



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

ANTIDILATÁCIA STROMOV

Diplomová práca

BC. IVANA SELEČENIOVÁ

Školiteľ: doc. RNDr. Rastislav Kráľovič PhD.

Bratislava, 2011

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

ANTIDILATÁCIA STROMOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Informatika

Študijný odbor: 9.2.1 Informatika

Školiace pracovisko: Katedra informatiky

Školiteľ: doc. RNDr. Rastislav Kráľovič PhD.

Evidenčné číslo: f7fc230d-873f-45b3-acc6-bc2118563056

Bratislava, 2011

Bc. Ivana Selečéniová



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Ivana Selečéniová
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st.,
denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

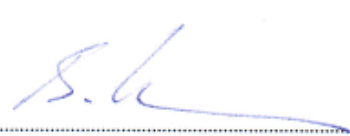
Názov : Antidilatácia stromov

Cieľ : Nájsť horné a dolné odhady parametra "antidilatácia" pre rôzne triedy stromov.

Vedúci : doc. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.

Dátum zadania: 09.11.2009

Dátum schválenia: 18.02.2011


prof. RNDr. Branislav Rován, PhD.
garant študijného programu



.....

študent


.....

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)


.....

vedúci práce

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím citovaných zdrojov.

.....

Podakovanie

Chcela by som sa poďakovať vedúcemu práce doc. RNDr. Rastislavovi Královičovi za vďačnú tému, cenné rady a usmerňovanie počas písania práce.

Ďalej sa chcem poďakovať môjmu priateľovi Ivanovi Kováčovi za jeho pomoc a trpezlivosť, Richardovi Štefancovi a Michalovi Kotrbčíkovi za cenné pripomienky. Moja vďaka patrí tiež rodine a priateľom za ich podporu.

Abstrakt

Autor: Ivana Selečéniová
Názov: Antidilatácia stromov
Univerzita: Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra: Katedra informatiky
Školiteľ: doc. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.
Počet strán: 44
Year: 2011

Antidilatácia je jedným z mnohých problémov označovania vrcholov v grafe. Cieľom je nájsť také vnorenie vrcholov grafu G do vrcholov grafu H , aby susedné vrcholy grafu G boli od seba čo najviac vzdialené v grafe H . Vo všeobecnosti je tento problém NP-ťažký.

V práci sa venujeme problému antidilatácie cesty do stromov. Analyzujeme hlavne antidilatáciu cesty do pavúčich grafov, teda grafov, ktoré majú jeden vrchol stupňa aspoň 3 a ostatné vrcholy stupňa najviac 2. Uvádzame niekoľko metód na odhadovanie antidilatácie zhora a polynomiálne algoritmy na nájdenie optimálnych vnorení (vzhľadom na hodnotu antidilatácie) ciest do niektorých špeciálnych pavúčich grafov. Dokazujeme niekoľko dolných odhadov antidilatácie cesty na všeobecné pavúčie grafy. Nakoniec analyzujeme antidilatáciu cesty do húsenicových grafov.

KLÚČOVÉ SLOVÁ: stromy, pavúčie grafy, húsenicové grafy, antidilatácia.

Abstract

Author: Ivana Selečéniová
Title: Antidilation of trees
University: Comenius University in Bratislava
Faculty: Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department: Department of Computer Science
Supervisor: doc. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.
Number of Pages: 44
Year: 2011

Antidilation belong to the rich family of graph labelling problems. The goal is to find an embedding of a graph G in a graph H such that the distance of the images of the incident vertices in G is maximized. The antidilation problem is NP-hard in general.

We analyze the antidilation problem of paths in trees. Our results are focused mainly on the antidilation of a path into spider graphs. (A spider graph is a tree with one vertex of a degree at least 3 and other vertices with degree at most 2.) We present several methods for determining the upper bounds on the antidilation and polynomial algorithms for finding the optimal embeddings (with respect to the antidilation) of the paths in the subfamilies of the spider graphs. Lower bounds on the antidilation of paths in spider graphs are also considered. We analyze the antidilation problem of paths in caterpillar graphs.

KEYWORDS: trees, spider graphs, caterpillar graphs, antidilation.

Obsah

1	Úvod	3
2	Prehľad problematiky	4
2.1	Motivácia	4
2.2	Definície	5
2.3	Známe výsledky	8
2.3.1	Výsledky o zložitosti	8
2.3.2	Antidilatácia	9
2.3.3	Antibandwidth	9
2.3.4	Cyklický antibandwidth	12
3	Antidilatácia na stromoch	14
3.1	Pavúčie grafy	14
3.1.1	Definície	14
3.1.2	Trieda $\{S_{k,n,l,n-1} \mid k, n, l \in \mathbb{N}\}$	17
3.1.3	Trieda $\{S_{1,n-k-1,k,1} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$	19
3.1.4	Olivovníky	22
3.1.5	Trieda $\{S_{k_1,n_1,k_2,n_2} \mid k_1, n_1, k_2, n_2 \in \mathbb{N}\}$	26
3.1.6	Všeobecné pavúčie grafy	35
3.2	Húsenicové grafy	38
3.2.1	Definície	38
3.2.2	Trieda $\{C_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$	38
3.2.3	Všeobecné húsenicové grafy	40
3.3	Otvorené problémy	41
4	Záver	43

Zoznam obrázkov

2.1	Vnorenie Petersenovho grafu do $M_{2,5}$	5
2.2	Vnorenie $M_{3,3}$ do P_9	7
2.3	Vnorenie $M_{3,3}$ do C_9	8
3.1	Všeobecný pavúči graf, pavúči graf $S_{2,2,3,5}$, olivovník O_k	15
3.2	Vzťah vnorenia a číslovania	16
3.3	Antidilatácia cesty P_{22} a P_{19} do stromu $S_{3,3,3,4}$ resp. $S_{2,3,3,4}$	19
3.4	Príklad voľby množiny V_1 na pavúčích grafoch.	20
3.5	Antidilatácia graf cesty P_{11} do stromu $S_{1,6,4,1}$	21
3.6	Rozdelenie olivovníka O_7 na množiny A_i, B_i podľa metódy 3	23
3.7	Antidilatácia cesty P_{29} do olivovníka O_7 , antidilatácia z P_7 do O_3	27
3.8	Antidilatácia cesty P_{34} do stromu $S_{3,6,5,3}$	29
3.9	Antidilatácia cesty P_{16} do stromu $S_{2,7,1,1}$	31
3.10	Antidilatácia cesty P_{25} do stromu $S_{1,12,3,4}$ a cesty P_{15} do stromu $S_{1,10,2,2}$	36
3.11	Húsenicový graf	38
3.12	Antidilatácia cesty P_{12} do stromu $C_{3,3}$ a cesty P_{16} do stromu $C_{4,3}$	40

Kapitola 1

Úvod

Problém antidilatácie, skúmaný v tejto diplomovej práci, patrí k triede problémov zaoberajúcich sa označovaním vrcholov v grafoch. Medzi preskúmané problémy tohto typu patrí aj vrcholové farbenie, hľadanie nezávislej množiny v grafe, ale aj problém dilatácie. Naším cieľom je skúmať duálny problém k dilatácii grafov. Tento problém bol zatiaľ skúmaný len v špeciálnych prípadoch, ktorými sú antibandwidth a cyklický antibandwidth.

V kapitole 2 uvádzame základné definície týkajúce sa antidilatácie a známe výsledky pre špeciálne prípady antidilatácie, ktorými sú antibandwidth a cyklický antibandwidth. Tieto varianty antidilatácie boli skúmané hlavne kvôli významnej praktickej motivácii, ku ktorej patrí napríklad plánovanie procesov a teória kódovania.

Kapitola 3, ktorá je jadrom práce sa zaoberá antidilatáciou na stromoch. Uvádzame definície niekoľkých tried stromov, ktoré sa zvyknú skúmať pri príbuzných problémoch. V tejto kapitole skúmame antidilatáciu na týchto stromoch, uvádzame presné hodnoty, asymptotické odhady hodnôt a algoritmy na nájdenie vnorenia s najlepšou hodnotou antidilatácie. Naším cieľom je nájsť antidilatáciu z cesty na tieto stromy. Uvádzame tu aj niekoľko metód – polynomiálnych algoritmov – na odhadovanie antidilatácie zhora, pričom o jednej z nich predpokladáme, že dáva tesné odhady nie len pre antidilatáciu cesty do skúmaných tried stromov, ale aj do všeobecných stromov. Ukazujeme, že pre každý pavúči (resp. húsenicový) graf G , pre ktorý dostaneme horný odhad antidilatácie cesty do G aspoň 2, existuje vnorenie cesty do G s antidilatáciou aspoň 2.

Kapitola 2

Prehľad problematiky

V tejto kapitole definujeme pojem antidilatácie grafov a uvedieme pôvodnú motiváciu, kvôli ktorej sa antidilatácia začala skúmať. Poskytujeme prehľad známych výsledkov týkajúcich sa problému antidilatácie a jej lepšie preskúmaných špeciálnych prípadov, antibandwidth-u a cyklického antibandwidth-u.

V práci používame štandardné pojmy a označenie z teórie grafov, ktoré môže čitateľ nájsť v [Die05].

2.1 Motivácia

Počiatočný záujem o skúmanie problému antidilatácie bol spojený s tým, že antidilatácia je duálnym problémom k viac skúmanému problému dilatácie. Antidilatácia bola skúmaná v snahe dosiahnuť nové výsledky o dilatácii. Antidilatácia spolu s dilatáciou patria k veľkej skupine problémov označovania vrcholov v grafe. [Gal10]

Problém antidilatácie je NP-ťažký, navyše je pomerne nepreskúmaný. Kvôli tomu sa skúmajú špeciálne prípady antidilatácie pre niektoré grafy (resp. triedy grafov) s vhodnými vlastnosťami. V rámci tejto kapitoly uvedieme dva takéto špeciálne prípady, antibandwidth a cyklický antibandwidth. V našej práci potom budeme pokračovať skúmaním ďalšieho špeciálneho prípadu antidilatácie a to antidilatácie stromov na stromy. Pre skúmanie stromov sme sa rozhodli kvôli faktu, že stromy sú pomerne jednoduchým typom grafov a myslíme si, že vlastnosti ako acyklickosť môžu uľahčiť riešenie problému.

Pôvodná motivácia pre skúmanie (špeciálnych prípadov) antidilatácie pochádza z nasledovného problému. Máme n frekvencií a n vysielačov. Úlohou je priradiť frekvencie vysielačom takým spôsobom, aby fyzicky susedné vysielače mali čo najrôznejšie frekvencie. Vysielače sú reprezentované grafom susednosti, úlohou je teda očíslovať vrcholy „frekvenciami“ tak, aby bola splnená podmienka uvedená vyššie. [Hal80] Inou často využívanou motiváciou je problém rozmiestnenia nepriateľských jednotiek na cestu (prípadne kružnicu alebo mriežku) tak, aby boli nepriatelia čo najďalej od seba. Nepriateľstvo sa dá podobne

ako v predchádzajúcom prípade vyjadriť hranou v nejakom grafe. [Cap99]

Antibandwidth bol prvý krát skúmaný v spojení s multiprocesorovým plánovaním pod menom *separation number* v práci [LVW84].

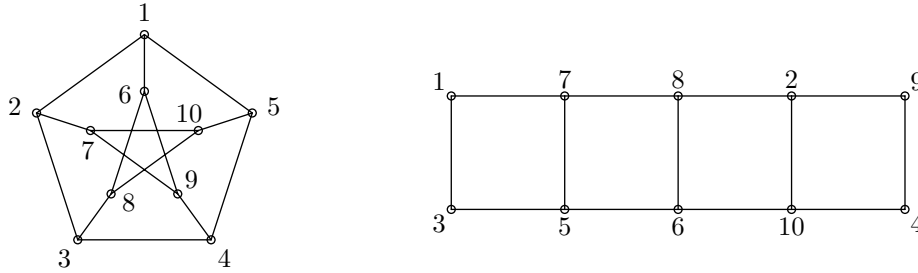
2.2 Definície

Na definovanie problému antidilatácie potrebujeme najskôr zaviesť pojem vnorenia grafu. Vnorenie grafu G do grafu H je injektívne priradenie vrcholov grafu G vrcholom grafu H . Problém antidilatácie potom môžeme popísať ako problém nájdenia takého vnorenia grafu G do grafu H , aby sme maximalizovali minimálnu vzdialenosť (meranú v grafe H) všetkých dvojíc vrcholov z grafu H , ktorým sú priradené susedné vrcholy z grafu G .

Definícia 2.2.1. Majme dva grafy $G = (V_1, E_1)$ a $H = (V_2, E_2)$. Vnorenie grafu G do grafu H je injektívne zobrazenie $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$. Množinu všetkých vnorení z G do H budeme označovať symbolom $\Phi_{G,H}$.

Poznámka 2.2.1. Aj keď to nie je podmienkou definície, o vnorení budeme vždy predpokladať, že je bijektívne, teda platí $|V_1| = |V_2|$.

Príklad 2.2.1. Na obrázku 2.1 môže čitateľ vidieť vnorenie Petersenovho grafu do mriežky $M_{2,5}$.



Obr. 2.1: Vnorenie Petersenovho grafu do $M_{2,5}$.

Definícia 2.2.2. Nech $G = (V_1, E_1)$, $H = (V_2, E_2)$ sú grafy a $\varphi \in \Phi_{G,H}$ je vnorenie grafu G do grafu H . Antidilatácia grafu G na graf H vzhľadom na vnorenie φ je

$$\text{adil}_\varphi(G, H) = \min_{uv \in E(G)} (\text{dist}_H(\varphi(u), \varphi(v))).$$

Definícia 2.2.3. Majme dva grafy $G = (V_1, E_1)$ a $H = (V_2, E_2)$. Antidilatácia grafu G na graf H je

$$\text{adil}(G, H) = \max_{\varphi \in \Phi_{G,H}} (\text{adil}_{\varphi}(G, H)) = \max_{\varphi \in \Phi_{G,H}} \left(\min_{uv \in E(G)} \text{dist}_H(\varphi(u), \varphi(v)) \right).$$

Poznámka 2.2.2. Graf G z prechádzajúcej definície budeme volať *hostovský* graf a graf H budeme volať *hlavný* graf. (Z anglického *the guest graph* a *the host graph*.)

Na antidilatáciu sa teda môžeme pozeráť nasledovne. Hľadáme priradenie vrcholov grafu G do vrcholov grafu H ¹. Pri danom priradení vrcholov nás zaujíma najmenšia vzdialenosť medzi dvoma vrcholmi v H , ktorým boli priradené susedné vrcholy z grafu G . Na zistenie antidilatácie chceme nájsť také priradenie vrcholov grafu G , v ktorom je vyššie popísaná hodnota čo najväčšia.

Ukázalo sa, že problém antidilatácie je vo všeobecnosti NP-ťažký. (Dôsledok vety 2.3.1, ktorá je dokázaná v [LY03].) Napriek tomu však môže byť zaujímavá otázka antidilatácie v špeciálnych prípadoch. Jedným zo skúmaných typov antidilatácie je antibandwidth – antidilatácia grafu G do cesty, ktorá má $V(G)$ vrcholov.

Definícia 2.2.4. Nech $G = (V, E)$ a $|V| = n$. Antibandwidth grafu G je

$$\text{ab}(G) = \text{adil}(G, P_n),$$

kde P_n je cesta dĺžky $n - 1$. Nech $\varphi \in \Phi_{G, P_n}$, potom antibandwidth grafu G vzhľadom na vnorenie φ je

$$\text{ab}_{\varphi}(G) = \text{adil}_{\varphi}(G, P_n).$$

V prípade antibandwidth-u je graf H z definície antidilatácie cesta. Hľadáme teda priradenie vrcholov grafu G na cestu tak, aby susedné vrcholy z G boli priradené čo najvzdialenejším vrcholom z cesty. Iný pohľad na antibandwidth ukazuje poznámka 2.2.3.

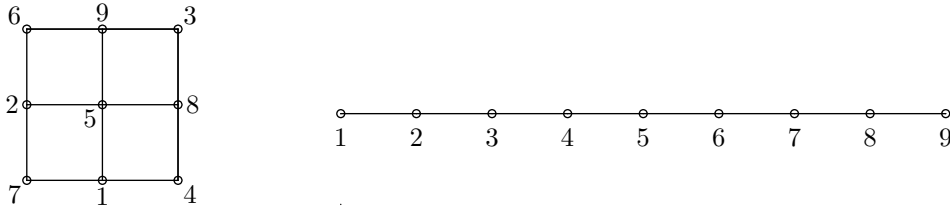
Poznámka 2.2.3. Antibandwidth grafu G môžeme nájsť nasledovným spôsobom. Za antibandwidth označíme hodnotu

$$\text{ab}(G) = \max_f \left(\min_{uv \in E(G)} (|f(u) - f(v)|) \right),$$

pričom $f : V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ je bijektívna funkcia. (Očíslovanie vrcholov.)

¹Ako sme už spomenuli v poznámke 2.2.1, v práci budeme vždy uvažovať $|V(G)| = |V(H)|$. Definícia antidilatácie však nevyklučuje ani prípad $|V(G)| < |V(H)|$. V takomto prípade dostane „označenie“ len $|V(G)|$ vrcholov grafu H .

Príklad 2.2.2. Pre mriežku $M_{3,3}$ je antibandwidth rovný 3. Príslušné vnorenie grafu $M_{3,3}$ do cesty P_9 , ako aj očíslovanie grafu $M_{3,3}$ v zmysle poznámky 2.2.3, môžeme vidieť na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Vnorenie $M_{3,3}$ do P_9

Ani takýto špeciálny prípad antidilatácie nie je o nič ľahší ako pôvodný problém – antibandwidth je tiež NP-ťažký problém, ako hovorí veta 2.3.1. Existujú však riešenia antibandwidth-u pre konkrétne triedy grafov. V sekcii 2.3 ukážeme známe výsledky pre antibandwidth na cestách, kružniciach, úplných k -árnych stromoch, mriežkach a hyperkockách.

Iným špeciálnym prípadom antidilatácie je takzvaný cyklický antibandwidth, pre ktorý je graf H kružnicou. Aj tento variant antidilatácie je NP-ťažký. (Veta 2.3.2.)

Definícia 2.2.5. Nech $G = (V, E)$ a $|V| = n$. Cyklický antibandwidth grafu G je

$$\text{cab}(G) = \text{adil}(G, C_n),$$

kde C_n je kružnica s n vrcholmi.

Poznámka 2.2.4. Cyklický antibandwidth grafu G môžeme nájsť nasledovným spôsobom. (Podobne ako pre antibandwidth v poznámke 2.2.3.) Budeme skúmať všetky bijektívne funkcie (očíslovanie vrcholov) $f : V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ a za cyklický antibandwidth grafu G označíme

$$\text{cab}(G) = \max_f \left(\min_{uv \in E(G)} (|f(u) - f(v)|, |V| - |f(u) - f(v)|) \right).$$

V zmysle poznámok 2.2.3 a 2.2.4 o alternatívnom pohľade na antibandwidth a cyklický antibandwidth je rozdiel medzi cyklickým antibandwidth-om a antibandwidth-om v tom, že pri číslovaní nás nezaujíma len rozdiel čísel dvoch susedných vrcholov v G (ktorý zodpovedá vzdialenosti vrcholov „v smere hodinových ručičiek“ na kružnici), ale aj rozdiel medzi celkovým počtom vrcholov a rozdielom čísel susedných vrcholov. (Ktorý zodpovedá vzdialenosti vrcholov „proti smeru hodinových ručičiek“.)

Príklad 2.2.3. Pre mriežku $M_{3,3}$ je cyklický antibandwidth rovný 3. Príslušné vnorenie grafu $M_{3,3}$ do kružnice C_9 a číslovanie grafu $M_{3,3}$ v zmysle poznámky 2.2.4 môžeme vidieť na obrázku 2.3.



Obr. 2.3: Vnorenie $M_{3,3}$ do C_9

Podobne ako antibandwidth a cyklický antibandwidth môžeme vytvárať aj iné špeciálne prípady antidilatácie. V kapitole 3 sa budeme zaoberať antidilatáciou cesty do stromov, resp. do špeciálnych tried stromov. Takáto verzia problému doposiaľ nebola skúmaná.

2.3 Známe výsledky

V tejto časti sa budeme venovať známym výsledkom týkajúcich sa antidilatácie. Keďže samotná antidilatácia nebola podrobne skúmaná, uvádzame pre ňu len základné známe výsledky. Lepšie preskúmané špeciálne prípady antidilatácie, antibandwidth a cyklický antibandwidth, rozoberáme v oddelených sekciách.

2.3.1 Výsledky o zložitosti

Na úvod sa budeme zaoberať zložitou antidilatácie, antibandwidth-u a cyklického antibandwidth-u. Ako bolo spomínané vyššie, všetky tri problémy sú NP-ťažké. [LVW84], [LY03] Dá sa ukázať, že problém nájdenia hamiltonovskej cesty resp. kružnice v grafe je polynomiálne redukovateľný na antibandwidth resp. cyklický antibandwidth.

Veta 2.3.1. *Problém rozhodnutia, či $ab(G) \geq 2$ je NP-úplný.*

Dôsledok 2.3.1. *Problém rozhodnutia, či $adil(G, H) \geq 2$ je NP-úplný.*

Veta 2.3.2. *Problém rozhodnutia, či $cab(G) \geq 2$ je NP-úplný.*

2.3.2 Antidilatácia

V tejto časti uvádzame základný vzťah medzi antidilatáciou a dilatáciou. Dilatácia grafu G na graf H vzhľadom na vnorenie φ je maximálna vzdialenosť medzi vrcholmi v grafe H , ktorých obrazy sú susedné vrcholy z grafu G . Dilatácia grafu G na graf H je minimálna hodnota dilatácie vzhľadom na všetky vnorenia z $\Phi_{G,H}$. Dôkaz nasledovného tvrdenia môže čitateľ nájsť v [Tör07].

Veta 2.3.3. *Nech G_1 je hosťovský graf a G_2 hlavný graf. Označme \overline{G} komplement grafu G . Potom platí*

$$\text{adil}(G_1, G_2) \leq \text{dil}(\overline{G_1}, G_2) + 1.$$

2.3.3 Antibandwidth

Horné a dolné odhady

Nasledujúce vety ukazujú vzťah medzi antibandwidth-om a veľkosťou maximálnej kliky [Göb94], chromatickým číslom [LY03], minimálnym stupňom a veľkosťou maximálnej nezávislej množiny [Göb94].

Je celkom logické, že antibandwidth a veľkosť maximálnej kliky v grafe sú nepriamo úmerné. V prípade veľkej kliky v grafe je veľa vrcholov navzájom susedných a preto je hodnota antibandwidth-u nižšia, ako by mohla byť, keby niektoré vrcholy susedné neboli.

Veta 2.3.4. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi. Nech $\omega(G)$ označuje veľkosť maximálnej kliky v G . Potom*

$$\text{ab}(G) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{\omega(G)-1} \right\rfloor.$$

Podobne nepriamo úmerný je aj vzťah medzi antibandwidth-om a chromatickým číslom grafu, pretože veľké chromatické číslo znamená početné prepojenie vrcholov hranami.

Veta 2.3.5. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi. Nech $\chi(G)$ označuje chromatické číslo grafu G . Potom*

$$\text{ab}(G) \leq \frac{n}{\chi(G)-1}.$$

Vzťah antibandwidth-u a minimálneho stupňa grafu už nie je nepriamo úmerný, no stále platí čím väčší minimálny stupeň, tým menší antibandwidth. Výsledkom nasledovného tvrdenia je aj triviálny horný odhad antibandwidth-u súvislých grafov daný polovicou počtu vrcholov. Takýto horný odhad sa dosahuje napríklad pre cesty.

Veta 2.3.6. *Nech $G = (V, E)$ je spojitý graf s n vrcholmi a minimálnym stupňom $\delta(G)$. Potom*

$$\text{ab}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\delta(G)}{2} \right\rfloor.$$

Nasledovná veta hovorí, že ak graf obsahuje len malú nezávislú množinu vrcholov, bude antibandwidth malý. Opačná implikácia však neplatí. Napríklad pre strom s jedným vrcholom stupňa $n - 1$ a ostatnými vrcholmi stupňa 1 je antibandwidth rovný 1, aj keď veľkosť maximálnej nezávislej množiny je $n - 1$.

Veta 2.3.7. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi. Nech $\alpha(G)$ označuje veľkosť maximálnej nezávislej množiny vrcholov v G . Potom*

$$\text{ab}(G) \leq \alpha(G).$$

Všetky vyššie uvedené tvrdenia udávajú horné odhady antidilatácie. V nasledovnej vete ukážeme aj dolný odhad antidilatácie. Graf \overline{G} je komplementom grafu G a graf G^i pre $i \geq 1$ označuje graf, ktorý dostaneme z grafu G , ak spojíme hranami všetky vrcholy, ktoré sú v G vo vzdialenosti najviac i . [LY03]

Veta 2.3.8. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi a $k \geq 2$. Potom $\text{ab}(G) \geq k$ práve vtedy, keď $P_n^{k-1} \subseteq \overline{G}$.*

Aj keď predchádzajúca veta pomerne presne popisuje hodnotu antidilatácie, treba si uvedomiť, že už len pre $k = 2$ táto veta hovorí, že $\text{ab}(G) \geq 2$ práve vtedy, keď graf \overline{G} obsahuje hamiltonovskú cestu, čo znamená NP-úplnosť tejto otázky.

Presné výsledky pre niektoré typy grafov

V tejto časti uvádzame presné ako aj asymptoticky presné výsledky k problému antibandwidth, ktoré sú prevzaté z práce [Tör07].

Veta 2.3.9. *Nech P_n je cesta o n vrchoch. Antibandwidth grafu P_n je rovný*

$$\text{ab}(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Veta 2.3.10. *Nech C_n je kružnica s n vrcholmi. Antibandwidth grafu C_n je rovný*

$$\text{ab}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1.$$

Veta 2.3.11. *Nech $T_{2,h}$ je kompletný binárny strom hĺbky h . Potom antibandwidth grafu $T_{2,h}$ je rovný*

$$\text{ab}(T_{2,h}) = 2^h - 1.$$

Veta 2.3.12. *Nech $T_{k,h}$ je úplný k -árny strom, kde $k \geq 3$, s výškou h a počtom vrcholov $n = (k^{h+1} - 1)/(k - 1)$. Potom antibandwidth grafu $T_{k,h}$ je rovný*

- ak k je párne číslo tak

$$\text{ab}(T_{k,h}) = \frac{n + 1 - k}{2},$$

- ak k je nepárne číslo a $h \geq 3$ tak

$$\text{ab}(T_{k,h}) \leq \frac{n}{2} - \max \left\{ \frac{k}{2}, \frac{h}{8} - o(h) \right\}.$$

Nasledujúce tvrdenia sú prevzaté z práce [RSS⁺09], v ktorej čitateľ môže nájsť aj ich dôkazy.

Veta 2.3.13. *Nech $M_{m,n}$ je mriežka rozmerov $m \times n$ pričom $m \geq n \geq 2$. Potom antibandwidth grafu $M_{m,n}$ je rovný*

$$\text{ab}(M_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(m-1)n}{2} \right\rfloor.$$

Veta 2.3.14. *Nech T_n je torus rozmerov $n \times n$ (graf $C_n \times C_n$). Potom antibandwidth grafu T_n je rovný*

$$\text{ab}(T_n) = \begin{cases} \frac{(n-2)n}{2}, & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ \frac{(n-2)(n+1)}{2}, & \text{ak } n \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Veta 2.3.15. *Nech Q_n je n -rozmerná hyperkocka. Potom antibandwidth grafu Q_n je rovný*

$$\text{ab}(Q_n) = 2^{n-1} - \frac{2^n}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1)).$$

Polynomiálne algoritmy na zistenie antibandwidth-u existujú pre nasledovné triedy grafov: komplementy intervalového grafu, „arborescent comparability“ a „threshold“ grafy. Konkrétne algoritmy a definície vyššie uvedených grafov môže čitateľ nájsť v prácach [DI99] a [Isa98].

2.3.4 Cyklický antibandwidth

Podobné výsledky ako pre problém antibandwidth boli dosiahnuté aj pre problém cyklický antibandwidth. Nasledovné tvrdenia sú prevzaté z práce [STV05], v ktorej môže čitateľ nájsť aj ich dôkazy.

Mnoho z nižšie uvedených výsledkov sa dá odvodiť z výsledkov o antibandwidth-e pomocou nasledovnej jednoduchej vety.

Veta 2.3.16. *Majme graf G o n vrchoch. Nech f je optimálne očíslovanie² vrcholov grafu G , v ktorom maximálna vzdialenosť susedných vrcholov nie je väčšia ako $n - \text{ab}(G)$. Potom $\text{cab}(G) = \text{ab}(G)$.*

Veta 2.3.17. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi. Potom*

$$\text{cab}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Podobné tvrdenie, ako hovorí veta 2.3.8 pre antibandwidth, je možné sformulovať aj pre cyklický antibandwidth. [Tör07] Na základe tohto tvrdenia je možné ukázať NP-úplnosť problému, či $\text{cab}(G) \geq 2$, pretože graf \overline{G} obsahuje hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď $\text{cab}(G) \geq 2$.

Veta 2.3.18. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi a $k \geq 2$. Potom $\text{cab}(G) \geq k$ práve vtedy, keď $C_n^{k-1} \subseteq \overline{G}$.*

Veta 2.3.19. *Majme cestu P_n s n vrcholmi a kružnicu C_n s n vrcholmi. Potom pre cyklický antibandwidth platí*

$$\text{cab}(P_n) = \text{cab}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1.$$

Nasledovné tvrdenie dáva do súvisu antibandwidth a cyklický antibandwidth.

Veta 2.3.20. *Pre ľubovoľný graf G platí*

$$\frac{1}{2}\text{ab}(G) \leq \text{cab}(G) \leq \text{ab}(G).$$

Veta 2.3.21. *Majme mriežku $M_{m,n}$, kde $m \geq n$ a zároveň platí, že m je párne a n je nepárne. Potom platí*

$$\left\lfloor \frac{n(m-1)}{2} \right\rfloor \leq \text{cab}(M_{m,n}) \leq \text{ab}(M_{m,n}) = \left\lceil \frac{n(m-1)}{2} \right\rceil.$$

²Optimálne očíslovanie f je také, pre ktoré minimálna vzdialenosť susedných vrcholov je $\min_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)| = \text{ab}(G)$.

V opačnom prípade platí

$$\text{cab}(M_{m,n}) = \frac{n(m-1)}{2}.$$

Veta 2.3.22. Nech T_n je torus rozmerov $n \times n$ (graf $C_n \times C_n$). Potom cyklický antibandwidth grafu T_n je rovný

$$\text{cab}(T_n) = \begin{cases} \frac{(n-2)n}{2}, & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ \frac{(n-2)(n+1)}{2}, & \text{ak } n \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Veta 2.3.23. Nech Q_n je n -rozmerná hyperkocka. Potom cyklický antibandwidth grafu Q_n je rovný

$$\text{cab}(Q_n) = 2^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1)).$$

Kapitola 3

Antidilatácia na stromoch

V tejto kapitole začneme skúmať antidilatáciu stromov na stromy. Keďže antidilatácia stromov na stromy zatiaľ nebola skúmaná, budeme sa venovať antidilatácii s čo najjednoduchším hosťovským grafom, cestou. Ďalší dôvod, prečo za hosťovský graf volíme cestu, je možný vzťah s už skúmaným antibandwidth-om, čo je antidilatácia grafu G na cestu. Pre ďalší výskum môže byť zaujímavé analyzovať, čo sa stane ak vymeníme hosťovský a hlavný graf. (Čím dostaneme z nami skúmaného problému antibandwidth.)

Na začiatku uvedieme definície tried, ktorými sa budeme zaoberať. Neskôr uvádzame niekoľko vlastných výsledkov o antidilatácii ciest na týchto špeciálnych podtriedach stromov vo forme horných, dolných odhadov a algoritmov na konštrukciu vnorení dosahujúcich maximálnu hodnotu antidilatácie.

3.1 Pavúčie grafy

Pavúčie grafy sú špeciálnou podtriedou stromov, ktorej venujeme túto sekciu. Každý pavúči graf sa skladá z niekoľkých ciest, ktoré sú spojené v jednom (centrálnom) vrchole. Formálnu definíciu týchto grafov uvádzame nižšie.

3.1.1 Definície

V nasledujúcom texte uvádzame definície špeciálnych podtried stromov, pre ktoré budeme hľadať presné hodnoty antidilatácie s cestou ako hosťovským grafom, a pojmov, ktoré budeme používať. Definícia pavúčieho grafu je prevzatá z [Weib].

Definícia 3.1.1. Súvislý acyklický graf G budeme volať pavúči graf¹, ak sú splnené nasledovné podmienky.

1. Existuje práve jeden vrchol $v \in V(G)$, ktorý má stupeň aspoň 3. Tento vrchol budeme volať *centrálny*.

¹z anglického *spider*, pozri [Weib]

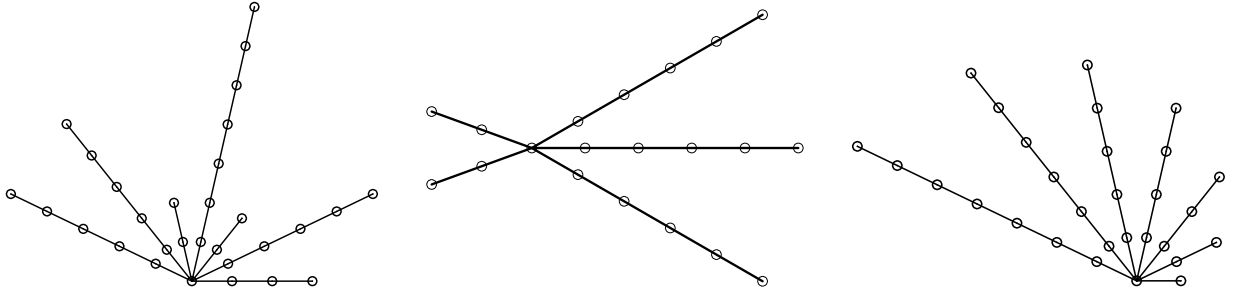
2. Každý vrchol $u \in V(G) \setminus \{v\}$ má stupeň nanajvyšš rovný 2.

Poznámka 3.1.1. Cestu od centrálného vrchola v do nejakého listu u budeme nazývať noha. Za vrcholy na nohe považujeme všetky vrcholy, ktoré sa nachádzajú na ceste od v do u , okrem centrálného vrchola v . Pod dĺžkou nohy rozumieme dĺžku cesty od v po u .

Definícia 3.1.2. Pavúči graf S_{k_1, n_1, k_2, n_2} je graf o $n = k_1 n_1 + k_2 n_2 + 1$ vrcholoch, s jedným vrcholom v stupňa $k = k_1 + k_2$, pričom existuje k_1 nôh dĺžky n_1 a k_2 nôh dĺžky n_2 .

Poznámka 3.1.2. V ďalšom texte budeme pre pavúčie grafy S_{k_1, n_1, k_2, n_2} implicitne predpokladať, že $k_1 + k_2 \geq 3$, pretože v opačnom prípade graf S_{k_1, n_1, k_2, n_2} nebude pavúčim grafom. (Nebude platiť, že existuje vrchol stupňa aspoň 3.)

Definícia 3.1.3. *Olivovník*² je špeciálny typ pavúčieho grafu, ktorý má k nôh a platí, že i -ta noha má dĺžku i . Olivovník s k nohami označujeme O_k .



Obr. 3.1: Všeobecný pavúči graf

pavúči graf $S_{2,2,3,5}$ olivovník O_7

Podobne ako v prípade antibandwidth-u, aj na antidilatáciu cesty na graf G sa dá pozerieť ako na číslovanie vrcholov grafu G . Narozdiel od antibandwidth-u, kde nás zaujímal rozdiel čísel priradených susedným vrcholom, nás bude v tomto prípade zaujímať vzdialenosť vrcholov, ktorým sú priradené po sebe idúce čísla i a $i + 1$, pre všetky $i \in \{1, \dots, |V| - 1\}$. Toto pozorovanie zhrnieme v nasledujúcej vete.

Veta 3.1.1. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi a $\mathcal{F}_{G,n}$ je množina všetkých bijektívnych zobrazení z V do $\{1, \dots, n\}$. Potom platí*

$$\text{adil}(P_n, G) = \max_{f \in \mathcal{F}_{G,n}} \left(\min_{i \in \{1, \dots, n-1\}} (\text{dist}(f^{-1}(i), f^{-1}(i+1))) \right).$$

²z anglického *olive tree*

Dôkaz. Vrcholy cesty budeme označovať ako v_1, v_2, \dots, v_n , pričom v_1 a v_n sú listy. Musíme si uvedomiť, že $\text{adil}(P_n, G) = \max_{\varphi \in \Phi_{P_n, G}} \text{adil}_{\varphi}(P_n, G)$.

Najprv ukážeme, že ku každému vnoreniu φ existuje číslovanie f také, že

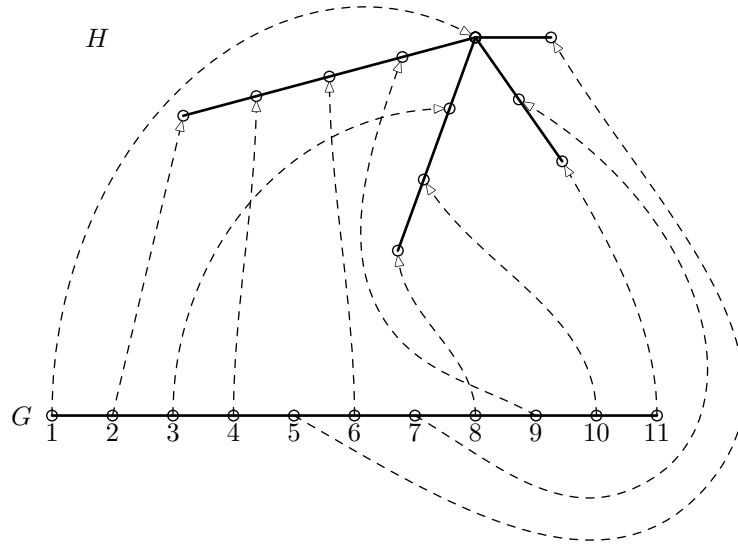
$$\text{adil}_{\varphi}(P_n, G) = \min_{i \in \{1, \dots, n-1\}} (\text{dist}(f^{-1}(i), f^{-1}(i+1))).$$

Vhodné číslovanie f vytvoríme tak, aby $f^{-1}(i) = \varphi(v_i)$. V takom prípade bude platiť

$$\min_{i \in \{1, \dots, n-1\}} (\text{dist}(f^{-1}(i), f^{-1}(i+1))) = \min_{uv \in E(P_n)} (\text{dist}(\varphi(u), \varphi(v))) = \text{adil}_{\varphi}(P_n, G).$$

Analogicky sa dá ukázať, že ku každému číslovaniu existuje ekvivalentné vnorenie. (Také, aby vyššie uvedená rovnosť platila.) \square

Na základe vety 3.1.1 budeme pod vnorením cesty do grafu G rozumieť aj očíslovanie vrcholov grafu G . Ak povieme, že vrcholu v priradíme číslo i , znamená, to, že $\varphi(v_i) = v$, kde v_i je i -ty vrchol cesty P_n . Na obrázku 3.2 môžeme vidieť graficky znázornenú korešpondenciu medzi vnorením a číslovaním.



Obr. 3.2: Vzťah vnorenia a číslovania

Ukážeme ešte, že pre antidilatáciu cesty do grafu G platí analogické tvrdenie k tvrdeniam viet 2.3.8 a 2.3.18, ktoré hovoria o antibandwidth-e, resp. o cyklickom antibandwidth-e.

Veta 3.1.2. *Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi a $k \geq 2$. Potom $\text{adil}(P_n, G) \geq k$ práve vtedy, keď $G^{k-1} \subseteq \overline{P_n}$.*

Dôkaz. Ak $G^{k-1} \subseteq \overline{P_n}$ tak $P_n \subseteq \overline{G^{k-1}}$. To znamená, že v $\overline{G^{k-1}}$ existuje cesta s n vrcholmi, inými slovami, existuje postupnosť vrcholov v_1, \dots, v_n takých, že $v_i v_{i+1} \notin E(G^{k-1})$. Zvolíme číslovanie $f(v_i) = i$. Keďže $\text{dist}_{G^{k-1}}(v_i, v_{i+1}) \geq 2$, tak $\text{dist}_G(v_i, v_{i+1}) \geq k$. (Ak by $\text{dist}_G(v_i, v_{i+1}) < k$, v grafe G^{k-1} by bola hrana $v_i v_{i+1}$.) Ukázali sme, že vzdialenosť vrcholov s po sebe idúcimi číslami je aspoň k , preto $\text{adil}(P_n, G) \geq k$.

Opačne, ak $\text{adil}(P_n, G) \geq k$, existuje číslovanie f , pre ktoré je každá dvojica susedných vrcholov vzdialená aspoň k . Pozrime sa na vrcholy $v_i = f^{-1}(i)$. Keďže $\text{dist}_G(v_i, v_{i+1}) \geq k$, vrcholy v_i a v_{i+1} nie sú susedné v G^{k-1} . Preto $P_n \subseteq \overline{G^{k-1}}$ a teda $G^{k-1} \subseteq \overline{P_n}$. \square

3.1.2 Horné a dolné odhady pre triedu $\{S_{k,n,l,n-1} \mid k, n, l \in \mathbb{N}\}$

V tejto časti sa budeme zaoberať antidilatáciou cesty do pavúčich grafov typu $S_{k,n,l,n-1}$. Najprv zostrojíme horný odhad antidilatácie, potom ukážeme, že tento odhad je tesný, tým, že zostrojíme algoritmus, ktorý skonštruje požadované vnorenie.

Metóda 1. Za odhad zvolíme dĺžku najdlhšej nohy pavúčieho grafu S .

Veta 3.1.3. *Odhad vypočítaný metódou 1 je horným odhadom antidilatácie cesty do pavúčieho grafu S .*

Dôkaz. Centrálnemu vrcholu musí byť priradené nejaké číslo, preto antidilatácia nemôže byť väčšia ako je maximálna vzdialenosť medzi centrálnym vrcholom a niektorým listom. Pri pavúčich grafoch je táto vzdialenosť rovná dĺžke najdlhšej nohy. \square

Pre grafy, ktoré majú len nohy dĺžok n a $n - 1$ je odhad, ktorý vráti metóda 1 tesný. V dôkaze nasledujúcej vety ukážeme, ako zostrojiť číslovanie (resp. vnorenie), v ktorom sa daná hodnota antidilatácie dosahuje.

Veta 3.1.4. *Antidilatácia grafu $P_{kn+l(n-1)+1}$ do grafu $S_{k,n,l,n-1}$, kde $k \geq 1$, je rovná*

$$\text{adil}(P_{kn+l(n-1)+1}, S_{k,n,l,n-1}) = n,$$

kde n je dĺžka najdlhšej nohy v $S_{k,n,l,n-1}$.

Dôkaz. Z metódy 1 vyplýva, že antidilatácia s väčšou hodnotou nemôže existovať. Preto stačí navrhnúť algoritmus, ktorý nájde vnorenie zodpovedajúce danej hodnote antidilatácie.

Algoritmus funguje nasledovne: centrálny vrchol bude mať číslo 1. Zoradíme nohy podľa veľkosti, teda nohy l_1, \dots, l_k majú dĺžku n a nohy l_{k+1}, \dots, l_{k+l} majú dĺžku $n - 1$. Číslo 2

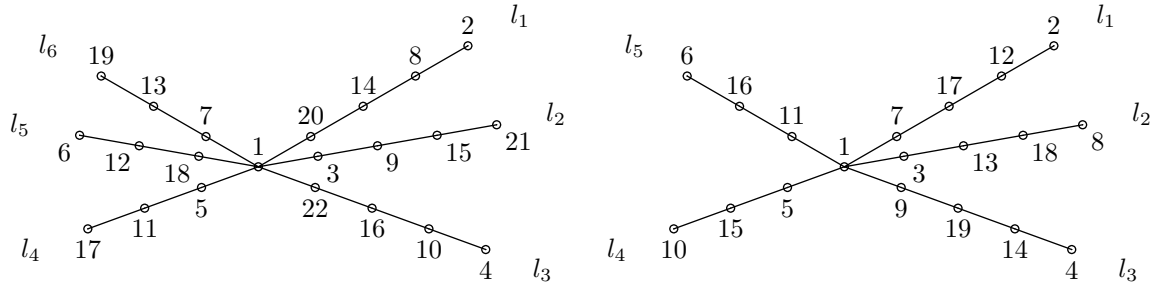
bude priradené vrcholu vo vzdialenosti n od centrálnemu vrcholu na nohe l_1 . Číslo 3 bude mať vrchol, ktorý je na nohe l_2 a je čo najbližšie k centrálnemu vrcholu. Takto budeme pokračovať ďalej, ak sme číslo i pridali na nohu l_j na najbližšie voľné miesto od listu, tak číslo $i+1$ pridáme na nohu $l_{(j \bmod (k+l))+1}$ na najbližšie voľné miesto od centrálnemu vrcholu. Takto očísľujeme všetky vrcholy. Ukážeme, že vzdialenosť medzi ľubovoľnými susednými číslami i a $i+1$ je aspoň n . Dôkaz budeme robiť samostatne pre párný a nepárny počet nôh.

Majme nepárny počet nôh. Pre $i = 1$ je vzdialenosť medzi i a $i+1$ rovná n , pretože dĺžka najdlhšej nohy je n . Číslo i napíšeme na nohu $l_{(i-2 \bmod k+l)+1}$ vo vzdialenosti $\lceil (i-1)/(2(k+l)) \rceil - 1$ od listu alebo $\lceil (i-1)/(2(k+l)) \rceil$ od centrálnemu vrcholu. Číslo $i+1$ napíšeme na nasledujúcu nohu do rovnakej vzdialenosti ako i ale „z opačnej strany“. Preto je ich vzdialenosť aspoň n – vzdialenosť jedného z vrcholov k centrálnemu vrcholu je $\lceil (i-1)/(2(k+l)) \rceil$ a vzdialenosť druhého je $|l_j| - \lceil (i-1)/(2(k+l)) \rceil + 1$. Súčet je teda aspoň n . Jediný rozdiel nastáva, ak i dáva zvyšok 1 po delení $2(k+l)$. Vtedy je i vrchol vo vzdialenosti $\lceil (i-1)/(2(k+l)) \rceil$ od centrálnemu vrcholu, ale vrchol $i+1$ len vo vzdialenosti $|l_1| - \lceil (i-1)/(2(k+l)) \rceil$ od centrálnemu vrcholu. To však nevádi, lebo $i+1$ leží na nohe dĺžky n .

Ak máme párný počet nôh, postupujeme nasledovne. Číslo i znovu píšeme na nohu $l_{(i-2 \bmod k+l)+1}$, tentokrát však, ak je číslo nohy párne, píšeme čísla vždy od centrálnemu vrcholu a ak je číslo nepárne, píšeme ich od listu. Vzdialenosť čísla i od centrálnemu vrcholu bude $\lceil (i-1)/(k+l) \rceil$. (Od listu to bude o 1 menej.) Podobne ako pri nepárnom počte nôh, dva vrcholy s po sebe idúcimi číslami majú vzdialenosť aspoň n , pretože jeden je napísaný vo vzdialenosti $\lceil (i-1)/(k+l) \rceil$ a druhý $|l_j| - \lceil (i-1)/(k+l) \rceil + 1$. Pri prechode z nohy l_{k+l} na nohu l_1 nastáva zmena, vrcholy sú k sebe bližšie o jednu hranu, $|l_1|$ je však n , takže celková vzdialenosť je n . \square

Príklad 3.1.1. Antidilatácia cesty P_{22} (resp. P_{19}) do pavúčieho grafu $S_{3,3,3,4}$ (resp. $S_{2,3,3,4}$) je v oboch prípadoch 4. Konkrétne vnorenia môžeme vidieť na obrázku 3.3.

Poznámka 3.1.3. Z grafov na obrázku 3.3 si môžeme všimnúť systém číslovania vrcholov. V prípade párneho počtu nôh čísla vrcholov v rámci nohy klesajú resp. rastú. Na druhej strane, v prípade, že má graf nepárny počet nôh, sú čísla na nohu umiestňované striedavo z oboch strán.

Obr. 3.3: Antidilatácia cesty P_{22} (vľavo) a P_{19} (vpravo) do stromu $S_{3,3,3,4}$ resp. $S_{2,3,3,4}$

3.1.3 Horné a dolné odhady pre triedu $\{S_{1,n-k-1,k,1} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

V tejto časti sa budeme venovať antidilatácii cesty do $S_{1,n-k-1,k,1}$. Pri použití metódy 1 narazíme na problém, že horný odhad nie je tesný. Skúsime preto navrhnúť inú metódu, ktorá bude dávať pre tieto typy grafov tesný odhad.

Metóda 2.

1. Opakuj kroky 2–4 pre všetky $i \in \{1, \dots\}$.
2. Zvoľ množinu $V_1 = \{w \mid \text{dist}(v, w) \leq i, v \text{ je centrálny vrchol } S\}$.
3. Zvoľ množinu $V_2 = V \setminus V_1$.
4. Ak $|V_1| > |V_2| + 1$ skonči – odhad je $\max_{u,v \in V_1} \text{dist}(u, v)$.

Veta 3.1.5. *Odhad vypočítaný metódou 2 je horným odhadom antidilatácie cesty do pavúčieho grafu S .*

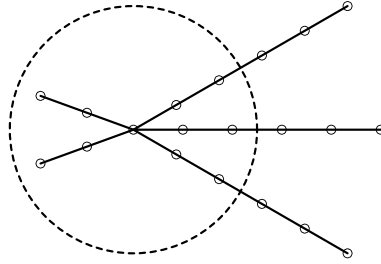
Dôkaz. Najprv si všimneme, že metóda 2 vráti pre každý pavúči graf nejaký odhad: pre dosť veľké i bude množina V_2 prázdna, preto bude $|V_1| > |V_2| + 1 = 1$. (Podľa definície pavúčich grafov je $|V_1| = |V| \geq 4$.)

Hlavnou myšlienkou tejto metódy je rozdeliť graf na dve množiny vrcholov V_1 a V_2 tak, aby každá dvojica vrcholov z V_1 bola od seba vzdialená maximálne d .³ Každá dvojica vrcholov z V_2 je od seba vzdialená aspoň $d + 2$. Ak platí, že $|V_1| > |V_2| + 1$, tak sú aspoň 2 po sebe idúce čísla priradené vrcholom v V_1 , to znamená, že antidilatácia môže byť najviac rovná d . □

³V metóde 2 volíme za V_1 vrcholy blízko centrálnemu vrcholu. Sú však možné aj iné voľby V_1 .

Poznámka 3.1.4. Táto metóda môže fungovať aj pre všeobecné hlavné grafy, ak budeme napr. voliť za V_1 vrcholy v istej vzdialenosti od centra grafu, alebo budeme množiny V_1 konštruovať postupne okolo všetkých vrcholov a nájdeme minimálny odhad.

Príklad 3.1.2. V pavúčom grafe $S_{3,5,2,2}$ môžeme množinu V_1 zvoliť tak, ako je znázornené na obrázku 3.4. Vidíme, že $|V_1| = 11$ a $|V_2| = 9$. Na základe metódy 2 dostávame horný odhad antidilatácie $\max_{u,v \in V_1} \text{dist}(u, v) = 4$.



Obr. 3.4: Príklad voľby množiny V_1 na pavúčich grafoch.

Veta 3.1.6. Antidilatácia grafu P_n do grafu $S_{1,n-k-1,k,1}$, kde $2k + 1 \leq n$, je rovná

$$\text{adil}(P_n, S_{1,n-k-1,k,1}) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - k.$$

Dôkaz. Najprv ukážeme horný odhad antidilatácie cesty P_n do grafu $S_{1,n-k-1,k,1}$. Využijeme pritom metódu 2. Nech V_1, V_2 sú množiny z poslednej iterácie metódy 2, nech l označuje polomer použitý v definícii V_1 . V množine V_1 sa nachádza $l + k + 1$ vrcholov. V množine V_2 sa nachádza $(n - k - 1) - l$ vrcholov. Z kroku 4. vieme, že vo V_1 je ostro viac vrcholov ako $|V_2| + 1$. Preto platí:

$$l + k + 1 > (n - k - l - 1) + 1.$$

Úpravami dostaneme nerovnosť

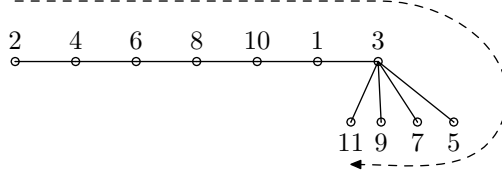
$$l > \frac{n - 2k - 1}{2} = \frac{n - 1}{2} - k.$$

To znamená, že hodnota antidilatácie je najviac $l + 1$. Po úprave dostávame ohraničenie antidilatácie zhora, ako

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - k + 1 = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - k.$$

Vo všeobecnosti môžeme optimálne vnorenie zostrojiť nasledovným spôsobom. Vytvoríme číslovaciu postupnosť $(2, 4, 6, \dots, 2m, 1, 3, \dots, 2m \pm 1)$. Budeme postupne číslovať vr-

choly grafu v smere šípky ako je na obrázku 3.5 a čísla budeme priradovať podľa číslovacej postupnosti.



Obr. 3.5: Antidilatácia graf cesty P_{11} do stromu $S_{1,6,4,1}$

Ukážeme, že vnorenie dosahuje požadovanú hodnotu antidilatácie. Najprv zistíme vzdialenosť d medzi vrcholmi s číslami $2m$ a $2m \pm 1$. Potom ukážeme, že žiadne dva vrcholy s po sebe idúcimi číslami, nie sú bližšie ako d a preto hodnota antidilatácie bude rovná práve tejto vzdialenosti. Vzdialenosť medzi týmito dvoma vrcholmi sa dá vyjadriť pomocou počtu nepárnych čísel na najdlhšej nohe nerátajúc centrálny vrchol. Ak si tento počet označíme ako j , dostávame

$$j = (n - k - 1) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Vzdialenosť d medzi vrcholmi $2m$ a $2m \pm 1$ potom môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned} d &= j + 2 = (n - k - 1) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \\ &= \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) - k + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - k + 1 \\ &= \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) - k + 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - k + 2 \end{aligned}$$

Čím dostávame hodnotu z tvrdenia. Teraz ešte ukážeme, že vzdialenosť medzi každou dvojicou vrcholov je aspoň d . Pre dvojicu vrcholov s po sebe idúcimi číslami takú, že jeden z vrcholov je na jednej z k nôh dĺžky 1 (označme ho u) a druhý na najdlhšej nohe (označme ho v), je zrejmé že vzdialenosť je aspoň taká, ako vzdialenosť medzi vrcholmi s číslami $2m$ a $2m \pm 1$ (ktorá je d), lebo v má párne číslo a teda vzdialenosť medzi centrálnym vrcholom a v je určite aspoň taká ako je vzdialenosť medzi centrálnym vrcholom a vrcholom s číslom $2m$. Vzdialenosť medzi centrálnym vrcholom a u je rovnaká ako vzdialenosť medzi centrálnym vrcholom a vrcholom s číslom $2m \pm 1$. Ak sú oba vrcholy u, v na najdlhšej nohe, tak vzdialenosť medzi nimi je rovnaká ako na ceste P_n a teda je aspoň d . \square

Príklad 3.1.3. Antidilatácia cesty P_{11} do pavúčieho grafu $S_{1,6,4,1}$ je rovná 3. Konkrétne vnorenie, kde sa táto hodnota dosahuje, môžeme vidieť na obrázku 3.5.

Poznámka 3.1.5. V prípade, že $2k + 1 > n$, vráti metóda 2 odhad 2. Ak nebudeme brať do úvahy prípad, keď má dlhšia noha dĺžku 1 (teda všetky nohy sú dĺžky 1 a nemôžeme hovoriť o pavúčom grafe s dvoma dĺžkami nôh), dá sa daný graf očíslovať nasledovne. Očíslujeme dlhšiu nohu spolu s centrálnym vrcholom a jednou kratšou nohou ako jednu cestu s $n - k + 1$ vrcholmi. Začneme od listu dlhšej nohy a číslujeme najprv párnymi číslami, potom nepárnymi číslami v rozsahu od 1 po $n - k + 1$. Je vidieť, že číslo $n - k + 1$ nebolo priradené centrálnemu vrcholu. Zvyšné vrcholy na kratších nohách očísľujeme zaradom od $n - k + 2$. Keďže počet vrcholov na dlhšej nohe je aspoň 2, v prvej časti nášho číslovania sme priradili čísla aspoň štyrom vrcholom. Preto je vzdialenosť po sebe idúcich čísel aspoň 2. Zvyšné čísla sú priradené na listy krátkych nôh, ktoré sú vo vzdialenosti 2, pretože ich oddeľuje centrálny vrchol.

3.1.4 Horné a dolné odhady pre olivovníky

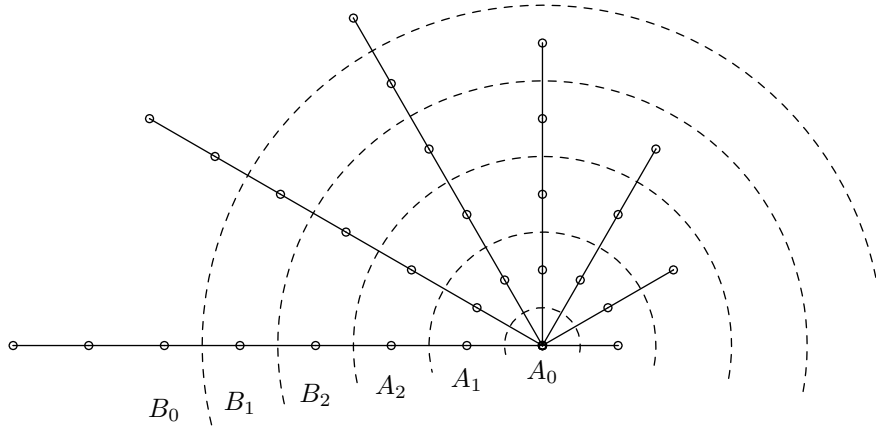
V ďalšom texte budeme skúmať špeciálny typ grafu – olivovník. Ako sa ukáže neskôr, metóda 2 nedáva tesný odhad pre olivovníky. Navrhujeme preto inú metódu.

Metóda 3.

1. Zvoľ odhad $d = \text{exc}(v)$, kde v je centrálny vrchol.⁴
2. $i = 0$.
3. Nech $A_i = \{w \in V \mid \text{dist}(v, w) \leq i\}$ a $B_i = \{w \in V \mid \exists u \in A_i, \text{dist}(u, w) \geq d\}$.
4. Ak $A_i \cap B_i \neq \emptyset$, skonči: odhad je d .
5. Ak $|A_i| - 1 = |B_i|$ a $A_i \cup B_i = V$, skonči: odhad je d .
6. Ak $|A_i| > |B_i|$, pokračuj od kroku 2 s $d = d - 1$.
7. Pokračuj od kroku 3 s $i = i + 1$.

Príklad 3.1.4. Pre olivovník O_7 metóda 3 začne s odhadom $d = 7$. Postupne prejde cez všetky nevyhovujúce hodnoty až po $d = 5$. Skonstruované množiny A_i a B_i pre hodnotu $d = 5$ môžeme vidieť na obrázku 3.6.

⁴ $\text{exc}(v)$ označuje excentricitu vrchola v .



Obr. 3.6: Rozdelenie olivovníka O_7 na množiny A_i , B_i podľa metódy 3. Platí $A_0 \subset A_1 \subset A_2$, $B_0 \subset B_1 \subset B_2$.

Veta 3.1.7. *Odhad vypočítaný metódou 3 je horným odhadom antidilatácie cesty do pavúčieho grafu S .*

Dôkaz. Najprv si všimneme, že metóda 3 vráti nejaký odhad pre ľubovoľný pavúči graf. Pre každé d existuje i také, že metóda 3 skončí buď na riadku 4 respektíve 5, alebo zamietne odhad d a prejde na testovanie odhadu $d - 1$. Takéto i je napríklad $i = d + 1$ alebo $i = \text{exc}(v)$. Ak $d = 1$, tak algoritmus toto d určite akceptuje lebo $A_0 = \{v\}$, $B_0 = V \setminus \{v\}$ a $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ to znamená, že skončíme na riadku 4.

Cieľom tejto metódy je postupne zlepšovať nejaký odhad antidilatácie. Začneme s odhadom d vypočítaným podľa prvej metódy. Pre všetky i od 0 budeme postupne konštruovať množiny A_i a B_i – množina A_i bude obsahovať všetky vrcholy vzdialené od centrálného vrchola o najviac i , množina B_i bude obsahovať všetky vrcholy, ktorých vzdialenosť je aspoň d od nejakého vrchola z A_i . V prípade, že $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ končíme s odhadom d . V prípade, že $|A_i| - 1 = |B_i|$ a zároveň $A_i \cup B_i = V$ tiež končíme s odhadom d . V opačnom prípade ak $|A_i| > |B_i|$, tak sa hodnota antidilatácie d nedá dosiahnuť, pokračujeme od začiatku s odhadom $d = d - 1$. V inom prípade pokračujeme s o jedno väčším i .

Na to aby sme ukázali, že odhad vypočítaný metódou 3 je naozaj horným odhadom, stačí ukázať, že v kroku 6 zamietame len také d , ktoré sa skutočne nedá dosiahnuť. Dôkaz rozdelíme na dva prípady, podľa toho, či $A_i \cup B_i = V$ alebo nie. Ak áno, z toho, že sme tento odhad neakceptovali v kroku 5 vyplýva, že $|A_i| - 1 > |B_i|$. Máme množinu A_i , ktorá má a vrcholov. Každý vrchol v A_i má dvoch susedov (vzhľadom na cestu) z množiny B_i , okrem dvoch vrcholov, ktoré môžu mať iba jedného suseda. Preto musí platiť, že $|B_i| \geq a - 1$. To je spor s $|A_i| - 1 > |B_i|$.

Prípado, keď $A_i \cup B_i \neq V$, rozdelíme na dva podprípady. Ak je v A_i len jeden vrchol, ktorý ma jedného suseda v B_i , musí mať B_i aspoň a vrcholov, čo je spor s $|A_i| > |B_i|$. Pozrime sa teraz na prípad, keď sú v A_i dva vrcholy, ktoré majú len jedného suseda v B_i . Ak sa pozrieme na súvislé úseky cesty P_n , v ktorých sa striedajú vrcholy z A_i a B_i , môžeme pozorovať nasledovnú vlastnosť. Ak obsahuje takýto úsek jeden koniec cesty, má rovnako veľa vrcholov z A_i ako z B_i . Ak neobsahuje žiaden koniec cesty, má viac vrcholov z B_i ako z A_i . Prípado, keď súvislý úsek obsahuje oba konce cesty nemôže nastať, lebo $A_i \cup B_i \neq V$. Preto musí platiť $|B_i| \geq |A_i|$, čo je ale spor s $|A_i| > |B_i|$. \square

Poznámka 3.1.6. V prípade olivovníkov ľahko vidieť, že v množine B_0 sa na najdlhšej nohe nachádza maximálne $n - 1$ vrcholov, kde n je dĺžka najdlhšej nohy, pretože d vypočítané metódou 3 je aspoň 2.

Označenie 3.1.1. Nohy olivovníka O_n označíme postupne l_1, \dots, l_n tak, že na nohe l_i sa nachádza i vrcholov. (Pričom nerátame centrálny vrchol.)

Pre všetky i , pre ktoré to má zmysel (vzhľadom na metódu 3) označíme $A'_i = A_i \setminus A_{i-1}$ a $B'_i = B_i \setminus B_{i-1}$.

Číslo nohy, na ktorej leží vrchol v budeme označovať $\text{leg}(v)$. (Ak vrchol v leží na nohe l_i , tak $\text{leg}(v) = i$.) Množinu⁵, do ktorej patrí vrchol v budeme označovať $\text{set}(v)$. (Ak v je centrálny vrchol, platí $\text{set}(v) = A'_0$.)

Veta 3.1.8. *Nech d je horný odhad antidilatácie cesty na olivovník O_n vyrátaný na základe metódy 3. Potom*

$$\text{adil}(P_{(n^2+n)/2+1}, O_n) = d.$$

Dôkaz. Prípado keď $n = 3$ vyriešime samostatne. Číslovanie O_3 je znázornené na obrázku 3.7. Ľahko vidieť, že antidilatácia je rovná 3, čo súhlasí s výsledkom metódy 3. Ak $n > 3$, skonštruujeme algoritmus na nájdenie vnorenia, v ktorom sa dosahuje hodnota antidilatácie d . Algoritmus je založený na postupnom číslovaní vrcholov z množín $A_0, B_0, \dots, A_{\lfloor d/2 \rfloor}, B_{\lfloor d/2 \rfloor}$, opísaných v metóde 3. (Môžeme si všimnúť, že $|A_1| = n + 1$.)

Centrálnemu vrcholu v (jedinému v A_0) priradíme číslo 1, číslo 2 priradíme listu na najdlhšej nohe. (Tento vrchol určite patrí do B_0 .) Vrcholom z množiny A'_1 priradíme ďalších n nepárnych čísel (t.j., od 3 po $2n + 1$), vrcholom z množiny B_1 priradíme ďalších n párnych čísel (t.j., od 4 po $2n + 2$). (Môže sa stať, že v množine B_1 neočíslujeme všetky vrcholy a to v prípade, ak $|B_1| > n + 1$. K neočíslovaným vrcholom sa ešte vrátíme.) Čísla 2, 4, $\dots, 2n + 2$ priradíme vrcholom z B_1 nasledovným spôsobom. Začíname v liste na nohe

⁵z množín $A'_0, A'_1, \dots, B'_0, B'_1, \dots$

l_n a pokračujeme smerom k centrálnemu vrcholu, potom prejdeme na nohu l_{n-1} a postup opakujeme, až kým nepriradíme všetky párne čísla po $2n+2$. Môžeme si všimnúť, že určite neskončíme na nohe l_n . (Pozri poznámku 3.1.6.) Označíme index nohy, na ktorej je číslo $2n+2$ ako c . Vrcholy v množine A'_1 označíme nasledovným spôsobom. Susedné číslo k číslam vrcholov u a w na nohe l_n , kde $\text{dist}(u, v) = n$ a $\text{dist}(w, v) = n - 1$, priradíme na (jediný) vrchol z množiny A_1 na nohe l_{n-1} . Podobne, susedné číslo k číslam vrcholov u a w na nohe l_i (pre $i > c$), kde $\text{dist}(u, v) = i$ a $\text{dist}(w, v) = i - 1$, priradíme na vrchol z množiny A'_1 na nohe l_{i-1} . V prípade, že sme na nohe l_c očíslovali viac ako jeden vrchol, priradíme susedné číslo k číslam vrcholov u a w na nohe l_c , kde $\text{dist}(u, v) = c$ a $\text{dist}(w, v) = c - 1$, na vrchol z A'_1 na nohe l_n . V prípade, že sme na nohe l_c očíslovali iba list, priradíme vrcholu z A'_1 na nohe l_n číslo o jedna menšie, ako je číslo listu na nohe l_c .⁶ Ostatné vrcholy v množine A_1 označíme nepoužitými nepárnymi číslami do $2n+1$ ľubovoľne, napríklad v poradí od nohy l_1 po nohu l_{c-1} .

V prípade, že sme v metóde 3 vytvorili aj množiny A_2, B_2 , budeme v ich číslovaní postupovať nasledovne. Označíme $k = \min_{w \in B'_2}(\text{leg}(w))$ a $m = \min_{w \in A'_2}(\text{leg}(w))$. Nepárne čísla od $2n+3$ priradíme postupne vrcholom z A'_2 na nohách $l_{k-1}, l_k, l_{k+1}, \dots, l_n, l_m, l_{m+1}, \dots, l_{k-2}$. Párne čísla od $2n+4$ priradíme postupne vrcholom z B'_2 na nohách $l_{k+1}, l_{k+2}, \dots, l_n, l_k$. Zvyšné párne čísla do $4n$ budeme priraďovať zatiaľ neočíslovaným vrcholom z B_1 od najnižšieho skóre, pričom skóre vrchola w počítame ako $\text{skóre}(w) = n \cdot \text{dist}(w, v) - \text{leg}(w)$. Takto sme očíslovali všetky vrcholy z A'_2 a B'_2 .

Analogicky očísľujeme aj všetky ďalšie množiny A'_i, B'_i . Nakoniec v prípade, že množina $C = V \setminus (A_{\lfloor d/2 \rfloor} \cup B_{\lfloor d/2 \rfloor})$ nie je prázdna, tak vrcholy z tejto množiny budeme číslovať postupne od nohy s najmenším číslom po nohu s najväčším číslom, všetkými číslami od čísla $x+1$, ak x bolo posledné číslo, ktoré sme priradili nejakému vrcholu.

V prípade, že v množine B_1 ešte existujú neočíslované vrcholy, budeme tieto vrcholy číslovať zatiaľ nepoužitými číslami, postupne od vrchola s najnižším skóre po vrchol s najvyšším skóre.

Potrebuje ukázať, že sa v takomto vnorení dosahuje vzdialenosť medzi susednými vrcholmi aspoň d . Z popisu číslovania vyplýva, že k číslam priradeným vrcholom z A'_i sú susedné čísla priradené vrcholom z B_i . Z popisu množín A_i a B_i v metóde 3 vyplýva, že ak tieto čísla nie sú priradené vrcholom na rovnakých nohách, je medzi nimi vzdialenosť aspoň d . Ostáva ukázať, že susedné čísla sú na rôznych nohách.

K číslu 1 je jediné susedné číslo 2, ktoré je priradené listu najdlhšej nohy, tento list

⁶V prípade, že $c = n - 1$, táto situácia nemôže nastať, ako vyplýva z pozorovania v poznámke 3.1.6.

patrí do B_0 pretože d je nanajvýš dĺžka najdlhšej nohy. Čísla vrcholov v A_1 na nohe l_i , kde $i \in \{c, \dots, n-1\}$ majú oboch susedov na nohe l_{i+1} . Číslo vrchola v A_1 na nohe l_n má buď oboch susedov na nohe l_c alebo jedného na l_{c-1} a druhého na l_c . V takomto prípade $c \neq n-1$, ako hovorí poznámka 3.1.6. Zvyšné vrcholy z A_1 nie sú na nohách, ktoré v B_1 (zo začiatku) číslujeme, teda susedné čísla k týmto číslam sú na rôznych nohách.

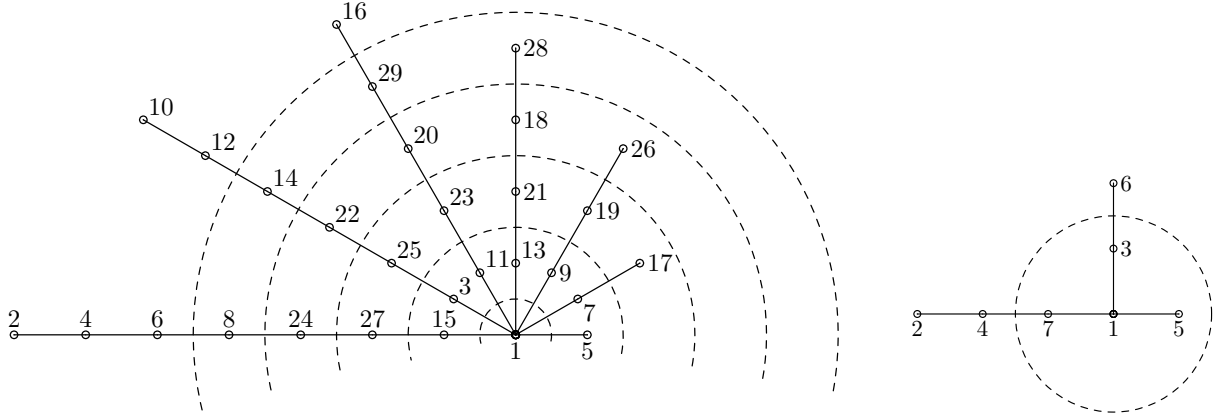
Čísla vrcholov z A'_2 na nohách l_i , kde $i \in \{k-1, \dots, n-2\}$ majú susedov na nohách l_{i+1} a l_{i+2} , až na prípad, ak $i = k-1$, vtedy je jeden zo susedov na nohe l_{i+2} a druhý niekde v B_1 , pričom vieme, že v B_1 nie je žiaden vrchol na nohe l_{k-1} . (Toto platí aj pre všetky ostatné A'_i , ktoré číslujeme analogicky ku A'_2 .) Vrchol z A'_2 na nohe l_{n-1} má susedné čísla na nohách l_n a l_k . Vrchol z A'_2 na nohe l_n má susedné číslo vo vrchole z B'_2 na nohe l_k a druhé susedné číslo vo vrchole z B_1 s najnižším skóre, ktorý je zatiaľ nepoužitý. (Nie je to na nohe l_n , pretože všetky vrcholy z B_1 na nohe l_n už sú použité. Analogická úvaha platí aj pre ostatné A'_i .) Čísla vrcholov z A'_2 na nohách l_i , kde $i \in \{m, \dots, k-2\}$ majú susedné čísla vo vrchole z B_1 . Žiadne vrcholy z B_1 však na týchto nohách nie sú.

Nakoniec vrcholy z $V \setminus (A_{\lfloor d/2 \rfloor} \cup B_{\lfloor d/2 \rfloor})$ číslujeme zaradom, tieto sú však v dostatočnej vzdialenosti. Neočíslované vrcholy z B_1 číslujeme podľa skóre. Žiadne dve za sebou idúce čísla nebudú priradené vrcholom na rovnakej nohe, pretože platí, že vrcholy v B_1 sú na nohách postupne v počte $1, 2, \dots, t$ a na nohe l_c ich môže byť nanajvýš t . Potom z toho, že vrcholy číslujeme podľa skóre vyplýva, že na žiadnej nohe nebudú dve za sebou idúce čísla. \square

Príklad 3.1.5. Antidilatácia cesty P_{29} do olivovníka O_7 je rovná 5. Vnorenie, ktoré sme našli na základe postupu popísanom v dôkaze predchádzajúcej vety je znázornené na obrázku 3.7 vľavo. Antidilatácia cesty P_7 do olivovníka O_3 je rovná trom. Príslušné vnorenie je znázornené na obrázku 3.7 vpravo.

3.1.5 Horné a dolné odhady pre triedu $\{S_{k_1, n_1, k_2, n_2} \mid k_1, n_1, k_2, n_2 \in \mathbb{N}\}$

V tejto sekcii využijeme horný odhad získaný pomocou metódy 3. Narozdiel od predchádzajúcich dvoch metód, metóda 3 dáva tesný odhad pre všetky doteraz spomenuté podtriedy pavúčich grafov. Ako uvidíme v nasledujúcej vete, tesný odhad dosiahneme aj pri použití tejto metódy na grafy S_{k_1, n_1, k_2, n_2} . To naznačuje, že metóda 3 je všeobecnejšie použiteľná. (V porovnaní s prvými dvoma metódami.)

Obr. 3.7: Antidilatácia cesty P_{29} do olivovníka O_7 Antidilatácia z P_7 do O_3

Veta 3.1.9. *Nech d je horný odhad antidilatácie cesty na pavúči graf S_{k_1, n_1, k_2, n_2} vyrátaný na základe metódy 3, kde $n_1 \geq n_2$, $k_1 \geq 3$. Potom*

$$\text{adil}(P_{k_1 n_1 + k_2 n_2 + 1}, S_{k_1, n_1, k_2, n_2}) = d.$$

Dôkaz. V prípade, že $n_1 \leq n_2 + 1$, je tvrdenie zrejmé z vety 3.1.4. (Metóda 3 začne s odhadom $d = n_1$, túto hodnotu nemôže zamietnuť, pretože sa daná hodnota dá dosiahnuť.) Podobne môžeme predpokladať, že $k_2 \geq 1$, pretože v prípade $k_2 = 0$ je tvrdenie zrejmé z vety 3.1.4.

Pri konštruovaní vhodného vnorenia budeme postupovať podobne ako vo vete 3.1.8 o antidilatácii cesty na olivovník. Budeme číslovať vrcholy množín $A'_0, B'_0, \dots, A'_i, B'_i$. V prípade, že $|A'_i| > |B'_i|$, použijeme nadbytočné vrcholy v B_0 . (Tieto musia existovať, lebo $|A_i| \leq |B_i|$.) Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že nohy s dĺžkou n_1 sú l_1, \dots, l_{k_1} a nohy s dĺžkou n_2 sú $l_{k_1+1}, l_{k_1+2}, \dots, l_{k_1+k_2}$. Číslo 1 priradíme centrálnemu vrcholu.

Ak B'_1 obsahuje iba vrcholy na nohách l_1, \dots, l_{k_1} , postupujeme nasledovne. Prvých k_1 párnych čísel priradíme postupne listom na nohách l_1, l_2, \dots, l_{k_1} , ktoré sú v množine $B_0 \subset B_1$. Nepárne čísla $3, 5, \dots, 2k_1 + 1$ priradíme vrcholom z A'_1 na dlhšie nohy na vrcholy vo vzdialenosti 1 od centrálného vrchola a to takým spôsobom, že na nohe l_i pre $i \in \{2, 3, \dots, k_1\}$ bude číslo o jedna väčšie ako je v liste na nohe $l_{(i-2 \bmod k_1)+1}$. Ostatným vrcholom z množiny A_1 môžeme priradiť zvyšné nepárne čísla ľubovoľne, napríklad v závislosti od čísla nohy. Ďalšie ešte neočíslované vrcholy z množiny B_1 môžeme očíslovať zvyšnými párными číslami do $2(k_1 + k_2 + 1)$ ľubovoľne, napríklad podľa skóre, ktoré pre vrchol w vypočítame nasledovne $\text{skóre}(w) = n_1 \cdot \text{dist}(w, v) - \text{leg}(w)$.

V prípade, že B'_1 obsahuje vrcholy na všetkých nohách, postupujeme nasledovne. Prvých $k_1 + k_2$ párnych čísel priradíme postupne listom na nohách $l_1, \dots, l_{k_1+k_2}$, o ktorých vieme, že patria do množiny B_1 . Nepárne čísla $3, 5, \dots, 2(k_1 + k_2) + 1$ priradíme postupne vrcholom z A_1 na nohách $l_3, l_4, \dots, l_{k_1+k_2}, l_1, l_2$.

Teraz rozoberieme číslovanie A'_i a B'_i . Nech x je posledné doteraz priradené číslo. Znovu číslovanie rozdelíme na dva prípady: ak $|A'_i| = |B'_i|$ a ak $|A'_i| > |B'_i|$. Ak $|A'_i| = |B'_i|$, budeme priraďovať čísla $x+2, x+4, \dots, x+2|A'_i|$ do množiny B'_i a čísla $x+1, x+3, \dots, x+2|A'_i| - 1$ do A'_i tak, že začneme číslovať taký vrchol z množiny A'_i , ktorý neleží na nohe s vrcholom, ktorý bol posledný očíslovaný na predchádzajúcej úrovni (v B'_{i-1}). Ak priradíme číslo y na nohu l_j v A'_i , nasledovné číslo $y+1$ priradíme na nohu $l_{(j+1) \bmod (k_1+k_2)+1}$ v množine B'_i . Podobne postupujeme s číslom $y+2$ na nohe $l_{j \bmod (k_1+k_2)+1}$.

Ak $|A'_i| > |B'_i|$ priradíme čísla $x+1, \dots, x+2|B'_i|$ tak, že začneme číslovať taký vrchol z množiny A'_i na jednej z nôh l_1, \dots, l_{k_1} , ktorý neleží na nohe s vrcholom, ktorý bol posledný očíslovaný na predchádzajúcej úrovni. Ak priradíme y na nohu l_j v množine A'_i , nasledovné číslo $y+1$ priradíme na nohu $l_{((j+1) \bmod k_1)+1}$ v množine B'_i . Analogicky postupujeme s $y+2$, toto číslo priradíme na nohu $l_{(j \bmod k_1)+1}$ do množiny A'_i . Čísla $x+2|B'_i| + 1, x+2|B'_i| + 3, \dots, x+2|A'_i| - 1$ priradíme neočíslovaným vrcholom z A'_i ľubovoľne, napríklad podľa čísla nohy. Čísla $x+2|B'_i| + 2, x+2|B'_i| + 4, \dots, x+2|A'_i|$ budeme priraďovať do $B_1 \subset B_i$ na neočíslované vrcholy podľa skóre.

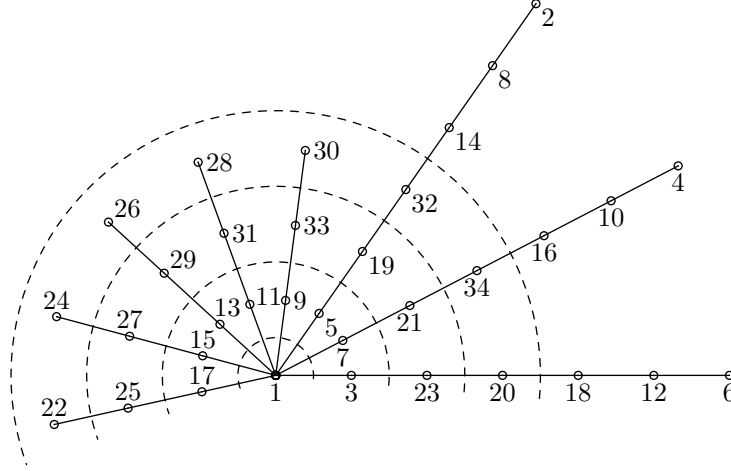
Ešte neočíslované vrcholy, ktoré sa nenachádzajú v žiadnej množine A_i, B_i (t.j., tá úroveň, pre ktorú už $A_i \cap B_i \neq \emptyset$) očísľujeme zaradom podľa čísla nohy tak, aby sme nezačínali na tej nohe, na ktorej sme skončili pri číslovaní poslednej úrovne. Neočíslované vrcholy v B_1 môžeme očíslovať zaradom podľa skóre. V prípade, že by sme prvé takto priradené číslo mali dať na rovnakú nohu, ako doteraz posledné priradené číslo, vymeníme poradie dvoch vrcholov s najnižším skóre. (Tieto vrcholy sú určite na rôznych nohách.)

Podobne ako v dôkaze vety 3.1.8, aj tu má každý vrchol z A'_i oboch susedov v B_i . Z konštrukcie množín A_i a B_i vyplýva, že ak sú na rôznych nohách, sú vo vzdialenosti aspoň d . Preto chceme ukázať, že každé dve po sebe idúce čísla sú priradené vrcholom na rôznych nohách.⁷ Z popisu číslovania vidieť, že vrcholy v rámci jednej úrovne sú očíslované vyhovujúco. Pri prechode medzi úrovňami sme vždy priraďovali prvé číslo na inú nohu, ako doteraz posledné priradené číslo. \square

Príklad 3.1.6. Podľa predchádzajúcej vety je antidilatácia cesty P_{34} do pavúcieho grafu

⁷Až na čísla 1 a 2, kde je číslo 1 priradené centrálnemu vrcholu a nachádza sa teda na každej nohe. To ale nevádi, pretože vzdialenosť medzi centrálnym vrcholom a listom je $n_1 \geq d$.

$S_{3,6,5,3}$ rovná 5. Vnorenie skonštruované z popisu v dôkaze predchádzajúcej vety môžeme vidieť na obrázku 3.8.



Obr. 3.8: Antidilatácia cesty P_{34} do stromu $S_{3,6,5,3}$

Veta 3.1.10. *Nech d je horný odhad antidilatácie cesty na pavúčie grafy S_{k_1, n_1, k_2, n_2} vybraný pomocou metódy 3, kde $n_1 \geq n_2$, $k_1 = 2$. Potom*

$$\text{adil}(P_{k_1 n_1 + k_2 n_2 + 1}, S_{k_1, n_1, k_2, n_2}) = d.$$

Dôkaz. V prípade, že $n_1 \leq n_2 + 1$, je tvrdenie zrejmé z vety 3.1.4. (Metóda 3 začne s odhadom $d = n_1$, túto hodnotu nemôže zamietnuť, pretože sa daná hodnota dá dosiahnuť.) Budeme preto predpokladať, že $n_1 > n_2 + 1$.

Podobne ako vo vete 3.1.9 budeme číslovať vrcholy z množín $A_0, A_1, \dots, A_{\lfloor d/2 \rfloor}$ a $B_0, B_1, \dots, B_{\lfloor d/2 \rfloor}$. Dlhé nohy si označíme ako l_1, l_2 a krátke l_3, \dots, l_{k_2+2} , centrálny vrchol bude mať číslo 1.

Najskôr vyriešime prípad, keď B_1 obsahuje vrcholy z kratších nôh. Číslo 2 a 4 priradíme postupne na nohu l_1 smerom od listu, číslo 3 priradíme na vrchol z A_1 na nohe l_2 . Číslo 5 priradíme na vrchol z A_1 na nohe l_3 . Číslo 8 a 6 priradíme postupne na nohu l_2 smerom od listu. Číslo 7 priradíme na vrchol z A_1 na nohe l_1 . Vrcholy z A_1 na nohách l_4 až $l_{k_1+k_2}$ očísľujeme nepárnymi číslami od 9 po $2(k_1 + k_2) + 1$. Príslušné párne čísla od 10 po $2(k_1 + k_2) + 2$ priradíme postupne listom na nohy $l_3, \dots, l_{k_1+k_2-1}$. Nasledovné *nepárne* číslo $2(k_1 + k_2) + 3$ priradíme na nohu $l_{k_1+k_2}$. Zatiaľ neočíslované vrcholy v B_1 budeme číslovať postupne číslami od $2(k_1 + k_2) + 4$ podľa skóre, $\text{skóre}(w) = n_1 \cdot \text{dist}(w, v) - \text{leg}(w)$. Keďže

B_1 obsahuje vrcholy z kratších nôh, budú takéto vrcholy obsahovať aj ostatné množiny B_i . Preto môžeme zvyšné vrcholy očíslovať podobne, ako v predchádzajúcich vetách. Teda ak bolo posledné číslo x priradené vrcholu na nohe l_j v množine B_i , číslo $x + 1$ priradíme na vrchol z A_i na nohu $l_{(j-2 \bmod k_1+k_2)+1}$, číslo $x + 2$ priradíme na vrchol z B_i na nohu $l_{(j \bmod k_1+k_2)+1}$. Takto pokračujeme, až kým neočíslujeme všetky vrcholy z $A_i \cup B_i$. Vrcholy v $C = V \setminus (A_{\lfloor d/2 \rfloor} \cup B_{\lfloor d/2 \rfloor})$ môžeme číslovať zaradom tak, aby sme nezačínali na nohe, na ktorú sme priradili zatiaľ posledné číslo.

V prípade, že B_1 neobsahuje vrcholy z kratších nôh, budeme postupovať nasledovne. Čísla 2 a 4 priradíme postupne na nohu l_1 smerom od listu, číslo 3 priradíme na vrchol z A_1 na nohe l_2 . Číslo 5 priradíme na vrchol z A_1 na nohe l_3 . Čísla 8 a 6 priradíme postupne na nohu l_2 smerom od listu. Číslo 7 priradíme na vrchol z A_1 na nohe l_1 . Vrcholy z A_1 na nohách l_4 až $l_{k_1+k_2}$ očísľujeme nepárnymi číslami od 9 po $2(k_1 + k_2) + 1$. Párne čísla od 10 po $2(k_1 + k_2) + 2$ priradíme vrcholom do množiny B_1 , striedavo na nohy l_1 a l_2 smerom od listov.

Ak pre nejakú úroveň sú v B_i vrcholy z kratších nôh, budeme používať podobné číslovanie ako v prvom prípade. Ak bolo posledné číslo x priradené vrcholu na nohe l_j v množine B_i , číslo $x + 1$ priradíme na vrchol z A_i na nohu $l_{(j-2 \bmod k_1+k_2)+1}$, číslo $x + 2$ priradíme na vrchol z B_i na nohu $l_{(j \bmod k_1+k_2)+1}$. Takto pokračujeme, až kým neočíslujeme všetky vrcholy z $A_i \cup B_i$. Neočíslované vrcholy v B_1 a vrcholy v $C = V \setminus (A_{\lfloor d/2 \rfloor} \cup B_{\lfloor d/2 \rfloor})$ môžeme číslovať zaradom tak, aby sme nezačínali na nohe, na ktorú sme priradili zatiaľ posledné číslo.

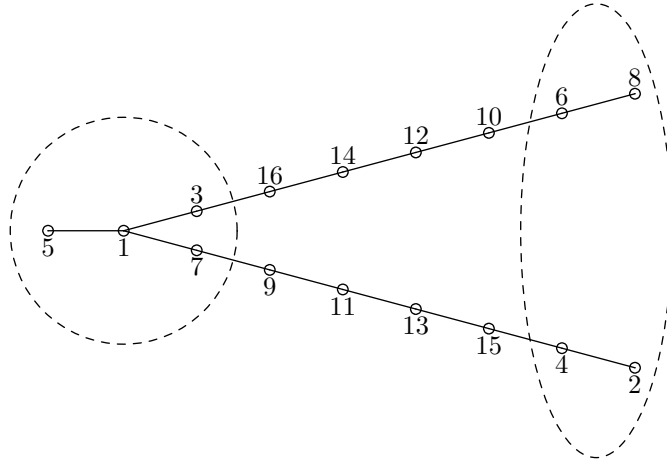
Ak pre nejakú úroveň budú v B_i len vrcholy z dlhších nôh a v A_i aj vrcholy z kratších nôh, postupujeme nasledovne. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že posledné priradené číslo x bolo priradené na nohu l_2 . (V prípade, že toto číslo bolo priradené na nohu l_1 , dočasne zmeníme označenia prvých dvoch nôh.) Číslo $x + 1$ priradíme na nohu l_1 do množiny A_i , číslo $x + 2$ priradíme na nohu l_2 do množiny B_i na prvý neočíslovaný vrchol smerom od listu. Číslo $x + 3$ priradíme na nohu l_3 do množiny A_i , číslo $x + 4$ priradíme na nohu l_1 do množiny B_i na prvý neočíslovaný vrchol smerom od listu. Číslo $x + 5$ priradíme na nohu l_2 do množiny A_i , číslo $x + 6$ priradíme na nohu l_1 do množiny B_i na prvý neočíslovaný vrchol smerom od listu. Číslami $x + 7, \dots, x + 2(k_1 + k_2) + 1$ očísľujeme zaradom vrcholy z A_i na nohách $l_4, \dots, l_{k_1+k_2}$. Čísla $x + 8, \dots, x + 2(k_1 + k_2) + 2$ priradíme do množiny B_i striedavo na nohy l_1, l_2 smerom od listov.

V prípade, že množiny A_i, B_i ($i \in \{c, c + 1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor\}$), ktoré sú zatiaľ neočíslované, obsahujú len vrcholy z dvoch dlhých nôh l_1, l_2 , postupujeme nasledovne. Bez ujmy na

všeobecnosti predpokladajme, že posledné doteraz priradené číslo x bolo priradené vrcholu na nohe l_2 . Budeme číslovať naraz všetky vrcholy z $C = \bigcup(A_i \cup B_i)$. pre všetky $i \in \{c, c+1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor\}$. Čísla $x+1, x+3, \dots, x+|C|-1$ priradíme vrcholom na nohu l_1 postupne smerom od centrálného vrchola po list. Čísla $x+2, x+4, \dots, x+|C|$ priradíme vrcholom na nohu l_2 postupne smerom od listu po centrálny vrchol.

Vrcholy v $C = V \setminus (A_{\lfloor d/2 \rfloor} \cup B_{\lfloor d/2 \rfloor})$ môžeme číslovať zaradom tak, aby sme nezačínali na nohe, na ktorú sme priradili zatiaľ posledné číslo.

Môžeme si všimnúť, že vzdialenosť vrcholov po sebe idúcich čísel je vždy aspoň d . Je to preto, lebo ak je číslo x na vrchole v A'_i , tak číslo $x+1$ je v B_i a ak je číslo x v B'_i , tak je číslo $x+1$ vo $V \setminus A_{i-1}$. Dávame si pozor na to, aby po sebe idúce čísla boli na rôznych nohách. Toto platí aj v prípade, keď čísloujeme už len vrcholy na dvoch dlhších nohách. \square



Obr. 3.9: Antidilatácia cesty P_{16} do stromu $S_{2,7,1,1}$

Príklad 3.1.7. Podľa predchádzajúcej vety je antidilatácia cesty P_{16} do pavúčieho grafu $S_{2,7,1,1}$ rovná 7. Vnorenie skonštruované z popisu v dôkaze predchádzajúcej vety môžeme vidieť na obrázku 3.9.

Veta 3.1.11. Antidilatácia cesty $P_{k_1 n_1 + k_2 n_2 + 1}$ do S_{k_1, n_1, k_2, n_2} , kde $n_1 \geq n_2$, $k_1 = 1$ je rovná hodnote vyrátanej Metódou 3.

Dôkaz. Musí platiť, že $k_2 \geq 2$, inak graf nie je pavúči graf. (Centrálny vrchol nemá dostatočný stupeň.)

Najprv rozoberieme prípad, keď $d > 2n_2$. Označíme si kratšie nohy (s dĺžkou n_2) ako l_1, l_2, \dots, l_{k_2} . V prvom kroku budeme priraďovať nepárne čísla $1, 3, 5, \dots, 2k_2 - 1$ listom

(vrcholy vo vzdialenosti n_2) na nohách v poradí l_1, l_2, \dots, l_{k_2} . V druhom kroku priradíme ďalšie nepárne čísla $2k_2 + 1, 2k_2 + 3, \dots, 4k_2 - 1$ na vrcholy vo vzdialenosti $n_2 - 1$ od centrálného vrchola na nohy l_1, l_2, \dots, l_{k_2} . Takýchto kôl urobíme n_2 a následne budeme priraďovať ostatné nepárne čísla centrálnemu vrcholu a vrcholom na jedinej dlhej nohe v poradí od centrálného vrchola. Ak posledné nepárne číslo priradíme vrcholu vo vzdialenosti h od centrálného vrchola, tak párne čísla priradíme postupne vrcholom na dlhej nohe smerom ku listu, začínajúc vrcholom vo vzdialenosti $h + 1$ od centrálného vrchola.

Na dokázanie, že takýmto číslovaním dosiahneme hodnotu antidilatácie d , stačí ukázať, že číslo 2 je priradené vrcholu vo vzdialenosti d od listu na nohe l_1 . Pre všetky ostatné po sebe idúce čísla platí, že vrcholy, ktorým boli priradené sú od seba vzdialené aspoň d . Vieme, že $d > 2n_2$, preto pre množiny A_{n_2}, B_{n_2} vyrátané pre d v metóde 3 musí platiť, že $|A_{n_2}| \leq |B_{n_2}|$ alebo $|A_{n_2}| = |B_{n_2}| + 1$, ak $A_{n_2} \cup B_{n_2} = V$. Druhý prípad je jednoduchší, vtedy je totiž $d = 2n_2 + 1$ a číslovaním popísaným vyššie priradíme číslo 2 práve na vrchol na dlhšej nohe vo vzdialenosti $n_2 + 1$ od centrálného vrchola. Pozrime sa teraz na prípad $|A_{n_2}| \leq |B_{n_2}|$. V takomto prípade musí platiť, že $n_1 \geq n_2 + (k_2 + 1)n_2 + 1$. Nech $m = n_1 - (n_2 + (k_2 + 1)n_2 + 1)$. Ukážeme, že hodnota vyrátaná metódou 3 je rovnaká, ako vzdialenosť vrcholov s číslami 1 a 2, a síce $\lfloor (m + 1)/2 \rfloor + 2n_2 + 1$.

Začneme dokazovaním vzdialenosti vrcholov s číslami 1 a 2. Párnych čísel od 1 po $n_2k_2 + n_1 + 1$ je dolná celá časť polovice z celkového počtu, preto je číslo 2 priradené vo vzdialenosti $n_1 - \lfloor (n_1 + n_2k_2 + 1)/2 \rfloor + 1$ od centrálného vrchola. To znamená, že vzdialenosť vrcholov s číslami 1 a 2 je

$$n_1 - \left\lfloor \frac{n_1 + n_2k_2 + 1}{2} \right\rfloor + 1 + n_2. \quad (3.1)$$

Chceme ukázať, že

$$n_1 - \left\lfloor \frac{n_1 + n_2k_2 + 1}{2} \right\rfloor + 1 + n_2 = \left\lfloor \frac{m + 1}{2} \right\rfloor + 2n_2 + 1.$$

Postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}
 n_1 - \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2 + 1}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{m + 1}{2} \right\rfloor + n_2, \\
 n_1 &= \left\lfloor \frac{n_1 - n_2(k_2 + 2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2 + 1}{2} \right\rfloor + n_2, \\
 n_1 &= \left\lfloor \frac{n_1 - n_2 k_2}{2} \right\rfloor - n_2 + \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2 + 1}{2} \right\rfloor + n_2, \\
 n_1 &= \left\lfloor \frac{n_1 - n_2 k_2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2 + 1}{2} \right\rfloor,
 \end{aligned}$$

čo môžeme ďalej upraviť na

$$\begin{aligned}
 n_1 + n_2 k_2 &= \left\lfloor \frac{n_1 - n_2 k_2}{2} + n_2 k_2 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2 + 1}{2} \right\rfloor, \\
 n_1 + n_2 k_2 &= \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2 + 1}{2} \right\rfloor, \\
 n_1 + n_2 k_2 &= \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 k_2}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n_1 + n_2 k_2}{2} \right\rceil, \\
 n_1 + n_2 k_2 &= n_1 + n_2 k_2.
 \end{aligned}$$

Keďže všetky úpravy boli ekvivalentné, pôvodná rovnosť platí. Ostáva ukázať, že hodnota d vypočítaná metódou 3 je rovná hodnote (3.1). Budeme analyzovať správanie metódy 3 pre hodnoty odhadu od $2n_2 + m + 2$ nižšie. Môžeme si všimnúť, že množiny A_i nezávisia od práve analyzovaného odhadu, preto budú mať všetky rovnakú veľkosť, ktorú označíme a_i . Pozrime sa ako sa metóda 3 správa na odhade $2n_2 + m + 2$. Vieme, že $|B_{n_2}| = a_{n_2} - 1$, preto bude táto hodnota metódou zamietnutá. (Môžeme si všimnúť, že $|A_i| \leq |B_i|$ pre všetky $i < n_2$, pretože A_{i-1} má o $k_2 + 1$ vrcholov menej, ako A_i , pričom v prípade množín B_i a B_{i+1} sa tento počet líši len o 1.) To znamená, že hodnota vrátená metódou 3 je nanajvyš $2n_2 + m + 1$.

Ak $m = 0$, tak $d = 2n_2 + 1 + \lfloor (m + 1)/2 \rfloor$, čo sme chceli ukázať. Inak sa pozrieme na správanie metódy pre odhad $2n_2 + m + 1$. Pozrieme sa na veľkosť množín A_{n_2+1} a B_{n_2+1} . Platí, že $a_{n_2+1} = a_{n_2} + 1$ a $|B_{n_2+1}| = |B_{n_2}| = a_{n_2}$. Ak $A_{n_2+1} \cup B_{n_2+1} = V$, je hodnota $2n_2 + m + 1$ vrátená metódou 3. (Táto situácia nastáva pre $m = 1$.) V opačnom prípade je hodnota $2n_2 + m + 1$ metódou 3 zamietnutá. Zmienime ešte, že $|V \setminus (A_{n_2} \cup B_{n_2})| = m$ a $|V \setminus (A_{n_2+1} \cup B_{n_2+1})| = m - 1$. Pokračujeme s hodnotou o jedna menšou, $2n_2 + m$. Pre túto hodnotu budú príslušné množiny na úrovni $n_2 + 1$ rovnako veľké (v množine B_{n_2+1} je

o jeden vrchol viac, ako v prípade odhadu $2n_2 + m + 1$), no na nasledujúcej úrovni bude už situácia znova rovnaká, $|A_{n_2+2}| = |B_{n_2+2}| + 1$. Môžeme si všimnúť, že pre danú hodnotu horného odhadu je $|V \setminus (A_{n_2+1} \cup B_{n_2+1})| = m - 2$.

Analogicky pokračujeme pre ďalšie horné odhady. Pre odhad $2n_2 + m + 2 - i$ je prvá problematická úroveň $n_2 + i$, kde $|A_{n_2+i}| = |B_{n_2+i}| + 1$ a $|V \setminus (A_{n_2+i} \cup B_{n_2+i})| = m - 2(i - 1)$. Na zistenie odhadu, ktorý vráti metóda 3 nás zaujíma, kedy $m - 2(i - 1) \leq 0$. To nastane presne pre $i = \lfloor m/2 \rfloor + 1$, čím dostávame

$$d = 2n_2 + m + 2 - i = 2n_2 + m + 2 - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 = 2n_2 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1 = 2n_2 + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Teraz prejdeme na prípad, keď $d \leq 2n_2$. V takomto prípade budeme pri číslovaní postupovať v dvoch fázach. Označme najdlhšiu nohu grafu ako l_1 a zvyšné nohy postupne l_2, \dots, l_{k_2+1} . Ďalej označme $C = V \setminus (A_{\lfloor d/2 \rfloor} \cup B_{\lfloor d/2 \rfloor})$.

1. fáza: Ak $C \neq \emptyset$, očísľujeme najprv vrcholy v množine C postupne číslami $1, \dots, k_2 + 1$, postupne cez všetky nohy l_1, \dots, l_{k_2+1} . Ďalej budeme číslovať množiny⁸ $A'_{\lfloor d/2 \rfloor}$ a $B'_{\lfloor d/2 \rfloor}$, tak, že vrcholom v množine $B'_{\lfloor d/2 \rfloor}$ priradíme čísla $k_2 + 2, k_2 + 4, \dots, k_2 + 2(k_2 + 1)$ postupne na nohy l_1, \dots, l_{k_2+1} a vrcholom v množine $A'_{\lfloor d/2 \rfloor}$ priradíme čísla $k_2 + 3, k_2 + 5, \dots, k_2 + 2(k_2 + 1) + 1$ postupne na nohy $l_3, \dots, l_{k_2+1}, l_1, l_2$. Noha l_3 vždy existuje, pretože $k_2 \geq 2$.

Analogicky pokračujeme pre všetky i od $\lfloor d/2 \rfloor - 1$ nižšie, také, že B'_i obsahuje vrcholy na krátkych nohách. Ak sme posledné číslo x priradili na nohu l_3 vrcholu z A'_{i+1} , čísla $x + 1, \dots, x + 2k_2 + 1$ priradíme vrcholom z množiny B'_i postupne na nohy l_1, \dots, l_{k_2+1} . Čísla $x + 2, \dots, x + 2(k_2 + 1)$ priradíme vrcholom z množiny A'_i postupne na nohy $l_3, \dots, l_{k_2+1}, l_1, l_2$.

Takto sme očíslovali všetky množiny A'_i, B'_i také, že B'_i malo vrcholy na kratších nohách. Teraz očísľujeme vrcholy v A_i a B_i , pričom B_i nemá vrcholy na krátkych nohách. Ak x bolo posledne priradené číslo, budeme priradovať postupne čísla $x + 2, x + 4, \dots$, najprv na vrcholy nohy l_3 v A_i , centrálnemu vrcholu, vrcholom na l_1 z A_i a nakoniec zvyšným ešte neočíslovaným vrcholom z A_i . Nech posledné číslo priradené do A_i je y . Čísla $x + 1, x + 3, \dots, y - 1$ priradíme na nohu l_1 vrcholom z B_i postupne smerom k listu.

2. fáza: Momentálne máme očíslované všetky vrcholy na krátkych nohách a niekoľko vrcholov na dlhej nohe smerom od centrálného vrchola. Ostáva nám dočíslovať vrcholy na dlhšej nohe. Nech je počet neočíslovaných vrcholov o . Posunieme všetky čísla, ktoré boli

⁸Pripomeňme, že $A'_0 = A_0, A'_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Analogicky pre B'_i .

priradené vrcholom na nohe l_1 , na vrcholy vo vzdialenosti $\lfloor o/2 \rfloor$ smerom k listu. Tým dostaneme dva úseky neočíslovaných vrcholov na nohe l_1 , oddelené úsekom očíslovaných vrcholov. Môžeme teda priradovať čísla $x+1, x+3, \dots$ úseku ktorý obsahuje list, smerom k listu a čísla $x+2, x+4, \dots$ úseku ktorý neobsahuje list smerom od centrálného vrchola.

Ostáva ukázať, že vzdialenosť každých dvoch po sebe idúcich čísel je aspoň d . V prvej fáze sme priradovali čísla i a $i+1$ vždy do množín A_k a B_k , pri prechode medzi úrovňami do B_k a A_{k+1} . V oboch prípadoch sme tieto čísla priradovali na vrcholy na rôznych nohách, preto ich vzdialenosť bude aspoň d . V druhej fáze sme čísla nechali na rovnakej nohe, ako boli v prvej fáze, posunuli sme ich však smerom k listu, preto bude vzdialenosť medzi susednými číslami i a $i+1$, z ktorých je jedno priradené na dlhú nohu, aspoň $d + \lfloor o/2 \rfloor$. Všimneme si ešte, že vzdialenosť čísla x priradeného v 1. fáze na nohu l_3 do A_i (pre také i , že B_i nemá vrcholy na krátkych nohách) a čísla $x+1$ priradeného v 1. fáze na dlhú nohu v B_i je aspoň d . Preto aj vzdialenosť medzi centrálnym vrcholom a vrcholom s číslom o jedna väčším, ako má centrálny vrchol, je d , a teda počet vrcholov očíslovaných v prvej fáze na nohe l_1 je aspoň d . Ak dáme susedné čísla striedavo na úsek neočíslovaných vrcholov pri liste a úsek neočíslovaných vrcholov pri centrálnom vrchole, budú tieto čísla dostatočne vzdialené. \square

Príklad 3.1.8. Antidilatácia cesty P_{25} do $S_{1,12,3,4}$ je rovná 6. Vnorenie, ktoré sme našli na základe postupu popísanom v dôkaze predchádzajúcej vety pre $d \leq 2n_2$ je znázornené na obrázku 3.10 vľavo.

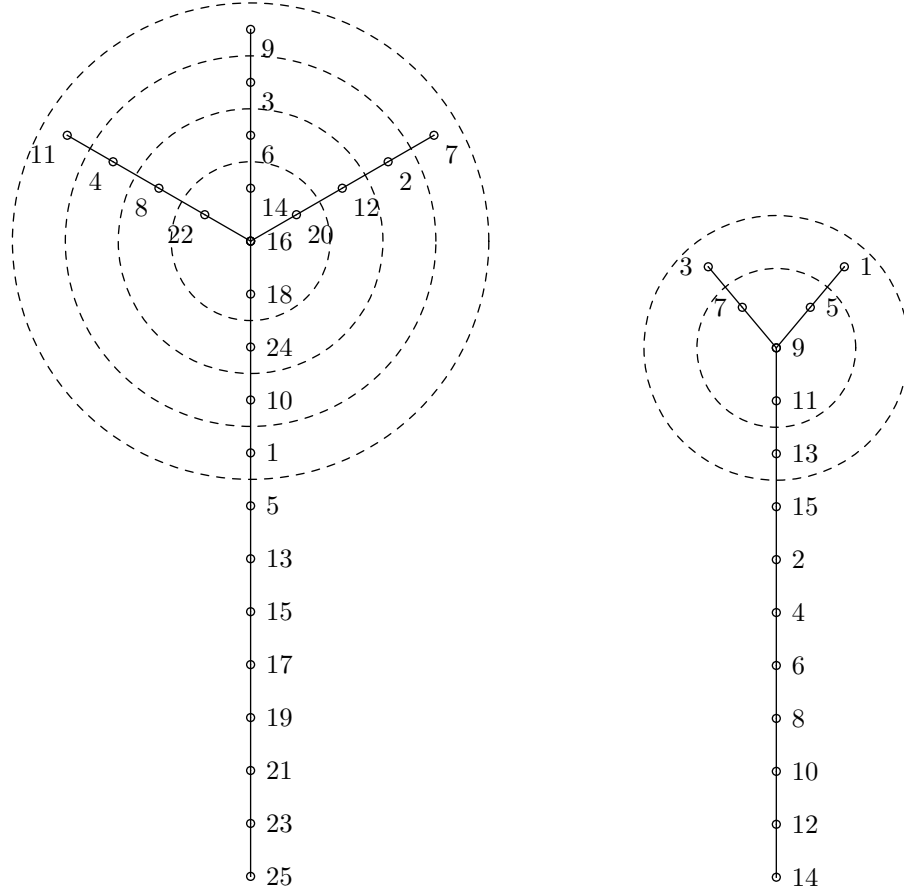
Antidilatácia cesty P_{25} do $S_{1,12,3,4}$ je rovná 6. Vnorenie, ktoré sme našli na základe postupu popísanom v dôkaze predchádzajúcej vety pre $d > 2n_2$ je znázornené na obrázku 3.10 vpravo.

3.1.6 Dolné odhady pre všeobecné pavúčie grafy

V tejto časti sa budeme venovať hlavne dolným odhadom⁹ antidilatácie cesty do pavúčich grafov. Nasledovná veta hovorí o dolnom odhade antidilatácie cesty do všeobecného pavúčieho grafu. V tejto vete ukážeme, ako je možné nájsť vnorenie cesty do pavúčieho grafu s dostatočne veľkou hodnotou antidilatácie.

Veta 3.1.12. *Nech $G = (V, E)$ je pavúči graf, $|V| = n$ a ℓ je dĺžka najkratšej nohy. Antidilatácia cesty P_n do grafu G je aspoň $\lfloor \ell/2 \rfloor$ a najviac d , kde d je hodnota vyrátaná na základe metódy 3.*

⁹Pomerne dobrý horný odhad pre antidilatáciu cesty do pavúčich grafov poskytuje metóda 3.



Obr. 3.10: Antidilatácia cesty P_{25} do stromu $S_{1,12,3,4}$ (vľavo), antidilatácia cesty P_{15} do stromu $S_{1,10,2,2}$ (vpravo).

Dôkaz. Druhá časť tvrdenia vyplýva z vety 3.1.7. Prvú časť dokážeme nájdením vnorenia $\varphi \in \Phi_{P_n, G}$, pre ktoré platí, že $\text{adil}_\varphi(P_n, G) \geq \lfloor \ell/2 \rfloor$. Označíme nohy ako l_1, l_2, \dots, l_k podľa dĺžky.

Očíslujeme postupne všetky nohy tak, ako sa čísluje cesta, použitím zatiaľ nepoužitých čísel. Presnejšie, nohu l_1 aj s centrálnym vrcholom očíslujeme číslami $1, \dots, \ell + 1$, od centrálného vrchola najprv párnymi a potom nepárnymi číslami. Nohu l_i očíslujeme už bez centrálného vrchola číslami $x + 1, \dots, x + |l_i|$, kde x označuje zatiaľ posledné použité číslo. (Vrcholu na nohe l_i najbližšie k centrálnemu vrcholu priradíme číslo $x + 2$.)

Keďže sme použili známe číslovanie pre cesty, v rámci nohy l_i je vzdialenosť čísel x a $x + 1$ vždy aspoň $\lfloor |l_i|/2 \rfloor \geq \lfloor \ell/2 \rfloor$. Pri prechode medzi nohami l_i a l_{i+1} si môžeme všimnúť nasledovnú skutočnosť. Ak je číslo x priradené na vrchol u na nohe l_i a číslo $x + 1$ na vrchol w na nohe l_{i+1} , tak $\text{dist}(u, w) = \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w)$, kde v je centrálny vrchol a

$\text{dist}(v, w) = \lceil |l_{i+1}|/2 \rceil \geq \lfloor \ell/2 \rfloor$ a $\text{dist}(u, v) \geq 0$, preto aj $\text{dist}(u, w) \geq \lfloor \ell/2 \rfloor$. \square

Veta 3.1.12 však nehovorí (resp. veľmi málo) o pavúčich grafoch, ktoré majú aspoň jednu nohu dĺžky 1 alebo 2. Ukážeme, že aj pre tieto grafy vieme skonštruovať vnorenie, v ktorom sa dosahuje vyššia hodnota antidilatácie ako triviálna dolná hranica 1.

Veta 3.1.13. *Nech G je pavúči graf a d je hodnota horného odhadu antidilatácie vypočítaná na základe metódy 3. Ak $d \geq 2$, tak existuje vnorenie $\varphi \in \Phi_{P_{|V|}, G}$ také, že $\text{adil}_\varphi(P_{|V|}, G) \geq 2$.*

Dôkaz. Na začiatok si uvedomíme, že jediný typ pavúčich grafov, pre ktoré metóda 3 vráti odhad $d = 1$ je taký, že graf má všetky nohy dĺžky 1.

Nohy si označíme ako l_1, \dots, l_k . Nohy rozdelíme na dve množiny $A = \{l_i \mid |l_i| \leq 3\}$ a $B = \{l_i \mid |l_i| \geq 4\}$. Rozoberieme niekoľko prípadov.

Ak je $A = \emptyset$, všetky nohy grafu G majú dĺžku aspoň 4 a na základe predchádzajúcej vety vieme nájsť vnorenie s antidilatáciou aspoň $\lfloor 4/2 \rfloor = 2$.

Ak $|A| = 1$, postupujeme nasledovne. Nech $l_1 \in A$. Očíslujeme nohy l_1 , centrálny vrchol a l_2 ako jednu cestu. (Táto cesta má dĺžku aspoň 4.) Zvyšné nohy v B očísľujeme podobne ako vo vete 3.1.12, čím dosiahneme hodnotu antidilatácie aspoň 2.

Ak $|A| \geq 2$, budeme rozoberať niekoľko prípadov. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že nohy l_1, \dots, l_c patria do A a nohy l_{c+1}, \dots, l_k patria do B .

Ak existujú nejaké nohy dĺžky 3, očísľujeme spolu všetky nohy dĺžok 3 a 2 a centrálny vrchol tak, ako je popísané vo vete 3.1.4, v ktorej sa zaoberáme pavúčimi grafmi typu $S_{k_1, n, k_2, n-1}$. V prípade, že máme len jednu nohu dĺžky 3 a žiadnu nohu dĺžky 2, očísľujeme centrálny vrchol s touto nohou, čím dosiahneme antidilatáciu aspoň 2. V prípade že máme 2 nohy dĺžok 3 a 2, očísľujeme tieto dve nohy aj s centrálnym vrcholom ako jednu cestu. (Najprv párnymi a potom nepárnymi číslami.) Vrcholy na nohách dĺžky 1 očísľujeme zaradom. Nohy z B očísľujeme tak, ako vo vete 3.1.12. Takto dostávame vnorenie s antidilatáciou aspoň 2, pretože susedné čísla na vrcholoch nôh dĺžok 2 a 3 sú v dostatočnej vzdialenosti, pričom posledné číslo z tohto podgrafu je vo vzdialenosti aspoň 1 od centrálného vrcholu a preto aj čísla na vrcholoch na nohách dĺžky 1 sú vo vzdialenosti aspoň 2. Čísla priradené do množiny B sú v dostatočnej vzdialenosti. (Vyplýva z vety 3.1.12.)

Ak žiadne nohy dĺžky 3 neexistujú, rozoberieme prípady podľa toho, či existujú nohy dĺžky 2. Ak áno, očísľujeme všetky nohy dĺžok 2 a 1 tak, ako je popísané vo vete 3.1.4. V prípade, že máme iba 2 nohy krátkej dĺžky (t.j., netvorí pavúči graf), očísľujeme tieto dve nohy aj s centrálnym vrcholom ako jednu cestu, táto cesta má aspoň 4 vrcholy. Vrcholy

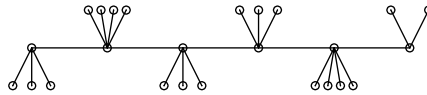
na nohách z množiny B budeme číslovať tak ako v predchádzajúcej vete. Takýmto číslovaním nájdeme vnorenie s hodnotou antidilatácie aspoň 2. Ak sa v A nachádzajú iba nohy dĺžky 1, vieme, že $B \neq \emptyset$. (V opačnom prípade by metóda 3 nevrátila $d \geq 2$.) Potom očísľujeme jednu z nôh z B spolu s centrálnym vrcholom ako jednu cestu, vrcholom na nohách v množine A priradíme zaradom nasledujúce čísla a prejdeme na číslovanie zvyšných nôh v množine B tak, ako je popísané vo vete 3.1.12. Takýmto spôsobom znova dosiahneme požadovanú hodnotu antidilatácie. \square

3.2 Húsenicové grafy

3.2.1 Definície

V tejto časti sa budeme venovať húsenicovým grafom. Definícia týchto grafov je prevzatá z [Weia].

Definícia 3.2.1 (Húsenicový graf). Súvislý graf G budeme volať húsenicový graf¹⁰, ak z grafu po odobratí všetkých vrcholov stupňa 1 a hrán s nimi incidentných dostaneme cestu.



Obr. 3.11: Húsenicový graf

Húsenica je teda strom, ktorého všetky vrcholy sú vo vzdialenosti 1 od centrálnej cesty. V húsenici $C_{n,k}$ každý vrchol centrálnej cesty susedí s k vrcholmi mimo tejto cesty. Navyše táto cesta má dĺžku n .

3.2.2 Horné a dolné odhady pre triedu $\{C_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

Metóda 3 je zmysluplná len pre pavúčie grafy, pretože využíva existenciu centrálného vrchola. Keďže v prípade húseníc nemáme centrálny vrchol, urobíme v metóde 3 miernu (a prirodzenú) úpravu.

¹⁰z anglického *caterpillar*

Metóda 4.

1. Pre každý $v \in V$ nájdí odhad d_v vypočítaný metódou 3, ak za centrálny vrchol prehlásime vrchol v .
2. Vráť $\min_{v \in V} d_v$.

Veta 3.2.1. Antidilatácia cesty do húsenice $C_{n,k}$ je rovná hodnote vyrátanej Metódou 3. Táto hodnota je $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.

Dôkaz. Najprv si všimneme, že metóda 4 nemôže vrátiť hodnotu väčšiu ako $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, pretože na centrálnej ceste existuje vrchol (ten, ktorý je v strede), ktorého excentricita je $\lfloor n/2 \rfloor + 1$. Z korektnosti metódy 4 a toho, že zostrojíme vnorenie s hodnotou antidilatácie $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ vyplýva, že metóda 4 vráti presne túto hodnotu.

Dôkaz rozdelíme na 2 časti podľa parity n . Vrcholy na centrálnej ceste označíme postupne v_1, \dots, v_n .

Ak n je párne, postupujeme nasledovne. Číslo 1 priradíme vrcholu $v_{n/2+1}$, číslo 2 priradíme synovi vrchola v_1 . Číslo 3 priradíme synovi vrchola $v_{n/2+1}$, číslo 4 vrcholu v_1 . Ďalej očísľujeme nepárnyimi číslami 5, \dots , $2k + 1$ zatiaľ neočíslovaných synov vrchola $v_{n/2+1}$ a párnyimi číslami 4, \dots , $2k + 2$ očísľujeme zatiaľ neočíslovaných synov vrchola v_1 .

Analogicky pokračujeme pre vrcholy $v_{n/2+i}$ a v_i , $i \in \{2, \dots, n/2\}$, pričom vrcholu v_i a jeho synom priradujeme párne čísla od $(2k + 2)(i - 1) + 2$ po $(2k + 2)i$ a vrcholu $v_{n/2+i}$ a jeho synom priradujeme nepárne čísla od $(2k + 2)(i - 1) + 1$ po $(2k + 2)i - 1$. (Číslo $(2k + 2)(i - 1) + 1$ bude priradené vrcholu $v_{n/2+i}$ a číslo $(2k + 2)(i - 1) + 4$ bude priradené vrcholu v_i .)

V prípade, že n je nepárne, postupujeme nasledovne. Čísla 1, 5 a 6 priradíme postupne vrcholom $v_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$, v_n a v_1 . Čísla 2, 3, 4 priradíme postupne jednému zo synov vrcholov v_n , $v_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ a v_1 . Čísla od 7 po $3k + 3$, ktoré dávajú zvyšok 1 po delení tromi, priradíme zatiaľ neočíslovaným synom vrchola v_n , čísla od 8 po $3k + 3$, ktoré dávajú zvyšok 2 po delení tromi priradíme zatiaľ neočíslovaným synom vrchola $v_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ a čísla od 9 po $3k + 3$, ktoré sú deliteľné tromi priradíme zatiaľ neočíslovaným synom vrchola v_1 .

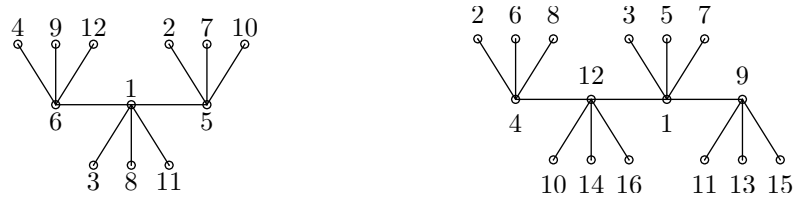
Vrcholy v_i a $v_{\lfloor n/2 \rfloor + i}$ pre $i \in \{2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ a ich synov budeme číslovať podobne, ako v prípade, že n bolo párne. Pre upresnenie, na tieto vrcholy budeme priradovať čísla od $(2k + 2)(i - 1) + k + 2$ po $(2k + 2)i + k + 1$.

Ukážeme, že pri takomto číslovaní dosahujeme antidilatáciu $\lfloor n/2 \rfloor + 1$. V prípade, že n

je párne, si stačí všimnúť, že po sebe idúce čísla tvaru $(2k+2)(i-1)+1$, $(2k+2)(i-1)+2$ a čísla $(2k+2)(i-1)+3$, $(2k+2)(i-1)+4$ sú na vrcholoch vo vzdialenosti $n/2+1$. Čísla idúce po sebe, ktoré sú iného tvaru sú v listoch vrcholov u a v , pričom $\text{dist}(u, v) = n/2$, preto majú dostatočnú vzdialenosť. Napokon čísla $(2k+2)i$ a $(2k+2)i+1$ sú v dostatočnej vzdialenosti, pretože jeden z nich je na centrálnej ceste a druhý je synom vrchola, ktorý je od pôvodného vrchola vo vzdialenosti $n/2$.

V prípade, že n je nepárne, si môžeme všimnúť, že po sebe idúce čísla z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sú od seba vzdialené aspoň $\lfloor n/2 \rfloor + 1$. Po sebe idúce čísla od 6 po $3k+3$ sú priradené listom vrcholov u a v pričom platí $\text{dist}(u, v) \geq \lfloor n/2 \rfloor$, preto sú vzdialené dostatočne. Analogicky ku párnemu prípadu si môžeme všimnúť, že po sebe idúce čísla tvaru $(2k+2)(i-1)+(k+1)+1$, $(2k+2)(i-1)+(k+1)+2$ a čísla $(2k+2)(i-1)+(k+1)+3$, $(2k+2)(i-1)+(k+1)+4$ sú na vrcholoch vo vzdialenosti $\lfloor n/2 \rfloor + 1$. Zvyšné po sebe idúce čísla sú priradené synom vrcholov v dostatočnej vzdialenosti. Pre čísla $(2k+2)i+(k+1)$ a $(2k+2)i+(k+1)+1$ platí, že jedno z nich je priradené vrcholu na centrálnej ceste a druhý je synom vrchola, ktorý je od pôvodného vrchola vo vzdialenosti $\lfloor n/2 \rfloor$. \square

Príklad 3.2.1. Podľa predchádzajúcej vety je antidilatácia cesty P_{12} do húsenice $C_{3,3}$ rovná 2. Vnorenie skonštruované z popisu v dôkaze predchádzajúcej vety môžeme vidieť na obrázku 3.12. Podľa predchádzajúcej vety je antidilatácia cesty P_{16} do húsenice $C_{4,3}$ rovná 3. Vnorenie skonštruované z popisu v dôkaze predchádzajúcej vety môžeme vidieť na obrázku 3.12.



Obr. 3.12: Antidilatácia cesty P_{12} do stromu $C_{3,3}$ a cesty P_{16} do stromu $C_{4,3}$

3.2.3 Dolný odhad pre všeobecné húsenicové grafy

V tejto časti ukážeme, že pre každú húsenicu C , ktorej horný odhad antidilatácie na základe metódy 4 je aspoň 2, platí $\text{adil}(P_V(C), C) \geq 2$.

Veta 3.2.2. *Nech $C = (V, E)$ je húsenicový graf s centrálnou cestou s n vrcholmi a počtom*

vrcholov k . Ak metóda 4 vráti horný odhad antidilatácie $d \geq 2$, tak

$$\text{adil}(P_k, C) \geq 2$$

Dôkaz. Najprv ukážeme, že na každú húsenicu s centrálnou cestou dĺžky $n \leq 3$, pre ktorú je $d \geq 2$, sa dá pozerať ako na húsenicu s centrálnou cestou dĺžky aspoň 4. Ak $n = 1$, graf C je pavúčim grafom so všetkými nohami dĺžky 1. O takomto grafe sme už ukazovali, že metóda 3 (a teda aj metóda 4) vráti horný odhad $d = 1$.

Ak $n = 2$ a aspoň jeden z vrcholov na ceste nemá synov, dá sa na graf C pozerať ako na pavúči graf so všetkými nohami dĺžky 1. Každý vrchol centrálnej cesty preto musí mať aspoň jedného syna. Ak oboch týchto synov pridáme na centrálnu cestu ako koncové vrcholy (tieto vrcholy nebudú mať žiadnych synov), dostávame centrálnu cestu so štyrmi vrcholmi.

V prípade, že $n = 3$ a žiaden z koncových vrcholov na centrálnej ceste nemá synov, dá sa na graf C tak isto pozerať ako na pavúči graf so všetkými nohami dĺžky 1. Ak jeden z koncových vrcholov cesty má synov, môžeme jedného z jeho synov pridať na centrálnu cestu, čím dostaneme centrálnu cestu so štyrmi vrcholmi.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme preto predpokladať, že $n \geq 4$. Ak existuje len jeden vrchol v centrálnej cesty, ktorý má synov, graf C je pavúčim grafom s centrálnym vrcholom v . Dokazované tvrdenie potom vyplýva z vety 3.1.13. V opačnom prípade postupujeme nasledovne. Vrcholom centrálnej cesty priradíme postupne najprv párne, potom nepárne čísla od 1 po n . Zvyšným vrcholom priradíme čísla od $n + 1$ po k ľubovoľne tak, aby sme nepriradili číslo $n + 1$ synovi vrchola s číslom n . Keďže vrcholy centrálnej cesty sú aspoň 4, vzdialenosť vrcholov s číslami i a $i + 1$ pre $i \in \{1, \dots, n\}$ bude aspoň 2. (V prípade n a $n + 1$ je to z dôvodu, že číslo $n + 1$ nie je ani na centrálnej ceste, ani vo vrchole, ktorý je synom vrchola s číslom n .) Ostatné po sebe idúce čísla sú na vrcholoch od seba vzdialených aspoň 2, pretože ich oddeľuje minimálne jeden vrchol centrálnej cesty. \square

3.3 Otvorené problémy

Na záver sformulujeme hypotézu, ktorá hovorí o tesnosti odhadov vypočítaných na základe metódy 4. Táto hypotéza je podložená tým, že metóda 4 dáva tesný horný odhad pre všetky triedy grafov, pre ktoré v práci konštruujeme optimálne vnorenia.

Hypotéza 3.3.1. *Nech $G = (V, E)$ je strom s n vrcholmi a d je horný odhad antidilatácie vypočítaný na základe metódy 4. Potom*

$$\text{adil}(P_n, G) = d.$$

Poznámka 3.3.1. Domnievame sa, že by nemalo byť náročné pozmeniť horné odhady a číslovania tak, aby fungovali pre antidilatáciu kružníc do týchto grafov. (V prípade horného odhadu metódy 3 bude jediná zmena v tom, že nebudeme povoľovať $|A_i| = |B_i| + 1$.)

Kapitola 4

Záver

V práci sme sa venovali problému antidilatácie. V úvodnej kapitole sme definovali pojem antidilatácie a uviedli prehľad známych výsledkov z tejto oblasti, špeciálne výsledky o problémoch antibandwidth a cyklický antibandwidth.

V druhej časti práce sme sa venovali antidilatácii cesty na niektoré triedy stromov. O poslednej z nich sa domnievame, že bude poskytovať tesný odhad pre antidilatáciu cesty do ľubovoľného stromu, pretože dáva tesné odhady pre všetky nami skúmané pavúčie a húsenicové grafy. Túto domnienku sme sformulovali v hypotéze 3.3.1.

Prezentovali sme niekoľko metód na odhadovanie antidilatácie zhora, ktorých časová zložitosť je polynomiálna. Uviedli sme nové algoritmy pre konštruovanie optimálneho vnorenia vzhľadom na antidilatáciu z ciest na pavúčie grafy a niektoré húsenicové grafy. Našli sme polynomiálne algoritmy na zistenie presnej hodnoty antidilatácie pre všetky pavúčie grafy, ktoré majú len dve rôzne dĺžky nôh, triedu olivovníkov a triedu pravidelných húsenicových grafov.

Prácu je možné rozšíriť niekoľkými smermi. Jednou z možností je skúmať vzťah medzi antidilatáciou cesty na stromy a antibandwidth-om stromov, teda antidilatáciou stromov na cestu. Zaujímavou otázkou je aj platnosť hypotézy 3.3.1 o tesnosti horného odhadu metódy 4 na odhadovanie antidilatácie cesty do stromov. V prípade, že by sa ukázalo, že problém antidilatácie cesty do stromov nie je NP-ťažký, bolo by zaujímavé skúmať zložitosť antidilatácie stromov do stromov.

Literatúra

- [Cap99] Paola Cappanera, *A survey on obnoxious facility location problems*, Tech. report, 1999.
- [DI99] Sam Donnelly and Garth Isaak, *Hamiltonian powers in threshold and arborescent comparability graphs*, *Discrete Math.* **202** (1999), 33–44.
- [Die05] Reinhard Diestel, *Graph theory (graduate texts in mathematics)*, Springer, August 2005.
- [Gal10] J.A. Gallian, *Graph labeling*, *Electronic Journal on Combinatorics* **DS6** (2010).
- [Göb94] F. Göbel, *The separation number*, *Ars Combinatoria* **37** (1994), 262–274.
- [Hal80] W.K. Hale, *Frequency assignment: Theory and applications*, *Proceedings of the IEEE* **68** (1980), 1497–1514.
- [Isa98] Garth Isaak, *Powers of hamiltonian paths in interval graphs*, *J. Graph Theory* **28** (1998), 31–38.
- [LVW84] Joseph Y-T. Leung, Oliver Vornberger, and James D. Witthoff, *On some variants of the bandwidth minimization problem*, *SIAM J. Comput.* **13** (1984), no. 3, 650–667.
- [LY03] Yuan J.J. Lin Y., *The dual bandwidth problem for graphs*, *J. Zhengzhou Uni. Nat. Sci. Ed.* **35** (2003), 1–5.
- [RSS⁺09] André Raspaud, Heiko Schröder, Ondrej Sýkora, Lubomír Török, and Imrich Vrto, *Antibandwidth and cyclic antibandwidth of meshes and hypercubes*, *Discrete Mathematics* **309** (2009), no. 11, 3541–3552.
- [STV05] Ondrej Sýkora, Lubomír Török, and Imrich Vrto, *The cyclic antibandwidth problem*, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **22** (2005), 223–227.
- [Tör07] Lubomír Török, *Two problems in graph layouts*, Ph.D. thesis, SAV, 2007.
- [Weia] Eric W. Weisstein, *Caterpillar*, <http://mathworld.wolfram.com/Caterpillar.html>, From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
- [Weib] ———, *Spider*, <http://mathworld.wolfram.com/Spider.html>, From MathWorld – A Wolfram Web Resource.