_{i \in \{1, 2, \dots, k-1\}} c(vw_i) = i$ (prípadne ešte $c(vw_k) = k$).

Toto označenie vrcholov v a w_i budeme používať aj v nasledujúcom texte tejto sekcie. Aby bola definícia konzistentná, musí platiť nasledujúca veta.

Veta 2.6. *Žiadne dve rôzne farbenia v štandardnom tvare nie sú navzájom izomorfné a pre každé farbenie existuje jeho štandardný tvar.*

Dôkaz. Sporom, nech sú dve rôzne farbenia v štandardnom tvare izomorfné, označme ich c_1, c_2 . Potom existuje bijekcia $p: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ taká, že pre vrchol v a vrcholy w_1, w_2, \dots, w_{k-1} platí, že $p(c_1(vw_i)) = c_2(vw_i)$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Zároveň vieme, že $c_1(vw_i) = c_2(vw_i) = i$, farbu k už musí funkcia p zobrazovať do k , z čoho vyplýva, že p je identita a teda farbenie c_1 a farbenie c_2 sú zhodné, čo je spor s predpokladom.

K druhej časti vety pre ľubovoľné regulárne farbenie c nájdeme potrebnú bijekciu. Vezmime funkciu $r: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, ktorá zobrazí $c(vw_i)$ na farbu i , teda platí $r(c(vw_i)) = i$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Farbu f ktorá sa nevyskytuje medzi farbami $c(vw_1), \dots, c(vw_{k-1})$ zobrazí do k . Keďže všetky farby $c(vw_1), \dots, c(vw_{k-1}), f$ sú rôzne

a zobrazujú sa na všetky farby $\{1, \dots, k\}$, ide o bijekciu a teda k danému farbeniu c existuje farbenie v štandardnom tvare (označme ho d), ktorý je s farbením c izomorfný a je definovaný ako $d(e) = r(c(e))$ pre každú hranu e . \square

Zaveďme ďalej pojem *graf farbení v štandardnom tvare*. Budeme tak nazývať podgraf grafu farbení indukovaný vrcholmi, ktoré reprezentujú farbenia v štandardnom tvare. Prakticky pri tvorbe grafu farbení v štandardnom tvare postupujeme nasledovne: vrcholy, ktoré majú reprezentovať farbenia, ktoré nie sú v štandardnom tvare, do grafu jednoducho nepridáme. Ak by niektorým Kempe-prepnutím malo dôjsť k zmene farbenia na také, ktoré nie je v štandardnom tvare, takú hranu do grafu tiež nepridáme.

Aby pre nás malo zmysel analyzovať grafy farbení v štandardnom tvare vzhľadom na počet komponentov, je potrebné aby platilo, že tento počet je zhodný s počtom komponentov grafu všetkých farbení. Inak povedané, musí platiť, že dva vrcholy reprezentujúce rôzne farbenia sú v tom istom komponente grafu farbení práve vtedy, keď vrcholy ich prislúchajúcich farbení v štandardnom tvare sú v tom istom komponente grafu farbení v štandardnom tvare.

Veta 2.7. *Dva vrcholy reprezentujúce rôzne farbenia patria do toho istého komponentu grafu farbení práve vtedy, keď vrcholy ich prislúchajúcich farbení v štandardnom tvare patria do toho istého komponentu grafu farbení v štandardnom tvare.*

Najprv ukážeme, že pomocou postupnosti Kempe-prepnutí je možné z ľubovoľného farbenia získať farbenie v štandardnom tvare. Keďže Kempe-prepnutie je reflexívna relácia, vieme proces obrátiť jednoducho vykonávaním prepnutí v opačnom poradí, takže dostaneme zo štandardného tvaru pôvodné farbenie.

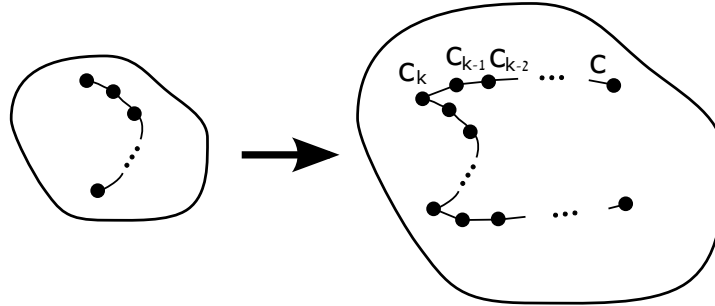
Lema 2.8. *Každé farbenie a jeho príslušné farbenie v štandardnom tvare sú navzájom Kempe-ekvivalentné.*

Dôkaz lemy. Jediné, čo je potrebné spraviť, je permutovať farby hrán. Dôkaz prevedieme indukciou vzhľadom na počet farieb. Nech je graf zafarbený hranovým k -farbením c . Všetky hrany, ktoré majú farbu $c(vw_1)$ potrebujeme zafarbiť farbou číslo 1 a naopak všetky hrany s farbou 1 potrebujeme zafarbiť farbou $c(vw_1)$. Vykonáme teda Kempe-prepnutie $(1, c(vw_1))$ na všetkých komponentoch grafu indukovaného príslušnými farbami. Tým pádom dostaneme nové farbenie c_1 , ktoré je Kempe-ekvivalentné s pôvodným farbením a zároveň platí, že

$c(vw_1) = 1$. Majme farbenie c_l , v ktorom prvých l hrán susediacich s vrcholom v je zafarbených správne podľa štandardného tvaru. Určite potom platí, že $c(vw_{l+1}) \notin \{1, \dots, l\}$. Tým pádom, ak opäť vykonáme pre každý komponent grafu indukovaného farbami $c(vw_{l+1}), l+1$ Kempe-prepnutie $(c(vw_{l+1}), l+1)$, dostaneme opäť farbenie Kempe-ekvivalentné s pôvodným farbením c a zároveň nepokazíme prvých l farieb. Nakoniec teda dostaneme farbenie c_k , ktoré je v štandardnom tvare, ekvivalentné s pôvodným. \square

Dôsledok 2.9. *Izomorfné farbenia sú Kempe-ekvivalentné.*

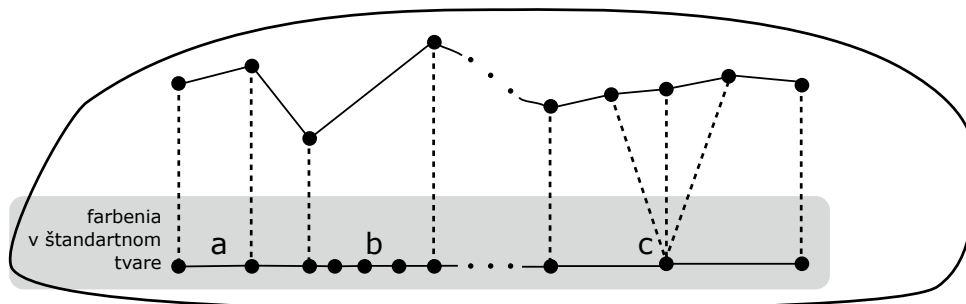
Dôkaz vety. Ak sú dve farbenia (v štandardnom tvare) v grafe farbení v štandardnom tvare v rovnakom komponente, z lemy vyplýva, že tieto dve farbenia sú v rovnakom komponente aj v grafe všetkých farbení (spája ich tá istá cesta). Spolu s týmito dvomi farbeniami sú v grafe všetkých farbení v rovnakom komponente aj všetky farbenia, ktoré sú s nimi izomorfné, čím je dokázaná implikácia sprava doľava. Na ilustračnom obrázku 2.5 je vľavo graf s farbeniami v štandardnom tvare a vpravo graf so všetkými farbeniami.



Obr. 2.5: Grafy farbení (vľavo farbenia v štandardnom tvare, vpravo všetky farbenia)

Implikácia zľava doprava vyplýva z nasledovného tvrdenia: Ak existuje v grafe všetkých farbení cesta z farbenia c do farbenia d , potom existuje aj cesta (v grafe všetkých farbení) z farbenia prislúchajúceho k farbeniu c , ktoré je v štandardnom tvare (označme ho c') do farbenia d' (ktoré je farbenie v štandardnom tvare prislúchajúce k farbeniu d). Dokážeme toto tvrdenie. Nech cesta pozostáva z farbení $c = c_1, c_2, c_3, \dots, c_n = d$. Pre každé z týchto farbení existuje štandardný tvar c'_i . Zoberme ľubovoľné $1 < l < n - 1$. Ak existuje hrana medzi vrcholmi reprezentujúcimi farbenie c_l a farbenie c_{l+1} , tak sa medzi týmito farbeniami dá Kempe-prepnúť. Toto prepnutie mení farbu aspoň jednej hrany. Nastane jeden z dvoch prípadov. Buď žiadna z hrán, ktorých farba sa týmto Kempe-prepnutím mení, nesusedí

s vrcholom v (podľa označenia z lemy – vrchol, ktorého susedné hrany sú vo všetkých farbeniach v štandardnom tvare zafarbené rovnakými farbami), alebo niektorá hrana, ktorej farba sa mení, susedí s vrcholom v .



Obr. 2.6: Graf farbení, implikácia zľava doprava

Nech žiadna z menených hrán nesusedí s vrcholom v , označme jednu z týchto hrán e . Táto situácia je na obrázku 2.6 a. Potom Kempe-prepnutie zmení jej farbu z $c_l(e)$ na farbu $c_{l+1}(e)$. Nech r a s sú funkcie, že platí $r \circ c_l = c'_l$, $s \circ c_{l+1} = c'_{l+1}$. Takéto funkcie existujú, pretože dané dvojice farbení sú izomorfné. Navyše v oboch farbeniach c_l aj c_{l+1} sú farby hrán susediacich s vrcholom v rovnaké, takže funkcie r a s sú zhodné. Potom stačí vo farbení c'_l prepnúť hranu e z farbenia $c'_l(e) = (r \circ c_l)(e)$ na farbu $(r \circ c_{l+1})(e) = c'_{l+1}$ a tým dostaneme, pomocou Kempe-prepnutia, z farbenia v štandardnom tvare c'_l , nové farbenie c'_{l+1} .

Druhá možnosť je, že hrana e susedí s vrcholom v , obrázok 2.6 b. V tom prípade vo farbení c'_l , ktoré je v štandardnom tvare, nemôžeme meniť farbu tejto hrany, lebo by sme dostali farbenie (označme x), ktoré nie je v štandardnom tvare. Ako však bude vyzeráť štandardný tvar farbenia x , teda c'_{l+1} ? Zjavne sa bude od farbenia c'_l líšiť práve farbami $c'_l(e)$ a $x(e)$ vo všetkých komponentoch grafu indukovaného touto dvojicou farieb okrem toho komponentu, v ktorom je vrchol v . Takže môžeme namiesto jedného prepnutia, ktorým by sme z farbenia c'_l dostali farbenie x , vykonať jedno prepnutie pre každý komponent indukovaného grafu, rôznych od toho, ktorý obsahuje v a dostaneme po konečnom počte prepnutí farbenie c'_{l+1} . \square

Všimnime si, že sa môže stať, že graf indukovaný dvomi farbami pozostáva len z jedného komponentu. Jeho súčasťou musí byť aj vrchol v , pretože hrany incidentné s vrcholom v majú všetky farby z množiny $\{1, \dots, k\}$. Vtedy dochádza k druhej možnosti, teda musíme

postupne Kempe-prepnúť vo všetkých ostatných komponentoch, ktorých je nulový počet. To znamená, že po nula prepnutiach dostávame to isté farbenie v štandardnom tvare. Obrázok 2.6 c. Z toho vyplýva veta 2.10.

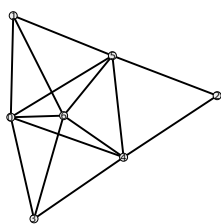
Veta 2.10. *Ak pre každé dve farby vo farbení grafu platí, že graf indukovaný touto dvojicou farieb je súvislý, potom je vrchol (farbenia) v grafe farbení izolovaný.*

Dôsledok 2.11. *Ak existujú aspoň 2 neizomorfné farbenia a aspoň jedno farbenie je také, že každá dvojica farieb tvorí hamiltonovskú kružnicu alebo hamiltonovskú cestu, graf nie je Kempe-ekvivalentný.*

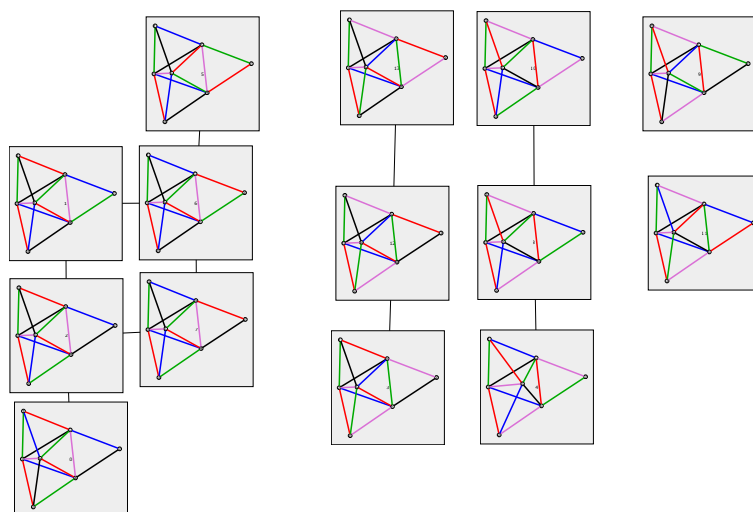
Autori článku [10] využívajú fakt, že ak pre každú dvojicu farieb platí, že graf indukovaný dvojicou farieb je hamiltonovská kružnica, tak graf nie je Kempe-ekvivalentný. Dôsledok 2.11 je teda tvrdením so slabším predpokladom.

V ďalšom texte budeme oba typy grafov (so štandardnými tvarmi farbení aj tie so všetkými farbeniami) označovať ako graf farbení, pričom budeme mať na mysli grafy farbení v štandardnom tvare. Ak budeme chcieť hovoriť o veľkých grafoch, ktoré obsahujú úplne všetky farbenia, explicitne to uvedieme.

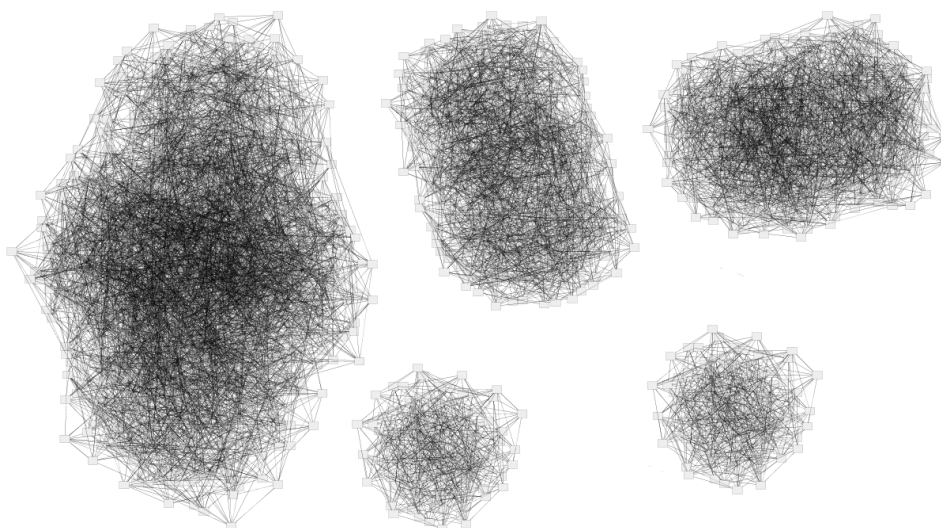
Užitočnosť tohto zjednodušenia grafu farbení možno vidieť na nasledovnom príklade. Na obrázku 2.7 môžeme vidieť príklad grafu. Tento graf farbíme 5 farbami a dostávame graf farbení v štandardnom tvare, ktorý je na obrázku 2.8 a graf všetkých farbení na obrázku 2.9. Počet vrcholov grafu farbení so všetkými farbeniami je 1680 na rozdiel od 14 vrcholov grafu farbení v štandardnom tvare. Všimneme si, že počet komponentov v jednotlivých grafoch farbení je rovnaký.



Obr. 2.7: Graf



Obr. 2.8: Graf farbení v štandardnom tvare



Obr. 2.9: Graf všetkých farbení grafu z obr. 2.7

Kapitola 3

Hranová k -vyberateľnosť grafu

V tejto časti popíšeme vzťah medzi hranovou k -vyberateľnosťou grafu a Kempe-ekvivalentnosťou regulárnych grafov. Najprv zdefinujeme hranovú k -vyberateľnosť.

Definícia 3.1. Nech k je prirodzené číslo. Hovoríme, že graf G je *hranovo k -vyberateľný* ak pre každý systém množín $\{S_e : e \in E(G)\}$ takých, že $|S_e| = k$, existuje regulárne farbenie c také, že pre každú hranu $e \in E(G)$ platí, že farba hrany e je z množiny S_e , teda $c(e) \in S_e$.

Hypotéza 3.2 (prevzaté z [7]). *Majme multigraf G s chromatickým indexom χ' . Potom je G hranovo k -vyberateľný.*

Ďalej sa v tejto časti budeme zaoberať len d -regulárnymi grafmi. Najprv zdefinujeme grafový polynóm tak, ako ho uviedli v článku [7].

Definícia 3.3. *Grafový polynóm* neorientovaného grafu $G = (V, E)$ ktorého množina vrcholov $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je definovaný ako

$$f_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{\{v_i, v_j\} \in E, i < j} x_i - x_j.$$

Grafový polynóm použil už Petersen vo svojom článku [17]. Nás bude zaujímať koeficient pri jednom člene z tohto polynómu. Nech $\xi(G)$ označuje koeficient pri $\prod_{e \in E(G)} x_e^d$ v grafovom polynóme hranového grafu $L(G)$ (kde G je d -regulárny graf). Ak $\xi(G) \neq 0$, potom graf je d -hranovo vyberateľný ([7]).

V článku [7] sú uvedené zaujímavé interpretácie tohto koeficientu $\xi(G)$. Tieto využívajú operáciu *sign*, ktorú si teraz zdefinujeme.

Nech $\delta(v)$ je množina hrán incidentných s vrcholom v . Túto množinu usporiadame pre každý vrchol. Budeme mať teda funkciu $\pi_v : \delta(v) \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$ pre každý vrchol v . Túto funkciu nazveme hviezdicové označenie. Globálne hviezdicové označenie je množina $\pi = \{\pi_v : v \in V(G)\}$. Predpokladajme, že pre graf G máme jedno globálne označenie $\rho = \rho(G) = \{\rho_v\}$, ktoré nazývame *referenčné označenie* a s ktorým budeme iné hviezdicové označenia porovnávať.

Znamienko hviezdicového označenia pre vrchol v (relatívne k ρ) je znamienko permutácie $\pi_v \rho_v^{-1}$. Označíme ho $\text{sign}_\rho(\pi_v)$ a nadobúda hodnotu 1, ak počet výmen v permutácii je párny a -1 , ak je nepárny. Znamienko globálneho hviezdicového označenia definujeme ako súčin znamienok pre jednotlivé vrcholy, teda $\text{sign}(\pi) = \prod_{v \in V(G)} \text{sign}(\pi_v)$.

K samotným interpretáciám koeficientu: Označme množinu všetkých hranových d -farbení grafu \mathcal{C} . Každé farbenie c určuje jedno globálne hviezdicové označenie $\tau(c)$ tak, že pre každú hranu $e = (u, v)$ platí, že $\tau_u(e) = \tau_v(e) = c(e)$. Potom koeficient môžeme vypočítať podľa vzorca

$$\xi(G) = \pm \sum_{c \in \mathcal{C}} \text{sign}(c).$$

Vezmime dvojicu farieb a, b . Ak v celom grafe vymeníme tieto dve farby, tak v každom vrchole grafu G dôjde k zmene. Zmien bude teda $|V(G)|$, pričom počet vrcholov je párny¹ a preto nové farbenie má rovnaké znamienko ako staré farbenie. Z toho vyplýva, že všetky navzájom izomorfné farbenia majú rovnaké znamienko. Vezmime si iba farbenia v štandardnom tvare \mathcal{C}' . Pre ne platí

$$\xi(G) = \pm d! \sum_{c \in \mathcal{C}'} \text{sign}(c).$$

Dá sa použiť aj Kempe-ekvivalencia. Každé dve farbenia, ktoré sú Kempe-ekvivalentné, majú rovnaké znamienko. Označme $KE(G)$ množinu komponentov grafu farbení, κ jeden komponent grafu farbení. Potom prirodzene platí $\text{sign}(\kappa) = \text{sign}(c)$, kde c je ľubovoľné farbenie v komponente grafu farbení κ . Platí:

$$\xi(G) = \pm \sum_{\kappa \in KE(G)} \text{sign}(\kappa) |V(\kappa)|.$$

Nakoniec ak berieme do úvahy graf farbení v štandardnom tvare a zavedieme označenie

¹Počet vrcholov grafu je párny, pretože graf je d -regulárny a existuje preň hranové d -farbenie.

analogické k predchádzajúcemu $KE'(G)$ a κ' , dostaneme tvrdenie

$$\xi(G) = \pm d! \sum_{\kappa' \in KE'(G)} \text{sign}(\kappa') |V(\kappa')|.$$

Z článku [7] vyplýva nasledovná veta

Veta 3.4. *Nech G je d -regulárny multigraf. Ak aspoň jedno z nasledujúcich tvrdení platí:*

- *G má nepárny počet rôznych 1-faktorizácií,*
- *G je 1-faktorizovateľný a graf farbení je súvislý,*
- *G je 1-faktorizovateľný a ľubovoľné dve 1-faktorizácie majú rovnaké znamienko,*

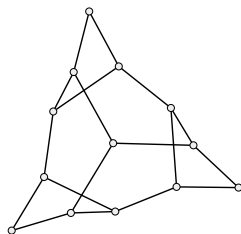
potom koeficient $\xi(G) \neq 0$ a teda graf G je hranovo d -vyberateľný.

Vzhľadom k tomu, že pracujeme s d -farbením a d -regulárnymi grafmi, náš štandardný tvar farbenia v tomto prípade zodpovedá 1-faktorizácii. Vďaka našej vete 2.7 nám stačí ako predpoklad, že G je 1-faktorizovateľný a graf 1-faktorizácií je súvislý.

3.1 Rozklad komponentov grafu farbení

Predpokladajme, že máme pre graf G graf farbení, ktorý nie je súvislý a chceme zistiť, či $\xi(G) = 0$. Uvedieme jemnejšiu podmienku pre nenulovosť koeficientu ξ . Nech graf farbení má k komponentov. Pre každý komponent vieme, koľko obsahuje vrcholov, označme l_i , pre $i \in \{1, \dots, k\}$. Ak sa nedá z postupnosti čísel $S = \{l_1, \dots, l_k\}$ vybrať taká podpostupnosť S' , že súčet čísel v postupnosti S rovný dvojnásobku súčtu čísel v podpostupnosti S' , potom $\xi(G) \neq 0$. Tento problém sa nazýva aj problém rozkladu čísel a vieme o ňom, že je NP-úplný (článok [14]), takže takéto riešenie nie je vždy lepšie ako spočítať pre každú triedu Kempe-ekvivalencie znamienko. Pre malý počet komponentov sa však dá ľahko použiť, napríklad pre graf na obrázku 3.1 a 3-farbenie dostávame komponenty s počtami vrcholov: 6, 1, 1, 1, 1, takže síce nemôžeme priamo použiť vetu 3.4, ale vidíme, že rozklad neexistuje, takže $\xi(G) \neq 0$.

My sme implementovali algoritmus, ktorý priradí farbeniu hodnotu sign , ktorý pracuje v čase $O(|V(G)| \cdot d)$. Toto je zjavne rýchlejšie ako generovať graf farbení. Preto, ak by sme chceli zvýšiť rýchlosť algoritmu, ktorý rozhoduje pre vstupný graf, či jeho graf farbení je



Obr. 3.1: Príklad grafu

Kempe-ekvivalentný, mohli by sme využiť vlastnosť, že Kempe-ekvivalentné farbenia majú rovnaké znamienko. Tzn. najprv otestovať, či majú všetky farbenia rovnaké znamienko a graf farbení generovať iba v prípade, že by boli všetky znamienka rovnaké.

Kapitola 4

Známe výsledky o K -ekvivalencii

4.1 Hranové farbenia

Zhrnieme známe výsledky o Kempe-ekvivalencii hranových farbení rôznych tried grafov.

Prvý poznatok hovorí o vzťahu Kempe-ekvivalencie a chromatického indexu grafu. Navyše hovorí, že pre dostatočný počet farieb je každý graf Kempe-ekvivalentný.

Veta 4.1 (prevzatá z [15]). *Nech $\Delta(G)$ je maximálny stupeň grafu G . Ak $k \geq \chi'(G) + 2$ potom $Ke(G, k) = 1$.*

Všimnime si, že táto veta hovorí aj o vzťahu Kempe-ekvivalencie a maximálneho stupňa grafu ($\Delta(G)$), pretože podľa Vizingovej vety [19] je chromatický index $\chi'(G)$ buď rovný $\Delta(G)$ alebo $\Delta(G) + 1$. Grafy, pre ktoré $\chi'(G) = \Delta(G)$ nazývame grafmi prvej triedy a tie, pre ktoré platí $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ nazývame grafmi druhej triedy. Táto veta teda pre grafy prvej triedy hovorí, že pre počet farieb $k = \Delta(G) + 2$ je graf Kempe-ekvivalentný, ale pre grafy druhej triedy zabezpečuje táto veta Kempe-ekvivalenciu až pre $k = \Delta(G) + 3$. Pre grafy druhej triedy sa $Ke(G, \Delta(G) + 2) = 1$ podarilo dokázať pre grafy s maximálnym stupňom 4.

Veta 4.2 (prevzatá z [10]). *Ak G je graf s maximálnym stupňom $\Delta(G) \leq 4$, potom $Ke(G, \Delta + 2) = 1$.*

My sme túto vetu počas osobnej komunikácie ([3]) rozšírili pre časť grafov s maximálnym stupňom 5.

		$k - \text{počet farieb}$							
		3	4	5	6	7	8	9	...
$\Delta(G)$	3	$\times_{(4.9)}$	$\checkmark_{(4.6)}$	$\checkmark_{(4.2)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	
	4	\times	$\times_{(4.10)}$	$\times_{(4.11)}$	$\checkmark_{(4.2)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	
	5	\times	\times	\times	$\mathbf{b}_{(4.7)}$	$\mathbf{b}_{(4.7)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	$\checkmark_{(4.1)}$	
	6	\times	\times	\times		$\mathbf{b}_{(4.7)}$ $\times_{(4.12)}$	$\mathbf{b}_{(4.7)}$	$\mathbf{b}_{(4.7)}$	
	7	\times	\times	\times		$\times_{(4.12)}$	$\mathbf{b}_{(4.7)}$	$\mathbf{b}_{(4.7)}$	
	8	\times	\times	\times		\times		$\mathbf{b}_{(4.7)}$	
	9	\times	\times	\times		\times		$\times_{(4.8)}$	
	\vdots								

Tabuľka 4.1: Triedy grafov, u ktorých vieme, či sú Kempe-ekvivalentné

Veta 4.3. *Ak G je graf s maximálnym stupňom $\Delta(G) \leq 5$ a obsahuje 1-faktor, potom $Ke(G, \Delta + 2) = 1$.*

Na dôkaz tejto vety použijeme lemu z článku [10], ktorú tu uvedieme bez dôkazu.

Lema 4.4. *Ak G je graf a c je hranové k -farbenie grafu G , pričom $k \geq \Delta + 1$, potom existuje hranové $(\Delta + 1)$ -farbenie c' grafu G také, že farbenie c a farbenie c' sú Kempe-ekvivalentné.*

Dôkaz vety. Majme graf G s maximálnym stupňom $\Delta(G) \leq 5$. Majme dve jeho 7-farbenia c, d . Podľa lemy k farbeniu c existuje Kempe-ekvivalentné 6-farbenie c' a podobne k farbeniu d existuje farbenie d' . Z predpokladu vieme, že graf G má 1-faktor. Hrany tohto 1-faktora odstránime a dostávame graf G' s maximálnym stupňom $\Delta(G') \leq 4$ a s dvomi 6-farbeniami, teda farbeniami c', d' zúženými na hrany $E(G')$. Tieto dve farbenia sú v grafe G' Kempe-ekvivalentné vzhľadom na 6-farbenie podľa vety 4.2.

Tento postup teda môžeme realizovať s tým rozdielom, že namiesto odstránenia hrán 1-faktora, tieto hrany iba zafarbíme farbou 7. Toto môžeme urobiť pomocou Kempe-prepnutí, pretože vo farbeniach c', d' sa farba 7 nepoužíva. Zvyšok postupu funguje rovnako, lebo prepíname iba dvojice farieb z množiny $\{1, \dots, 6\}$ a teda prepínané Kempe-komponenty v grafe G a v grafe G' sú zhodné. \square

Všimnime si, že to, že graf obsahuje 1-faktor ešte neznamená, že je z prvej triedy. (V takom prípade by stačilo použiť vetu 4.1.)

Pre bipartitné grafy existuje ešte tesnejší výsledok

Veta 4.5 (prevzatá z [15]). *Ak G je bipartitný graf s maximálnym stupňom $\Delta(G)$, potom $Ke(G, \Delta + 1) = 1$.*

Rovnako tesný výsledok platí aj pre subkubické grafy

Veta 4.6 (prevzatá z [10]). *Ak G je graf s maximálnym stupňom $\Delta(G) \leq 3$, potom $Ke(G, \Delta + 1) = 1$.*

Veta 4.7 (prevzatá z [15]). *Nech G je bipartitný graf. Ak platí $\Delta(G) \leq k + 1$, potom $Ke(G, k) = 1$.*

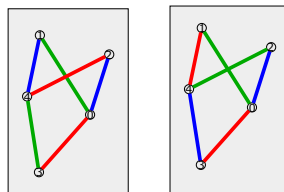
Veta 4.8 (prevzatá z [10]). *Nech $p \geq 3$ je prvočíslo. Potom $Ke(K_{2p-1}, 2p - 1) > 1$.*

Tieto vety zhrnieme do prehľadovej tabuľky 4.1. Znak ✓ znamená, že grafy daného maximálneho stupňa sú Kempe-ekvivalentné vzhľadom na hranové k -farbenia. Ak je v bunke „b“, znamená to, že bipartitné grafy z tejto triedy sú Kempe-ekvivalentné. Pri každom pozitívnom výsledku je číslo vety, ktorá o ňom hovorí. Krížik (X) znamená, že sme našli kontrapríklad a aj ho pod uvedeným číslom uvádzame. Ak je v niektorej bunke tabuľky krížik, všetky nižšie bunky v danom stĺpci implicitne obsahujú krížik. Množina grafov s nejakým maximálnym stupňom je totiž podmnožinou množiny grafov s vyšším maximálnym stupňom, takže totožný kontrapríklad zafunguje aj tam.

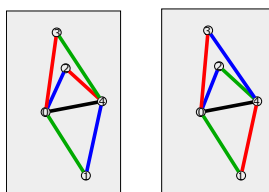
Pre bunky, kde $k \leq \Delta$ samozrejme platí, že niektoré z grafov majú vyšší chromatický index ako k . V takom prípade hovoríme o Kempe-ekvivalencií tých z nich, ktoré sa dajú zafarbiť.

Kontrapríklad 4.9. *je príklad grafu, ktorý má maximálny stupeň vrchola $\Delta = 3$ a pri farbení $k = 3$ farbami nie je Kempe-ekvivalentný. Príslušný graf farbení môžeme vidieť na obrázku 4.1. Tento sa skladá z dvoch vrcholov (v každom je nakreslené zafarbenie pôvodného grafu).*

Kontrapříklad 4.10. *je príklad grafu, ktorý má maximálny stupeň vrchola $\Delta = 4$ a pri farbení $k = 4$ farbami nie je Kempe-ekvivalentný. Príslušný graf farbení môžeme vidieť na obrázku 4.2.*



Obr. 4.1: Graf farbení pre kontrapríklad 4.9



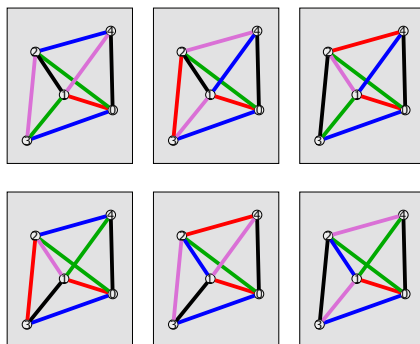
Obr. 4.2: Graf farbení pre kontrapříklad 4.10

Kontrapříklad 4.11. je príklad grafu, ktorý má opäť maximálny stupeň vrchola $\Delta = 4$, ale narozdiel od predchádzajúceho, ho farbíme až $k = 5$ farbami. Tento graf je K_5 , teda kompletný graf na 5 vrchoch. Príslušný graf farbení môžeme vidieť na obrázku 4.3.

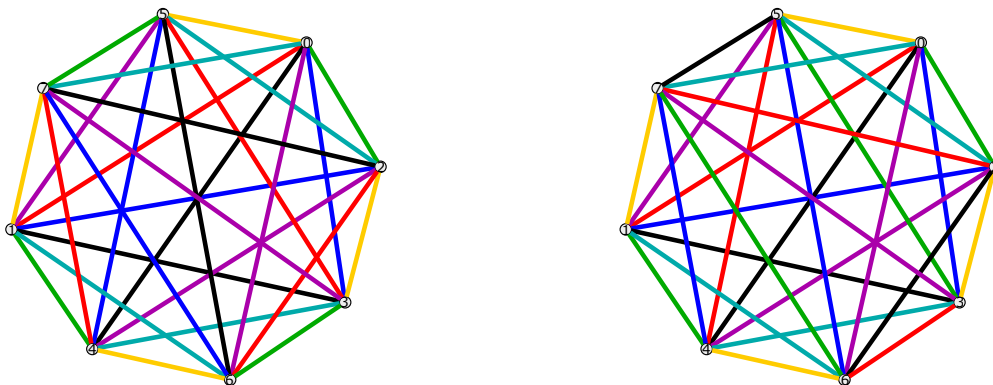
Implementovali sme algoritmus na hľadanie perfektnej 1-faktorizácie kompletného grafu. Tento algoritmus použijeme na hľadanie nasledovných protipríkladov.

Kontrapříklad 4.12. Všimnime si, že v oboch grafoch na obrázku 4.4 platí, že každá dvojica farieb indukuje hamiltonovský cyklus. (Toto je v ľudských silách skontrolovať, pretože dvojíc je len $\binom{7}{2} = 21$). To znamená, že ľubovoľné Kempe-prepnutie vytvorí izomorfné farbenie. Dve uvedené farbenia však nie sú izomorfné (pretože napriek tomu, že hrany susediace okolo vrcholov s označením 0 majú totožné farby, zvyšok farbenia nie je rovnaký.) Čiže graf K_8 nie je Kempe-ekvivalentný vzhľadom na hranové 7-farbenie. Môžeme však ešte odstrániť ľubovoľný vrchol v oboch grafoch - tým pádom dostaneme dve neizomorfné farbenia grafu K_7 , v ktorých každý Kempe-komponent je hamiltonovská cesta. Takže graf K_7 je vzhľadom na 7-farbenie tiež Kempe-ekvivalentný.

Protipríklady 4.9 a 4.10 sú najmenšie možné grafy, ktoré spĺňajú parametre a nie sú Kempe-ekvivalentné. Boli nájdené algoritmom, ktorý je súčasťou tejto práce. Protipříklad 4.11 bol uvedený aj v článku [10], kde autori dokázali, že naozaj nie je Kempe-ekvivalentný. S využitím našej vety 2.7 je však v ľudských silách priamo sa presvedčiť o tom, že uvedené



Obr. 4.3: Graf farbení pre kontrapríklad 4.11



Obr. 4.4: Dve navzájom neizomorfné perfektné 1-faktorizácie K_8

farbenia sú všetky a vskutku nie sú Kempe-ekvivalentné. Po nájdení kontrapríkladu 4.11 je racionálne prestať sa zaoberať príslušnou triedu grafov (stupňa maximálne 4) a farbení (5 farbami) – pretože už je o nej rozhodnuté. My sme to však neurobili, naopak, rozhodli sme sa ísť hlbšie a preskúmať, ktoré grafy v tejto triede sú Kempe-ekvivalentné a ktoré nie. O Kempe-ekvivalentnosti niektorých z nich hovorí nasledujúca veta:

Veta 4.13 (prevzatá z [10]). *Nech G je súvislý graf so stupňom nanajvýš 4 a s vlastnosťou, že žiadne dva vrcholy stupňa 4 nie sú susedné. Ďalej predpokladajme, že v grafe existuje vrchol v , pre ktorý platí buď*

1. $\deg(v) \leq 2$, alebo
2. $\deg(v) = 3$, a vrchol v má nanajvýš dvoch susedov stupňa 4

Potom $Ke(G, 5) = 1$.

4.2 Vrcholové farbenia

Pre úplnosť uvedieme aj niekoľko tvrdení o Kempe-ekvivalencii pri vrcholových farbeniach.

Existencia grafov, ktoré sú Kempe-ekvivalentné pre nižší počet farieb a nie sú Kempe-ekvivalentné pre vyšší počet farieb je takým zaujímavým výsledkom, že ho ponúkame aj s dôkazom.

Veta 4.14 (prevzatá z [15]). *Pre ľubovoľné prirodzené čísla l, k , pre ktoré platí $3 \leq l < k$ existuje graf G s chromatickým číslom l , taký, že je Kempe-ekvivalentný vzhľadom na vrcholové l -farbenia, ale nie je Kempe-ekvivalentný vzhľadom na vrcholové k -farbenia.*

Dôkaz. Stačí ako graf G vziať kategoriálny súčin kompletných grafov $K_l \times K_k$. Jeho vrcholy sú teda páry (i, j) , $1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k$ a vrchol (i, j) je incidentný s vrcholom (i', j') práve vtedy, keď $i \neq i'$ a $j \neq j'$. Nech c je l -farbenie grafu G , kde $c((i, j)) = i$ a nech c' je k -farbenie grafu G také, že $c'((i, j)) = j$. Všimnime si, že podgraf indukovaný vrcholmi $(1, 1), (2, 2), \dots, (l, l)$ je izomorfný s K_l . Vzhľadom na to a na existenciu farbenia c' platí, že chromatické číslo $\chi(G) = l$. Ďalej je vidno, že ak vyplníme najprv farby v tomto podgrafe a chceme zafarbiť graf G iba l farbami, tak farbenie môžeme doplniť deterministicky na farbenie c . Z toho vyplýva, že toto farbenie je jediné (až na izomorfné) a teda je tento graf vzhľadom na l -farbenia Kempe-ekvivalentný. Farbenie c' má tú vlastnosť, že ľubovoľné dve farby indukujú súvislý podgraf, takže nie je možné prepínaním dostať neizomorfné farbenie. Farbenie c a farbenie c' sú neizomorfné a teda nie sú Kempe-ekvivalentné. \square

Ďalšia veta hovorí o d -degenerovanom grafe, teda o grafe, ktorého každý podgraf obsahuje vrchol stupňa nanajvyš d .

Veta 4.15 (prevzatá z [15]). *Nech graf G je d -degenerovaný graf, potom pre každé $k > d$ platí, že graf je vzhľadom na vrcholové k -farbenia Kempe-ekvivalentný.*

A z nej vyplýva nasledujúce tvrdenie o Kempe-ekvivalencii vzhľadom na maximálny stupeň grafu:

Veta 4.16 (prevzatá z [15]). *Nech $\Delta(G)$ je maximálny stupeň grafu G a nech $k \geq \Delta + 1$. Potom graf je vzhľadom na vrcholové k -farbenie Kempe-ekvivalentný. Ak G je súvislý a obsahuje vrchol menšieho stupňa ako $\Delta(G)$, potom je tiež Kempe-ekvivalentný.*

Všimnime si, že priamo z tejto vety vyplýva Kempe-ekvivalencia kubických grafov vzhľadom na hranové 5-farbenia. Veta 4.6 ktorú jej autori dokázali neskôr, však ponúka tesnejší výsledok.

Kapitola 5

Testovanie grafov

Ako sme ukázali v predchádzajúcej kapitole, o niektorých triedach grafov je už rozhodnuté, či pre dané k -farbenie sú alebo nie sú Kempe-ekvivalentné. Príkladom takej triedy sú všetky grafy, s maximálnym stupňom 4 a hranové 5-farbenia. V článku [10] autori ukázali, že graf K_5 , ktorý je z danej triedy, nie je Kempe-ekvivalentný. My sme túto skutočnosť overili a chceli sme nájsť ďalší taký graf.

Najprv sme sa obmedzili na regulárne grafy. Výsledok experimentu je v tabuľke 5.1.

Medzi 4-regulárnymi grafmi sme nenašli žiadne ďalšie neekvivalentné farbenia okrem K_5 . Veta 4.13 naznačovala, že aj zvyšné grafy s maximálnym stupňom $\Delta(G) = 4$ môžu byť Kempe-ekvivalentné, rozhodli sme za účelom objavenia ďalších neekvivalentných grafov tesovať grafy s maximálnym stupňom 5, ktoré obsahujú aspoň jeden vrchol stupňa aspoň 4. (Také, ktoré takýto vrchol neobsahujú nazývame *triviálne*).

Tentokrát sme už našli ďalšie Kempe-neekvivalentné grafy. Síce stále jediný s maximálnym stupňom 4 zostáva K_5 , ale aspoň ho máme s čím porovnať. Na obrázku 5.1 je jediný Kempe-neekvivalentný graf na 5 vrchoch, na obrázku 5.2 je všetkých 6 Kempe-neekvivalentných grafov na 6 vrchoch (takých, že obsahujú aspoň jeden vrchol stupňa aspoň 4).

Môžeme si všimnúť, že zo šiestich grafov na obrázku 5.2 je prvých 5 takých, že obsahujú podgraf K_5 . Otázkou je, či práve to, že obsahujú tento podgraf je jediným dôvodom ich Kempe-neekvivalentnosti a či takú vlastnosť má špeciálne tento graf, alebo je to štandardná vlastnosť Kempe-neekvivalentných grafov.

Počet vrcholov v grafe	Počet grafov	Počet Kempe- neekvivalentných grafov
5	1	1
6	1	0
7	2	0
8	6	0
9	16	0
10	59	0
11	265	0
12	1544	0

Tabuľka 5.1: Testovanie 4-regulárnych grafov na K-ekvivalenciu vzhľadom na 5-farbenia

$ V(G) $	Počet grafov s $\Delta(G) \leq 5$	Zafarbi- teľných	K-neekvivalentných s $\Delta(G) \leq 5$	K-neekviva- lентných
5	21	11	1	1
6	112	83	0	6
7	697	626	0	30
8	6386	6171	0	230
9	75700	75578	0	2480

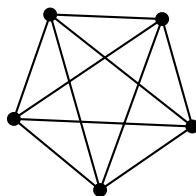
Tabuľka 5.2: Testovanie grafov na Kempe-ekvivalenciu vzhľadom na 5 farbenia

5.1 Hľadanie Kempe-neekvivalentných podgrafov (jadier)

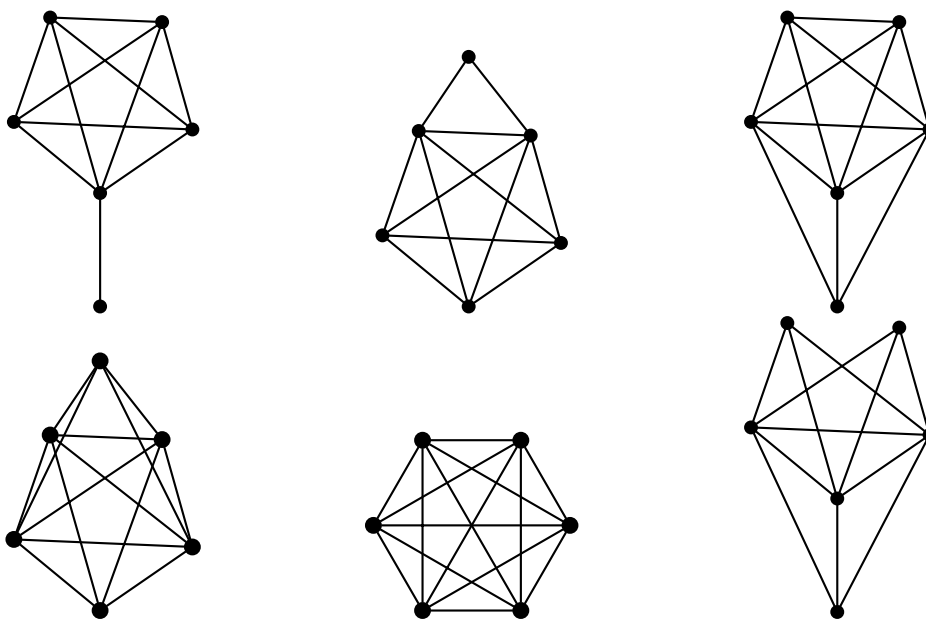
Graf, ktorý je Kempe-neekvivalentný a pre ktorý platí, že odobratím ľubovoľnej hrany sa stane Kempe-ekvivalentným, budeme nazývať *jadro*.

Pri testovaní grafov sme si všimli, že viaceré K-neekvivalentné grafy majú zhodný podgraf, ktorý je sám o sebe Kempe-neekvivalentný. Po manuálnom overení najmenších grafov sme sa teda rozhodli hľadať Kempe-neekvivalentné grafy ako podgrafy ekvivalentných a neekvivalentných grafov. Pre tento účel sme implementovali algoritmus na hľadanie podgrafov inšpirovaný článkom [18].

Zoradili sme grafy podľa počtu vrcholov a počtu hrán a začali sme s prázdnu množinou



Obr. 5.1: Kompletný graf na 5 vrchoch (K_5)



Obr. 5.2: Najmenšie neekvivalentné grafy na 6 vrchoch vzhľadom na 5-farbenie

podgrafov. Pre každý neekvivalentný graf sme otestovali, či obsahuje podgraf izomorfný s niektorým z množiny podgrafov. Ak áno, urobili sme len záznam o tom, s ktorým. Ak nie, pridali sme daný graf do množiny podgrafov, zjavne takýto graf je jadro. Takto sme prešli všetky grafy na danom počte vrcholov. Následne sme otestovali, všetky Kempe-ekvivalentné grafy, či niektorý z nich neobsahuje podgraf izomorfný s niektorým jadrom.

Výsledky sú v tabuľke 5.3 a podrobné v súbore „hľadanie neekvivalentných jadier col_5.ods“. Zaujímavý výsledok z tejto tabuľky je, že v nami skúmanej množine grafov neexistuje žiadny Kempe-ekvivalentný graf, ktorý by obsahoval podgraf izomorfný s Kempe-neekvivalentným grafom.

Následne sme sa rozhodli experiment opakovať s iným počtom farieb, výsledky sú v tabuľkách 5.4, 5.5. Práve pri 4 farbeniach sa ukázalo, že existujú aj také Kempe-ekvivalentné

$ V(G) $	Počet grafov	Netriviálnych zafarbitelných	Neekviv. grafov	Počet jadier	K-ekvivalentných s j. podgrafom
5	21	11	1	1	0
6	112	83	6	1	0
7	853	626	30	12	0
8	11117	6171	230	13	0
9	261080	75578	2480	1040	0
Σ			2747	1067	0

Tabuľka 5.3: Hľadanie neekvivalentných jadier pre hranové 5-farbenia

$ V(G) $	Počet grafov	Netriviálnych zafarbitelných	Neekviv. grafov	Počet jadier	K-ekvivalentných s j. podgrafom
4	6	4	0	0	0
5	21	17	3	2	0
6	112	74	14	1	0
7	853	336	61	7	0
8	11117	1900	314	10	0
9	261080	11963	1994	285	1
10	11716571	88791	13333	396	27
Σ			15719	701	28

Tabuľka 5.4: Hľadanie neekvivalentných jadier pre hranové 4-farbenia

grafy, ktoré obsahujú ako podgraf jadro. Uvedená vlastnosť teda neplatí pre všetky grafy, v nasledujúcej kapitole ju však dokážeme pre bipartitné grafy.

$ V(G) $	Počet grafov	Netriviálnych zafarbiteľných	Neekviv. grafov	Počet jadier	K-ekvivalentných s j. podgrafom
3	2	2	0	0	0
4	6	6	0	0	0
5	21	9	1	1	0
6	112	28	3	0	0
7	853	59	6	2	0
8	11117	187	19	1	0
9	261080	501	62	10	0
10	11716571	1679	222	12	0
11		5310	746	64	0
Σ			1059	90	0

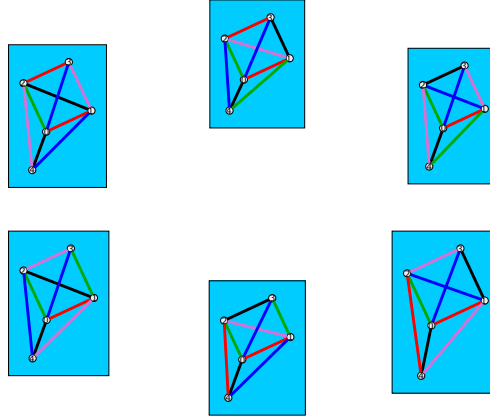
Tabuľka 5.5: Hľadanie neekvivalentných jadier pre hranové 3-farbenia

Kapitola 6

Kempe-neekvivalentné podgrafy (jadrá)

Vezmime graf G , ktorý je Kempe-ekvivalentný, teda jeho graf farbení je súvislý. Otázkou je, kedy môže nastať situácia, že odobratím jednej hrany grafu G vznikne nový graf, ktorý už nie je Kempe-ekvivalentný. Keby takáto situácia nemohla nastať, vyplývalo by, že pre ľubovoľný graf, ktorý nie je Kempe-ekvivalentný, existuje taký podgraf, ktorý je minimálny vzhľadom na počet vrcholov a potom vzhľadom na počet hrán, ktorý tiež nie je Kempe-ekvivalentný. Potom by už nebolo potrebné zaoberať sa ostatnými neekvivalentnými grafmi, stačilo by skúmať tieto minimálne podgrafy a teda by malo byť jednoduchšie dokazovať tvrdenia o Kempe-ekvivalentnosti rôznych tried grafov.

Najprv nás zaujímalo, čo sa vlastne deje s grafmi farbení, keď z pôvodného grafu odstránime hranu. Zobrali sme si graf K_5 a jeho graf farbení je na obrázku 6.1. Odobratím hrany $(3, 4)$ dostaneme nový graf a jeho graf farbení je na obrázku 6.2. Modré sú farbenia prislúchajúce pôvodným a šedé sú nové farbenia, vďaka ktorým sa stal graf farbení súvislý. Odobratím ďalšej hrany, tentokrát $(3, 4)$, pribudnú ďalšie farbenia. Na obrázku 6.3 sú príslušné vrcholy zafarbené na žltó. Môžeme si všimnúť, že sa zmenil počet šedých vrcholov - ak sa dve farbenia líšili iba vo farbe odoberanej hrany, potom hrana v grafe farbení, ktorá tieto dve farbenia spájala, kontrahovala. Ďalej na obrázku vidíme, že farbenia, medzi ktorými sa dalo prepnúť v grafe na obr. 6.2 sú kempe ekvivalentné na jedno alebo na dve prepnutia aj na grafe na obr. 6.3. Okrem toho vznikli nové farbenia, o ktorých zatiaľ veľa nevieme.



Obr. 6.1: Graf farbení K_5

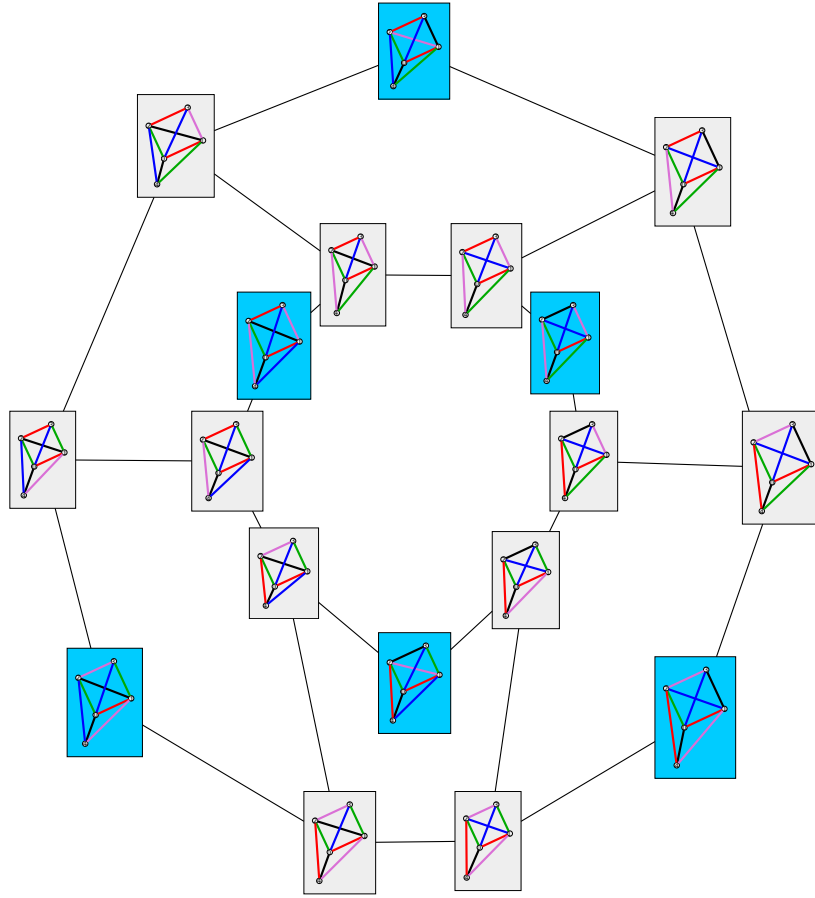
Hypotéza 6.1. *Majme graf G , ktorý je Kempe-ekvivalentný. Odobratím ľubovoľnej hrany z grafu G dostaneme nový graf $H = (V(G), E(G) - e)$, ktorý je Kempe-ekvivalentný.*

Túto hypotézu sme testovali pre všetky grafy s počtom vrcholov nanajvyš 9 a hranové 5-farbenia. Najmenší neekvivalentný graf je K_5 . Každý neekvivalentný graf sme buď vyhlásili za minimálny, alebo sme našli jeho Kempe-neekvivalentný podgraf, ktorý je minimálny. Žiadny Kempe-ekvivalentný graf neobsahoval podgraf, ktorý by bol Kempe-neekvivalentný. Experiment sme opakovali pre 4-farbenia a 3-farbenia. Zistenia väčšinou súhlasili s našou hypotézou, no objavili sa aj grafy (najmenej 9 vrcholové pre 4-farbenia), ktoré nesúhlasili. Výsledky experimentov sú v tabuľkách 5.3, 5.4 a 5.5.

Ako vidno v tabuľke 5.4, existuje 9-vrcholový graf, pre ktorý hypotéza neplatí. Graf je možné vidieť na obrázku 6.4. Ak sa v grafe nachádza aj hrana znázornená prerušovanou čiarou, je Kempe-ekvivalentný, ak sa nenachádza, tak nie je K-ekvivalentný.

Tvrdenie z hypotézy 6.1 sa však dá dokázať pre niektoré triedy grafov. Nech H je graf, ktorý sme dostali z grafu G odobratím hrany (u, v) (obrázky 6.5, 6.6), vytvorme nový graf H' z H tak, že doňho pridáme dva nové vrcholy u', v' a dve nové hrany (u, u') a (v, v') (obrázok 6.7). Označme \mathcal{C} , \mathcal{D} a \mathcal{D}' množiny všetkých farbení grafov G , H a H' .

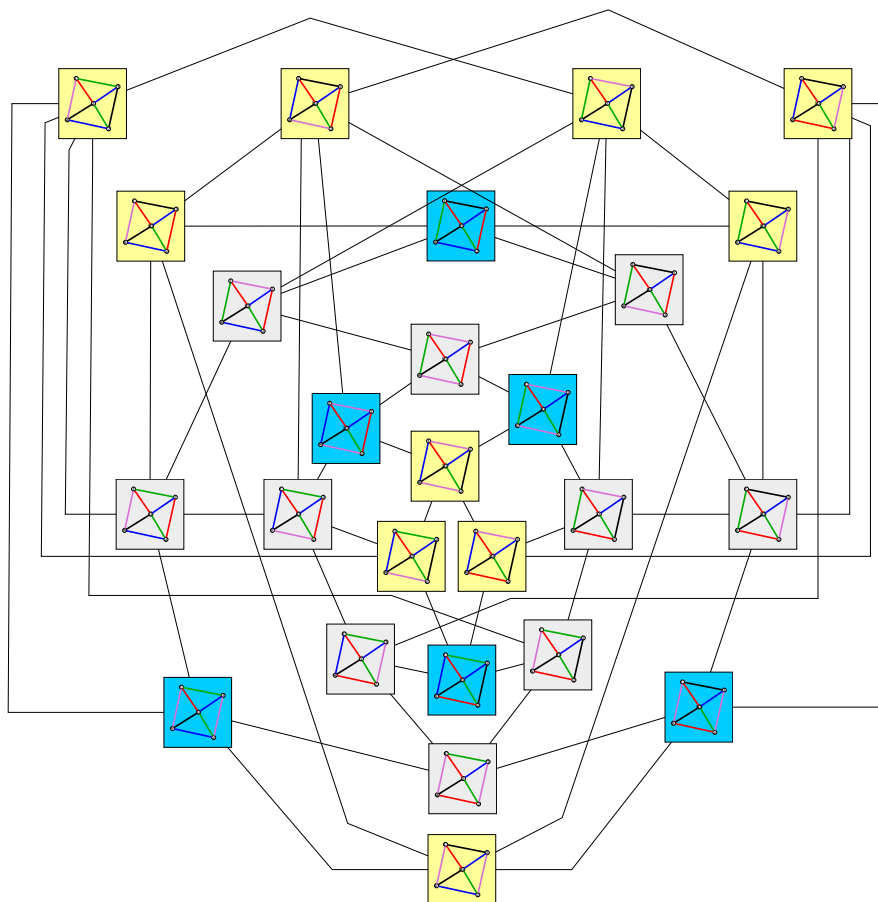
Zjavne ak každé farbenie z \mathcal{D}' zúžime na hrany $V(H)$, tak vzniknutá množina bude totožná s množinou \mathcal{D} . Navyše ak vezmeme z množiny \mathcal{D}' práve tie farbenia, v ktorých sa farby hrán (u, u') , (v, v') rovnajú, dostaneme množinu (označme ju $\mathcal{D}'_{=}$), v ktorej každé farbenie zodpovedá farbeniu z množiny \mathcal{C} tak, že zhodné hrany majú zhodné farby a farba hrany (u, v) v grafe G sa bude zhodovať s farbami hrán (u, u') , (v, v') v grafe H' .



Obr. 6.2: Graf farbení grafu (K_5 po odstránení jednej hrany)

Ukážeme, že všetky farbenia z množiny $\mathcal{D}'_{=}$ sú Kempe-ekvivalentné. Vezmime dve farbenia z tejto množiny. K nim zodpovedajúce farbenia z množiny \mathcal{C} sú podľa predpokladu Kempe-ekvivalentné, takže existuje postupnosť Kempe-prepnutí, ktorú treba vykonať, aby sme dostali z jedného farbenia druhé. Tieto Kempe-prepnutia môžeme vykonať aj v grafe H . Musí nastať jedna z 3 možností:

1. prepnutie v grafe G nemení farbu hrany (u, v) , potom môžeme totožné prepnutie vykonať v grafe H'
2. v grafe G je hrana (u, v) súčasťou prepínaného Kempe-komponentu a K -komponent je kružnica. Nech po prepnutí nadobúda hrana (u, v) farbu x , prepne teda v grafe H' hranu (u, u') na farbu x . Keďže K -komponent bola v G kružnica, v tomto prípade



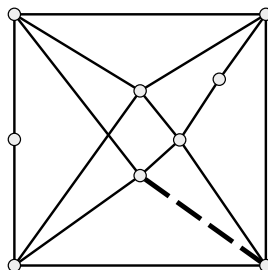
Obr. 6.3: Graf farbení grafu (K_5 po odstránení dvoch hrán)

to bude cesta vedúca až do (v, v') a táto hrana sa teda prepne súčasne

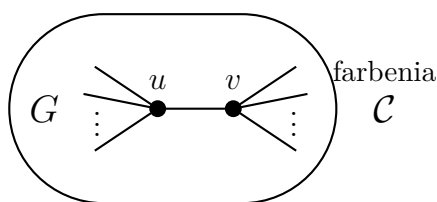
3. v grafe G je hrana (u, v) súčasťou prepínaného Kempe-komponentu a K -komponent je cesta. Nech po prepnutí nadobúda hrana (u, v) farbu x , prepneme teda v grafe H' hranu (u, u') na farbu x a následne hranu (v, v') na farbu x .

To, že po takomto prepnutí bude nové farbenie v grafe H' zodpovedať novému farbeniu v grafe G je zrejmé. Jednoducho vždy vykonáme to isté prepnutie. Iba v prípade, že sa Kempe-komponent kvôli absencii hrany (u, v) v grafe H' rozdelil, tu vykonáme prepnutia dve.

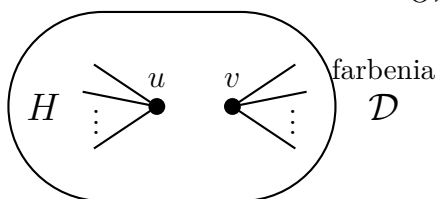
Ostala nám teda ešte množina farbení $\mathcal{D} - \mathcal{D}'_{=}$, teda takých farbení, v ktorých hrany $(u, u'), (v, v')$ majú rôzne farby. Označme túto množinu \mathcal{D}'_{\neq} . Stačí ukázať, že každé farbenie



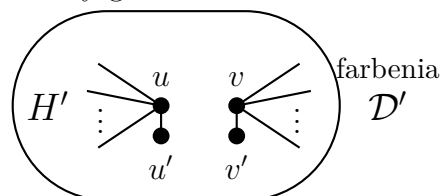
Obr. 6.4: Najmenší graf, pre ktorý neplatí hypotéza 6.1 pre hranové 4-farbenie



Obr. 6.5: Pôvodný graf



Obr. 6.6: Graf H – bez hrany



Obr. 6.7: Graf H'

z množiny \mathcal{D}'_{\neq} sa dá prepnúť na niektoré farbenie z množiny $\mathcal{D}'_{=}$.

Až do tohto momentu sme o grafe G nič nepredpokladali. Tu zavedieme predpoklad, že graf neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. V takom prípade ani hrana (u, v) nemôže ležať na kružnici nepárnej dĺžky a teda neexistuje cesta párnej dĺžky v grafe H' medzi vrcholom u' a vrcholom v' . Preto ak predpokladáme, že hrana (u, u') a hrana (v, v') majú rôzne farby a chceme prepínať tieto dve farby, uvedené hrany nemôžu byť v tom istom Kempe-komponente (lebo ak by boli, potom by v grafe H existovala cesta párnej dĺžky medzi vrcholmi u, v). Takže môžeme prepnúť farbu jednej z týchto hrán bez toho, aby sa prepla farba druhej a tým dostaneme farbenie z množiny $\mathcal{D}'_{=}$. Tvrdenie, že graf je bipartitný je ekvivalentné tvrdeniu, že graf neobsahuje cyklus nepárnej dĺžky ([21]). Tým je dokázaná veta 6.2

Veta 6.2. *Majme bipartitný graf G , ktorý je Kempe-ekvivalentný vzhľadom na hranové k -*

farbenia. Odobratím ľubovoľnej hrany z grafu G dostaneme nový graf $H = (V(G), E(G) - e)$, ktorý je tiež Kempe-ekvivalentný vzhľadom na hranové k -farbenia.

Veta je ekvivalentná nasledovnému tvrdeniu 6.3.

Veta 6.3. *Majme bipartitný graf G , ktorý je Kempe-neekvivalentný vzhľadom na nejaké k -farbenie. Každý bipartitný graf H , ktorý obsahuje podgraf izomorfný s G , je Kempe-neekvivalentný vzhľadom na k -farbenie.*

Túto vetu použijeme v nasledovnej sekcii.

6.1 Kempe-ekvivalencia bipartitných kubických grafov

V článku [15] autor položil otázku, pre ktoré kubické bipartitné grafy a hranové 3-farbenia je graf farbení súvislý. My sme sa touto otázkou už zaoberali v práci [5]. Tam sme však iba uviedli niekoľko nekonečných tried grafov pre rôzne parametre, ktoré majú súvislý graf farbení. Teraz by sme chceli s využitím vety 6.3 objaviť nejakú vlastnosť, ktorá pri kubických grafoch zabezpečia Kempe-neekvivalenciu. Už vieme, že má zmysel zaoberať sa subkubickými grafmi, pretože pre každý subkubický graf, ktorý je Kempe-neekvivalentný platí, že každý jeho kubický nadgraf je Kempe-neekvivalentný.

Rozhodli sme sa preto hľadať minimálne (vzhľadom na počet vrcholov a následne počet hrán) grafy, ktoré sú bipartitné, subkubické, Kempe-neekvivalentné.

Touto metódou sme teda dokázali obmedziť 12753 Kempe-neekvivalentných grafov na 111 jadier, pre ktoré platí, že ak je niektoré z nich izomorfné s podgrafom ľubovoľného bipartitného grafu G , potom graf G je vzhľadom na hranové 3-farbenia Kempe-neekvivalentný. Môžeme teda generovať veľké množstvo neizomorfných Kempe-neekvivalentných grafov, stačí vziať ľubovoľné z nájdených jadier a pridávať k nemu vrcholy a hrany tak, aby vzniknutý graf bol bipartitný a podľa vety 6.3 bude Kempe-neekvivalentný.

Ako ukážeme v nasledujúcej sekcii, existuje ďalšia operácia, ktorou môžeme jadrá meniť bez toho, aby sa porušila vlastnosť Kempe-neekvivalentnosti.

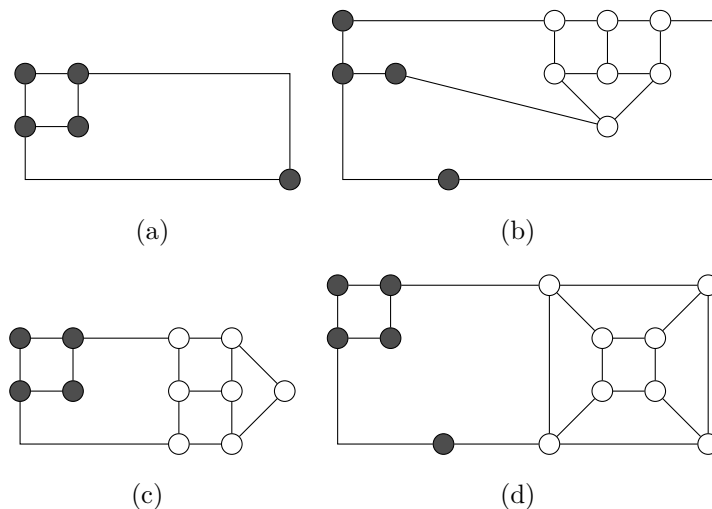
$ V(G) $	Počet grafov	Netriviálnych, bipartitných zafarbitelných, K-neekvivalentných	Originálnych grafov
3	2	0	0
4	6	0	0
5	21	1	1
6	112	3	0
7	853	3	0
8	11117	8	0
9	261080	18	1
10	11716571	52	1
11	.	123	3
12	.	354	1
13	.	953	18
14	.	2872	23
15	.	8366	63
Σ		12753	111

Tabuľka 6.1: Hľadanie neekvivalentných jadier pre hranové 3-farbenia bipartitných grafov

6.2 Kempe-zachováajúca expanzia

Pozrime sa na niekoľko grafov spomedzi vygenerovaných jadier v predchádzajúcej časti (obrázok 6.8). Prvý z grafov je $K_{2,3}$, teda najmenšie kubické bipartitné jadro pre 3-farbenia, ďalšie tri grafy sú tiež Kempe-neekvivalentné, obsahujú časť grafu $K_{2,3}$, ale neobsahujú ho celý ako podgraf, preto sú to ďalšie jadrá. Všimli sme si tie časti grafov, ktoré v grafe nahradili buď hranu (obr. 6.8(c), 6.8(d)) alebo niektorý vrchol (obr. 6.8(b)). Sú to také časti grafu, ktoré majú rovnaké vlastnosti (z pohľadu hranového farbenia a Kempe-ekvivalencie) ako hrana či vrchol.

Definícia 6.4. Majme subkubický graf G a 2 jeho vrcholy u, v stupňa 1. Vrcholy incidentné s vrcholmi u, v označíme postupne u', v' . Ak platí, že v každom hranovom farbení grafu G majú hrany (u, u') a (v, v') rovnaké farby, a súčasne každý Kempe-komponent obsahujúci (u, u') , obsahuje aj (v, v') , potom graf indukovaný množinou vrcholov $V(G) - \{u, v\}$ nazývame *hranový blok*, vrcholy u', v' nazývame *pripájacie vrcholy*.



Obr. 6.8: Príklady kubických bipartitných jadier pre 3-farbenia

Analogicky definujeme vrcholový blok.

Definícia 6.5. Majme subkubický graf G a 2 (alebo 3) jeho vrcholy u, v (prípadne w) stupňa 1. Vrcholy incidentné s vrcholmi u, v (w) označíme postupne u', v' , (w'). Ak platí, súčasne:

- v každom hranovom farbení grafu G majú hrany (u, u') a (v, v') (a w, w') navzájom rôzne farby
- pre každé farbenie c platí, že v grafe sa nachádza alternujúca cesta medzi hranou (u, u') a hranou (v, v') (a medzi dvojicou hrán (u, u') , (w, w') a aj medzi dvojicou hrán (v, v') , (w, w'))

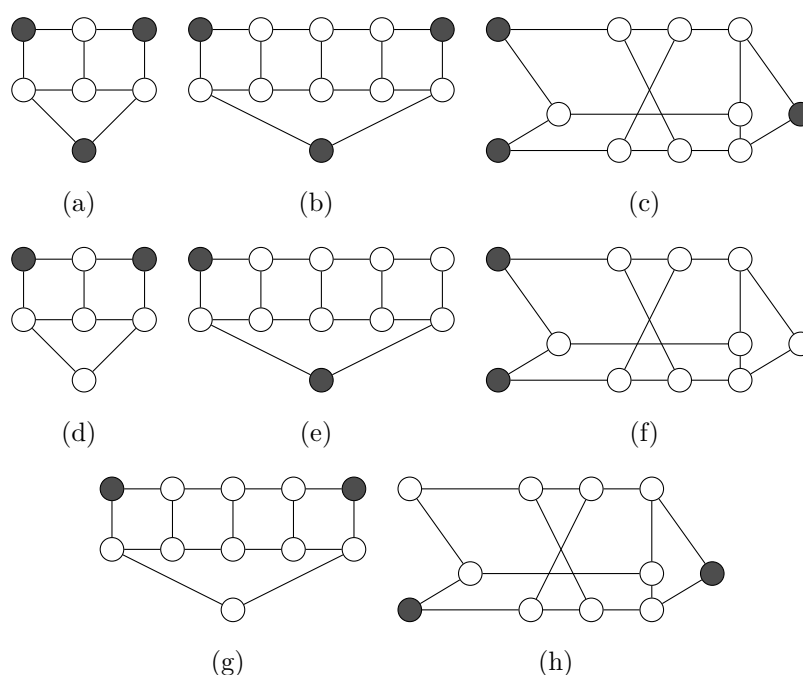
potom graf indukovaný množinou vrcholov $V(G) - \{u, v\}$ (alebo $V(G) - \{u, v, w\}$) nazývame *vrcholový blok*, vrcholy u', v' (w') nazývame *pripájacie vrcholy*.

Ak nahradíme hranu v grafe hranovým blokom alebo vrchol vrcholovým blokom, túto operáciu budeme nazývať *Kempe-zachovávajúca expanzia* alebo skrátene *Kz-expanzia*.

Implementovali sme algoritmus, ktorý testuje, či vstupný graf je blok a spustili ho na všetkých subkubických grafoch do 15 vrcholov. Takto sme našli veľké množstvo (479762) blokov, z ktorých nás zaujímali bipartitné (4775). Ďalej nás zaujímalo, ktoré jadrá vznikli z iných jadier Kz-expanziou. Pri hľadaní takých jadier nestačí hľadať bloky ako podgrafy - potrebujeme ešte overiť, že blok sa so zvyškom grafu spája len v pripájacích vrchoch.

Ešte predým ako prehľadáme množinu jadier na výskyt blokov, pokúsime sa počet blokov znížiť. Existujú totiž bloky, ktoré ako podgraf obsahujú niektoré jadro. Žiadne jadro ale nemôže obsahovať ako podgraf iné jadro, takže zjavne nemôže ani obsahovať blok, ktorý ako podgraf obsahuje iné jadro. Odstránili sme preto bloky, ktoré obsahujú jadro ako podgraf a ostalo nám 445 blokov.

Prehľadali sme teda množinu jadier na výskyt týchto 445 blokov a na obrázku 6.9 uvádzame nájdené bloky. Pripájacie vrcholy sú vyznačené tmavou výplňou.

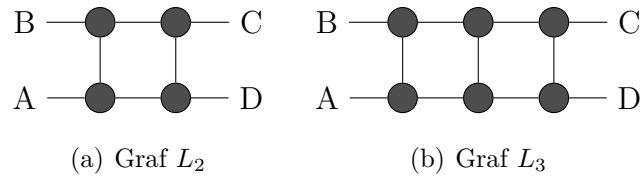


Obr. 6.9: Vrcholové bloky

6.2.1 Rebríkové bloky

Pozrime sa bližšie na bloky, ktoré sú rebríkovými grafmi (ladder graph). Rebríkový graf L_i dostaneme ako karteziánsky súčin cesty dĺžky 1 a cesty dĺžky i . Nech P_j je cesta dĺžky j , potom $L_i = P_1 \square P_i$.

Najprv nájdeme všetky hranové 3-farbenia grafu L_2 aj s „trčiacimi hranami“ (obr. 6.10(a)). Lahko sa dá overiť, že pre každé farbenie nastane jedna z možností zafarbenia hrán A, B, C, D uvedená v tabuľke 6.2 (neuvádzame izomorfné farbenia). Zjavne ak zjednotíme



Obr. 6.10: Príklady rebríkových grafov

	A	B	C	D
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1

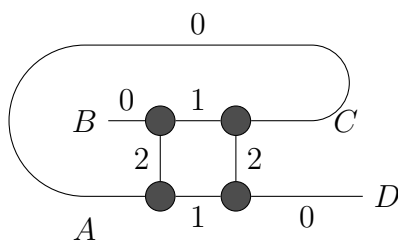
Tabuľka 6.2: Farbenia grafu L_2

	A	B	C	D
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	1	0

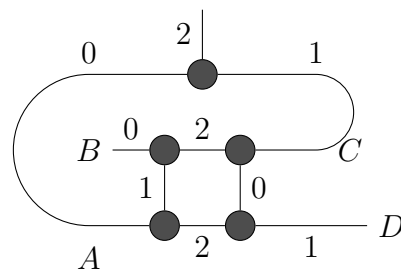
Tabuľka 6.3: Farbenia grafu L_3

hrany A a C , jediné prípustné bude farbenie v treťom riadku tabuľky, takže dostaneme graf, v ktorom trčiace hrany B a D majú nutne rovnakú farbu. Navyše podgraf indukovaný dvojicou farieb $(0, 1)$ aj podgraf indukovaný dvojicou farieb $(0, 2)$ je súvislý (obrázok 6.11), čiže uvedený graf je hranový blok.

Podobne ak pridáme vrchol a spojíme ho s hranami A , C , jediné možné farbenie je na druhom riadku tabuľky. Hrany B , D majú nutne rôzne farby a nová hrana tiež. Opäť jednoducho skontrolujeme, že pre každú dvojicu farieb existujú dve trčiace hrany, ktoré sú v rovnakom Kempe-komponente. Dostaneme vrcholový blok (obrázok 6.12).



Obr. 6.11: Hranový blok pre L_2

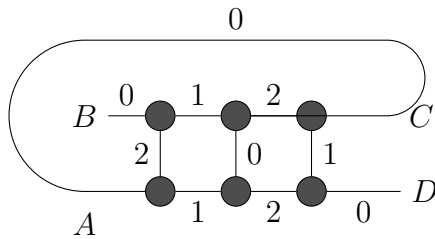


Obr. 6.12: Vrcholový blok pre L_2

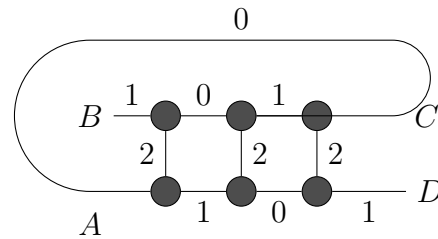
Všimnime si, že rozdiel medzi grafmi L_2 a L_3 vo farbení trčiacich hrán je len v poslednom riadku (tabuľky 6.2, 6.3). Analogicky (k prípadu L_2) stačí zjednotiť hrany A , C a dostaneme hranový blok, ak bude splnená druhá podmienka bloku. To ľahko overíme na obrázkoch

6.13 a 6.14. Pridaním vrchola a jeho spojením s hranami A, C dostaneme vrcholový blok (čitateľ druhú podmienku ľahko overí).

V prípade L_3 môžeme zjednotiť hrany A, D alebo pridať vrchol a spojiť ho s hranami A, D , čím opäť dostávame hranový resp. vrcholový blok. (Všimnime si že pri L_2 sme toto nemohli spraviť, pretože by vznikla dvojité hrany resp. cyklus nepárnej dĺžky).



Obr. 6.13: Farbenie L_3

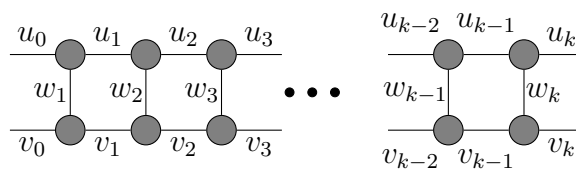


Obr. 6.14: Farbenie L_3

Ukázali sme teda 6 rôznych blokov vytvorených z grafov L_2 a L_3 . V nasledujúcom texte poznatky zovšeobecníme pre L_i , kde $i \geq 4$.

Každý graf L_i , kde $i > 3$ zjavne vieme vytvoriť spojením niekoľkých grafov L_2 a L_3 tak, že hrany A, B z jedného grafu zjednotíme s hranami D, C z druhého grafu. Z uvedených tabuliek 6.2, 6.3 vyplýva, že pre rebríkové grafy párnej dĺžky $L_{2 \cdot i}$ platí, že ich hrany A, B, C, D sa dajú zafarbiť práve tak, ako v grafe L_2 . Hrany A, B, C, D rebríkových grafov nepárnej dĺžky $L_{2 \cdot i + 1}$ sa dajú zafarbiť práve tak, ako v grafe L_3 .

Teraz overíme druhú podmienku pre blok pre všeobecný graf L_k . Hrany v grafe L_k označíme podľa obrázka 6.15.



Obr. 6.15: Označenie hrán L_k

Vezmime si prípad, keď k je párne. V takom grafe môžeme zjednotiť hrany u_0, u_k a ak každý K-komponent obsahujúci v_0 obsahuje aj v_k , tak ide o hranový blok¹. Vezmime si

¹Čitateľ si zaiste všimol, že hrany u_0, v_k nemôžeme zjednotiť, lebo by vznikla kružnica nepárnej dĺžky

prípád farbenia c , keď farby hrán u_0 a v_0 sú rovnaké $c(u_0) = c(v_0)$. Potom pre všetky dvojice hrán (u_i, v_i) pre $i \in 0, \dots, k$ platí, $c(u_i) = c(v_i)$. Vezmime si dve farby. Ak cesta u_0, u_1, \dots, u_k je zafarbená len týmito farbami (PRÍPAD 1), potom táto dvojica farieb indukuje cestu u_0, u_1, \dots, u_k a cestu v_0, v_1, \dots, v_k . V opačnom prípade zvolená dvojica farieb indukuje cestu $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, w_m, v_{m-1}, \dots, v_0$ a cestu $u_k, u_{k-1}, \dots, u_n, w_n, v_n, \dots, v_k$ pre niektoré $1 \leq m \leq n \leq k$. (PRÍPAD 2). V oboch prípadoch sú teda hrany v_0, v_k v tom istom komponente a ide o hranový blok. Tretou možnosťou je, že hrany u_0, u_1 sú zafarbené rôznymi farbami. Vtedy pre farby $c(v_0), c(w_0)$ existuje K-komponent $v_0, w_1, u_1, w_2, v_2, \dots, w_k, v_k$ a pre farby $c(v_0), c(w_0)$ dostávame K-komponent $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$. V tomto prípade teda tiež ide o hranový blok.

Pokračujme s párnym k a pridajme nový vrchol a spojme ho s u_0, v_k . Toto nám zabezpečí, že hrany u_0, v_k sú zafarbené rôznymi farbami. Preto nemôže nastať prvý prípad z predchádzajúcej časti. Môže však nastať druhý a tretí prípad. V každom z nich každá dvojica farieb indukuje podgraf, ktorý obsahuje K-komponent obsahujúci dvojicu trčiacich hrán.

Podobne ukážeme aj pre grafy s nepárnym k iba s tým rozdielom, že pre vznik hranového bloku zjednotíme hrany u_0, v_k a pre vznik vrcholového bloku pridaný vrchol spojíme s u_0, u_k .

Veta 6.6. *Majme rebríkový graf L_k definovaný ako*

$$V(L_k) = \{(i, j), i \in \{1, 2\}, j \in \{1 \dots k\}\},$$

$$E(L_k) = \{((i, j), (i, j + 1)), i \in \{1, 2\}, j \in \{1 \dots k - 1\}\} \cup \{((1, j), (2, j)), j \in \{1 \dots k\}\}$$

. Potom

- graf L_k^e definovaný ako $V(L_k^e) = V(L_k), E(L_k^e) = E(L_k) \cup \{((1, 1), (1, k))\}$ pre párne k je hranový blok s pripájacími vrcholmi $(2, 1)$ a $(2, k)$,
- graf L_k^e definovaný ako $V(L_k^e) = V(L_k), E(L_k^e) = E(L_k) \cup \{((1, 1), (2, k))\}$ pre nepárne k je hranový blok s pripájacími vrcholmi $(2, 1)$ a $(1, k)$,
- graf L_k^v definovaný ako $V(L_k^v) = V(L_k) \cup \{v\}, E(L_k^v) = E(L_k) \cup \{((1, 1), v), (v, (2, k))\}$ pre párne k je vrcholový blok s pripájacími vrcholmi $(2, 1), (1, k), v$,
- graf L_k^v definovaný ako $V(L_k^v) = V(L_k) \cup \{v\}, E(L_k^v) = E(L_k) \cup \{((1, 1), v), (v, (1, k))\}$ pre nepárne k je vrcholový blok s pripájacími vrcholmi $(2, 1), (2, k), v$.

Ukázali sme teda nekonečnú množinu blokov. Ďalšie príklady blokov nájdete v príloženom súbore.

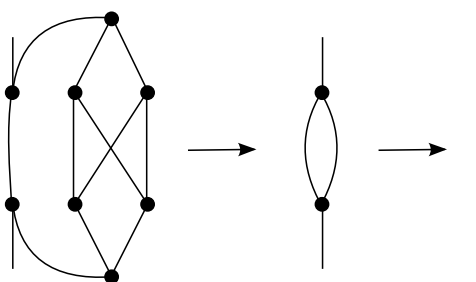
6.2.2 Multihranový blok

Počas vyhľadávania blokov v grafe sme natrafili na také grafy, v ktorých boli v prípade hranových blokov pripájacie vrcholy spojené hranou a v prípade vrcholových blokov boli dva pripájacie vrcholy incidentné s jedným vrcholom mimo bloku. To znamená, že ak by sme vykonali inverznú operáciu, dostali by sme v prvom aj v druhom prípade vo vzniknutom grafe dvojicu vrcholov spojených dvomi hranami. Doteraz sme uvažovali iba jednoduché grafy, no v takom prípade by sme prišli o možnosť vytvoriť niektoré grafy pomocou Kz-expanzie alebo naopak, by sme nemohli vykonať opačnú operáciu.

Preskúmať tieto dvojité hrany je však veľmi jednoduché. Jediná možnosť existencie multihrany v kubickom grafe je znázornená na obrázku 6.16, kde sú dva vrcholy stupňa 3 a tieto sú navzájom spojené dvomi hranami. Nakoľko tieto dve hrany musia mať vždy rôznu farbu, aby bola splnená podmienka regulárneho farbenia, z čoho vyplýva, že „trčiace hrany“ sú zafarbené rovnakou farbou. Navyše ak prepne jednu trčiacu hranu na ľubovoľnú zo zvyšných dvoch farieb, prepne sa aj druhá trčiaca hrana. Z toho vyplýva, že na obrázku 6.16 je znázornený hranový blok s dvomi pripájacími vrcholmi. Iné multihrany pri inverznej operácii ku Kz-expanzii nevzniknú a teda môžeme pri jej prípadnom vzniku nahradiť tento blok hranou a graf bude následne opäť jednoduchý so zachovanou K-ekvivalenciou (obr. 6.17).



Obr. 6.16: Multihrana v kubickom grafe



Obr. 6.17: Príklad inverznej operácie ku Kz-expanzii

Záver

V práci sme sa venovali najmä Kempe-ekvivalencii grafov. Ukázali sme, že pri určovaní počtu tried K-ekvivalencie stačí pracovať so štandardnými farbeniami. Ukázali sme súvislosti medzi K-ekvivalenciou a k -vyberateľnosťou v regulárnych grafoch a ponúkli sme aj spôsob využitia tohto vzťahu na rýchlejšie určovanie, či je graf K-ekvivalentný. Zhrnuli sme a v prehľadnej podobe ponúkli známe výsledky o Kempe-ekvivalencii rôznych tried grafov a ďalej sme skúmali subkubické grafy, o ktorých sme ukázali, že práve od nich závisí, či ich kubické nadgrafy sú alebo nie sú K-ekvivalentné. Práve na kubické grafy a hranové 3-farbenia je možné aplikovať poznatky o vzťahu K-ekvivalencie s k -vyberateľnosťou. Našli sme nekonečné množiny K-neekvivalentných grafov. Tieto grafy ktoré sa dajú generovať pridávaním vrcholov a hrán k jadram a tiež použitím Kz-expanzie. Popísali sme tiež nekonečnú množinu blokov, ktoré sa dajú pri Kz-expanzii použiť.

Pri práci sme otestovali státisíce grafov na rôzne vlastnosti, na to sme napísali viac ako 5000 riadkov kódu v programovacom jazyku C. Používali sme rozličné nástroje, ktoré spomíname v dodatku tohto dokumentu.

Autor by sa týmto chcel poďakovať čitateľovi za jeho odhodlanie prečítať túto prácu a zároveň sa ospravedlniť za nepresnosti či nejasné formulácie a ubezpečiť ho, že v prípade otázok je plne k dispozícii; kontakt na neho sa dá pravdepodobne ľahko vyhľadať.

Dodatok A

Programy vytvorené ako súčasť tejto práce

V tejto časti uvedieme niektoré z programov, ktoré vznikli ako (veľmi podstatná) súčasť tejto práce a dajú sa nájsť na priloženom DVD.

non_regular_graph.c

Slúži na generovanie grafov farbení ľubovoľných grafov

VSTUP: súbor s grafmi vo formáte g6, počet farieb, [číslo grafu]

VÝSTUP: ak je zadané číslo grafu tak výstupom je graf farbení vo formáte GraphML.

V opačnom prípade sú výstupom základné informácie o každom grafe (bipartitnosť, počet vrcholov, počet hrán, maximálny stupeň, bipartitnosť) a o príslušnom grafe farbení (počet komponentov, počet farbení)

regular_graph.c

Slúži na generovanie grafov farbení regulárnych grafov

VSTUP: súbor s grafmi vo formáte g6, počet farieb, [číslo grafu]

VÝSTUP: oproti predchádzajúcemu navyše ráta číslo $\xi G/d!$, kde d a znamienko-ekvivalenciu farbení.

find_subgraph.c

Slúži na hľadanie podgrafov

VSTUP: dva súbory s grafmi vo formáte g6

VÝSTUP: Pre každý graf z druhého vstupného súboru nájde prvý graf z prvého vstupného súboru, ktorý je v ňom obsiahnutý ako podgraf.

find_segment_in_graph.c

Slúži na hľadanie blokov

VSTUP: Súbor s blokmi vo formáte g6 rozšírenom o zoznam pripájacích vrcholov a súbor s grafmi vo formáte g6

VÝSTUP: Pre každý graf z druhého vstupného súboru nájde prvý graf z prvého vstupného súboru, ktorý je v ňom obsiahnutý ako blok.

compare-goc.c

Slúži na porovnanie dvoch grafov farbení pre podobné vstupné grafy. Výstup je možné vidieť napríklad na obr. 6.3

VSTUP: nemá užívateľský interface, treba nastavovať v kóde

VÝSTUP: graf vo formáte GraphML

perfect-1-factorization.c

Slúži na hľadanie perfektnej 1-faktorizácie kompletného grafu, použili sme na hľadanie kontrapríkladov v časti 4.1

VSTUP: počet vrcholov grafu

VÝSTUP: graf vo formáte GraphML

dump.c

Slúži na zmenu formátu grafu

VSTUP: formát, súbor s blokmi vo formáte g6, číslo grafu

VÝSTUP: zadaný graf v inom formáte, pričom podporované sú formáty tgf, xwg (pre vizualizačný program Wilma) a g6

Dodatok B

Použité nástroje a formáty grafov

Počas prípravy tejto práce sme použili veľké množstvo rozličného softvéru. Absencia univerzálneho nástroja na generovanie, vizualizáciu, analýzu a interaktívnu prácu s grafmi spôsobuje, že je potrebné zaobstaráť si na plnenie každej z úloh špeciálny program. Každý z nich je schopný importovať a exportovať rôzne formáty dát, medzi ktorými je zriedka prekryv. Završením neľahkej úlohy je chýbajúca, v lepšom prípade neúplná dokumentácia.

Túto kapitolu teda zaraďujeme v nádeji, že pomôže ďalším študentom zorientovať sa v spleti viac či menej kvalitných aplikácií. Pozitívnu správou pre nich bude, že sme používali a uvádzame iba softvér, ktorý je možné používať na študijné účely zdarma. Všetky ponúkané aplikácie sa sú kompatibilné s operačnými systémami Linux a Mac OS X.

B.1 Nástroje

B.1.1 Generovanie grafov

Na vygenerovanie väčšieho množstva grafov, ktoré nie sú navzájom izomorfné, sú k dispozícii dva nástroje. My sme používali program *geng* ktorý je súčasťou balíka programov *nauty* od autora Brendan D. McKay [12]. Dokáže generovať všetky grafy na n vrchoch, prípadne s ďalšími obmedzeniami. Súčasťou balíka je aj grafový framework, my sme ho však nepoužili.

Druhým nástrojom je program *genreg* od M. Meringera [13], ktorý slúži na generovanie iba regulárnych grafov, je však rýchlejší.

B.1.2 Vizualizácia

Ak je potrebné vizualizovať v dávke veľké množstvo grafov, najjednoduchšie je použiť softvérový balík *graphviz* [9]. Nevýhodou je, že výstup je buď bitmapa alebo vektorový obrázok, nie je však možné výstup naďalej spracúvať ako graf. Používa formát *DOT*.

Na interaktívne editovanie je k dispozícii aplikácia *yEd* od spoločnosti yWorks. Je to najrobustnejší nástroj v ponuke, pri väčších grafoch však veľmi pomalý. Používa množstvo formátov, pre nás boli zaujímavé *Trivial graph format* a *GraphML*.

Oba, *graphviz* aj *yEd* sú schopné vytvárať veľmi zložité, grafy vo vrcholoch (čo sme využili pri grafe farbení), používať farby, štýly atď. Tretí ponúkaný program je veľmi jednoduchý interaktívny nástroj *WilmaScope* [1], ktorý je užitočný, ak je potrebné graf vizualizovať v 3D. Používa vlastný xml formát.

B.2 Formáty grafov

Každý z uvedených programov používa iný formát súboru na ukladanie grafu. To spôsobovalo malé komplikácie, ak bolo potrebné použiť výstup jedného programu ako vstup druhého. Niektoré sú priamočiare XML súbory a autori uvádzajú aj príslušné Document Type Definition (DTD), takže ich použitie je jednoduché. Na druhej strane, našli sa aj prípady, keď bolo potrebné viac reverse engineeringu, či študovania dokumentácie. Najzaujímavejšie sú formáty *graph6* a *sparse6*, ktoré sú používané programovým balíkom *nauty*.

B.2.1 graph6 a sparse6 - všeobecné informácie

Graph6 a *sparse6* sú formáty, používané balíkom programov *nauty* a keďže sme z tohto balíka používali program *geng* na generovanie neizomorfných grafov, bolo potrebné implementovať tieto formáty v našich programoch. Zaujímavosťou je, že zápis grafu je veľmi krátky, čo je nevyhnutné, ak súbor má obsahovať rádovo milióny rôznych grafov. Pritom formát používa iba tlačiteľné znaky s ASCII kódmi 63 - 126 a znaky „koniec riadku“, takže aj ručná manipulácia s jednotlivými grafmi je jednoduchá. Popis je prevzatý z [11].

Na každom riadku je jeden objekt. Ukážeme ako sa kódujú jednotlivé štruktúry

Bitový vektor x dĺžky k sa zakóduje nasledovne:

Príklad: 1000101100011100

1. Najprv sa pridá taký počet núl na koniec vektora, aby bola celková dĺžka násobkom 6.

Príklad: 100010110001110000

2. Vektor sa rozdelí do šesťbitových reťazcov

Príklad: 100010 110001 110000

3. Každú šesticu $a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ považujeme za binárne zakódované číslo ($a_5 \cdot 2^5 + \dots + a_0 \cdot 2^0$). K tomuto číslu v dekadickom zápise pričítame 63.

Príklad: 97 112 111

4. Každá hodnota je potom uložená ako jeden znak (jeden byte).

Nech $R(x)$ označuje túto reprezentáciu vektora x ako reťazca bytov.

Malé prirodzené čísla:

Nech n je celé číslo z rozsahu $0 - 68719476735(2^36 - 1)$. Zdefinujeme kódovanie tohto čísla $N(n)$ nasledovne:

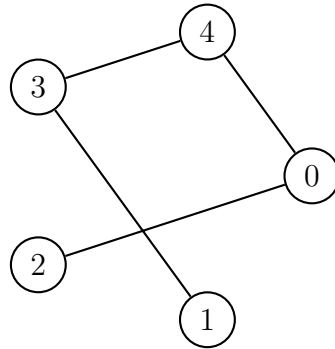
- ak $0 \leq n \leq 62$, zdefinujeme $N(n)$ ako jeden byte $n + 63$.
- ak $63 \leq n \leq 258047$, zdefinujeme $N(n)$ ako štvorbytový reťazec $126R(x)$, kde x je 18-bitový binárny zápis čísla n .
- ak $258048 \leq n \leq 68719476735$, zdefinujeme $N(n)$ ako 8-bytový reťazec $126 126 R(x)$, kde x je 36-bitový binárny zápis čísla n .

Príklady:

$$N(30) = 93$$

$$N(12345) = N(000011 000000 111001) = 126 66 63 120$$

$$\begin{aligned} N(460175067) &= N(000000 011011 011011 011011 011011 011011) \\ &= 126 126 63 90 90 90 90 90 \end{aligned}$$



Obr. B.1: Príklad grafu

B.2.2 graph6

Formát dokáže kódovať jednoduché neorientované grafy s počtom vrcholov maximálne 68719476735.

Predpokladajme, že graf G má n vrcholov. Zapišeme prvky nad hlavnou diagonálou matice susedností ako bitový vektor x dĺžky $\frac{n(n-1)}{2}$ v poradí $(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), \dots, (n-1, n)$.

Graf je potom reprezentovaný ako $N(n)R(x)$

Príklad: Majme 5-vrcholový graf s hranami $(0, 2), (0, 4), (4, 3), (3, 1)$ (obrázok B.1).

Matica susedností:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Takže dostaneme vektor $x = 0\ 10\ 010\ 1001$.

Kód grafu je teda $N(5)R(010010\ 100100) = 68\ 81\ 99 = \text{DQc}$.

B.2.3 sparse6

Formát dokáže kódovať neorientované grafy s počtom vrcholov maximálne 68719476735.

Na rozdiel od graph6 je možné kódovať aj slučky a paralelné hrany.

Zakódovaný graf pozostáva z:

1. znaku „:“, aby sa kód odlíšil od graph6,
2. počtu vrcholov,
3. zoznamu hrán
4. znaku „koniec riadku“.

Slučky a paralelné hrany sa dajú zakódovať, ale orientácia hrán nie. Počet vrcholov n kódujeme rovnako ako v graph6 pomocou $N(n)$.

Zoznam hrán: Nech k je počet bitov potrebných na binárnu reprezentáciu $n - 1$. Majme sekvenciu $b_0x_0b_1x_1\dots b_mx_m$. Pre všetky i platí, že b_i má dĺžku 1 bit a x_i má dĺžku k . Sekvenciu doplníme na dĺžku deliteľnú 6 nasledovne:

1. Ak $(n, k) \in \{(2, 1), (4, 2), (8, 4), (16, 5)\}$ a vrchol $n - 2$ má hranu ale $n - 1$ nemá hranu a treba doplniť aspoň $k + 1$ bitov, doplníme jednou 0a zvyšnými 1.
2. Inak doplníme bitmi 1 tak, aby dĺžka celého vektora bola násobkom 6.

Účelom týchto pravidiel je zabezpečiť, aby sa doplnené bity nedali nesprávne interpretovať ako slučka v niektorých špeciálnych prípadoch.

Vrcholy grafu sú $0, \dots, n - 1$. Hrany určíme zo sekvencie pomocou nasledovného cyklu:

```
v = 0
for i from 0 to m do
  if b[i] = 1 then v = v+1 endif;
  if x[i] > v then v = x[i] else output {x[i],v} endif
endfor
```

Neúplny (b, x) pár sa nepoužije.

Príklad:

:Fa@x^

Dvojbodka na začiatku hovorí, že ide o sparse6 formát. Od ostatných bytov odčítame 63 a napíšeme v binárnej sústave posledných 6 bitov z každého bytu.

000111 100010 000001 111001 011111

Keďže prvý byte nie je 63, tak je to priamo n . Počet vrcholov $n = 7$. Na reprezentáciu čísla $n - 1 = 6$ potrebujeme aspoň 3 bity, takže $k = 3$. Zvyšné bity teda napíšeme v tvare sekvencie: 1 000 1 000 0 001 1 110 0 101 1 111. Toto zodpovedá sekvencii

1,0 1,0 0,1 1,6 0,5 1,7. Dvojica 1,7 zodpovedá doplneným bitom (do násobku 6). Spracovanie sekvencie môžeme vidieť v tabuľke. Dostávame hrany (0,1), (0,2), (1,2), (5,6).

i	b	x	v	akcia	nová hrana $(x[i], v)$
0	1	0	1	zvýši sa hodnota v a keďže $v \leq x$ tak dostaneme hranu	(0, 1)
1	1	0	2	zvýši sa hodnota v a keďže $v \leq x$ tak dostaneme hranu	(0, 2)
2	0	1	2	hodnota v ostane rovnaká a keďže $v \leq x$ tak dostaneme hranu	(1, 2)
3	1	6	6	aj po zvýšení hodnoty v platí, že $v < x$, takže nastavíme v na $x = 6$	
4	0	5	6	hodnota v ostáva a keďže platí, že $v \leq x$ tak dostaneme hranu	(5, 6)

B.2.4 Trivial graph format - tgf

Trivial graph format je ako už názov napovedá najjednoduchší z ponúkaných formátov. Je v ňom možné zapisovať orientované multigrafy so slučkami a vrcholy a hrany môžu mať priradený nápis. Súbor sa skladá z dvoch častí, v prvej sú vymenované vrcholy, na každom riadku jeden, prípadne s nápisom. V druhej sú vymenované hrany ako dvojice vrcholov, opäť môže byť priradený nápis. Časti sú oddelené riadkom, v ktorom je znak „#“.

Príklad grafu:

```
a
b
c label_for_c
d
#
a b
a c
a a this_is_loop
c d label_for_edge_c_d
a c multi_edge
```

B.2.5 dot

Tento formát je využívaný vizualizačným nástrojom GraphViz. Je veľmi bohatý na nastavenia, my sme ho však používali minimálne (vzhľadom k tomu, že vzniknuté vizualizácie neboli dostatočne prehľadné bez toho, aby s nimi musel človek manipulovať a manipulácia bola možná len v grafických programoch).

```
graph K4 {  
a — b;  
a — c;  
a — d;  
b — c;  
b — d;  
c — d;  
}
```

B.2.6 graphml, xwg

GraphML a XWG sú XML súbory pre programy yEd a Wilma. Všetky grafy farbení v tomto dokumente sú z našich algoritmov exportované do GraphML a následne upravované pomocou yEd. Je teda zrejmé, že ide o veľmi robustný nástroj. Tu uvedieme len veľmi krátky príklad súboru vo formáte GraphML, keďže práve tento nie je veľmi dobre popísaný. XWG je narozdiel od GraphML jednoduchý a dobre popísaný pomocou „doctype“ definície pribalenej priamo k aplikácii Wilma.

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>  
<graphml xmlns="http://graphml.graphdrawing.org/xmlns"  
  xmlns:xsi="http://www.w3.org/2001/XMLSchema-instance"  
  xsi:schemaLocation="http://graphml.graphdrawing.org/xmlns  
http://www.yworks.com/xml/schema/graphml/1.1/ygraphml.xsd"  
  xmlns:y="http://www.yworks.com/xml/graphml">  
  <key id="d0" for="node" yfiles.type="nodegraphics"/>  
  <key id="d1" for="edge" yfiles.type="edgegraphics"/>  
  <graph id="G" edgedefault="undirected">  
    <node id="n0" yfiles.foldertype="folder">  
      <data key="d0">  
        <y:GroupNode>  
          <y:NodeLabel>0</y:NodeLabel>  
          <y:Fill color="#eeeeee" transparent="false"/>  
        </y:GroupNode>  
      </data>  
    <graph id="G0" edgedefault="undirected">
```



```

<node id="G0:n0">
  <data key="d0">
    <y:ShapeNode>
      <y:Geometry width="10.0" height="10.0"/>
      <y:Fill color="#eeeeee" transparent="false"/>
      <y:NodeLabel>0</y:NodeLabel>
      <y:Shape type="ellipse"/>
    </y:ShapeNode>
  </data>
</node>
<node id="G0:n1">
</node>
<edge id="G0:e0:1" source="G0:n0" target="G0:n1">
  <data key="d1">
    <y:PolyLineEdge>
      <y:LineStyle type="line" width="4.0" color="#FF0000"/>
      <y:EdgeLabel>0</y:EdgeLabel>
    </y:PolyLineEdge>
  </data>
</edge>
</graph>
</node>
</graph>
</graphml>

```

Literatúra

- [1] A. Ahmed, T. Dwyer C. Murray, L. Song, Y. X. Wu *WilmaScope Graph Visualisation*, Proceedings of the IEEE Symposium on Information Visualization, IEEE Computer Society, 216.4–, (2004)
- [2] N. Alon, *Restricted colorings of graphs*, in Surveys in Combinatorics 1993, London Math. Soc. Lecture Notes Series 187, 1–33, (1993)
- [3] B. Candráková, *osobná komunikácia*, (2012)
- [4] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition 2005 c Springer-Verlag Heidelberg, (New York 1997, 2000, 2005).
- [5] M. Duník *Kempe ekvivalentné farbenia grafov*, Bakalárska práca, Katedra informatiky FMFI UK, (2009)
- [6] P. Ďuriš, *Tvorba efektívnych algoritmov*, Katedra informatiky MFF UK, (1997)
- [7] M. N. Ellingham and L. Goddyn, *List Edge Colourings of Some 1-Factorable Multigraphs*, (1996)
- [8] S. Fisk, *Geometric coloring theory*, Adv. Math. 24, 298–340, (1977)
- [9] E. R. Gansner and S. C. North *An open graph visualization system and its applications to software engineering*, SOFTWARE - PRACTICE AND EXPERIENCE Vol. 30, Num. 11, 1203–1233, (2000)
- [10] J. McDonald, B. Mohar, D. Scheide, *Kempe equivalence of edge-colorings in subcubic and subquartic graphs*. J. Graph Theory, (2011)

- [11] B. D. McKay, *Description of graph6 and sparse6 encodings*,
<http://cs.anu.edu.au/bdm/data/formats.txt>, (2005)
- [12] B. D. McKay, *nauty User's Guide (Version 2.4)*,
<http://cs.anu.edu.au/bdm/nauty/>
- [13] M. Meringer *Fast Generation of Regular Graphs and Construction of Cages*, Journal of Graph Theory 30, 137–146, (1999)
- [14] S. Mertens, *The Easiest Hard Problem: Number Partitioning*, Computational Complexity and Statistical Physics, Oxford University Press, 125–139, (2006)
- [15] B. Mohar, *Kempe Equivalence Of Colorings*, Preprint series, Vol. 43 956, University of Ljubljana, (2005)
- [16] B. Mohar, J. Salas, *On the non-ergodicity of the Swendsen-Wang-Kotecky algorithm on the kagome lattice*, J. Stat. Mech.: Theory and Experiment, (2010)
- [17] J. Petersen, *Die Theorie der regulären graphs*, Acta Mathematica, Vol. 15, 193–220, (1981)
- [18] J. R. Ullmann, *An Algorithm for Subgraph Isomorphism*, J. ACM Vol. 23, Num. 1, (1976)
- [19] V. G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p -graph*, Diskret. Analiz. 3: 25–30, (1964)
- [20] J.-S. Wang, R. H. Swendsen, R. Kotecký, *The Three-State Antiferromagnetic Potts Models - a Monte Carlo study*, Phys. Rev. B 42, 2465-2474, (1990)
- [21] E. W. Weisstein *Bicolorable Graph*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/BicolorableGraph.html>