Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

# Rozšíriteľnosť párení na grafoch

(Diplomová práca)

2012

Bc. Ján Kováč

**Školitelia:** Mgr. Michal Kotrbčík
Prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Bratislava, 3. mája 2012

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

# Rozšíriteľnosť párení na grafoch

(Diplomová práca)

**Študijný program:** informatika
**Študijný odbor:** 2508 informatika
**Katedra:** Katedra informatiky
**Školitelia:** Mgr. Michal Kotrbčík
Prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

**Bratislava, 2012**
**Bc. Ján Kováč**

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Ján Kováč
**Študijný program:** informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
**Študijný odbor:** 9.2.1. informatika
**Typ záverečnej práce:** diplomová
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Rozšíriteľnosť párení na grafoch

**Cieľ:** Preskúmať štrukturálne vlastnosti grafov s rozšíriteľnými páreniami. Skúmať rozšíriteľnosť párení na niektorých špeciálnych triedach grafov.

**Vedúci:** prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
**Katedra:** FMFI.KI - Katedra informatiky

**Dátum zadania:** 28.10.2010

**Dátum schválenia:** 28.10.2010

prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
garant študijného programu

.................................................. ..................................................

študent Vedúci

Chcem sa poďakovať najmä môjmu školitelovi Michalovi Kotrbčíkovi za výber témy, cenné rady a trpezlivosť, Zuzane Ondrejkovej za obetavú kontrolu pravopisu a všetkým tým, čo pripomienkovali samotnú prácu, formuláciu jednotlivých výsledkov alebo mi iným spôsobom pomohli pri tvorbe tejto práce.

# Abstrakt

V našej práci sa zaoberáme rozšíriteľnosťou párení na grafoch. V prvej časti skúmame štruktúru equimatchable grafov, teda grafov v ktorých každé nerozšíriteľné párenie je aj najväčšie, pričom naše hlavné výsledky sú nasledujúce tvrdenia. Uvádzame charakterizáciu grafov $H$, pre ktoré platí, že $H\#T$ je equimatchable pre každú kostru $T$ grafu $H$, kde $H\#T$ označuje prienikový graf fundamentálnych cyklov. Ukázali sme, že pre každý equimatchable chordálny graf $G$, ktorý nie je faktorovo kritický, existuje graf $H$ taký, že $H\#T$ je izomorfný s $G$ pre každú kostru $T$ grafu $H$. Pre karteziánske súčiny grafov sme dokázali, že ak $G$ a $H$ sú súvislé grafy s aspoň dvomi vrcholmi, tak karteziánsky súčin $G$ a $H$ je equimatchable práve vtedy, keď $G$ aj $H$ sú izomorfné s $K_2$. Ďalej sme ukázali, že ak $H_1$ a $H_2$ sú ľubovoľné faktorovo kritické grafy s rovnakým počtom vrcholov, tak pre ľubovoľný graf $G$ platí, že najväčšie párenie grafu $G\Box H_1$ má rovnakú mohutnosť ako najväčšie párenie grafu $G\Box H_2$.

V druhej časti zavádzame nový koncept rozšíriteľnosti párení: graf $G$ patrí do triedy $\Delta_n$ práve vtedy, ak rozdiel mohutností ľubovoľných dvoch nerozšíriteľných párení grafu $G$ je najviac $n$. Naše hlavné výsledky v tejto časti sú nasledovné tvrdenia. Popisujeme štruktúru grafov z triedy $\Delta_n$ a presne charakterizujeme triedu $\Delta_1$. Zostrojili sme deterministický polynomiálny algoritmus, ktorý pre pevne zvolené $n$ a $k$ overí, či graf s deficienciou najviac $k$ patrí do triedy $\Delta_n$. Uvádzame algoritmus, ktorý v deterministickom polynomiálnom čase rozhodne, či daný graf patrí do triedy $\Delta_1$.



**Kľúčové slová:**

equimatchable graf, rozšíriteľnosť párení, karteziánsky súčin grafov, chordálny graf, prienikový graf fundamentálnych cyklov

## Abstract

In this work we investigate the structure of equimatchable graphs in two particular classes of graphs. Our main results are the following. We prove that for any chordal graph $G$ that is not factor critical there is a graph $H$ such that $G$ is isomorphic with $H\#T$ for every spanning tree $T$ of $H$, where $H\#T$ denotes the intersection graph of fundamental cycles of graph $H$ with respect to a spanning tree $T$ of $H$. We show a characterization of graphs $G$ such that $G\#T$ is equimatchable for any spanning tree $T$ of $G$. For cartesian products we prove that if $G$ and $H$ are connected graphs with $|V(G)| > 1$ and $|V(H)| > 1$, then $G\Box H$ is equimatchable if and only if both $G$ and $H$ are isomorphic with $K_2$.

In the second part we introduce a new concept of matching extension: a graph $G$ is in $\Delta_n$ if and only if the difference between the sizes of any two maximal matchings in $G$ is not larger than $n$. Our main results are the following. We also describe the structure of graphs in $\Delta_n$. For any fixed $n, k \in \mathbb{N}$ we provide a deterministic polynomial algorithm which can decide if a given graph with $d(G) \leq k$ is in $G \in \Delta_n$. We also provide a complete characterization of graphs in $\Delta_1$ and deterministic polynomial algorithm which decides whether given graph is in $\Delta_1$. For cartesian products we prove that if $H_1$ and $H_2$ are factor critical graphs with $|V(H_1)| = |V(H_2)|$, then for any graph $G$ the sizes of maximum matchings in $G\Box H_1$ and $G\Box H_2$ are equal.



**Keywords:**

equimatchable graph, matching extension, cartesian product of graphs, chordal graph, intersection graph of fundamental cycles

# Obsah

# Kapitola 1

# Úvod

Graf $G$ nazývame equimatchable, ak je ľubovoľné párenie v $G$ obsiahnuté v nejakom najväčšom párení. Z toho vyplýva, že v každom equimatchable grafe sa najväčšie párenie dá nájsť greedy algoritmom. Pri skúmaní štruktúry equimatchable grafov sa používa $(D, A, C)$-*dekompozícia* [1, 2]. Nech $G$ je graf, jeho $(D, A, C)$-dekompozícia je definovaná nasledovne. Množina $D$ obsahuje práve tie vrcholy z $V(G)$, ktoré nepokrýva nejaké najväčšie párenie. Množina $A$ obsahuje vrcholy z $V(G) - D$, ktoré v $G$ susedia s aspoň jedným vrcholom z $D$ a množina $C$ obsahuje práve vrcholy z $V(G) - D - A$.

Štruktúra všeobecných equimatchable grafov je pomocou $(D, A, C)$-dekompozície popísaná v [3, 4]. Práce [5, 6, 7, 8] sa venujú $n$-rozšíriteľnosti párení grafov, defnovanej nasledovne: graf $G$ je $n$-rozšíriteľný práve vtedy, keď obsahuje párenie veľkosti $n$ a každé takéto párenie sa dá rozšíriť na perfektné párenie. Priamo z definície vyplýva, že ak graf je $n$-rozšíritelný, tak je aj $m$-rozšíriteľný pre $m \leq n$.

Plummer v [6] zhrnul rôzne výsledky dosiahnuté do roku 1994 o $n$-rozšíriteľných grafoch. Uvádza tu výsledky, ktoré ukazujú súvis medzi $n$-rozšíriteľnosťou a inými parametrami grafu, napríklad rodom, súdržnosťou (toughness), súčtom stupňov vrcholov a inými. Neskôr boli dosiahnuté ďalšie výsledky týkajúce sa $n$-rozšíriteľnosti grafov. V [5] Favaron ukázala súvislosť medzi $p$-faktor kritickými a $n$-rozšíriteľnými grafmi pre $p$ párne. Yu v [9] ukázal jednoduchšie dôkazy jej hlavných tvrdení a vyriešil otvorený problém vyslovený v [5]. Téme $n$-rozšíriteľných grafov je venovaných aj niekoľko kapitol v prednedávnom vydanej monografii [7].

Okrem spomínaných spôsobov definovania rozšíriteľnosti párení sa Yu a Liu v [10] zaoberali $(n, k, d)$-grafmi, ktoré definovali nasledovne. Graf $G$

je $(n, k, d)$-graf práve vtedy, keď po odobratí ľubovoľných $n$ vrcholov sa vo výslednom grafe dá každé párenie veľkosti najviac $k$ rozšíriť na párenie, ktoré pokrýva všetky vrcholy okrem nejakých $d$ vrcholov. Podarilo sa im ukázať viaceré vlastnosti takýchto grafov pre $d = 0$. Na ich výsledky nadviazal článok [11], ktorý pokračoval v opisovaní vlastností $(n, k, d)$-grafov a zameral sa na grafy, kde $d \neq 0$. V skúmaní $(n, k, d)$-grafov pokračuje aj článok [12].

Rozšíriteľnosť párení v špeciálnych triedach grafov bola pre hyperkocky skúmaná v [13]; v [14] sú charakterizované equimatchable grafy s obvodom aspoň 5. Chordálne grafy sú grafy, v ktorých každá kružnica dĺžky aspoň 4 obsahuje tetivu. V našej práci sa okrem iného zaoberáme štruktúrou equimatchable chordálnych grafov.

*Prienikový graf fundamentálnych cyklov* $G\#T$ grafu $G$ vzhľadom na kostru $T$ je definovaný nasledovnými vzťahmi: $V(G\#T) = \{v_e | e \in E(G - T)\}$; $v_e v_f \in E(G\#H)$ práve vtedy, keď fundamentálne kružnice prislúchajúce hranám $e$ a $f$ majú neprázdny prienik. Počet vrcholov grafu $G\#T$ nezávisí od kostry $T$ a je rovný Bettiho číslu $\beta(G)$ grafu $G$, kde $\beta(G) = |E| - |V| + c_G$, pričom číslo $c_G$ označuje počet komponentov grafu $G$. Grafy, ktoré majú po odobratí ľubovoľného vrcholu perfektné párenie, sa nazývajú *faktorovo kritické*. Pre chordálne grafy je naším hlavným výsledkom nasledovná veta.

**Veta 3.9.** Nech $H$ je equimatchable chordálny graf, ktorý nie je faktorovo kritický. Potom existuje graf $G$ taký, že $G\#T \cong H$ pre každú kostru $T$ grafu $G$.

Grafy $G$ také, že pre ľubovoľnú kostru $T$ je graf $G\#T$ equimatchable, popisuje nasledujúca veta.

**Veta 3.29.** Nech graf $G$ je hranovo dvojsúvislý. Graf $G\#T$ je equimatchable pre každú kostru $T$ grafu $G$ práve vtedy, keď graf $G$ spĺňa niektorú z nasledujúcich podmienok:

i) Graf $G$ neobsahuje 3 disjunktné kružnice a $\beta(G)$ je nepárne.

ii) Graf $G$ neobsahuje 2 disjunktné kružnice a $\beta(G)$ je párne.

iii) Graf $G$ spĺňa podmienky v tvrdení 3.26 alebo v tvrdení 3.28.

Náš hlavný výsledok týkajúci sa equimatchable karteziánskych súčinov je nasledujúca veta.

**Veta 3.37.** Nech $G$ a $H$ sú súvislé, pričom $V(G) \geq V(H) \geq 2$. Ak $G \Box H$ je equimatchable, tak $G \cong H \cong K_2$.

Ďalej zavádzame a skúmame nový všeobecný koncept rozšíriteľnosti párení na grafoch: ak rozdiel mohutností dvoch ľubovoľných nerozšíriteľných párení grafu $G$ nie je väčší ako $k$, hovoríme, že $G$ patrí do triedy $\Delta_k$. Ľahko vidieť, že equimatchable grafy sú práve tie, ktoré patria do triedy $\Delta_0$. Triedy $\Delta_k$ zodpovedajú správaniu greedy algoritmu na nájdenie najväčšieho párenia - graf $G$ patrí do triedy $\Delta_k$, ak greedy algoritmus na vstupe $G$ vždy nájde párenie, ktoré sa od najväčšieho párenia líši najviac o $k$.

V predkladanej práci sa zaoberáme najmä štrukturálnymi vlastnosťami grafov, ktoré patria do triedy $\Delta_k$ pre $k \geq 1$, algoritmami pre rozhodovanie príslušnosti do týchto tried a algoritmami pre odhad hodnoty $\Delta'(G)$. Ako aplikáciu týchto výsledkov uvádzame niekoľko tvrdení o príslušnosti karteziánskych súčinov do tried $\Delta_k$ pre $k \geq 1$.

Triedy $\Delta$ vytvárajú hierarchiu, pretože zjavne $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$. Definujeme preto aj funkciu $\Delta' : G \to \mathbb{N}$ nasledovne: $\Delta'(G) = n$ práve vtedy, keď $G \in \Delta_n$ a zároveň $G \notin \Delta_{n-1}$. *Deficiencia* grafu $G$ je počet vrcholov nepokrytých najväčším párením grafu $G$, označujeme ju $d(G)$. Nasledujúca veta popisuje grafy patriace do triedy $\Delta_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

**Veta 4.2.** Ak $G$ je ľubovoľný graf, nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

1) Graf $G$ je v $\Delta_n$.

2) Pre každú množinu $S \subseteq V(G)$, $|S| \geq d(G)+2n$ navzájom nesusedných vrcholov a pre každé párenie $M$ grafu $G$ nepokrývajúce vrcholy v $S$ existuje vrchol $v \notin S$ susedný s aspoň jedným vrcholom z $S$.

3) Pre každú množinu $S \subseteq V(G)$, $|S| \geq d(G)+2n$ navzájom nesusedných vrcholov existujú disjunktné množiny $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq N(S)$ také, že spĺňajú naraz všetky nasledujúce podnienky:

   i) $|S_i|$ je nepárne pre $1 \leq i \leq k$;

   ii) $S_i$ a $S_j$ nie je spojené hranou pre $i \neq j$ a

   iii) $|R(S_1, S_2, \ldots, S_k)| < k$
   kde $R(S_1, S_2, \ldots, S_k) = N(\bigcup_{i=1}^{k} S_i) - \bigcup_{i=1}^{k} S_i - \{u, v\}$
   (Symbolom $R(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ je označená množina vrcholov z $G-u-v$, ktoré neležia v žiadnej z množín $S_i$, ale z ktorých každý je spojený s vrcholom z niektorej množiny $S_i$.)

Táto veta nevedie priamo k deterministickému polynomiálnemu algoritmu na nájdenie hodnoty $\Delta'(G)$. V práci uvádzame pre dané $n$ a $k$ deterministický polynomiálny algoritmus, ktorý rozhodne, či graf $G$ s deficienciou $k$ patrí do triedy $\Delta_n$. Problém nájdenia veľkosti najmenšieho nerozšíriteľného párenia je NP-úplný [15], ale pre problém nájdenia veľkosti najväčšieho párenia existuje napríklad známy Edmondsov algoritmus, ktorý je deterministický polynomiálny. Z toho vyplýva, že určiť rozdiel mohutností najväčšieho a najmenšieho nerozšíriteľného párenia je NP-úplný problém. V práci uvádzame dôkaz nasledujúceho tvrdenia.

**Veta 4.17.** Existuje deterministický algoritmus, ktorý v polynomiálnom čase overí, či ľubovoľný graf $G$ patrí do triedy $\Delta_1$.

Ukazujeme tiež viacero tvrdení, pomocou ktorých sa dá deterministicky v polynomiálnom čase odhadovať hodnota funkcie $\Delta'(G)$ pre daný graf $G$. Porovnali sme tiež koncept $\Delta_k$ tried s inými konceptami rozšíriteľnosti. Pre karteziánske súčiny grafov sme sa venovali najmä súčinom ľubovoľných grafov s faktorovo kritickými.

**Veta 4.27.** Pre ľubovoľný graf $G$ existuje $n_0$ také, že ak $H$ je ľubovoľný faktorovo kritický graf s aspoň $n_0$ vrcholmi, tak graf $G\square H$ nepatrí do triedy $D_n$, kde $n = \lceil |V(G)|/2 \rceil - 1$.

Naviac sme ukázali, že pokiaľ nás zaujíma najväčšie párenie karteziánskeho súčinu grafov, z ktorých jeden je faktorovo kritický, tak nie je podstatné, akú ma tento faktorovo kritický graf štruktúru.

**Veta 4.22.** Nech $G$ je ľubovoľný súvislý graf a $H_1$ a $H_2$ sú faktorovo kritické grafy. Ak $|V(H_1)| = |V(H_2)|$, tak $d(G\square H_1) = d(G\square H_2)$. Naviac ak $|V(H_1)| > |V(H_2)|$ a $d(G\square H_2) > 1$, tak $d(G\square H_1) < d(G\square H_2)$.

# Kapitola 2

# Súčasný stav problematiky

V tejto časti uvedieme najdôležitejšie výsledky z teórie grafov, týkajúce sa skúmanej problematiky. Najprv spomenieme použité označenie a niektoré základné pojmy z teórie párenia na grafoch. Nech $G$ je graf, množinu vrcholov budeme označovať $V(G)$, množinu hrán $E(G)$. Konkrétnu hranu budeme označovať indexovaným písmenom $e$ alebo uvedením dvoch vrcholov, ktoré spája. Graf $G$ je vrcholovo dvojsúvislý, ak každé dva vrcholy v ňom sú spojené aspoň dvoma vrcholovo disjunktnými cestami. Ak v práci uvažujeme o vrcholovo dvojsúvislých grafoch, predpokladáme, že neobsahujú slučky. Množinu susedov vrchola $v$ budeme označovať $N(v)$. *Párenie* v grafe $G$ je množina nezávislých hrán, teda hrán, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný vrchol. *Najväčšie párenie* je také, ktorého množina hrán má najväčšiu mohutnosť spomedzi všetkých párení daného grafu. V grafe môže existovať viacero rôznych najväčších párení. *Nerozšíriteľné párenie* je párenie, ktoré sa nedá zväčšiť pridaním novej hrany, teda žiadna nadmnožina hrán tohoto párenia nie je nezávislá. Vrchol $v$ grafu $G$ je *pokrytý* párením $M$ práve vtedy, keď sa v $M$ nachádza hrana incidentná s $v$. Množinu vrcholov pokrytých párením $M$ označujeme $V(M)$. *Perfektné párenie* grafu $G$ je párenie, ktoré pokrýva všetky vrcholy grafu $G$. Graf $G$ sa nazýva *faktorovo kritický* práve vtedy, keď pre každý jeho vrchol $v$ má graf $G-v$ perfektné párenie. *Skoro-perfektné párenie* je párenie, ktoré pokrýva všetky vrcholy okrem jedného. *Deficiencia* grafu $G$ je počet vrcholov grafu $G$ nepokrytých najväčším párením, označujeme ju $d(G)$.

Najprv uvedieme Tuttovu vetu, ktorá charakterizuje grafy s perfektným párením.

**Veta 2.1. [16]**Graf $G$ má perfektné párenie práve vtedy, keď pre každú množinu vrcholov $S \subseteq V(G)$ platí $c_o(G-S) \leq |S|$, kde $c_o(H)$ označuje počet komponentov grafu $H$ s nepárnym počtom vrcholov.

Vďaka Tuttovej vete na dôkaz, že graf nemá perfektné párenie, stačí nájsť nejakú množinu vrcholov $S$, pre ktorú platí $c_o(G-S) > |S|$. Takáto množina vrcholov sa často nazýva *Tuttova množina*. Bergova formula, ktorú teraz uvedieme, zovšeobecňuje Tuttov výsledok a umožňuje vypočítať veľkosť najväčšieho párenia.

**Veta 2.2. [17]**Platí: $d(G) = \max\{c_0(G-S) - |S|; S \subset V(G)\}$.

Pokiaľ graf nemá perfektné párenie, zaujíma nás spravidla najväčšie párenie. Výsledky Gallaia a Edmondsa, ku ktorým dospeli nezávisle, popisujú veľkosť a štruktúru každého najväčšieho párenia v grafe. Predtým, ako vyslovíme túto charakterizáciu, definujeme $(D, A, C)$-dekompozíciu, alebo Gallaiovu-Edmondsovu dekompozíciu vrcholov grafu.

**Definícia 2.3.** Nech $G$ je ľubovolný graf. Nech množina $D$ obsahuje práve tie vrcholy grafu $G$, ktoré nie sú pokryté nejakým najväčším párením. Množina $A$ obsahuje vrcholy z $V(G) - D$, ktoré v $G$ susedia s vrcholmi z $D$ a množina $C$ obsahuje práve vrcholy $V(G) - D - A$. Rozklad množiny $V(G)$ na množiny $D$, $A$, $C$ nazveme $(D, A, C)$-*dekompozíciou* grafu $G$.

Teraz môžeme vysloviť Gallaiovu-Edmondsovu štrukturálnu vetu.

**Veta 2.4. (Gallaiova-Edmondsova štrukturálna veta[1, 2])** Nech $G$ je graf a množiny $D$, $A$, $C$ tvoria $(D, A, C)$-dekompozíciu grafu $G$. Potom platí:

(i) komponenty podgrafu indukovaného vrcholmi z $D$ sú faktorovo kritické;

(ii) podgraf indukovaný množinou $C$ má perfektné párenie;

(iii) bipartitný graf získaný z grafu $G$ zmazaním vrcholov z $C$, kontrakciou komponentov z $D$ a zmazaním hrán medzi vrcholmi z $A$, má kladný prebytok(surplus) z pohľadu $A$;

(iv) každé najväčšie párenie v grafe $G$ obsahuje perfektné párenie všetkých komponentov z $C$, skoro-perfektné párenie každého komponentu $D$ a páruje všetky vrcholy z $A$ s rôznymi komponentami grafu indukovaného $D$;

(v) $v(G) = (|V(G)| - c(D) + |A|)/2$, kde $c(D)$ označuje počet komponentov podgrafu indukovaného vrcholmi z $D$ a $v(G)$ označuje počet hrán v najväčšom párení.

Môžeme si všimnúť, že ak má graf $G$ perfektné párenie, tak $V(G) = C$. Taktiež ak graf $G$ je faktorovo kritický, potom $V(G) = D$. Ak pre $(D, A, C)$-dekompozíciu platí, že množina $A$ je neprázdna, tak takúto dekompozíciu nazveme netriviálna. V ďalšom texte nás budú zaujímať najmä grafy s netriviálnou $(D, A, C)$-dekompozíciou.

Nech $M$ je párenie grafu $G$. *Striedavá cesta* v grafe $G$ vzhľadom na $M$ je cesta, v ktorej sa striedajú hrany z $M$ a hrany z $E(G) - M$. Pokiaľ striedavá cesta začina aj končí nepokrytým vrcholom, hovoríme jej *zväčšujúca striedavá cesta*. Ak v grafe $G$ existuje k páreniu $M$ zväčšujúca striedavá cesta $P$, vieme získať väčšie párenie $M'$ grafu $G$ tak, že hrany na ceste $P$, ktoré sú v $M$ nebudú v párení $M'$, ale hrany na ceste $P$ z množiny $E(G) - M$ budú v párení $M'$, naviac párenie $M'$ obsahuje aj hrany z množiny $(E(G) - P) \cap M$. O zväčšujúcich striedavých cestách hovorí nasledujúca veta, ktorú využívajú algoritmy na nájdenie najväčšieho párenia.

**Veta 2.5. [18]** Párenie $M$ v grafe $G$ je najväčšie práve vtedy, keď neexistuje striedavá zväčšujúca cesta v $G$ vzhľadom na $M$.

Ľahko vidieť, že ak máme ľubovolné párenie $M$ grafu $G$, tak ho vieme pomocou striedavých zväčšujúcich ciest zväčšiť na najväčšie párenie, a že toto najväčšie párenie bude pokrývať všetky vrcholy, ktoré boli pokryté párením $M$. Tieto skutočnosti budeme často v práci využívať.

Teraz uvedieme niektoré výsledky o rozšíriteľnosti párení. Zaujímavá otázka pri rozšíriteľnosti párení je charakterizovať grafy, v ktorých sa každé párenie dá rozšíriť na najväčšie párenie, alebo ekvivalentne: každé nerozšíriteľné párenie má rovnakú mohutnosť. Takéto grafy sa nazývajú equimatchable. Sú známe viaceré výsledky opisujúce štruktúru equimatchable grafov. Uvedieme základné výsledky v tejto oblasti a výsledky, ktoré v práci využívame. Štruktúru equimatchable grafov s perfektným párením popisuje nasledujúca veta.

**Veta 2.6. [3]** Ak $G$ je equimatchable graf s perfektným párením, tak $G$ je izomorfný buď s $K_{2n}$ alebo s $K_{n,n}$.

Teraz uvedieme vetu charakterizujúcu equimatchable faktorovo kritické grafy.

**Veta 2.7. [4]** Nech $G$ je súvislý faktorovo kritický graf. Potom nasledjúce podmienky sú ekvivalentné:

1) Graf $G$ je equimatchable.

2) Pre každú dvojicu nesusedných vrcholov $u$ a $v$ a pre každé párenie $M$ grafu $G - u - v$ existuje tretí vrchol $w$ susedný s $u$ alebo s $v$, ktorý nie je pokrytý párením $M$.

3) Pre každú dvojicu nesusedných vrcholov $u$ a $v$ existujú disjunktné množiny $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq N(u) \cup N(v)$ také, že spĺňajú naraz všetky nasledujúce podnienky:

   i) $|S_i|$ je nepárne pre $1 \leq i \leq k$;

   ii) $S_i$ a $S_j$ nie je spojené hranou pre $i \neq j$ a

   iii) $|R(S_1, S_2, \ldots, S_k)| < k$, kde $R(S_1, S_2, \ldots, S_k) = N(\bigcup_{i=1}^{k} S_i) - \bigcup_{i=1}^{k} S_i - \{u, v\}$
   (Symbolom $R(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ je označená množina vrcholov z $G-u-v$, ktoré neležia v žiadnej z množín $S_i$, ale z ktorých každý je spojený s vrcholom z niektorej $S_i$.)

**0značenie** Nech $D$ je nejaká podmnožina množiny vrcholov grafu $G$. Množinu podgrafov grafu indukovaného vrcholmi z $D$ budeme označovať $\langle D \rangle$.

Equimatchable grafy s netriviálnou Gallai-Edmondsovou dekompozíciou sú popísané nasledujúcou vetou.

**Veta 2.8. [4]** Nech $G$ je súvislý equimatcheble graf, ktorý neobsahuje perfertné párenie. Nech $(D, A, C)$ je Gallaiova-Edmondsova dekompozícia grafu $G$ a nech $A \neq \emptyset$. .

1) Potom pre každé $D_i \in \langle D \rangle$ nastáva jedna z nasledujúcich možností:

   i) $D_i \cong K_{2n-1}$ pre nejaké $n \geq 2$ a každý vrchol z $D_i$ susedí s rovnakým vrcholom $a \in A$ a žiadny vrchol z $D_i$ nesusedí s iným vrcholom $a \in A$.

   ii) $D_i$ obsahuje artikuláciu $d_i$ v $G$, pričom $d_i$ je jediný vrchol z $D_i$ spojený s vrcholmi z množiny $A$. Nech $H_i^1, \ldots, H_i^r$ pre nejaké $r \geq 1$ sú komponenty grafu $D_i - d_i$. Potom pre každé $j$, $1 \leq j \leq r$, buď $H_i^j \cong K_{2m}$ pre $m \geq 1$ a aspoň dve hrany spájajú $H_i^j$ s $d_i$, alebo $H_i^j \cong K_{m,m}$

pre nejaké $m \geq 1$ a ak $(U, V)$ je bipartícia tohto grafu, potom aspoň jedna hrana spája $d_i$ s vrcholom z $U$ a aspoň jedna hrana spája $d_i$ s nejakým vrcholom z $W$.

iii) aspoň dva vrcholy z $D_i$ sú spojené s vrcholmi z $A$ a aspoň jeden vrchol z $D_i$ nie je spojený zo žiadnym vrcholom z $A$. V tomto prípade existuje vrchol $a \in A$, taký že oddeľuje $D_i$ od $G$. Ak $D_i$ obsahuje práve dva vrcholy $y_1$ a $y_2$ spojené s bodom $a$, potom $D_i$ musí byť jedného z nasledujúcich troch typov:

   a) $D_i$ je $K_3$;

   b) $D_i - \{y_1, y_2\}$ je kompletný bipartitný graf $K_{r,r-1}$ kde $r \geq 2$ a ak $(U, V)$ je jeho bipartícia, kde $|U| = r$ potom $y_1$ a $y_2$ sú oba susedné s každým vrcholom v $U$ a aj navzájom;

   c) $D_i - \{y_1, y_2\}$ je $K_{2r-1}$, pre $r \geq 2$, $y_1$ a $y_2$ sú spojené s každým vrcholom v $D_i - \{y_1, y_2\}$ a $y_1$ s $y_2$ môžu (ale nemusia) byť spojené.

   Ak $D_i$ má aspoň 3 a najviac $|V(D_i)| - 1$ vrcholov spojených s $a$, potom $D_i$ je $K_{2m-1}$ pre nejaké $m \geq 3$.

Komponenty $D_j$ pre ktoré nastáva prípad i), ii), resp. iii) nazývame komponenty typu I, II, resp. III.

2) Odoberme z grafu $G$ všetky komponenty $D_i$ typu II a typu III a každý komponent typu $I$ skontrahujme do jedného vrchola. Potom existuje párenie vo výslednom bipartitnom grafe $G'_I$, ktoré pokrýva všetky vrcholy z $A$ a graf $G'_I$ je equimatchable.

**Dôsledok 2.9.** Nech $G$ je ľubovolný equimatchable graf bez perfektného párenia a nech $(D, A, C)$ je jeho Gallaiova-Edmodsova dekompozícia. Potom $C = \emptyset$.

Equimatchable bipartitné grafy charakterizuje nasledujúca veta.

**Veta 2.10. [4]** Súvislý bipartitný graf $G$, s množinami bipartície $|U| \leq |W|$, je equimatchable práve vtedy, keď pre každý vrchol $u \in U$ existuje neprázdne $X \subseteq N(u)$ taká, že $|N(X)| \leq |X|$.

Z uvedených výsledkov vyplýva nasledujúce tvrdenie.

**Tvrdenie 2.11. [19]** Nech $G$ je súvislý, equimatchable graf bez perfektného párenia. Ak $G$ nie je bipartitný ani faktorovo kritický, tak $G$ obsahuje aspoň jednu artikuláciu.

Na tieto všeobené výsledky nadväzuje viacero prác popisujúcich equimatchable grafy patriace do nejakej triedy grafov. Napríklad v [14] autori skúmali grafy s obvodom aspoň päť a charakterizovali tie z nich, ktoré sú equimatchable. Pri tejto triede grafov sa dal využiť ten fakt, že podgrafy izomorfné s $K_n$ pre $n \geq 3$ alebo s $K_{n,n}$ pre $n \geq 2$ obsahujú kružnice dĺžky 3 a teda grafy s obvodom aspoň päť nemôžu takéto podgrafy obsahovať. Vďaka tomu mnohé prípady spomenuté vo vete 2.8 nemôžu nastať. Teraz uvedieme hlavný výsledok práce [14].

**Veta 2.12. [14]** Nech $G$ je súvislý equimatchable graf s obvodom aspoň 5. Potom $G$ je izomorfný s $K_2$, $C_5$, $C_7$ alebo $G$ je bipartitný graf s množinami bipartície $V_1$ a $V_2$ takými, že každý vrcholy z $V_1$ susedí s vrcholom stupňa 1 a žiadny vrchol z $V_1$ nemá stupeň 1.

Jeden zo všeobecnejších konceptov rozšíriteľnosti párení je $n$-rozšíriteľnosť. Graf $G$ je $n$-rozšíriteľný práve vtedy, keď obsahuje párenie veľkosti $n$ a každé také párenie sa dá rozšíriť na perfektné párenie. Charakterizácia grafov s perfektným párením, v ktorých sa každé párenie veľkosti $n$ dá rozšíriť na perfektné párenie je popísaná v [8].

**Veta 2.13. [8]** Graf $G$ je $n$-rozšíriteľný práve vtedy, keď pre každú množinu $S \subseteq V(G)$ platia obe nasledujúce podmienky:

(i) $n_o(G - S) \leq |S|$, kde $n_o(H)$ označuje počet nepárnych komponentov grafu $H$;

(ii) ak $n_o(G - S) = |S - 2k|$, pre nejaké $k$, $0 \leq k \leq n - 1$, tak $F(S) \leq k$, kde $F(S)$ je mohutnosť najväčšieho párenia v podgrafe indukovanom množinou $S$.

V niektorých prípadoch nemusíme nutne požadovať rozšírenie na najväčšie párenie. V [10] definovali $(n, k, d)$ -grafy takto: graf $G$ je $(n, k, d)$-graf práve vtedy, keď po zmazaní ľubovolných $n$ vrcholov z grafu $G$ sa vo výslednom grafe každé párenie veľkosti $k$ dá rozšíriť na párenie, ktoré nepokrýva práve $d$ vrcholov. Takáto definícia je veľmi všobecná. Napríklad grafy s perfektným párením sú $(0, 0, 0)$-grafy, $(n, 0, 0)$-grafy sú $n$-kritické grafy a podobne. Nasledujúca veta charakterizuje $(n, k, d)$ -grafy.

**Veta 2.14. [10]** Graf $G$ je $(n, k, d)$-graf práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) pre každú $S \subseteq V(G)$ a $|S| \leq n$, platí $n_o(G - S) \leq |S| - n + d$.

(ii) pre každú $S \subseteq V(G)$ takú, že $|S| \leq n + 2k$ a podgraf určený množinou $S$ obsahuje párenie veľkosti $k$, platí $n_o(G - S) \leq |S| - n - 2k + d$.

Okrem charakterizácie $(n, k, d)$-grafov je v [10] ukázaných aj niekoľko vlastností takýchto grafov, väčšinou pre $d = 0$.

**Veta 2.15.** **[10]** Nech $G$ je $(n, k, d)$-graf. Potom $G$ má nasledujúce vlastnosti.

(i) $G$ je aj $(n', k', d)$-graf pre každé $n'$, $k'$ také, že $0 \leq n' \leq n$, $0 \leq k' \leq k$ a $n' \equiv n\ (mod\ 2)$.

(ii) Ak $d = 0$, $n \geq 1$ a $k \geq 2$, tak $G$ je aj $(n + 2, k - 2, 0)$-graf.

(iii) Ak $G$ je súvislý, $d = 0$ a $k \geq 1$, tak $G$ je $(n + k + 1)$-súvislý.

(iv) Ak $G$ je súvislý, tak je $G - e$ je $(n - 2, k, 0)$-graf pre každú hranu $e$.

Na spomenuté výsledky z [10] priamo nadviazal článok [11], ktorý sa venuje najmä charakterizácii grafov, ktoré vzniknú z nejakého $(n, k, d)$-grafu odobratím alebo pridaním vrchola alebo hrany. Teraz spomenieme niektoré z dosiahnutých výsledkov.

**Veta 2.16.** **[11]** Pre každé $n > d \geq 0$ a $k \geq 1$, ak $G$ je $(n, k, d)$-graf, potom $G \cup e$ je $(n, k - 1, d)$-graf pre každú hranu $e \notin E(G)$.

**Veta 2.17.** **[11]** Nech graf $G'$ vznikne z grafu $G$ pridaním nového vrchola, ktoré bude spojený s každým vrcholom grafu $G$. Potom ak $G$ je $(n, k, d)$-graf, tak $G'$ je $(n + 1, k - 1, d)$ -graf.

# Kapitola 3

# Equimatchable grafy

## 3.1 Chordálne grafy

V tejto časti charakterizujeme štruktúru equimatchable chordálnych grafov.

**Definícia 3.1.** Graf $G$ sa nazýva *chordálny* práve vtedy, keď pre každú kružnicu dĺžky aspoň 4 obsahuje graf $G$ aj nejakú jej tetivu.

**Tvrdenie 3.2.** Súvislý chordálny graf je bipartitný práve vtedy, keď je strom. Špeciálne jediný kompletný bipartitný chordálny graf je $K_{1,1} \cong K_2$.

**Dôkaz** Ak chordálny graf obsahuje nejakú kružnicu dĺžky aspoň 4, tak obsahuje aj jej tetivu. Teda pokiaľ nie je nejaký chordálny graf acyklický, potom obsahuje aj kružnicu dĺžky 3, a teda nemôže byť bipartitný. □

**Veta 3.3.** Nech $G$ je chordálny equimatchable graf s perfekným párením. Potom $G$ je izomorfný s $K_{2n}$ pre nejaké $n \geq 1$.

**Dôkaz** Dôkaz vyplýva z vety 2.6 a z tvrdenia 3.2. □

**Veta 3.4.** Nech $G$ je súvislý equimatchable chordálny graf, ktorý neobsahuje perfertné párenie. Nech $(D, A, C)$ je Gallaiova-Edmondsova dekompozícia grafu $G$ a nech $A \neq \emptyset$. .

(1) Potom pre každé $D_i \in \langle D \rangle$ nastáva jedna z nasledujúcich možností:

   (i) $D_i \cong K_{2n-1}$ pre nejaké $n \geq 2$ a každý vrchol z $D_i$ susedí s rovnakým vrcholom $a \in A$ a žiadny vrchol z $D_i$ nesusedí s iným vrcholom $a \in A$.

(ii) $D_i$ obsahuje artikuláciu $d_i$ v $G$, pričom $d_i$ je jediný vrchol z $D_i$ spojený s vrcholmi z množiny $A$. Nech $H_i^1, \dots, H_i^r$ pre nejaké $r \geq 1$ sú komponenty grafu $D_i - d_i$. Potom pre každé $j$, $1 \leq j \leq r$, $H_i^j \cong K_{2m}$ pre $m \geq 1$ a aspoň dve hrany spájajú $H_i^j$ s $d_i$.

(iii) aspoň dva vrcholy z $D_i$ sú spojené s vrcholmi z $A$ a aspoň jeden vrchol z $D_i$ nie je spojený zo žiadnym vrcholom z $A$. V tomto prípade existuje vrchol $a \in A$ taký, že oddeľuje $D_i$ od $G$. Ak $D_i$ má aspoň 2 a najviac $|V(D_i)| - 1$ vrcholov spojených s $a$, potom $D_i$ je $K_{2m-1}$ pre nejaké $m \geq 3$.

Komponenty $D_j$, pre ktoré nastáva prípad i), ii), resp. iii), nazývame komponenty typu I, II, resp. III.

(2) Odoberme z grafu $G$ všetky komponenty $D_i$ typu II a typu III a každý komponent typu I skontrahujme do jedného vrchola. Potom existuje párenie vo výslednom bipartitnom grafe $G'_I$, ktoré pokrýva všetky vrcholy z $A$ a graf $G'_I$ je equimatchable.

(3) Odoberme z grafu $G$ všetky komponenty $D_i$ typu I a typu III a každý komponent typu II skontrahujme do jedného vrchola. Potom výsledný graf je súvislý strom, v ktorom sa na každej ceste striedajú vrcholy získané z vrcholov z $A$ s vrcholmi získanými z vrcholov z $D$.

**Dôkaz** Veta vyplýva z tvrdenia 3.2 a popisu equimatchable grafov z vety 2.8. □

## 3.2 Prienikové grafy fundamentálnych cyklov

V tejto časti sa venujeme štruktúre grafov $G$ takých, že pre ľubovoľnú kostru $T$ grafu $G$ je graf $G\#T$ equimatchable. Najprv definujeme niektoré pojmy používané v nasledujúcom texte.

**Definícia 3.5.** Nech $G$ je graf a $T$ je nejaká jeho kostra. Nech $e$ je ľubovoľná hrana grafu $G$ a $e \notin T$. Potom $T + e$ obsahuje práve jednu kružnicu, označme ju $C$, a táto kružnica sa nazýva *fundamentálna*. Budeme hovoriť, že $C$ prislúcha k hrane $e$. Definujeme aj funkciu $C_T$ z množiny nekostrových hrán $G$ do kružníc v $G$, ktorá ľubovoľnej nekostrovej hrane $e$ priradí jej fundamentálnu kružnicu a funkciu $E_T$ z fundamentálnych kružníc v $G$ do hrán z $E(G) - T$, ktorá priradí ľubovoľnej fundamentálnej kružnici jej nekostrovú hranu.

**Definícia 3.6.** *Prienikový graf fundamentálnych cyklov* (vzhľadom na kostru $T$) budeme označovať $G\#T$ a definujeme ho nasledovne: $V(G\#T) = \{v_e | e \in E(G - T)\}$; $v_{e_i} v_{e_j} \in E(G\#H)$ práve vtedy, keď fundamentálne kružnice prislúchajúce hranám $e_i$ a $e_j$ majú neprázdny prienik.

**Definícia 3.7.** *Bettiho číslo* grafu $G$ je rovné $E(G) - V(G) + c(G)$, kde $c(G)$ je počet komponetov grafu $G$. Bettiho číslo grafu $G$ budeme označovať $\beta(G)$.

**Tvrdenie 3.8.** Prienikové grafy fundamentálnych cyklov majú nsledujúce vlastnosti.

(i) Každý graf $G\#T$ je chordálny graf.

(ii) Počet vrcholov grafu $G\#T$, ak $G$ je súvislý, je určený vzťahom $|V(G\#T)| = \beta(G) = |E(G)| - V(G) + 1$, a teda nezávisí od zvolenej kostry $T$.

(iii) Ak graf $G$ je hranovo dvojsúvislý, potom $G\#T$ je súvislý.

**Dôkaz** Vlastnosť i) vyplýva z [20] a vlastnosti ii) a iii) sú zrejmé.

V dôkaze vety 3.9 využijeme nasledujúce grafy. Symbolom $K_{\#}(n, k)$ budeme označovať grafy s dvoma vrcholmi $v_p$ a $v_s$ a množinou hrán, ktorá pozostáva z $n - k$ slučiek vo vrchole $v_s$ a $k + 1$ hrán medzi vrcholmi $v_p$ a $v_s$. Všimnime si, že graf $K_{\#}(n, k)$ obsahuje pre každú svoju kostru $T$ práve $n$ fundamentálnych cyklov, z ktorých práve $k$ prechádza vrcholom $v_p$ a každý z týchto cyklov obsahuje vrchol $v_s$ tohoto grafu. Z vety 3.4 vyplýva, že equimatchable graf môže obsahovať viacero kompletných podgrafov, ale každý z nich je spojený s práve jedným vrcholom zo zvyšku grafu.

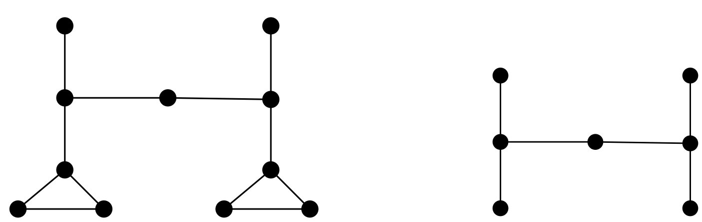
**Veta 3.9.** Nech $H$ je equimatchable chordálny graf, ktorý nie je faktorovo kritický. Potom existuje graf $G$ taký, že $G\#T \cong H$ pre každú kostru $T$ grafu $G$.

**Dôkaz** Štruktúru equimatchable chordálnych grafov s netriviálnou Edmonds-Gallaiovou dekompozíciou sme popísali vo vete 3.4. Teraz ukážeme, ako sa dá na základe tejto štruktúry zostrojiť graf $G$ s požadovanými vlastnosťami. Predpokladajme, že graf $H$ je súvislý. Ak by nebol, môžeme zvlášť vyriešiť každý z jeho komponentov.

Najprv definujeme pomocný graf $H'$, ktorý je podgraf grafu $H$ a pre neho zostrojíme graf $G'$ taký, že $G'\#T \cong H'$ pre každú kostru $T$ grafu $G'$. Graf

$H'$ definujeme takto: z grafu $H$ odobieme všetky komponenty z $D$ typu I a III. Ďalej v každom komponente z $D$ typu (ii) odoberieme všetky vrcholy okrem centrálneho vrchola tohto komponentu, z vety 3.4 vyplýva, že graf $H'$ je strom. Graf $G'$ zostrojíme nasledovne. Každému vrcholu $v$ z $H'$ priradíme v grafe $G'$ jednu kružnicu $C_v$, ktorá obsahuje práve toľko vrcholov, koľko má vrchol $v$ susedov v $H'$. Ak sú vrcholy $v_1$ a $v_2$ v grafe $H'$ susedné, potom prienik kružníc $C_{v_1}$ a $C_{v_2}$ v $G'$ obsahuje práve jeden vrchol. V opačnom prípade je tento prienik prázdny. Všimnime si, že každá z týchto kružníc je artikulačná, čo je zabezpečené stromovou štruktúrou grafu $H'$. Naviac graf $H - H'$ je tvorený niekoľkými komponentami, z ktorých každý je izomorfný s kompletným grafom a každý z nich je jednou alebo viacerými hranami pripojený k $H'$.

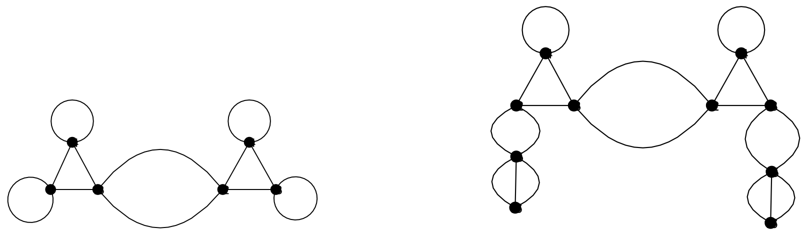
Každý komponent $H_i$ grafu $H - H'$ bude v $G$ zodpovedať podgrafu $G_i$ izomorfnému s $K_\#(n_i, k_i)$, kde $n_i = |V(H_i)|$ a $k_i$ sa rovná počtu hrán spájajúcich podgrafy $H_i$ s $H'$ v grafe $H$. Graf $G$ získame zo spomenutých pomocných grafov tak, že pre každé $i$ spravíme nasledovné. Označme $h_i \in H'$ vrchol, s ktorým je spojený komponent $H_i$. Nech $C_{G'_i}$ je kružnica v grafe $G'$ zodpovedajúca vrcholu $h_i$. Nech $v_i u_i$ je ľubovoľná hrana $C_{G'_i}$. Grafy $G_i$ a $G'$ spojíme tak, že namiesto hrany $v_i u_i$ vložíme hrany $v_i v_p$ a $v_p u_i$, kde $v_p \in G_i$. Zjavne takto získaný graf $G$ vyhovuje tvrdeniam vety. □



Obr. 3.1: Graf $H$ (vľavo) a graf $H'$ (vpravo), ktorý vznikne z $H$ konštrukciou z dôkazu vety 3.9.

Priebeh dôkazu vety 3.9 ilustrujú na príklade obrázky 3.1 a 3.2. V nasledujúcom texte popíšeme štruktúru grafov $G$ takých, že pre každú kostru $T$ je $G\#T$ je equimatchable. Najskôr ukážeme niekoľko pomocných tvrdení, v ktorých preskúmame, ako môžeme zmeniť graf $G\#T$ zvolením inej kostry.

**Lema 3.10.** Ak graf $G$ obsahuje dve disjunktné kružnice $C_1$ a $C_2$, tak existuje kostra $T$ grafu $G$ taká, že $C_1$ a $C_2$ sú fundamentálne kružnice vzhľadom na



Obr. 3.2: Graf $G'$ (vľavo) a graf $G$ (vpravo), ktoré vzniknú z grafov na obrázku 3.1 konštrukciou z dôkazu vety 3.9.

$T$. Naviac vrcholy v grafe $G\#T$ prislúchajúce kružniciam $C_1$ a $C_2$ nie sú susedné.

**Dôkaz** Definujme kostru $T$ tak, aby obsahovala všetky hrany $C_1$ okrem nejakej $e_1$, a taktiež všetky hrany $C_2$ okrem nejakej $e_2$, zvyšné hrany zvoľme ľubovoľne. Ľahko vidieť, že kružnice $C_1$ a $C_2$ sú fundamentálne vzhľadom na kostru $T$ a keďže sú podľa predpokladu disjunktné, tak vrcholy v grafe $G\#T$, ktoré im prislúchajú, nie sú susedné. □

**Lema 3.11.** Nech graf $G$ obsahuje dve disjunktné kružnice $C_1$ a $C_2$, ktoré sú spojené aspoň dvoma vrcholovo disjunktnými cestami $P_1$, $P_2$, ktorých koncové vrcholy sú navzájom rôzne. Potom existuje kostra $T$ tohto grafu $G$ taká, že $C_1$ a $C_2$ sú fundamentálne kružnice a vrcholy $v_1$ a $v_2$ v grafe $G\#T$, ktoré prislúchajú kružniciam $C_1$ a $C_2$, sú susedné. Naviac v grafe $G\#T$ existuje vrchol $v_3$, ktorý susedí s $v_1$ aj s $v_2$.

**Dôkaz** Označme $v_1$ resp. $v_2$ vrcholy prieniku kružnice $C_1$ s cestami $P_1$ resp. $P_2$. Kostru $T$ zvoľme tak, aby obsahovala $C_2$ okrem jej ľubovoľnej hrany $e_1$, cesty $P_1$ a $P2$, a kružnicu $C_1$ okrem dvoch hrán $e_2$ a $e_3$, ktoré vyberieme tak, aby v grafe $C_1 \cap T$ neexistovala cesta medzi vrcholmi $v_1$ a $v_2$. Ľahko vidieť, že v grafe $G\#T$ tvoria vrcholy $v_{e_1}$, $v_{e_2}$ a $v_{e_3}$ trojuholník. □

**Veta 3.12.** Graf $G\#T$ je izomorfný s $K_n$ pre každú kostru $T$ práve vtedy, keď v $G$ majú každé dve kružnice spoločný prienik.

**Dôkaz** Najprv dokážeme, že ak v grafe $G$ majú každé dve kružnice spoločný prienik, tak potom je $G\#T$ kompletný graf pre každú kostru $T$ grafu $G$. Nech $T'$ je ľubovoľná, ale pevne zvolená kostra grafu $G$. Majme ľubovoľné dva rôzne vrcholy $v_{e_1}$ a $v_{e_2}$ grafu $G\#T'$. Nech $C_1$ a $C_2$ sú k nim prislúchajúce fundamentálne cykly vzhľadom na kostru $T'$. Tieto cykly $C_1$ a $C_2$ sú kružnicami v grafe $G$ a podľa predpokladov majú neprázdny prienik, teda aj im prislúchajúce vrcholy sú spojené v $G\#T'$ hranou. Opačná implikácia vyplýva z lemy 3.10. $\square$

**Definícia 3.13.** Nech $G$ je ľubovoľný graf a $T$ a $T'$ sú ľubovoľné kostry grafu $G$ také, že $|E(T) - E(T')| = |E(T') - E(T)| = 1$. Nech $N_C$ je množina kružníc v grafe $G$, ktoré sú fundamentálnymi cyklami zároveň vzhľadom na kostru $T$ aj vzhľadom na kostru $T'$. Označme $N \subseteq V(G\#T)$ množinu vrcholov prislúchajúcich fundamentálnym cyklom z množiny $N_C$. *Najväčší spoločný podgraf* grafov $G\#T$ a $G\#T'$ definujeme ako podgraf $H$ grafu $G\#T$ indukovaný vrcholmi z množiny $N$. Najväčší spoločný podgraf $G\#T$ a $G\#T'$ budeme označovať $G\#(T,T')$. Ľahko vidieť, že graf $G\#T'$ obsahuje indukovaný podgraf $H'$ izomorfný s $H$, tento izomorfizmus budeme označovať $f_{G\#(T,T')}$.

**Lema 3.14.** Nech $G$ je graf a $T$ je nejaká jeho kostra. Nech $C_1$ a $C_2$ sú dve ľubovoľné fundamentálne kružnice v grafe $G$ vzhľadom na kostru $T$, ktorých prienik obsahuje aspoň jednu hranu. Označme $v_1$ resp. $v_2$ vrcholy grafu $G\#T$, ktoré zodpovedajú kružniciam $C_1$ resp. $C_2$. Potom graf $G$ obsahuje kostru $T'$ líšiacu sa od kostry $T$ jednou hranou takú, že zároveň platia všetky nasledujúce podmienky:

i) Graf $G\#T - G\#(T,T')$ obsahuje vrchol $v_2$ a môže obsahovať niektoré z vrcholov z množiny $N(v_1) \cap N(v_2)$. Žiadne iné vrcholy neobsahuje.

ii) Pre každý vrchol $v \in V(G\#T - G\#(T,T'))$ existuje vrchol $v' \in V(G\#T' - G\#(T',T))$ taký, že $v'$ susedí so všetkými vrcholmi v $f_{G\#(T,T')}(N(v) \cap V(G\#(T,T')))$ okrem niektorých z $f_{G\#(T,T')}(N(v_1) \cap N(v))$.

iii) Každý vrchol $v$ grafu $G\#T' - G\#(T',T)$ susedí so všetkými vrcholmi z množiny $f_{G\#(T,T')}(N(v_1) \cap V(G\#(T,T')) - (N(v_1) \cap N(v_2)))$.

iv) Graf $G\#T' - G\#(T',T)$ je izomorfný s kompletným grafom.

**Dôkaz** Nech $e_1$ je hrana z kružnice $C_1$, ktorá nepatrí do kostry $T'$ a nech $e_2$ je nejaká hrana z prieniku kružníc $C_1$ a $C_2$. Zjavne $e_2$ patrí do kostry $T$. Kostru $T'$ definujeme vzťahom $T' = T - e_2 + e_1$. Teraz dokážeme, že $T'$ má vlastnosti i) až iv). Kružnice v grafe $G$, ktoré boli fundamentálne vzhľadom na kostru $T$, a ktoré neprechádzajú cez hranu $e_2$, sú fundamentálne aj vhľadom na kostru

$T'$. Kružnica $C_1$ je fundamentálna aj vzhľadom na kostru $T'$, ale kružnica $C_2$ nie je fundamentalna vzhľadom na kostru $T'$. Z tychto vlastností vyplýva, že vlastnosť i) je splnená. Nech $f$ je hrana z $E(G) - T' - T$. Ak $e_2 \notin C_T(f)$, tak $C_{T'}(f) = C_T(f)$. Ak $e_2 \in C_T(f)$, tak $C_{T'}(f)$ obsahuje práve hrany zo symetrickej diferencie $C_T(e_2)$ a $C_T(f)$. Špeciálne $C_{T'}(f)$ obsahuje hranu $e_1$. Z týchto pozorovaní vyplýva platnosť tvrdení ii) - iv). □

Z predchádzajúcej lemy vyplývajú nasledujúce dôsledky.

**Dôsledok 3.15.** Nech $G$ je ľubovoľný graf a $T$ je jeho ľubovoľná kostra. Nech $v_1$ a $v_2$ sú vrcholy grafu $G\#T$ prislúchajúce nejakým fundamentálnym kružniciam $C_1$ a $C_2$. Nech $v_1$ a $v_2$ nemajú v $G\#T$ spoločného suseda. Ak prienik kružníc $C_1$ a $C_2$ obsahuje aspoň jednu hranu, tak existuje kostra $T'$ grafu $G$ taká, že graf $G\#T'$ je izomorfný s $H$, kde $H$ je graf, ktorý vznikne z grafu $G\#T$ pridaním hrán spájajúcich všetkých susedov vrchola $v_1$ s vrcholom $v_2$.

**Dôsledok 3.16.** Nech $T$ je ľubovoľná kostra grafu $G$. Nech v grafe $G$ existuje artikulácia $v$, ktorá oddeľuje podgraf $H$ izomorfný s kompletným grafom od zvyšku grafu. Označme $G'$ graf, ktorý vznikne z grafu $G\#T$ nahradením podgrafu $H$ dvomi podgrafmi $H' \cong K_n$ a $H'' \cong K_m$ takými, že $|V(H)| = n + m$, pričom každý vrchol podgrafu $H'$ susedí s $v$ a so všetkými vrcholmi z $V(G - H'') \cap N(v)$ a môže susediť aj s vrcholmi z podgrafu $H'$ a aspoň jeden vrchol podgrafu $H''$ susedí s $v$ alebo s nejakým vrcholom z $H'$. Ak $C_1$ je fundamentálna kružnica prisluchajúca vrcholu $v$, $C_2$ je fundamentálna kružnica prislúchajúca vrcholu $v' \in H$ a ak $C_1 \cap C_2$ obsahuje aspoň jednu hranu, tak existuje kostra $T'$ grafu $G$ taká, že graf $G\#T'$ je izomorfný s grafom $G'$.

## 3.3 Štruktúra grafov $G$ takých, že pre každú kostru $T$ je $G\#T$ equimatchable

Hlavným výsledkom v tejto časti je veta 3.29, ktorá popisuje štruktúru grafov $G$ takých, že pre každú kostru $T$ je $G\#T$ equimatchable. Najprv dokážeme niekoľko pomocných liem a následne v niekoľkých tvrdeniach ukážeme čiastočné výsledky pre špeciálnu štruktúru grafu $G\#T$.

**Definícia 3.17.** *Artikulačná kružnica* je kružnica $C$ v grafe $G$ taká, že ak vrcholy $u$ a $v$ ležia na kružnici $C$, potom každá cesta z $u$ do $v$ leží celá na kružnici $C$.

Platnosť nasledovného tvrdenia je zrejmá.

**Tvrdenie 3.18.** Ak $C$ je artikulačná kružnica v grafe $G$, tak platia nasledovné vlastnosti.

i) Každý komponent grafu $G - C$ je spojený s najviac jedným vrcholom kružnice $C$.

ii) Kružnica $C$ je fundamentálna kružnica grafu $G$ pre každú kostru $T$.

iii) Vrchol prislúchajúci kružnici $C$ v grafe $G\#T$ je buď artikuláciou, alebo listom.

**Definícia 3.19.** Nech $G$ je ľubovoľný graf a $T$ je nejaká jeho kostra. Hovoríme, že podgraf $L$ grafu $G$ *prislúcha* podgrafu $H$ grafu $G\#T$ práve vtedy, keď $L$ je podgraf grafu $G$ indukovaný vrcholmi fundamentálnych kružníc prislúchajúcimi vrcholom podgrafu $H$.

**Lema 3.20.** Nech $G$ je graf taký, že pre každú jeho kostru $T$ je graf $G\#T$ equimatchable. Potom ak pre nejakú kostru $T'$ existuje v grafe $G\#T'$ vrchol $a \in A$ spojený s aspoň troma komponentami množiny $D$, tak kružnica $C = C_{T'}(a)$ v grafe $G$ je artikulačná kružnica.

**Dôkaz** Nech graf $G$ spĺňa predpoklady lemy. Predpokladajme kvôli sporu, že pre nejakú kostru $T$ existuje v grafe $G\#T$ vrchol $a \in A_{G\#T}$, pre ktorý platí, že kružnica $C_T(a)$ nie je artikulačná a vrchol $a$ je spojený s aspoň troma komponentami z $\langle D \rangle$, označme ich $D_1, D_2, \ldots, D_k$, pre $k \geq 3$. Ďalej predpokladajme, že $G\#T$ je equimatchable. Ak kružnica $C_T(a)$ nie je artikulačná, tak potom existuje vrchol $d$ v $G\#T$ v niektorom komponente $D_i$ taký, že prienik kružnice $C_T(d)$ s $C_T(a)$ obsahuje aspoň jednu hranu. Bez ujmy na všeobecnosti nech to je $D_1$. Rozlíšime tri prípady, buď je $D_1$ typu II; alebo $D_1$ obsahuje jediný vrchol $d$; alebo $D_1$ je izomorfný s $K_{2n+1}$ pre nejaké $n \geq 1$.

i) Ak $D_1$ je typu II alebo ak $V(D_1) = \{d\}$, tak vrcholy $a$ a $d$ nemajú spoločných susedov a podľa dôsledku 3.15 existuje kostra $T'$ grafu $G$ taká, že $G\#T'$ je izomorfný s grafom $H$, ktorý vznikne z $G\#T$ pridaním hrán spájajúcich vrchol $d$ so všetkými susedmi vrchola $a$. V zmysle izomorfizmu z dôsledku 3.15 označme vrcholy v $G\#T'$ rovnako, ako sú označené ich vzory v $G\#T$. Zostrojme ľubovoľné nerozšíriteľné párenie $M$ grafu $G\#T'$, ktoré obsahuje hranu $ad$. Zostrojme tiež nerozšíriteľné párenie grafu $G\#T'$, ktoré obsahuje hrany spájajúce $a$ s $D_2$ a $d$ s $D_3$. Je zrejmé, že ak $G\#T$ je equimatchable, tak $|M| < |M'|$, a teda $G\#T'$ nie je equimatchable, čo je spor s predpokladmi.

ii) Ak $D_1$ je izomorfný s $K_n$ pre nejaké $n$, tak podľa dôsledku 3.16 existuje kostra $T'$ grafu $G$ a podgrafy $H'$ a $H''$ popísané v dôsledku 3.16. V zmysle izomorfizmu z dôsledku 3.16 označme vrcholy v $G\#T'$ rovnako, ako sú označené ich vzory v $G\#T$. V grafe $G\#T'$ vytvára podgraf $H'$ spolu s vrcholom $a$ kompletný graf, označme ho $H'_a$. Podgraf $H'_a$ je spojený aspoň jednou hranou s podgrafom $H''$ a všetky vrcholy z $H'_a$ susedia s podgrafmi $D_2, \ldots, D_k$. Zjavne $|V(H'')|$ a $|V(H'_a)|$ majú rovnakú paritu. Teraz zostrojme nerozšíriteľné párenia $M$ a $M'$ s nasledujúcimi vlastnosťami. Ak $|V(H'')|$ je nepárne, tak párenia $M$ a $M'$ obsahujú práve jednu hranu spájajúcu $H'_a$ a $H''$, inak neobsahujú žiadnu hranu spájajúcu $H''$ so zvyškom grafu. Párenie $M$ neobsahuje žiadnu hranu spájajúcu vrcholy z $V(H'_a)$ s vrcholmi z $V(G\#T' - H'' - H'_a)$. Párenie $M'$ obsahuje hrany spájajúce $H'_a$ s $D_2$ a s $D_3$. Ak $G\#T$ je equimatchable, tak zjavne $|M| < |M'|$, čo je spor s predpokladom, že $G\#S$ je equimatchable pre každú kostru $S$ grafu $G$.

□

Z vety 3.4 vyplýva nasledovná vlastnosť Gallai-Edmodsovej dekompozície ľubovoľného eqiumatchable grafu $G$. Nech $D_i \in \langle D \rangle$. Ak je $D_i$ susedný s aspoň dvoma rôznymi vrcholmi z množiny $A$, tak so všetkými vrcholmi z $A$ susedí práve jeden vrchol tohoto grafu, označme ho $d$. Graf $D_i - d$ pozostáva z niekoľkých komponentov izomorfných s kompletnými grafmi. Každy z nich je spojený s $d$ aspoň dvomi hranami. Vrchol d budeme v nasledujúcom texte nazývať *centrálny vrchol* komponentu $D_i$ typu II.

**Lema 3.21.** Nech $G$ je graf taký, že pre každú jeho kostru $T$ je graf $G\#T$ equimatchable. Potom ak pre nejakú kostru $T'$ existuje v grafe $G\#T'$ vrchol $d \in D$ spojený s aspoň dvoma vrcholmi z množiny $A$, tak kružnica $C = C_T(d)$ v grafe $G$ je artikulačná.

**Dôkaz** Nech graf $G$ spĺňa predpoklady lemy. Predpokladajme kvôli sporu, že existuje kostra $T$ grafu $G$ taká, že v grafe $G\#T$ existuje vrchol $d$ z $D$ spojený s aspoň dvoma rôznymi vrcholmi z množiny $A$, označme ich $a_i$ pre $1 \leq i \leq k$ a $k \geq 2$. Naviac vrcholu $d$ prislúcha fundamentálna kružnica, ktorá nie je artikulačná. Ak $|V(D_i)| > 1$, tak vrchol $d$ je centrálnym vrcholom komponentu $\langle D \rangle$ typu II, teda je spojený s podgrafmi $H_j$ kde $1 \leq j \leq l$ a $l \geq 1$. Predpokladajme, že $G\#T$ je equimatchable. Teraz môžu nastať dva prípady.

i) Prienik kružnice $C_T(d)$ a nejakej kružnice $C_T(a_i)$, kde $1 \leq i \leq k$ obsahuje aspoň jednu hranu. Bez ujmy na všeobecnosti nech to je $a_1$. Keďže $d$ a $a_1$ nemajú spoločných susedov, podľa dôsledku 3.15 existuje kostra $T'$ taká, že graf $G\#T'$ je izomorfný s grafom, ktorý vznikne z grafu $G\#T$ pridaním hrán spájajúcich vrchol $a$ so všetkými susedmi vrchola $d$. V zmysle izomorfizmu z dôsledku 3.15 označme vrcholy v $G\#T'$ rovnako, ako sú označené ich vzory v $G\#T$. Nie je ťažké vidieť, že $(D_{G\#T'}, A_{G\#T'}, C_{G\#T'})$-dekompozícia grafu $G\#T'$ je rovnaká ako $(D_{G\#T}, A_{G\#T}, C_{G\#T})$-dekompozícia grafu $G\#T$. V grafe $G\#T'$ sú susedné aspoň dva vrcholy z množiny $A_{G\#T'}$, preto podľa vety 3.4 nie je graf $G\#T'$ equimatchable.

ii) Prienik kružnice $C_T(d)$ a kružnice $C_T(h)$, pre nejaké $h \in H_j$, bez ujmy na všeobecnosti nech $j = 1$, obsahuje aspoň jednu hranu. Vrchol $d$ oddeľuje od zvyšku grafu podgraf $H_1$ izomorfný s $K_n$ pre nejaké $n$, takže podľa dôsledku 3.16 existuje kostra $T'$ a podgrafy $H'$ a $H''$ popísané v dôsledku 3.16. V zmysle izomorfizmu z dôsledku 3.16 označme vrcholy v $G\#T'$ rovnako, ako sú označené ich vzory v $G\#T$. Nie je ťažké vidieť, že $H' + H'' + d + H_i$ pre $2 \leq i \leq l$ je komponentom $\langle D_{G\#T'} \rangle$ a nemá štruktúru popísanú vo vete 3.4, preto graf $G\#T'$ nie je equimatchable.

□

**Lema 3.22.** Nech $G$ je graf taký, že pre každú jeho kostru $T$ je graf $G\#T$ equimatchable. Ak pre nejakú kostru $T'$ existuje v grafe $G\#T'$ centrálny vrchol $d$ komponentu $D_i \in \langle D \rangle$ typu II, pre ktorý platí, že $D_i - d$ nie je izomorfný s kompletným grafom, tak $C_T(d)$ je artikulačná kružnica.

**Dôkaz** Nech $G$ je graf spĺňajúci podmienky lemy a nech pre kostru $T$ grafu $G$ existuje v grafe $G\#T$ komponent $D_i \in \langle D \rangle$ spĺňajúci podmienky lemy. Označme $H_1, H_2, \ldots, H_k$ pre $k \geq 2$ podgrafy $K_{2n}$ spojené v grafe $G\#T$ s vrcholom $d$ a označme $a$ vrchol z $A$ spojený s $d$. Predpokladajme kvôli sporu, že buď prienik $C'_T(d)$ s $C_T(a)$ obsahuje aspoň jednu hranu alebo prienik $C'_T(d)$ s $C'_T(h)$, kde $h \in H_i$, obsahuje aspoň jednu hranu. Obidve možnosti vyriešime zvlášť.

i) Nech prienik $C_T(d)$ s $C_T(a)$ obsahuje aspoň jednu hranu. Vrcholy $a$ a $d$ nemajú spoločných susedov v grafe $G\#T$. Podľa dôsledku 3.15 existuje kostra $T'$ grafu $G$ taká, že $G\#T'$ je izomorfné s grafom, ktorý vznikne z grafu $G\#T$ pridaním hrán spájajúcich vrchol $a$ s vrcholom $d$. V zmysle izomorfizmu z dôsledku 3.15 označme vrcholy v $G\#T'$ rovnako ako zodpovedajúce vrcholy v $G\#T$. Keďže graf $G\#T$ je equimatchable, tak v ňom aj v grafe $G\#T'$ je vrchol a spojený s nejakým komponentom z $\langle D \rangle$ typu I, označme ho $D_j$. Zostrojme nejaké nerozošíriteľné párenie $M$ grafu $G\#T'$, ktoré obsahuje hrany spájajúce $a$ s $H_0$ a $d$ s $H_1$. Zjavne zostane v $H_0$ aj v $H_1$ po jednom vrchole, ktorý nebude nepokrytý $M$. Zostrojme tiež nejaké nerozšíriteľné párenie $M'$ grafu $G\#T'$, ktoré obsahuje hranu $ad$. Pripomeňme, že graf $G\#T'$ sa od equimatchable grafu $G\#T$ líši len hranami medzi vrcholom $a$ a susedmi vrchola $d$, preto zjavne $|M| < |M'|$, a teda $G\#T'$ nie je equimatchable.

ii) Nech prienik kružnice $C_T(d)$ a kružnice $C_T(h)$ pre nejaké $h \in H_j$ obsahuje aspoň jednu hranu, bez ujmy na všeobecnosti nech $j = 1$. Vrchol $d$ oddeľuje od zvyšku grafu podgraf $H_1$ izomorfný s $K_n$ pre nejaké $n$, takže podľa dôsledku 3.16 existuje kostra $T'$ a podgrafy $H'$ a $H''$ popísané v dôsledku 3.16. V zmysle izomorfizmu z dôsledku 3.16 označme vrcholy v $G\#T'$ rovnako, ako sú označené ich vzory v $G\#T$. Nie je ťažké vidieť, že $H' + H'' + d + H_i$ pre $2 \leq i \leq l$ je komponentom $\langle D_{G\#T'} \rangle$ a nemá štruktúru popísanú vo vete 3.4, preto graf $G\#T'$ nie je equimatchable.

Grafy, v ktorých žiadne dve kružnice nie sú nezávislé, popisuje nasledujúca veta.

**Definícia 3.23.** *Koleso* je graf, ktorý vznikne z kružnice pridaním nového vrchola $v$ a hrán, ktoré spoja $v$ so všetkými vrcholmi kružnice, tieto hrany nazývame *priečky*.

**Veta 3.24. (Lovász [21])** Graf $G$ neobsahuje dva nezávislé cykly práve vtedy, keď buď obsahuje vrchol $v$ taký, že $G - v$ je strom, alebo ho vieme získať pridaním lesa a najviac jednej hrany spájajúcej každý strom s grafom $G_0$, pričom graf $G_0$ je subdivízia jedného z nasledujúcich grafov:

i) Graf $G$ má tri vrcholy a násobné hrany, ktoré spájajú každú dvojicu vrcholov.

ii) Graf $G$ je izomorfný s $K_4$, v ktorom hrany jedného trojuholníka môžu mať násobné hrany.

iii) Graf $G$ je izomorfný s $K_5$.

iv) Graf $G$ je izomorfný s $K_5$ bez jednej hrany, v ktorom hrany neincidentné s vrcholom incidentným s odobratou hranou môžu byť násobné.

v) Graf $G$ je koleso, ktorého priečky môžu byť násobné.

vi) Graf $G$ získame z grafu $K_{3,p}$ pridaním hrán spájajúcich vrcholy v prvej (trojvrcholovej) partícii.

Teraz vyslovíme niekoľko tvrdení o štruktúre grafov $G$ takých, že pre každú kostru $T$ grafu $G$ je $G\#T$ equimatchable. Pripomeňme, že artikulačná kružnica je fundamentálna vzhľadom na ľubovoľnú kostru grafu $G$.

**0značenie** Nech $G$ je ľubovoľný hranovo dvojsúvislý graf, $T$ je ľubovoľná kostra grafu $G$ a $C_T$ je fundamentálna kružnica vzhľadom na $T$ v grafe $G$. Symbolom $G \setminus C_T$ budeme označovať najväčší hranovo dvojsúvislý podgraf grafu $G$, ktorý neobsahuje hranu $C_T - E(T)$. Pripomeňme, že ak $C_T$ je artikulačná kružnica, tak pre každý komponent $K$ grafu $G \setminus C$ platí, že $K \cap C$ obsahuje práve jeden vrchol.

**Lema 3.25.** Nech $G$ je graf taký, že pre každú kostru $T$ grafu $G$ je $G\#T$ equimatchable a nech $T'$ je ľubovoľná, ale pevne zvolená kostra grafu $G$. Ak artikulačná kružnica $C$ zodpovedá v grafe $G\#T'$ vrcholu z množiny $A_{G\#T'}$, tak pre každú kostru $T$ grafu $G$ zodpovedá kružnica $C$ v grafe $G\#T$ vrcholu z množiny $A_{G\#T}$.

**Dôkaz** Nech graf $G$ spĺňa podmienky vety. Nech $C$ je artikulačná kružnica a nech $T$ je ľubovoľná kostra grafu $G$. Označme $v$ vrchol prislúchajúci kružnici $C$ v grafe $G\#T$. Graf $G\#T$ je equimatchable, a teda s vrcholom $v$ musí susediť komponent $D_i \in \langle D \rangle$ typu I. Označme $G_1, \ldots, G_n$ komponenty grafu $G \setminus C$, ktoré prislúchajú podgrafom $D_1, \ldots, D_n$ grafu $G\#T$ typu I. V aspoň jednom z podgrafov $G_1, \ldots, G_n$ prechádza každá kružnica vrcholom $G_i \cap C$. Keby opísaný podgraf $G_i$ neexistoval, tak by sme vedeli ľahko nájsť kostru $T'$ takú, že graf $G\#T'$ by nebol equimatchable. Takže pre každú kostru $T$ susedí vrchol prislúchajúci kružnici $C$ s každým vrcholom podgrafu izomorfného s $K_m$ pre $m$ nepárne. Je zjavné, že vrchol prislúchajúci kružnici $C$ je v grafe $G\#T'$, kde $T'$ je ľubovoľná kostra grafu $G$, pokrytý každým nerozšíriteľným párením, a teda nemôže patriť do množiny $D$.

**Tvrdenie 3.26.** Nech $G$ je hranovo dvojsúvislý graf a nech kostra $T$ grafu $G$ je taká, že množina $A_H$ z $(D_H, A_H, C_H)$-dekompozície grafu $H = G\#T$ je neprázdna. Pre graf $G$ platí, že pre ľubovoľnú kostru $T'$ grafu $G$ je $G\#T'$ equimatchable práve vtedy, keď $G$ spĺňa naraz všetky nasledujúce podmienky:

i) Pre každý vrchol $a \in A_H$ taký, že $a$ susedí s aspoň 3 komponentami z $\langle D_H \rangle$ platí, že kružnica $C_T(a)$ v grafe $G$ je artikulačná.

ii) Pre každý vrchol $d \in D_H$ taký, že $d$ je spojený s aspoň dvoma vrcholmi z množiny $A_H$ platí, že kružnica $C_T(d)$ v grafe $G$ je artikulačná.

iii) Pre každý vrchol $d \in D_H$, centrálny vrchol komponentu $D_i \in \langle D_{G\#T'} \rangle$ typu II, pre ktorý platí, že $D_i - d$ nie je izomorfný s kompletným grafom, platí, že $C_{T'}(d)$ je artikulačná kružnica.

iv) Pre každý vrchol $a \in A_H$ taký, že $C_T(a)$ je artikulačná kružnica, platí, že aspoň v jedinom komponente $L$ grafu $G \setminus C_T(a)$ prechádza každá kružnica vrcholom $K \cap C_T(a)$ a $\beta(L)$ je nepárne. Pre každú kostru $T'$ grafu $G$ prislúcha $L$ v grafe $G\#T'$ komponentu $\langle D \rangle$ typu I.

v) Pre každý vrchol $a \in A_H$ taký, že $C_T(a)$ nie je artikulačná kružnica, platí, že $G \setminus C_T(a)$ obsahuje práve 2 komponenty, označme ich $L'_1$ a $L'_2$. Aspoň pre jeden z komponentov $L'_1$ a $L'_2$ platí, že $L_i = L'_i \cup C_T(a)$ neobsahuje 2 disjunktné kružnice a $\beta(L_i)$ je párne. Pre každú kostru $T'$ grafu $G$ prislúcha $L_i$ v grafe $G\#T'$ buď vrcholu $a \in A$ a komponentu $\langle D \rangle$ typu I spojenému s $a$, alebo časti komponentu z $\langle D \rangle$ typu II izomorfnej s $K_{2n}$ pre $n \in \mathbb{N}$.

vi) Nech $d \in D_H$ je centrálny vrchol komponentu $D_i$ z $\langle D_H \rangle$ typu II a $C_T(d)$ je artikulačná kružnica. Označme $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots, L_n$ komponenty grafu $G \setminus C_T(d)$ tak, aby komponenty $L_1, \ldots, L_i$ prislúchali podgrafu $H - D_i$. Pre každý podgraf $L_j$, kde $i + 1 \leq i \leq n$ platí, že každé dve kružnice v ňom majú neprázdny prienik.

vii) Pre každý vrchol $d \in D_H$ taký, že $d$ je centrálny vrchol komponentu $D_i$ z $\langle D \rangle$ typu II a $C_T(d)$ nie je artikulačná kružnica, platia nasledujúce podmienky. Ak $a$ je vrchol z množiny $A_H$ susedný s $d$, tak $G \setminus C_T(a)$ obsahuje práve dva komponenty $L_1$ a $L_2$. Jeden z týchto podgrafov grafu $G$ zodpovedá podgrafu $G\#T - D_i - a$ grafu $G\#T$, bez ujmy na všeobecnosti nech to je $L_2$. Potom ľubovoľné kružnice $C_1, C_2, C_3$ a $C_4$ v podgrafe

$L_1$ spĺňajú, že $C_1 \cap C_2 = C_3 \cap C_4$. Pre každú kostru $T'$ grafu $G$ prislúcha $L_1$ v grafe $G\#T'$ komponentu z $\langle D \rangle$.

viii) Nech $D_i$ je ľubovoľný komponent grafu $\langle D_H \rangle$ typu I alebo III. Označme $L$ podgraf grafu $G$, ktorý prislúcha podgrafu $D_i$ v $G\#T$. Potom platí, že buď podgraf $L$ neobsahuje dva nezávislé cykly, alebo má štruktúru popísanú v vii).

**Dôkaz** Ľahko vidieť, že ak graf $G$ spĺňa podmienky tvrdenia, tak pre každú kostru $T$ grafu $G$ je $G\#T$ equimatchable. Opačnú implikáciu dokážeme postupne pre jednotlivé podmienky. Podmienky i), ii) a iii) vyplývajú z tvrdení 3.20, 3.21 a 3.22. Platnosť podmienky iv) vyplýva z toho, že podľa lemy 4.13 artikulačná kružnica $C_T(a)$ prislúcha vrcholu z množiny $A_{G\#T'}$ pre ľubovoľnú kostru $T'$ grafu $G$ a podľa vety 3.4 musí vrchol z $A$ susediť s komponentom z $\langle D \rangle$ typu I. Podmienka v) vyplýva z toho, že každý vrchol z množiny $A$ susedí s každým vrcholom komponentu z $\langle D \rangle$ typu I. Podmienka vi) vyplýva zo štruktúry komponentu $D \in \langle D \rangle$ typu II. Podmienky vii) a viii) popisujú najmä štruktúru podgrafov grafu $G$, ktoré susedia s artikulačnou kružnicou prislúchajúcou vrcholu z $A$ v $G\#T'$ pre ľubovoľnú kostru $T'$ grafu $G$. Tieto podgrafy zjavne prislúchajú vždy komponetom z $\langle D \rangle$ a musia mať opísanú štruktúru.

**Tvrdenie 3.27.** Nech $G$ je hranovo dvojsúvislý graf taký, že $G\#T$ pre ľubovoľnú kostru $T$ grafu $G$ neobsahuje artikuláciu a je faktorovo kritický. Graf $G\#T$ je equimatchable pre každú kostru $T$ grafu $G$ práve vtedy, keď $G$ neobsahuje 3 navzájom disjunktné kružnice.

**Dôkaz** Nech graf $G$ spĺňa podmienky dokazovaného tvrdenia. Ak $G$ neobsahuje 3 disjunktné kružnice, tak pre ľubovoľnú kostru $T$ grafu $G$ neobsahuje $G\#T$ tri navzájom nesusedné vrcholy, a teda každé nerozšíriteľné párenie pokryje všetky vrcholy okrem jedného.

Opačnú implikáciu budeme dokazovať sporom. Predpokladajme teda, že graf $G$ obsahuje 3 navzájom disjunktné kružnice. Ukážeme, že v takomto prípade existuje kostra $T$ grafu $G$ taká, že $G\#T$ nie je equimatchable. Nech $C_1$, $C_2$ a $C_3$ sú navzájom disjunktné kružnice v grafe $G$. Zvoľme kostru $T$ tak, že obsahuje hrany kružnice $C_i$ pre $i \in \{1, 2, 3\}$ okrem jednej a $T$ obsahuje čo najmenej hrán, ktoré majú jeden koniec na kružnici $C_1$. Takže ak $v_1, v_2 \in C_1$, tak $v_1u_1 \in T \wedge v_2u_2 \in T$ práve vtedy, keď jediná cesta medzi $u_1$ a $u_2$ prechádza cez kružnicu $C_1$. Zjavne platí, že kružnice $C_1$, $C_2$ a $C_3$ sú fundamentálne vzhľadom na $T$. Označme $c_1$, $c_2$ resp. $c_3$ vrcholy v grafe $G\#T$ prislúchajúce fundamentálnym kružniciam $C_1$, $C_2$ resp. $C_3$. Hranu v kostre $T$, ktorá vychádza z kružnice $C_1$ a leži na ceste z $C_1$ do $C_2$, označíme $e$. Je zrejmé, že existuje práve jedna takáto hrana. Nech $A$ je množina všetkých fundamentálnych kružníc vzhľadom na kostru $T$, ktoré prechádzajú cez hranu $e$. Označme $H$ podgraf grafu $G\#T$, ktorý prislúcha podgrafu $A$ v grafe $G$. Je zrejmé, že $H$ je izomorfné s kompletným grafom $K_n$.

Teraz ukážeme, že graf $G\#T-H$ obsahuje 2 komponenty. Zjavne vrcholy $c_1$ a $c_2$ ležia v rôznych komponentoch grafu $G\#T-H$, a teda počet komponentov je aspoň 2. Predpokladajme kvôli sporu, že týchto komponentov je viac ako 2. Keďže predpokladáme, že graf $G\#T$ neobsahuje artikulácie, obsahuje podgraf $H$ aspoň 2 vrcholy. Je ľahké vidieť, že vieme nájsť párenie grafu $G\#T$, ktoré pokrýva všetky vrcholy podgrafu $H$ a obsahuje niekoľko hrán spájajúcich komponenty $G\#T-H$ s podgrafom $H$ tak, aby v aspoň 3 komponentoch zostalo po jednom nepokrytom vrchole. Ukázali sme teda, že v tomto prípade graf $G\#T$ nie je equimatchable.

Predpokladajme preto, že graf $G\#T-H$ obsahuje práve 2 komponenty. Označme $H_1$ komponent grafu $G\#T$, v ktorom sa nachádza vrchol $c_3$ a druhý komponent označme $H_2$. V komponente $H_2$ sa teda nachádzajú 2 nesusedné vrcholy, označme ich $c_1'$ a $c_2'$. Ukážeme teraz, že graf $G\#T$ nie je equimatchable. Ľahko vidieť, že ak z equimatchable grafu odoberieme vrcholy pokryté nejakým párením, tak zvyšok grafu je stále equimatchable a má rovnakú deficienciu ako pôvodný graf. Túto skutočnosť neskôr využijeme. Teraz rozlíšime niekoľko prípadov.

i) Ak $|H|$ je párne a $|H_2|$ nepárne, tak $|H_1|$ je párne. Naviac, keďže podgraf $H$ vieme pokryť párením a v $H_2$ ostane v takom prípade vždy jeden vrchol nepokrytý (kvôli parite), musí platiť, že $H_1$ je equimatchable s perfektným párením, a teda izomorfný s $K_{2m}$. Toto je spor s tým, že v podgrafe $H_1$ sú vrcholy $c_1'$ a $c_2'$ nesusedné.

ii) Ak $|H|$ je nepárne a $|H_2|$ párne, tak $|H_1|$ je párne. Ak z grafu $G\#T$ odoberieme nejakú hranu spájajúcu podgrafy $H$ a $H_2$, získame situáciu z i).

iii) Ak $|H|$ aj $|H_2|$ sú nepárne, tak $|H_1|$ je nepárne. S podgrafom $H$ susedia v $H_1$ aspoň 2 vrcholy, teda okrem $c_1$ aj nejaký vrchol $v$, pretože podľa predpokladov $G\#T$ neobsahuje artikuláciu a $|H_1| > 2$. Ľahko vidieť, že vrchol $v$ susedí s vrcholom $c_1$, a teda $v \neq c_3$. Ak z grafu $G\#T$ odstránime hranu spájajúcu vrchol $v$ s podgrafom $H$, získame situáciu z i).

iv) Ak $|H|$ aj $|H_2|$ sú párne, tak $|H_1|$ je nepárne. Ak z grafu $G\#T$ odoberieme nejakú hranu spájajúcu podgrafy $H$ a $H_2$, získame situáciu z iii).

□

**Tvrdenie 3.28.** Nech $G$ je hranovo dvojsúvislý graf taký, že $G\#T'$ pre ľubovoľnú kostru $T'$ grafu $G$ je faktorovo kritický. Naviac nech existuje kostra $T$ grafu $G$ taká, že $G\#T$ obsahuje artikuláciu $v$ prislúchajúcu fundamentálnej kružnici $C$. Graf $G\#T$ je equimatchable pre každú kostru $T$ grafu $G$ práve vtedy, keď každý komponent grafu $G \setminus C$ neobsahuje dva disjunktné cykly a platí práve jedna z nasledujúcich podmienok:

1. Počet komponentov grafu $G \setminus C$ je 2.
2. Počet komponentov grafu $G \setminus C$ je 3 a pre každý komponent $H$ grafu $G \setminus C$ platí, že ak $P = H \cap C$, tak každá kružnica v $H$ obsahuje celú cestu $P$.
3. Počet komponentov grafu $G \setminus C$ je väčší ako 3 a kružnica $C$ je artikulačná.

**Dôkaz** Nech graf $G$ spĺňa podmienky tvrdenia. Ukážeme najprv, že každý komponent grafu $G \setminus C$ neobsahuje 2 disjunktné cykly. Všimnime si, že každý komponent grafu $G\#T - v$ musí obsahovať perfektné párenie, pretože graf $G\#T$ je faktorovo kritický. Označme $G_1, G_2, \ldots, G_l$ komponenty grafu $G \setminus C$ a $H_1, H_2, \ldots, H_l$ komponenty grafu $G\#T - v$ tak, aby podgraf $H_i$ grafu $G\#T$ prislúchal podgrafu $G_i$ grafu $G$. Keďže v je artikulácia, tak $l \geq 2$. Keďže každé párenie obsahujúce hranu spájajúcu $v$ s $H_1$ sa musí dať rozšíriť na najväčšie párenie grafu $G\#T$, musí byť každý z komponentov $H_i$ pre $2 \leq i \leq l$ izomorfný s kompletným grafom s párnym počtom vrcholov. Podobne vieme dokázať, že aj $H_1$ musí byť izomorfný s kompletným grafom s párnym počtom vrcholov. Ľahko vidieť, že ak $G_i$ obsahuje dve disjunktné kružnice, tak existuje kostra $T'$ taká, že $G\#T'$ nie je equimatchable.

Teraz ukážeme, že ak $l > 3$, tak $C$ je artikulačná kružnica. Budeme postupovať sporom, nech teda $C$ nie je artikulačná. Existuje $i$ také, že $H_i \cap C$ obsahuje aspoň jednu hranu. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že

$i = 1$, a teda $H_1 \cap C$ obsahuje aspoň jednu hranu. Podľa dôsledku 3.16 existuje kostra $T'$ a grafy $H'$ a $H''$ popísané v dôsledku 3.16. Pomocou spomenutého izomorfizmu označme vrcholy v $G\#T'$ rovnako, ako sú označené ich vzory v $G\#T$. Takže $G\#T' - H' - v$ obsahuje komponenty $H'', H_2, \ldots, H_l$, ktoré sú izomorfné s kompletnými grafmi. Ukážeme, že graf $L = G\#T'$ nie je equimatchable. Zjavne $L$ obsahuje párenie pokrývajúce všetky vrcholy okrem jedného, naším cieľom bude teda nájsť nerozšíriteľné párenie $M$, ktoré nechá nepokryté aspoň 3 vrcholy grafu $L$. Najprv zostrojíme pomocné párenie $M'$. Ak $|V(H')| = 1$, tak $M'$ obsahuje hranu spájajúcu $H'$ s $H_2$ a hranu spájajúcu $v$ s $H_3$. Ak $|V(H')| > 1$ a $|V(H')|$ je nepárne, tak $M'$ obsahuje hrany spájajúce $v$ s $H''$, $H'$ s $H_2$, $H'$ s $H_3$ a $H'$ s $H_4$ a $M'$ obsahuje aj perfektné párenie zvyšných vrcholov v $H'$ medzi sebou. Ak $|V(H')|$ je párne, tak M' obsahuje hrany spájajúce $v$ s $H_2$, $H'$ s $H_3$ a $H'$ s $H_4$ a $M'$ obsahuje aj perfektné párenie zvyšných vrcholov v $H'$ medzi sebou. Párenie $M$ vznikne ako ľubovoľné rozšírenie párenia $M'$ na nerozšíriteľné párenie. Je zjavné, že $M$ nepokrýva práve 3 vrcholy grafu $L$.

Nakoniec potrebujeme dokázať, že ak $l = 3$, tak pre každé $H_i$ platí, že ak $P = H_i \cap C$, tak každá kružnica v $H_i$ obsahuje $P$. Všimnime si, že ak je spomenutá podmienka splnená, tak pre každú kostru $T'$ grafu $G$ graf $G\#T'$ je buď izomorfný s $G\#T$, alebo neobsahuje 3 navzájom nesusedné vrcholy, a teda je equimatchable. Je ľahké vidieť, že ak uvedená podmienka neplatí, tak existuje kostra $T'$ grafu $G$ taká, že $G\#T'$ nie je equimatchable. $\square$

**Veta 3.29.** Nech graf $G$ je hranovo dvojsúvislý. Graf $G\#T$ je equimatchable pre každú kostru $T$ grafu $G$ práve vtedy, keď graf $G$ spĺňa niektorú z nasledujúcich podmienok:

i) Graf $G$ neobsahuje 3 disjunktné kružnice a $\beta(G)$ je nepárne.

ii) Graf $G$ neobsahuje 2 disjunktné kružnice a $\beta(G)$ je párne.

iii) Graf $G$ spĺňa podmienky v tvrdení 3.26 alebo v tvrdení 3.28.

**Dôkaz** Veta vyplýva z tvrdení 3.27, 3.28 a 3.26 a z toho, že ak $\beta(G)$ je párne a pre každú kostru $T$ má graf $G\#T$ prázdnu množinu $A_{G\#T}$, tak $G\#T$ má perfektné párenie, a teda $G\#T$ musí byť vždy izomorfný s kompletným grafom.

## 3.4 Equimatcheble karteziánsky súčin grafov

V tejto kapitole ukážeme, že netriviálny karteziánsky súčin $G\Box H$ je equimatchable práve vtedy, keď $G \cong K_2$ a $H \cong K_2$. Najskôr dokážeme niekoľko pomocných tvrdení a s ich pomocou odvodíme hlavný výsledok.

**Definícia 3.30.** *Karteziánsky súčin* grafov $G$ a $H$ označujeme $G\Box H$ a definujeme ho nasledovne: $V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$ a $(v_G, v_H)(v'_G, v'_H) \in E(G\Box H)$ práve vtedy, keď $v_G \equiv v'_G \wedge v_H v'_H \in E(H)$ alebo $v_H \equiv v'_H \wedge v_G v'_G \in E(G)$.

Z definície vyplýva, že operácia karteziánsky súčin na grafoch je komutatívna, teda $G\Box H \cong H\Box G$. Túto vlastnosť v nasledujúcom texte nebudeme zdôrazňovať a budeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $|V(G)| \geq |V(H)|$. Pokiaľ je graf $H$ izomorfný s $K_1$, potom graf $G\Box H$ je izomorfný s $G$, a teda je equimatchable práve vtedy, keď graf $G$ je equimatchable. V ďalšom texte budeme karteziánsky súčin $G\Box H$ nazývať *netriviálnym* práve vtedy, keď $|V(G)| \geq 2$ a $|V(H)| \geq 2$.

Nech $G$ a $H$ sú grafy s komponentami $G_1, G_2, \ldots, G_n$ a $H_1, H_2, \ldots, H_m$, potom $G\Box H$ je equimatchable práve vtedy, keď $G_i\Box H_j$ je equimatchable pre každú dvojicu $i$ a $j$, kde $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq m$. V ďalšom texte budeme preto skúmať len netriviálny karteziánsky súčin súvislých grafov. Teraz vyslovíme niekoľko základných vlastností karteziánskych súčinov.

**Tvrdenie 3.31.** Ak $G\Box H$ je netriviálny karteziánsky súčin súvislých grafov, tak neobsahuje artikuláciu ani list.

**Dôkaz** Nech $G$ a $H$ spĺňajú podmienky tvrdenia. Stačí ukázať, že pre ľubovoľné dva rôzne vrcholy $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G\Box H$ existujú v $G\Box H$ aspoň 2 vnútorne disjunktné cesty, ktoré ich spájajú. Označme $g_1 g'_0 g'_1 \ldots g'_n g_2$ cestu v grafe $G$ z vrchola $v_1$ do vrchola $v_2$ a $h_1 h'_0 h'_1 \ldots h'_m h_2$ cestu v grafe $H$ z vrchola $h_1$ do vrchola $h_2$. Rozlíšime dva prípady, buď $g_1 \neq g_2$ a zároveň $h_1 \neq h_2$, alebo je jedna súradnica vrcholov $(g_1, h_1)$ a $(g_2, h_2)$ rovnaká, bez ujmy na všeobecnosti, nech v tom prípade platí $g_1 \neq g_2$.

i) Nech $g_1 \neq g_2$ a $h_1 \neq h_2$. Definujeme cestu $P$ v grafe $G\Box H$ z vrchola $(g_1, h_1)$ do vrchola $(g_2, h_2)$, $P = (g_1, h_1)(g_1, h'_0)(g_1, h'_1) \ldots (g_1, h'_m)(g_1, h_2)$ $(g'_0, h_2) \ldots (g'_n, h_2)(g_2, h_2)$. Zostrojíme cestu $P'$, ktorá bude vnútorne disjunktná s P, $P' = (g_1, h_1)(g'_0, h_1)(g'_1, h_1) \ldots (g'_n, h_1)(g_2, h_1)(g_2, h'_0) \ldots$ $(g_2, h'_m)(g_2, h_2)$.

ii) Nech $g_1 = g_2 = g$ a $h_1 \neq h_2$. Jedna cesta z $(g, h_1)$ do $(g, h_2)$ je $P = (g, h_1)(g, h'_0)(g, h'_1) \dots (g, h'_m)(g, h_2)$. Nech $g'$ je niektorý zo susedov vrchola $g$ v grafe $G$. Cestu $P'$ zostrojíme nasledovne $P' = (g, h_1)(g', h_1)$ $(g', h'_0)(g', h'_1) \dots (g', h'_m)(g', h_2)(g, h_2)$. Zjavne sú $P$ a $P'$ vnútorne disjunktné.

**Tvrdenie 3.32.** Graf $G \square H$ je bipartitný práve vtedy, keď grafy $G$ a $H$ sú bipartitné.

Teraz popíšeme štruktúru equimatchable karteziánskych súčinov.

**Tvrdenie 3.33.** Nech $G \square H$ je netriviálny karteziánsky súčin súvislých grafov. Ak $G \square H$ je equimatchable a nie je bipartitný, tak buď $G \square H$ má perfektné párenie, alebo $G \square H$ je faktorovo kritický.

**Dôkaz** Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z tvrdenia 3.31 a z tvrdenia 2.11. $\square$

**Lema 3.34.** Ak $G \square H$ je equimatchable, tak aj grafy $G$ a $H$ sú equimatchable.

**Dôkaz** Kvôli sporu predpokladajme, že jeden z grafov, bez ujmy na všeobecnosti $G$, nie je equimatchable. Potom existujú nerozšíriteľné párenia $M_G$ a $M'_G$ také, že $|M_G| > |M'_G|$. Ďalej nech $M_H$ je nejaké nerozšíriteľné párenie grafu $H$. Definujeme nerozšíriteľné párenia $M$ a $M'$ grafu $G \square H$ s rôznou mohutnosťou. Hrana $(g_i, h_j)(g_{i'}, h_{j'})$ patrí do $M$ práve vtedy, keď $g_i \equiv g_{i'} \wedge h_j h_{j'} \in M_H$ alebo $h_i \equiv h_{i'} \wedge g_j g_{j'} \in M_G$ a zároveň $h_i$ nie je pokrytý párením $M_H$. Párenie $M'$ obsahuje hranu $(g_i, h_j)(g_{i'}, h_{j'})$ práve vtedy, keď $g_i \equiv g_{i'} \wedge h_j h_{j'} \in M_H$ alebo $h_i \equiv h_{i'} \wedge g_j g_{j'} \in M_G$ a zároveň je vrchol $h_i$ nepokrytý párením $M_H$.

Párenie $M$ pokrýva všetky vrcholy grafu $G \square H$ okrem tých vrcholov $(g_i, h_j)$, kde $g_i \notin M_G$ a $h_j \notin M_H$. Párenie $M'$ nepokrýva tie vrcholy $(g_i, h_j)$, kde $g_i \notin M'_G$ a $h_j \notin M_H$. Z predpokladov dokazovaného tvrdenia vyplýva, že párenia $M$ a $M'$ sú nerozšíriteľné a ukázali sme, že nemajú rovnakú veľkosť, čím sme dosiahli hľadaný spor. $\square$

**0značenie** V dôkaze nasledujúceho tvrdenia budeme množinu vrcholov karteziánskeho súčinu $\{(g, h) \mid g \in G' \subseteq V(G); h \in H' \subseteq V(H)\}$ označovať skrátene ako $(G', H')$.

**Lema 3.35.** Nech $G$ a $H$ sú súvislé grafy, pre ktoré platí $|V(G)| \geq 3$ a $|V(H)| \geq 2$ a nech je graf $G\square H$ faktorovo kritický. Ak je graf $G\square H$ equimatchable, tak každé nerozšíriteľné párenie grafu $G$ pokrýva všetky vrcholy tohto grafu okrem jedného a podobne aj každé nerozšíriteľné párenie grafu $H$ pokrýva všetky vrcholy až na jeden.

**Dôkaz** Graf $G\square H$ obsahuje nejaké párenie $M$, ktoré pokrýva všetky vrcholy okrem jedného. Nech $M_G$ je nejaké nerozšíriteľné párenie grafu $G$ a $M_H$ je nejaké nerozšíriteľné párenie grafu $H$. Definujme párenie $M'$ grafu $G\square H$ nasledovne. Hrana $(g, h_1)(g, h_2)$ patrí do $M'$ práve vtedy, keď $h_1h_2$ patrí do $M_H$. Hrana $(g_1, h)(g_2, h)$ patrí do $M'$ práve vtedy, keď $h$ nie je pokryté párením $M_H$ a $g_1g_2$ patrí do $M_G$. Ukážeme, že párenie $M'$ je nerozšíriteľné. Predpokladajme, že párenie $M'$ sa dá rozšíriť pridaním hrany $(g'_1, h'_1)(g'_2, h'_2)$. Ak hrana $(g'_1, h'_1)(g'_2, h'_2)$ existuje v $G\square H$, tak buď $g'_1 = g'_2$, alebo $h'_1 = h'_2$. Predpokladajme, že $g'_1 = g'_2 = g'$. Zo susednosti vrcholov $(g', h'_1)$ a $(g', h'_2)$ musí platiť, že $h'_1$ a $h'_2$ sú susedné v $H$. Z toho, že vrcholy $(g', h'_1)$ a $(g', h'_2)$ nie sú pokryté párením $M'$, vyplýva, že susedné vrcholy $h'_1$ a $h'_2$ nie sú pokryté párením $M_H$. To je spor s nerozšíriteľnosťou párenia $M_H$. Symetrickými úvahami vieme ukázať, že párenie M' sa nedá rozšíriť ani žiadnou hranou $(g'_1, h')(g'_2, h')$.

Z predpokladu, že graf $G\square H$ je equimatchable a z toho, že párenia $M$ a $M'$ sú nerozšíriteľné, vyplýva, že párenia $M'$ a $M$ musia mať rovnakú mohutnosť. Párenie M' pokrýva všetky vrcholy grafu $G\square H$ okrem jedného vrchola $(g'', h'')$. Z definície párenia $M'$ vyplýva, že nepokrýva práve tie vrcholy $(g, h) \in V(G\square H)$, v ktorých $g \in V(G)$ nie je pokryté párením $M_G$ a $h \in H$ nie je pokryté párením $M_H$. Preto párenie $M_H$ pokrýva všetky vrcholy grafu $H$ okrem $h''$ a taktiež párenie $M_G$ pokrýva všetky vrcholy grafu $G$ okrem $g''$. $\square$

**Lema 3.36.** Nech equimatchable graf $G$ je súvislý a obsahuje aspoň tri hrany. Ďalej nech existuje párenie $M_1$ grafu $G$, ktoré pokrýva všetky vrcholy okrem jedného, označme ho $v_1$. Potom existujú v tomto grafe párenia $M_2$ a $M_3$, ktoré obidve pokrývajú všetky vrcholy grafu $G$ okrem jedného a $M_2$ nepokrýva vrchol $v_2$, $M_3$ nepokrýva vrchol $v_3$. Vrcholy $v_1$, $v_2$ a $v_3$ sú navzájom rôzne.

**Dôkaz** Keďže graf $G$ je súvislý, existuje hrana $v_1v'_2$. Táto hrana nepatrí do $M_1$. Vrchol $v'_2$ je pokrytý párením $M_1$, teda existuje vrchol $v_2$ taký, že hrana $v'_2v_2$ patrí do $M_1$. Párenie $M_2$ definujeme takto: $M_2 = (M_1 - \{v'_2v_2\}) \cup \{v_1v'_2\}$.

Ak existuje iná hrana incidentná s vrcholom $v_1$, definujeme párenie $M_3$ podobne. Ak existuje hrana incidentá s vrcholom $v_2$, ktorú neobsahuje párenie $M_1$, môžeme postupovať rovnako ako pri definícii párenia $M_2$ a definovať $M_3$.

Ak nenastáva žiaden z predchádzajúcich prípadov, musí existovať hrana $v_2'v_3$. Ak definujeme párenie $M_3$ ako ľubovoľné nerozšíriteľné párenie obsahujúce hranu $v_2'v_3$, toto párenie nebude súčasne pokrývať vrcholy vrcholy $v_1$ a $v_2$. Párenie $M_3$ má teda menšiu mohutnosť ako párenie $M_1$, čo je spor s equimatchabilitou grafu $G$, a teda tento prípad nemôže nastať. $\square$

**Veta 3.37.** Nech $G\square H$ je netriviálny karteziánsky súčin súvislých grafov $G$ a $H$. Ak $G\square H$ je equimatchable, tak $G \cong H \cong K_2$.

**Dôkaz** Dokážeme, že ak aspoň jeden z grafov $G$ alebo $H$ obsahuje aspoň tri vrcholy, tak $G\square H$ nie je equimatchable. Z tvrdenia 3.33 vieme, že ak $G\square H$ je equimatchable, tak je buď bipartitný, faktorovo kritický, alebo má perfektné párenie. Ukážeme, že ani jedna z týchto možností nemôže nastať. Predpokladajme, že $G\square H$ je netriviálny equimatchable karteziánsky súčin súvislých grafov, z ktorých aspoň jeden obsahuje aspoň 3 vrcholy.

**Tvrdenie A.** Graf $G\square H$ nemá perfektné párenie.
**Dôkaz tvrdenia A.** Predpokladajme kvôli sporu, že existuje perfektné párenie grafu $G\square H$, ktorý je equimatchable. Potom podľa vety 2.6 (strana 14) musí byť graf $G\square H$ izomorfný s $K_{2n}$ alebo s $K_{n,n}$. Rozlíšime dva prípady.

Ak $g_1, g_2 \in V(G)$ a $h_1, h_2 \in V(H)$, tak vrchol $(g_1, h_1)$ nie je v grafe $G\square H$ spojený s vrcholom $(g_2, h_2)$, a teda graf $G\square H$ nemôže byť izomorfný s $K_{2n}$.

Graf $G$ je bipartitný a musí obsahovať partíciu s aspoň dvoma vrcholmi $g_1$ a $g_2$, označme $h_1$ a $h_2$ nejaké dva susedné vrcholy v $H$. Keďže vrcholy $h_1$ a $h_2$ sú susedné v grafe $H$, tak sú susedné aj vrcholy $(g_1, h_1)$ s $(g_1, h_2)$ a $(g_2, h_1)$ s $(g_2, h_2)$ v grafe $G\square H$. Dvojica susedných vrcholov musí ležať v rôznych bipartíciách a preto sa vrcholy $(g_1, h_1)$ a $(g_2, h_1)$ nachádzajú v inej partícii ako vrcholy $(g_1, h_2)$ a $(g_2, h_2)$. Vrcholy $(g_1, h_1)$ a $(g_2, h_2)$ nie sú spojené v grafe $G\square H$, teda $G\square H$ nie je kompletný bipartitný graf.

$\square$

**Tvrdenie B.** Graf $G\square H$ nie je bipartitný.
**Dôkaz tvrdenia B.** Predpokladajme kvôli sporu, že graf $L \cong G\square H$ je equimatchable a zároveň je bipartitný. Teda graf $L$ neobsahuje žiadnu kružnicu nepárnej dĺžky. Z toho vyplýva, že aj grafy $G$ a $H$ neobsahujú nepárne kružnice, a teda sú bipartitné. Označme $G_1$ a $G_2$ množiny bipartície

grafu $G$, podobne označme bipartície grafu $H$ ako $H_1$ a $H_2$. Z lemy 3.34 vyplýva, že grafy $G$ a $H$ sú equimatchable. Predpokladajme, bez ujmy na všeobecnosti, že $|G_1| \leq |G_2|$ a $|H_1| \leq |H_2|$. V grafe $L$ sú množiny bipartície $L_1 \cong G_1 \times H_2 \cup G_2 \times H_1$ a $L_2 \cong G_1 \times H_1 \cup G_2 \times H_2$. Platí $L_1 \leq L_2$, pretože $|H_1|(|G_2| - |G_1|) \leq |H_2|(|G_2| - |G_1|)$.

Podľa vety 2.10 musí pre každý vrchol $v \in L_1$ platiť, že existuje $X \subseteq N(v)$ spĺňajúca podmienku $|X| \geq |N(X)|$. Ukážeme, že táto podmienka nie je splnená. Množina susedov ľubovoľného vrchola $(g, h) \in L_1$ je $N((g, h)) = (g, N_H(h)) \cup (N_G(g), h)$. Množina $X \subseteq N((g, h))$ sa dá napísať ako $X = (g, X_H) \cup (X_G, h)$, kde $X_H \subseteq N_H(h)$ a $X_G \subseteq N_G(g)$. Teraz vyjadríme množinu $N(X) = (N_G(g), X_H) \cup (X_G, N_H(h)) \cup (N_G(X_G, h)) \cup (g, N_H(X_H))$. Mohutnosť množiny $N(X)$ môžeme zdola odhadnúť ako $|(N_G(g), X_H) \cup (X_G, N_H(h))| \geq |X_G|\ |X_H| > |X_G| + |X_H| = |(g, X_H) \cup (X_G, h)| = |X|$. Ukázali sme teda, že pre každú množinu $X \subseteq N((g, h))$ platí $|X| < |N(X)|$. $\square$

**Tvrdenie C.** Graf $G \square H$ nie je faktorovo kritický.
**Dôkaz tvrdenia C.** Počet vrcholov faktorovo kritického grafu $G \square H$ musí byť nepárny, preto môžeme predpokladať $|V(G)| \geq 3$ a $|V(H)| \geq 3$. Z lemy 3.35 vyplýva, že každé nerozšíriteľné párenie grafov $G$ a $H$ pokrýva všetky vrcholy okrem jedného. Rozlíšime 2 prípady.

Grafy $G$ a $H$ sú oba izomorfné s cestou s 3 vrcholmi. Teda platí, že $V(G) = \{g_1, g_2, g_3\}$ a $E(G) = \{g_1g_2, g_2g_3\}$ podobne $V(H) = \{h_1, h_2, h_3\}$ a $E(H) = \{h_1h_2, h_2h_3\}$. Definujme párenie $M$ v $G \square H$ takto: $M = \{(g_1, h_1)(g_2, h_1),$ $(g_1, h_2)(g_2, h_2),\ (g_1, h_3)(g_2, h_3),\ (g_3, h_1)(g_3, h_2)\}$. Teraz definujeme nerozšíriteľné párenie $M' = \{(g_1, h_1)(g_2, h_1),\ (g_2, h_2)(g_3, h_2),\ (g_1, h_3)(g_2, h_3)\}$ v grafe $G \square H$. Párenia $M$ a $M'$ sú nerozšíriteľné a majú rôznu mohutnosť, graf $G \square H$ teda nie je equimatchable, čo je spor s predpokladom.

Aspoň jeden z grafov $G$ a $H$ nie je cesta na troch vrcholoch. Predpokladajme teda, že aspoň jeden z grafov $G$ a $H$ obsahuje aspoň 3 hrany, bez ujmy na všeobecnosti nech je to $G$. Potom podľa lemy 3.36 existujú nerozšíriteľné párenia $M_1$, $M_2$ resp. $M_3$ grafu $G$, z ktorých každé nechá nepokrytý iný vrchol $g_1$, $g_2$ resp. $g_3$. Graf $H$ obsahuje aspoň 3 vrcholy $h_1$, $h_2$ a $h_3$. Definujeme teraz párenie $M$ v grafe $G \square H$. Párenie $M$ obsahuje hranu $(g, h)(g', h)$ práve vtedy, keď nastáva jeden z nasledujúcich prípadov:

(i) ak vrchol $h$ nie je žiaden z vrcholov $h_2$ a $h_3$ a hrana $gg'$ patrí do párenia $M_1$,

(ii) ak vrchol $h$ je vrchol $h_2$ a hrana $gg'$ patrí do $M_2$,

(iii) ak vrchol $h$ je vrchol $h_3$ a hrana $gg'$ patrí do $M_3$,

Párenie $M$ nepokrýva vrcholy $(g_2, h_2)$, $(g_3, h_3)$ a vrcholy $(g_1, V(H) - h_1 - h_2)$. Párenie $M'$ vznikne z párenia $M$ ľubovoľným rozšírením na nerozšíriteľné párenie. Párenie $M$ nepokrýva vrcholy $(g_2, h_2)$, $(g_3, h_3)$ a kvôli parite aspoň jeden vrchol z $(g_1, V(H) - h_1 - h_2)$. Graf $G \square H$ nemôže byť equimatchable, pretože je faktorovo kritický a zároveň obsahuje nerozšíriteľné párenie $M$, ktoré nepokrýva aspoň 3 vrcholy. $\square$

**Dokončenie dôkazu vety 3.37** Ukázali sme, že grafy $G$ a $H$ môžu mať najviac po 2 vrcholy a menej ako 2 mať nemôžu, pretože potom by $G \square H$ bol triviálny karteziánsky súčin. Zostáva graf $K_2 \square K_2$, ktorý je izomorfný s $K_{2,2}$ a zjavne equimatchable. $\square$

# Kapitola 4

# Všeobecnejší koncept rozšíriteľnosti

V tejto kapitole zavedieme nový koncept rozšíriteľnosti párení, uvedieme jeho zákldné vlastnosti, porovnáme ho z niektorými zavedenými konceptami párení a v poslednej časti sa venujeme karteziánskym súčinom grafov.

**Definícia 4.1.** Graf $G$ patrí do triedy $\Delta_n$ práve vtedy, keď rozdiel mohutností ľubovolných dvoch nerozšíriteľných párení grafu $G$ nie je väčší ako $n$. Trieda $\Delta'_n$ obsahuje práve grafy, ktoré patria do triedy $\Delta_n$ a súčasne nepatria do triedy $\Delta_{n-1}$. Definujme tiež funkciu $\Delta' : G \to \mathbb{N}$, ktorá priradí každému grafu číslo $n$ práve vtedy, keď daný graf patrí do triedy $\Delta'_n$.

Poznamenajme, že zjavne pre ľubovolný graf $G$, ktorý sa skladá s komponentov $H_1, H_2, \ldots H_n$, platí, že $\Delta'(G) = \Delta'(H_1) + \Delta'(H_2) + \cdots + \Delta'(H_n)$.

## 4.1 Základné vlastnosti

V tejto časti uvedieme niektoré základné vlastnosti tried $\Delta_n$. Nasledujúca veta je zovšeobecnením vety 2.7 a popisuje grafy z pohľadu klasifikácie pomocou $\Delta_n$ tried.

**Veta 4.2.** Ak $G$ je ľubovolný graf, nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

1) Graf $G$ je v $\Delta_n$.

2) Pre každú množinu $S \subseteq V(G)$, $|S| \geq d(G) + 2n + 1$ navzájom nesusedných vrcholov a pre každé párenie $M$ grafu $G$ nepokrývajúce vrcholy v

$S$ existuje nepokrytý vrchol $v \notin S$ susedný s aspoň jedným vrcholom z množiny $S$.

3) Pre každú množinu $S \subseteq V(G)$, $|S| \geq d(G) + 2n + 1$ navzájom nesusedných vrcholov existujú disjunktné množiny $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq N(S)$ také, že spĺňajú naraz všetky nasledujúce podnienky:

   i) $|S_i|$ je nepárne pre $1 \leq i \leq k$;

   ii) $S_i$ a $S_j$ nie je spojené hranou pre $i \neq j$;

   iii) $|R(S_1, S_2, \ldots, S_k)| < k$
   kde $R(S_1, S_2, \ldots, S_k) = N(\bigcup_{i=1}^{k} S_i) - \bigcup_{i=1}^{k} S_i - \{u, v\}$.
   (Symbolom $R(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ je označená množina vrcholov z $G-u-v$, ktoré neležia v žiadnej z množín $S_i$, ale z ktorých každý je spojený s vrcholom z niektorej $S_i$.)

Pri dôkaze uvedenej vety využijeme nasledujúcu lemu.

**Lema 4.3.** [22] Nech $G$ je graf a $X \subseteq V(G)$. Potom je splnená práve jedna z nasledujúcich podmienok: **i)** Graf $G$ obsahuje párenie pokrývajúce $X$ alebo **ii)** existujú disjunktné nepárne podmnožiny $S_1, S_2, \ldots S_n$ množiny $X$ také, že žiadna hrana nespája $S_i$ s $S_j$ pre $i \neq j$ a $|R(S_1, S_2, \ldots, S_k)| < k$, kde $R(S_1, S_2, \ldots, S_k) = N(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k) - (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k)$.

**Dôkaz vety 4.2** Najprv ukážeme ekvivalenciu podmienky 1) a 2). Obe implikácie ukážeme nepriamo. Najväčšie párenie nechá nepokrytých $d(G)$ vrcholov grafu $G$. Je zrejmé, že ak $G \notin \Delta_n$, tak existuje nerozšíriteľné párenie, ktoré nechá nepokrytých aspoň $d(G) + 2n + 1$ nesusedných vrcholov, a že všetky nepokryté vrcholy budú nesusedné. Pre dôkaz 2) $\rightarrow$ 1) predpokladajme, že existuje množina $S$ obsahujúca $d(G) + 2n + 1$ nezávislých vrcholov grafu $G$ a párenie $M$ grafu $G$, ktoré pokrýva všetky vrcholy z množiny $N(S)$. Ak párenie $M$ rozšírime na ľubovolné nerozšíriteľné párenie, tak toto párenie zjavne nechá nepokrytých aspoň $d(G) + 2n + 1$ vrcholov, a teda $G \notin \Delta_n$. Ekvivalencia podmienok 2) a 3) vyplýva z lemy 4.3. $\square$

Táto veta neponúka deterministický polynomiálny algoritmus na overenie, či graf patrí do triedy $\Delta_n$. Pre niektoré prípady takýto algoritmus existuje. Ponúkame ho v dôkaze nasledujúcej vety. Tento algoritmus vznikol úpravou algoritmu z [22].

**Veta 4.4.** Pre zvolené $n$ a $k$ existuje deterministický polynomiálny algoritmus, ktorý pre ľubovolný graf $G$ s $d(G) \leq k$ overí, či $G \in \Delta_n$.

**Dôkaz** Nech $m = k+2n+1$. Algoritmus spustíme pre každú $m$-ticu nezávislých vrcholov $Z$. Označme $X = N(Z)$ a $G' = G - Z$. Každej hrane grafu $G'$ priraďme váhu rovnú počtu jej koncov ležiacich v $X$ (zjavne táto váha môže byť 0, 1, alebo 2). Poznamenajme, že súčet váh hrán ľubovolného párenia grafu $G'$ je rovný počtu pokrytých vrcholov z $X$. Teraz nájdeme párenie $M$ grafu $G'$ s najväčšou váhou pomocou ľubovolného plynomiálneho algoritmu. Párenie $M$ nechá nepokrytých čo najmenej vrcholov v množine $X$. Ak neexistuje v $X$ nepokrytý vrchol, tak podmienka 2) vety 4.2 nie je splnená. Na druhej strane, pokiaľ pre všetky $m$-tice obsahuje množina $X$ aspoň jeden nepokrytý vrchol, tak graf $G$ je v triede $\Delta_n$. $\square$

Teraz uvedieme niekoľko tvrdení, pomocou ktorých vieme odhadovať hodnotu $d(G)$ pre ľubovolný graf $G$. Nasledujúce tvrdenie zjavne platí.

**Tvrdenie 4.5.** Nech $G$ je ľubovolný graf a $M$ je nejaké jeho párenie. Ak $G'$ je podgraf grafu $G$ indukovaný vrcholmi z $V(G) - V(M)$, tak $\Delta'(G') \leq \Delta'(G)$.

Nasledujúce tvrdenia hovoria, ako sa môže zmeniť hodnota $\Delta'(G)$ grafu $G$, ak do grafu $G$ pridáme alebo z neho odoberieme niekoľko hrán.

**Tvrdenie 4.6.** Ak graf $G'$ vznikne z grafu $G$ pridaním alebo odobraním niektorej hrany, tak $|\Delta'(G') - \Delta'(G)| \leq 2$.

Dokážeme tvrdenia 4.7 a 4.8, ktoré implikujú tvrdenie 4.6.

**Tvrdenie 4.7.** Nech $G$ je ľubovolný graf. Ak graf $G'$ vznikol z grafu $G$ pridaním množiny nových hrán, v ktorej každé dve hrany majú spoločný vrchol, tak $\Delta'(G') = \Delta'(G) + c$, kde $c \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

**Dôkaz** Označme $M$ resp. $N$ ľubovolné najväčšie párenie grafu $G$ resp. $G'$ a $M'$ resp. $N'$ ľubovolné najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$ resp. $G'$. Zjavne $|N| < |M|$. Keďže v každom párení v grafe $G'$ môže byť najviac 1 z nových hrán, platí, že $|M| \leq |N| \leq |M|+1$. Najmenšie nerozšíriteľné párenie v grafe $G'$ môže byť väčšie alebo menšie ako najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$, ale zjavne sa $|N'|$ môže od $|M'|$ líšiť najviac o 1. Takže platí, že $|M'| - 1 \leq |N'| \leq |M'| + 1$. Z uvedených rovníc vyplýva, že $|M| - |M'| - 1 \leq |N| - |N'| \leq |M| - |M'| + 2$, čo je ekvivalentné s dokazovaným tvrdením. $\square$

**Tvrdenie 4.8.** Ak graf $G'$ vznikol z grafu $G$ odobratím množiny hrán $P$, v ktorej každé dve hrany majú spoločný vrchol, tak $|\Delta'(G')| = |\Delta'(G)| + c$, kde $c \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

**Dôkaz** Označme $M$ resp. $N$ ľubovolné najväčšie párenie grafu $G$ resp. $G'$ a $M'$ resp. $N'$ ľubovolné najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$ resp. $G'$. Zjavne $|N| > |M|$. Keďže v každom párení v grafe $G$ mohla byť najviac 1 z odobratých hrán, platí, že $|M| - 1 \leq |N| \leq |M|$. Najmenšie nerozšíriteľné párenie v grafe $G'$ môže byť väčšie alebo menšie ako najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$, ale zjavne sa $|N'|$ môže od $|M'|$ líšiť najviac o 1. Takže platí, že $|M'|-1 \leq |N'| \leq |M'|+1$. Z uvedených rovníc vyplýva, že $|M|-|M'|-2 \leq |N| - |N'| \leq |M| - |M'| + 1$, čo je ekvivalentné s dokazovaným tvrdením. □

Pomocou predchádzajúceho tvrdenia vieme odhadnúť, ako sa zmení hodnota $\Delta'(G)$ po odobratí jedného vrchola z grafu $G$. V skutočnosti vieme v tomto prípade ukázať presnejší výsledok.

**Tvrdenie 4.9.** Ak graf $G'$ vznikol z grafu $G$ odobratím ľubovolného vrchola $v$, tak $|\Delta'(G')| = |\Delta'(G)| + c$, kde $c \in \{-1, 0, 1\}$.

**Dôkaz** Ľahko vidieť, že odobratím vrchola sa nemohla zväčšiť mohutnosť najväčšieho párenia. Rovnako je zrejmé, že sa nemohla zväčšiť ani veľkosť najmenšieho nerozšíriteľného párenia. Takže rozdiel medzi najväčím a najmenším nerozšíriteľným párením sa mohol zmeniť najviac o 1. □

**Tvrdenie 4.10.** Nech $G_1$ a $G_2$ sú ľubovolné súvislé grafy. Ak graf $G$ vznikne pridaním hrany spájajúcej $G_1$ s $G_2$, tak $\Delta'(G) = \Delta'(G_1) + \Delta'(G_2) + c$, kde $c \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

**Dôkaz** Označme $g_1$ resp. $g_2$ vrcholy grafov $G_1$ resp. $G_2$ incidentné s pridanou hranou. Označme tiež $M_H$ najväčšie párenie grafu $H$ a $M'_H$ najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $H$ (v tomto prípade $H \in \{G, G_1, G_2\}$). Ak každé najväčšie párenie grafu $G$ obsahuje hranu $g_1g_2$, tak zjavne $|M_G| = |M_{G_1}| + |M_{G_2}| + 1$, inak $|M_G| = |M_{G_1}| + |M_{G_2}|$. Taktiež zjavne platí, že $|M_{G_1}| + |M_{G_2}| - 1 \leq |M'_G| \leq |M_{G_1}| + |M_{G_2}| + 1$. Ukázali sme teda, že $\Delta'(G_1) + \Delta'(G_2) - 1 \leq \Delta'(G) \leq \Delta'(G_1) + \Delta'(G_2) + 2$. □

Nech $G_1$ a $G_2$ sú ľubovolné grafy a $g_1 \in V(G_1)$, $g_2 \in V(G_2)$ sú ľubovolné vrcholy. Ak graf $G$ vznikne z grafov $G_1 - g_1$ a $G_2 - g_2$ pridaním nového vrchola $g$ a hrán spájajúcich vrchol $g$ so všetkými susedmi vrcholov $g_1$ a $g_2$, hovoríme, že $G$ vznikol z $G_1$ a $G_2$ stotožnením vrcholov $g_1$ a $g_2$.

**Tvrdenie 4.11.** Nech $G_1$ a $G_2$ sú ľubovolné grafy a $g_1 \in V(G_1)$, $g_2 \in V(G_2)$ sú ľubovolné vrcholy. Ak graf $G$ vznikol z grafov $G_1$ a $G_2$ stotožnením vrcholov $g_1$ a $g_2$, tak $\Delta'(G) = \Delta'(G_1) + \Delta'(G_2) + c$, kde $c \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

**Dôkaz** Označme $M_G$, $M_{G_1}$ resp. $M_{G_2}$ ľubovolné najväčšie párenie grafu $G$, $G_1$ resp. $G_2$ a $M'_G$, $M'_{G_1}$ resp. $M'_{G_2}$ ľubovolné najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$, $G_1$ resp. $G_2$. Ak $g_1 \in \Delta_{G_1}$ alebo $g_2 \in \Delta_{G_2}$, tak zjavne $|M_G| = |M_{G_1}| + |M_{G_2}|$, inak $|M_G| = |M_{G_1}| + |M_{G_2}| - 1$. Zjavne platí, že $|M'_{G_1}| + |M'_{G_2}| - 1 \leq |M'_G| \leq |M'_{G_1}| + |M'_{G_2}|$. Rozdiel najväčšieho a najmenšieho nerozšíriteľného párenia grafu $G$ bude teda $\Delta'(G) = \Delta'(G_1) + \Delta'(G_2) + c$, kde $c \in \{-2, -1, 0, 1\}$. □

Jedným z dôsledkov Gallai-Edmondsovej vety je, že ľubovolný graf vieme získať z bipartitného grafu, grafu s perfektným párením a niekoľkých faktorovo kritických grafov. Nasledujúce tvrdenia ukazujú, ako sa dá s pomocou znalosti hodnoty funkcie $\Delta$ faktorovo kritických grafov a grafov s perfektným párením odhadnúť hodnota $D(G)$ pre ľubovolný graf $G$.

**Tvrdenie 4.12.** Ak graf $G'$ vznikol z grafu $G$ odobratím jedného vrchola z množiny $A_G$, tak $\Delta'(G') \leq \Delta'(G) \leq \Delta'(G') + 1$.

**Dôkaz** Najprv ukážeme, že ak graf $G'$ vznikne z grafu $G$ odobratím vrcholu z množiny $A_G$, tak $\Delta'(G') \leq \Delta'(G)$. Vrchol $a \in A_G$ je pokrytý každým najväčším párením, a teda najväčšie párenie $M_{G'}$ grafu $G'$ má menšiu mohutnosť ako najväčšie párenie $M_G$ grafu $G$, presnejšie $|M_{G'}| + 1 = |M_G|$. Označme najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G'$ ako $M'_{G'}$ a najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$ ako $M'_G$. Zjavne $|M'_{G'}| \leq |M'_G| \leq |M'_{G'}| + 1$, a teda $|M_{G'}| - |M'_{G'}| \leq |M_G| - |M'_G| \leq |M_{G'}| - |M'_{G'}| + 1$. □

Pri dôkaze nasledujúceho tvrdenia využijeme Lemu o stabilite[23].

**Lema 4.13.** [23](**Lema o stabilite**) Nech $G$ je ľubovolný graf a $D_G$, $C_G$ a $A_G$ sú množiny jeho Gallai-Edmondsovej dekompozície.

i) Ak $u \in A_G$, tak $A_{G-u} = A_G - u$, $C_{G-u} = C_G$ a $D_{G-u} = D_G$.

ii) Ak $u \in C_G$, tak $A_{G-u} \supseteq A_G$, $C_{G-u} \subseteq C_G - u$ a $D_{G-u} \supseteq D_G$.

iii) Ak $u \in D_G$, tak $A_{G-u} \subseteq A_G$, $C_{G-u} \supseteq C(G)$ a $D_{G-u} \subseteq D_G - u$.

**Veta 4.14.** Ak graf $H$ vznikol z grafu $G$ odobratím množiny vrcholov $A_1 \subseteq A_G$, tak $\Delta'(H) \leq \Delta'(G) \leq \Delta'(H) + |A_1|$.

**Dôkaz** Tvrdenie vyplýva z lemy 4.13 a z tvrdenia 4.12. □

Poznamenajme, že ak $A_1 = A$ v predchádzajúcej vete, tak graf $H$ je tvorený komponentami, z ktorých každý je izomorfný buď s faktorovo kritickým grafom, alebo obsahuje perfektné párenie. Pokiaľ odoberieme len niektoré vrcholy z $A$ a odoberieme aj niektoré hrany, môžeme získať bipartitný graf $H$, kde jednu partíciu tvoria vrcholy z $A$ a druhú vrcholy z $D$. Teraz uvedieme tvrdenie, ktoré umožnuje základný odhad hodnoty $\Delta$ pre ľubovolné grafy, ale najmä pre faktorovo kritické a pre grafy s perfektným párením. Toto tvrdenie je dobre známe.

**Tvrdenie 4.15.** Ak najväčšie párenie grafu $G$ obsahuje $n$ hrán, tak $G \in \Delta_{\lceil n/2 \rceil}$.

**Dôkaz** Najmenšie nerozšíriteľné párenie musí zjavne pokrývať aspoň jeden z každej dvojice vrcholov pokrytých najväčším párením, ak má byť nerozšíriteľné. Preto rozdiel najmenšieho nerozšíriteľného a najväčšieho párenia nemôže byť väčší ako $\lceil n/2 \rceil$. □

Nasledujúca veta popisuje štruktúru grafov, ktoré sú v $\Delta'_1$.

**Veta 4.16.** Nech $G$ je súvislý graf s netriviálnou Gallai-Edmondsovou dekompozíciou. Platí $G \in \Delta'_1$ práve vtedy, keď graf $G$ spĺňa práve jednu z nasledujúcich podmienok:

A) Ak $C_G \neq \emptyset$, tak existujú najviac 2 nezávislé hrany spájajúce vrcholy z množiny $A_G$ s vrcholmi z množiny $C_G$. Pre každú neprázdnu množinu $N \subseteq C_G$ takú, že všetky vrcholy v množine $N$ môžu byť naraz spárené s vrcholmi z množiny $A_G$, platí, že graf $C_G - N$ je equimatchable. Naviac platí, že práve jedna z nasledujúcich podmienok je splnená:

   i) Existuje práve jeden vrchol $a \in A_G$ spojený s vrcholmi z množiny $C_G$ a graf $G - a - C_G$ je equimatchable.

   ii) Existujú práve dva vrcholy $a_1, a_2 \in A_G$ spojené s vrcholmi z množiny $C_G$ a

      a) buď graf $G - C_G - a_1a_2$ je equimatchable,

b) alebo bez ujmy na všeobecnosti $N(a_1) \cap C_G = \{c\}$ a vrchol $a_2$ susedí s každým vrcholom z $C_G - c$,

c) alebo bez ujmy na všeobecnosti $|N(a_1) \cap C_G| > 1$ a vrchol $a_2$ susedí s každým vrcholom z $C_G$.

Naviac graf, ktorý vznikne z grafu $G - C_G$ pridaním vrchola $d$ a hrany $a_2 d$ je equimatchable (týka sa najmä podmienok b) a c)).

iii) Ak $|N(C_G) \cap A_G| \geq 3$, tak

a) buď graf $G - C_G$ je equimatchable,

b) alebo ak $A' \subseteq A_G$ je množina vrcholov spojených s vrcholmi v $C_G$, tak existuje práve jeden vrchol $a \in A'$ a práve jeden vrchol $c \in C_G$ tak, že pre každý vrchol $a_i$ z $A' - \{a\}$ platí, že $N(a_i) \cap C_G = \{c\}$ a $N(a) \cap (C_G - \{c\}) = C_G - \{c\}$. V tomto prípade platí, že $G - C_G - a$ je equimatchable.

B) Ak $C_G = \emptyset$, tak platí práve jedna z nasledujúcich podmienok:

i) Existuje množina hrán $E' \subseteq E(G)$ spájajúca vrcholy v množine $A_G$. Množina $E'$ neobsahuje 2 nezávislé hrany. To znamená, že hrany z množiny $E'$ tvoria buď trojuholník, alebo vychádzajú z jediného vrchola $a \in A_G$. Ak množina $E'$ je trojuholník, tak graf $G - E'$ je equimatchable. Ak hrany v množine $E'$ vychádzajú z jedného vrchola $a \in A_G$ a $|E'| > 1$, tak graf $G - a$ je equimatchable. Ak $|E'| = 1$ a hrana $a_1 a_2 \in E'$, tak buď graf $G - a_1$, alebo graf $G - a_2$ je equimatchable, alebo existuje práve jeden komponent $D_i \in \langle D_G \rangle$ taký, že graf $G'$, ktorý vznikne z grafu $G - a_1 a_2$ kontrakciou podgrafu $D_i$, je equimatchable. Naviac musí platiť, že ak existuje spomínaný podgraf $D_i$ grafu $G$, tak $N(D_i) \cap A_G = \{a_1, a_2\}$ a pre každú množinu $S \subseteq V(D_i)$, ktorej vrcholy môžu byť naraz spárované s vrcholmi z množiny $A_G$, platí, že ak $|S| = 1$, tak $D_i - S \in \Delta_1$, inak $D_i - S \in \Delta_0$.

ii) Množina $A_G$ je nezávislá a existujú 2 nezávislé hrany spájajúce vrcholy z $A_G$ s jedným komponentom $\langle D_G \rangle$. Nech $D'$ je množina všetkých komponentov $D_i \in \langle D_G \rangle$ takých, že podgraf $D_i$ obsahuje konce 2 nezávislých hrán z vrcholov z množiny $A_G$. Ak $|D'| = 1$ a $D_j \in D'$, tak pre každú dvojicu rôznych vrcholov $(d_1, d_2)$ z $D_j$ takých, že $d_1$ aj $d_2$ môžu byť naraz spojené nezávislými hranami s vrcholmi z $A_G$, platí, že $D_j - d_1 - d_2$ je equimatchable a zároveň pre každý vrchol $d$ z $D_i$ susediaci s vrcholom z $A_G$ platí, že $D_j - d \in \Delta_1$. Ak $|D'| > 1$, tak existuje vrchol $a \in A_G$ taký, že $G - a$ je equimatchable. Pretože $G \in \Delta_1'$, tak buď $D_i \in \Delta_1'$, alebo existuje $d_i \in D_i$ susedné s vrcholom z $A_G$ také, že $D_i - d_i \in \Delta_1'$.

iii) Množina $A_G$ je nezávislá, neexistujú 2 nezávislé hrany spájajúce vrcholy z $A_G$ s jedným komponentom $\langle D_G \rangle$ a existuje práve jeden komponent $D_i \in \langle D_G \rangle$ taký, že graf $G'$, ktorý vznikne z grafu $G$ kontrakciou $D_i$, je equimatchable. Podgraf $D_i$ grafu $G$ musí byť v $\Delta_1$. Pre každý vrchol $d \in D_i$ susediaci s vrcholom z $A_G$ platí, že $D_i - d \in \Delta_1$. Ak existuje vrchol $D_i$ nesusediaci s vrcholom z $A_G$, tak graf $G'$, ktorý vznikne z grafu $G$ pridaním hrán medzi vrcholy $D_i$ tak, aby $D_i$ bol izomorfný s kompletným grafom, je equimatchable.

iv) Definujme bipartitný graf $H$, ktorý vznikne z grafu $G$ zmazaním takých $D_i \in \langle D \rangle$, že existuje vrchol $d_i \in V(D_i)$ nesusedný so žiadnym vrcholom z $A_G$ a kontrakciou ostatných $D_j \in \langle D_G \rangle$. Graf $H$ nie je equimatchable, ale platí, že ak do grafu $G$ pridáme vrchol $d_i$ a spojíme ho s každým vrcholom z $A_G$, tak výsledný graf je equimatchable.

**Dôkaz** Nech $G$ je súvislý graf s netriviálnou Gallai-Edmondsovou dekompozíciou. Nech $\Delta'(G) = 1$ a $C_G \neq \emptyset$. Označme $M$ ľubovolné najväčšie párenie grafu $G$. Najskôr ukážeme, že existujú najviac 2 nezávislé hrany spájajúce vrcholy z množiny $A_G$ s vrcholmi z množiny $C_G$. Predpokladajme kvôli sporu, že existujú aspoň 3 takéto hrany. Vieme zostrojiť nerozšíriteľné párenie $M_1$ grafu $G$ obsahujúce 3 hrany spájajúce vrcholy z množiny $A_G$ s vrcholmi z množiny $C_G$ a pokrývajúce všetky vrcholy z množiny $A_G$ tak, že nájdeme najväčšie párenie grafu $G - C_G$ a hrany vychádzajúce z troch vrcholov z množiny $A_G$ v párení nahradíme hranami medzi týmito vrcholmi a vrcholmi množiny $C_G$ a nakoniec toto párenie rozšírime na nerozšíriteľné. Ľahko vidieť, že $|M_1| - |M| \geq 2$, čo je spor s tým, že $\Delta'(G) = 1$. Nech $N \subseteq V(C_G)$ a množina $N$ obsahuje vrcholy, ktoré môžu byť naraz spojené páriacimi hranami s vrcholmi z množiny $A_G$. Ukážeme, že graf $C_G - N$ je equimatchable. Platí, že $|N| \leq 2$. Nech $M_2'$ je párenie, ktoré obsahuje hrany spájajúce vrcholy z množiny $N$ s vrcholmi z $A_G$ a páruje ostatné vrcholy z množiny $A_G$ s vrcholmi v množine $D$. Ak graf $C_G - N$ nie je equimatchable, tak existuje nerozšíriteľné párenie $M_2 \supseteq M_2'$ také, že nechá nepokryté aspoň 2 vrcholy v grafe $C_G - N$. Platí, že $|M| - |M_2| \geq 2$, čo je spor s predpokladom.

Nech existuje jediný vrchol $a \in A_G$ susediaci s vrcholmi v množine $C_G$. Potrebujeme dokázať, že $G - (C_G + a)$ je equimatchable práve vtedy, keď

$\Delta'(G) = 1$. Vyššie sme ukázali, že pre každý vrchol $c$ z množiny $N(a) \cap C_G$ je graf $C_G - c$ equimatchable. Ľahko vidieť, že ak graf $G - (C_G + a)$ nie je equimatchable, tak rozdiel mohutností najväčšieho a najmenšieho nerozšíriteľného párenia je aspoň 2. A taktiež je ľahko vidieť, že ak je graf $G-(C_G+a)$ equimatchable, tak každé nerozšíriteľné párenie grafu $G$, ktoré nie je najväčšie, buď obsahuje hranu spájajúcu vrchol $a$ s vrcholom v množine $C_G$, alebo nepokrýva vrchol $a$, alebo nepokrýva 2 vrcholy komponentu $D_i \in \langle D_G \rangle$, ktorý je equimatchable, a teda že rozdiel mohutností najväčšieho a najmenšieho párenia grafu $G$ je 1. Ak existujú práve 2 vrcholy $a_1, a_2 \in A_G$ susedné s vrcholmi z množiny $C_G$, tak môžu byť spojené hranou a najmenšie nerozšíriteľné párenie môže obsahovať buď hranu $a_1a_2$ (ak existuje), alebo môže párovať vrcholy $a_1$ a $a_2$ s rôznymi vrcholmi v množine $C_G$, alebo môže párovať jeden vrchol bez ujmy na všeobecnosti $a_1$ s vrcholom z množiny $C_G$ a $a_2$ s vrcholom z množiny $D_G$. Ak je naraz jeden z vrcholov $a_1$, $a_2$ spárovaný s vrcholom z množiny $C_G$ a druhý nie je pokrytý párením, tak $\Delta'(G) > 1$. Ľahko vidieť, že ak sú splnené podmienky vety, tak tento prípad nemôže nastať. Ak aspoň tri vrcholy z množiny $A_G$ susedia s vrcholmi z množiny $C_G$, tak platí, že ak nejaké párenie $M_3'$ obsahuje práve jednu hranu medzi vrcholom z množiny $A_G$ a vrcholom z množiny $C_G$, tak každé rozšírenie $M_3'$ na nejaké nerozšíriteľné párenie $M_3$ musí pokrývať všetky vrcholy v množine $A_G$. Najviac 2 z vrcholov z množiny $A_G$ môže párovať s vrcholmi z množiny $C_G$ a každý zo zostávajúcich vrcholov z množiny $A_G$ musí párovať s iným komponentom grafu $\langle D_G \rangle$. Ľahko vidieť, že uvedené podmienky sú equivalentné s tvrdením dokazovanej vety. Týmto sme ukončili dôkaz podmienky A).

Predpokladajme teraz, že $C_G = \emptyset$. Pripomeňme, že najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$ obsahuje o jednu hranu menej ako najväčšie párenie tohto grafu. Najmenšie nerozšíriteľné párenie preto buď nechá nepokrytý jeden vrchol z množiny $A_G$, alebo obsahuje hranu spájajúcu 2 vrcholy z množiny $A_G$, alebo páruje najviac 3 vrcholy z množiny $A_G$ s jedným komponentom z $\langle D_G \rangle$, alebo jeden komponent $\langle D_G \rangle$ je v $\Delta_1'$. Pretože najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$ je iba jednu hranu menšie ako najväčšie, môže nastať najviac jeden zo spomenutých prípadov. Toto je zjavne ekvivalentné s tvrdením vety.

**Veta 4.17.** Existuje deterministický algoritmus, ktorý v polynomiálnom čase overí, či graf ľubovoľný $G$ patrí do triedy $\Delta_1$.

**Dôkaz** Vieme deterministicky v polynomiálnom čase overiť, či graf je equimatchable (resp. či patrí do $\Delta_0$) [22]. Podľa vety 4.4 vieme deterministicky v polynomiálnom čase overiť, či faktorovo kritický graf alebo graf s perfektným párením patrí do $\Delta_1$. Ak graf $G$ nemá triviálnu Gallai-Edmondsovu dekompozíciu (teda $A_G \neq \emptyset$), tak vieme deterministicky v polynomiálnom čase overiť či spĺňa podmienky vety 4.16.

## 4.2 Porovnanie $\Delta_n$ tried a iných modelov rozšíriteľnosti

Pripomíname, že graf nazveme equimatchable práve vtedy, keď každé nerozšíriteľné párenie má rovnakú mohutnosť ako najväčšie párenie. Pripomeňme nasledujúci fakt.

**Tvrdenie 4.18.** Graf $G$ je equimatchable práve vtedy, keď $G \in \Delta'_0$.

Graf $G$ nazveme $n$-rozšíriteľný práve vtedy, keď $|V(G)| > 2n$, $G$ obsahuje párenie veľkosti $n$ a každé takéto párenie sa dá rozšíriť na perfektné párenie grafu $G$. Je zrejmé, že ak graf $G$ je $n$-rozšíriteľný, tak je aj $m$-rozšíriteľný pre $m < n$. Taktiež je ľahké vidieť, že ak graf $G$ je 0-rozšíriteľný, tak $G$ obsahuje perfektné párenie. Graf $G$ s perfektným párením je zjavne equimatchable práve vtedy, keď je $(|V(G)|/2 - 1)$-rozšíriteľný.

**Tvrdenie 4.19.** Ak graf $G$ je $n$-rozšíriteľný a $|V(G)| = m$, tak $G \in \Delta_t$, kde $t = \lceil (m - 2n)/4 \rceil$.

**Dôkaz** Najväčšie párenie grafu $G$ je perfektné párenie. Z toho, že každé párenie mohutnosti $n$ sa dá rozšíriť na perfektné párenie, vyplýva, že neexistuje nerozšíriteľné párenie s menšou mohutnosťou ako $n$. Každé najmenšie nerozšíriteľné párenie $M$ musí obsahovať nejaké párenie $|M'| = n$ a nerozšíriteľné párenie grafu $G - V(M')$. Keďže graf $G - V(M')$ obsahuje perfektné párenie, musí každé nerozšíriteľné párenie grafu $G - V(M')$ obsahovať aspoň polovicu jeho vrcholov. Takže $|M| \geq n + (m - 2n)/2$. $\square$

Uvedené tvrdenie ukazuje, že ak graf $G$ je $n$-rozšíriteľný, tak vieme povedať, do akej triedy $\Delta_m$ graf $G$ patrí, a teda vieme odhadnúť maximálny rozdiel medzi dvomi nerozšíriteľnými píreniami v grafe $G$. Na druhej strane sa dá ľahko nájsť graf z $\Delta'_1$ s perfektným párením, ktorý nie je ani 1-rozšíriteľný.

Graf $G$ nazveme $(n, k, d)$-graf práve vtedy, keď po odobratí ľubovolných $n$ vrcholov sa vo výslednom grafe dá každé párenie veľkosti najviac $k$ rozšíriť na párenie, ktoré pokrýva všetky vrcholy okrem nejakých $d$ vrcholov.

**Tvrdenie 4.20.** Graf $G$ je $(0, |V(G)|/2 - n - d(G)/2 - 1, 2n + d(G))$-graf práve vtedy, keď $G \in \Delta_n$.

**Dôkaz** Ak graf $G$ patrí do triedy $\Delta'_n$, tak každé nerozšíriteľné párenie pokryje aspoň $|V(G)| - 2n - d(G)$ vrcholov, a teda každé menšie párenie sa dá rozšíriť. Ak graf $G$ je $(0, |V(G)|/2 - n - d(G)/2 - 1, 2n + d(G))$-graf, tak najmenšie nerozšíriteľné párenie nechá nepokrytých najviac $2n + d(G)$ vrcholov, čo je o $2n$ viac, ako nechá nepokryté najväčšie párenie. Takže graf $G$ je v triede $\Delta_n$. $\square$

## 4.3 Vlastnosti tried $\Delta_n$ v karteziánskych súčinoch grafov

V tejto časti budeme skúmať vlastnosti $\Delta_n$ v karteziánskych súčinoch grafov.

**0značenie** Nech $G$ a $H$ sú ľubovoľné grafy. Nech $M_G$ resp. $M_H$ je párenie grafu $G$ resp. $H$. Symbolom $\square(M_G, M_H)$ budeme označovať párenie grafu $G \square H$, ktoré obsahuje práve také hrany $(g_1, h_1)(g_2, h_2) \in E(G \square H)$, že buď $g_1 = g_2$ a $h_1 h_2 \in E(H)$, alebo $h_1 = h_2 \notin V(M_H)$ a $g_1 g_2 \in M_G$.

Ľahko vidieť, že $\square(M_G, M_H)$ definované vyššie je skutočne párenie, pretože žiadny vrchol grafu $G \square H$ nie je incidentný s viac ako jednou hranou z $\square(M_G, M_H)$. Taktiež ľahko vidieť, že $\square(M_G, M_H)$ je nerozšíriteľné párenie práve vtedy, keď obidve $M_G$ aj $M_H$ sú nerozšíriteľné.

Teraz ukážeme niekoľko tvrdení o deficiencii grafov. Pripomíname, že deficiencia grafu $d(G)$ označuje počet vrcholov grafu $G$ nepokrytých najväčším párením.

**Tvrdenie 4.21.** Pre ľubovoľné dva grafy $G$ a $H$ platí, že $d(G \square H) \leq d(G)d(H)$. Špeciálne, ak $G$ aj $H$ sú equimatchable bipartitné grafy, tak $d(G \square H) = d(G)d(H)$.

**Dôkaz** Prvú časť tvrdenia dokážeme tak, že nájdeme párenie $M$ grafu $G \square H$, ktoré nechá nepokrytých $d(G) \cdot d(H)$ vrcholov. Označme $M_G$ nejaké najväčšie párenie grafu $G$, $M_H$ najväčšie párenie grafu $H$ a $M = \square(M_G, M_H)$. Párenie $M$ nepokrýva práve tie vrcholy $(g, h)$, pre ktoré platí, že vrchol $g$ v grafe $G$ nie je pokrytý párením $M_G$ a vrchol $H$ nie je pokrytý párením $M_H$. Takýchto vrcholov je práve $d(G) \cdot d(H)$.

Na dokázanie druhej časti tvrdenia nám stačí ukázať, že ak $G$ aj $H$ sú equimatchable bipartitné, tak k páreniu $M$ definovanému vyššie neexistuje v grafe $G\Box H$ striedavá predlžujúca cesta. Poznamenajme, že párenie $M$ nechá nepokryté iba niektoré vrcholy z $D_G \times D_H$, takže všetky vrcholy z $A_G \times A_H \cup A_G \times D_H \cup D_G \times A_H$ sú pokryté párením $M$. Ľahko vidieť, že každá striedavá predlžujúca cesta $P$ musí začínať vo vrchole z množiny $D_G \times D_H$ nepokrytom párením M a že v inom takomto vrchole končí. Prvá aj posledná hrana na každej ceste $P$ musí byť hrana z množiny $E(G) - M$ vychádzajúca z vrchola z množiny $A_G \times D_H \cup D_G \times A_H$. Nie je ťažké vidieť, že na ceste $P$ sa striedajú vrcholy z množiny $A_G \times A_H \cup D_G \times D_H$ s vrcholmi z množiny $A_G \times D_H \cup D_G \times A_H$ a že z vrchola z množiny $D_G \times A_H \cup A_G \times D_H$ vychádza cesta $P$ vždy hranou patriacou do párenia $M$. Preto zjavne zväčšujúca striedavá cesta P k páreniu M v grafe G neexistuje. $\Box$

Nasledujúca veta hovorí o najväčších páreniach v karteziánskych súčinoch faktorovo kritického grafu a ľubovoľného grafu.

**Veta 4.22.** Nech $G$ je ľubovoľný súvislý graf a $H_1$ a $H_2$ sú faktorovo kritické grafy. Ak $|V(H_1)| = |V(H_2)|$, tak $d(G\Box H_1) = d(G\Box H_2)$. Naviac ak $|V(H_1)| > |V(H_2)|$ a $d(G\Box H_2) > 1$, tak $d(G\Box H_1) < d(G\Box H_2)$.

**Dôkaz** Najskôr ukážeme prvú časť tvrdenia. Je zrejmé, že ak graf $G'$ vznikol z grafu $G$ pridaním nových hrán, tak najväčšie párenie grafu $G'$ pokryje aspoň toľko vrcholov, ako najväčšie párenie grafu $G$. Preto platí, že ak $H$ je ľubovoľný faktorovo kritický graf s $2n+1$ vrcholmi a $G$ je ľubovoľný súvislý graf, tak $d(G\Box H) \geq d(G\Box K_{2n+1})$. Ľahko vidieť, že na dokázanie prvej časti vety nám stačí ukázať, že pre ľubovoľný faktorovo kritický graf $H$ s $2n+1$ vrcholmi a ľubovoľný graf $G$ platí, že najväčšie párenie grafu $G\Box H$ pokrýva aspoň toľko vrcholov, ako najväčšie párenie grafu $G\Box K_{2n+1}$. Pre každý vrchol $g_i \in V(G)$ označme $K^{g_i}$ podgraf grafu $K_{2n+1}\Box G$ indukovaný vrcholmi $(k, g_i)$ pre všetky vrcholy $k \in V(K_{2n+1})$. Ak $M$ je párenie grafu $G\Box K_{2n+1}$, tak symbolom $G^M$ označíme graf, ktorý vznikne z grafu $G\Box K_{2n+1}$ odobratím hrán z množiny $E(G) - M$ a následnou kontrakciou všetkých podgrafov $K^{g_i}$. Vrchol grafu $G^M$ označíme $\tilde{g}_i$ práve vtedy, keď vznikol kontrakciou podgrafu $K^{g_i}$. Teraz ukážeme nasledujúce pomocné tvrdenie.

**Tvrdenie** Ak $M$ je párenie grafu $G\Box K_{2n+1}$, tak existuje párenie $M'$ grafu $G\Box K_{2n+1}$ s rovnakou mohutnosťou ako párenie $M$ a graf $G^{M'}$ je acyklický bez násobných hrán.

**Dôkaz tvrdenia** Nech $M$ je párenie grafu $G\Box K_{2n+1}$. Pomocné párenie $M_1$ zostrojíme tak, že v párení $M$ nahradíme všetky dvojice hrán $(g_1, k_1)(g_2, k_1)$, $(g_1, k_2)(g_2, k_2)$, kde $g_1, g_2 \in V(G)$ a $k_1, k_2 \in K_{2n+1}$, hranami $(g_1, k_1)(g_1, k_2)$ a $(g_2, k_1)(g_2, k_2)$. Ľahko vidieť, že párenie $M_1$ obsahuje rovnako veľa hrán, ako párenie $M$ a naviac obsahuje najviac 1 hranu medzi každými dvomi podgrafmi $K^{g_1}$ a $K^{g_2}$. Graf $M'$ popísaný v znení tvrdenia získame z grafu $M_1$ postupným odstránením cyklov v grafe $G^{M_1}$. Pre každý cyklus v $G^{M_1}$ obsahujúci vrcholy vzniknuté z podgrafov $K^{g_1}, K^{g_2}, \ldots, K^{g_n}$ platí, že z každého podgrafu $K^{g_i}$ vychádza jedna páriaca hrana do predchádzajúceho podgrafu a jedna do nasledujúceho, označme ich $(g_i, k_1)(g_j, k_1)$ a $(g_s, k_2)(g_i, k_2)$. Keď nahradíme naraz pre každý podgraf $K^{g_i}$ spomenuté hrany z párenia $M_1$ za hranu $(g_i, k_1)(g_1, k_2)$ a spravíme to pre každý cyklus v grafe $G^{M_1}$, získame párenie $M'$ popísané v znení tvrdenia. $\square$

**Pokračovanie dôkazu vety 4.22** Majme teda najväčšie párenie $M$ grafu $G\Box K_{2n+1}$ také, že graf $G^M$ je acyklický a nemá násobné hrany. Nájdeme párenie $M'$ grafu $G\Box H$, kde $H$ je ľubovoľný, ale pevne zvolený faktorovo kritický graf a párenie $M'$ má rovnakú mohutnosť ako párenie $M$. Zvoľme ľubovoľný vrchol $h \in H$. Označme $M_H$ perfektné párenie grafu $H - h$. Očíslujme vrcholy v grafe $H$ tak, aby platilo nasledovné: $h_1 = h$ a pre vrcholy $h_{2i}$ a $h_{2i+1}$, kde $i > 0$, platí, že hrana $h_{2i}h_{2i+1}$ je v párení $M_H$. Pre každý vrchol $g_i \in V(G)$ označme $H^{g_i}$ podgraf grafu $G\Box H$ indukovaný vrcholmi $(g_i, h_j)$ pre všetky $h_j \in V(H)$. Teraz priradíme každej hrane grafu $G^M$ prirodzené číslo menšie ako $2n + 1$. Pripomeňme, že graf $G^M$ je acyklický. V každom komponente grafu $G^M$ vyberieme jeden vrchol a očíslujeme hrany, ktoré z neho vychádzajú postupne číslami od 1 až po ich počet. Potom pokračujeme vo vrcholoch, do ktorých vedie jedna, už očíslovaná hrana. Pre každý takýto vrchol $v$ môže nastať práve jedna z nasledujúcich možností:

i) Z vrchola $v$ žiadna ďalšia hrana nevychádza. V tomto prípade nemáme čo číslovať.

ii) Vrchol $v$ je incidentný s neočíslovanými hranami a očíslovaná hrana vchádzajúca do vrchola v má číslo 1. V tomto prípade priraďujeme postupne ostatným hranám čísla od 2 až po počet hrán incidentných s $v$.

iii) Vrchol $v$ je incidentný s neočíslovanými hranami a očíslovaná hrana vchádzajúca do vrchola $v$ má číslo $i > 1$. V tomto prírade priradíme jednej neočíslovanej hrane také číslo $j$, aby $h_i h_j \in M_H$. Ostatné neočíslované hrany číslujeme postupne od 1 a vynecháme čísla $i$ a $j$.

Týmto postupom po niekoľkých opakovaniach očíslujeme všetky hrany v grafe $G^M$. Zostrojíme pomocné párenie $M_1$ grafu $G\square H$. Párenie $M_1$ obsahuje práve také hrany $(g_i, h_k)(g_j, h_k)$, kde hrana $\tilde{g}_i\tilde{g}_j$ v grafe $G^M$ existuje a má priradené číslo $k$. Ľahko vidieť, že graf, ktorý vznikne z grafu $G\square H$ odobratím hrán z množiny $E(G\square H) - M_1$ a kontrakciou všetkých podgrafov $H^{g_i}$ pre $g_i \in V(G)$, je izomorfný s grafom $G^M$.

Je zrejmé, že párenie $M$ nechá nepokrytých práve toľko vrcholov grafu $G\square K_{2n+1}$, koľko obsahuje graf $G^M$ vrcholov nepárneho stupňa. Preto na ukončenie dôkazu prvej časti vety stačí nájsť párenie $M' \supseteq M_1$ grafu $G\square H$, ktoré pokryje všetky vrcholy podgrafov $H^{g_i}$, z ktorých vychádza nepárne veľa hrán z párenia $M_1$, a nechá nepokrytý jeden vrchol v každom podgrafe $H^{g_j}$, z ktorého vychádza párne veľa hrán z párenia $M_1$. Párenie $M_1$ rozšírime na párenie $M'$ zvlášť v každom podgrafe $H^{g_i}$, a to takto:

i) Ak z $H^{g_i}$ vychádza práve jedna hrana $e$ z párenia $M_1$ a označíme $h'$ vrchol z $H^{g_i}$ pokrytý hranou $e$, tak do $M'$ pridáme hrany perfektného párenia grafu $H - h'$.

ii) Ak z $H^{g_i}$ vychádza párne veľa hrán z párenia $M_1$, tak do párenia $M'$ pridáme tie hrany párenia grafu $H^{g_i}$ izomorfného s $M_H$, z ktorých žiadny vrchol nie je pokrytý párením $M_1$. Ľahko vidieť, že v tomto prípade párenie $M'$ nechá nepokrytý práve jeden vrchol podgrafu $H^{g_i}$.

iii) Ak z $H^{g_i}$ vychádza nepárne veľa hrán z párenia $M_1$ a týchto hrán je viac ako 1, tak do párenia $M'$ pridáme tie hrany párenia grafu $H^{g_i}$ izomorfného s $M_H$, z ktorých žiadny vrchol nie je pokrytý párením $M_1$. Vďaka tomu, že hrany z párenia $M_1$ pokryli vrchol $h_1$ a iba také vrcholy z množiny $V(H)$, ktoré po dvojiciach tvoria hrany z párenia $M_H$, platí, že $M'$ pokryje všetky vrcholy podgrafu $H^{g_i}$.

Teraz dokážeme druhú časť vety. Vďaka už dokázanej prvej časti nám stačí dokázať, že ak $d(G\square K_{2n-1}) > 1$, tak $d(G\square K_{2n-1}) < d(G\square K_{2n+1})$. Inak povedané, potrebujeme dokázať, že graf $G\square K_{2n+1}$ obsahuje párenie, ktoré nechá nepokrytých menej vrcholov ako najväčšie párenie grafu $G\square K_{2n-1}$. Zvoľme si ľubovoľné najväčšie párenie $M$ grafu $G\square K_{2n-1}$. Zostrojíme párenie $M'$ grafu $G\square K_{2n+1}$ s požadovanou vlastnosťou. Vyberme ľubovoľne dva vrcholy $k_1'$ a $k_2'$ grafu $K_{2n+1}$. Graf $G\square(K_{2n+1} - k_1' - k_2')$ je zjavne izomorfný s grafom

$G\square K_{2n-1}$. Pomocou spomenutého izomorfizmu vieme získať párenie $M_1$ podgrafu $G\square(K_{2n+1}-k_1'-k_2')$ grafu $G\square K_{2n+1}$ zobrazením párenia $M$. Párenie $M$ nechá aspoň 2 vrcholy grafu $G\square K_{2n-1}$ nepokryté. Označme teda dva ľubovoľné, ale pevne zvolené vrcholy grafu $G\square(K_{2n+1}-k_1'-k_2')$ nepokryté párením $M_1$ ako $(g_1,k_1)$ a $(g_2,k_2)$. Keďže graf $G$ je súvislý, obsahuje cestu medzi vrcholmi $g_1$ a $g_2$. Označme ju $g_1 = g_1', g_2', \ldots, g_k' = g_2$. Ak $k$ je párne, tak párenie $M'$ obsahuje hrany párenia $M_1$, hrany $(g_i,k_1')(g_i,k_2')$ pre všetky $g_i \in V(G) - \{g_1', g_2', \ldots, g_k'\}$ a hrany $(g_1',k_1)(g_1',k_1'), (g_1',k_2')(g_2',k_2'), (g_2',k_1')(g_3',k_1'), \ldots$ $(g_k',k_1')(g_k',k_2)$. Ak $k$ je nepárne, tak párenie $M'$ obsahuje párenia $M_1$, hrany $(g_i,k_1')(g_i,k_2')$ pre všetky $g_i \in V(G) - \{g_1', g_2', \ldots, g_k'\}$ a hrany $(g_1',k_1)(g_1',k_1')$, $(g_1',k_2')(g_2',k_2'), (g_2',k_1')(g_3',k_1'), \ldots (g_k',k_2')(g_k',k_2)$. Ľahko vidieť, že všetky vrcholy nepokryté párením sa nachádzajú v podgrafe $G\square(K_{2n+1} - k_1' - k_2')$ a je ich o 2 menej ako $d(G\square K_{2n-1})$. □

Z tejto vety vyplýva niekoľko dôsledkov.

**Dôsledok 4.23.** Nech $G$ je ľubovoľný a $H$ faktorovo kritický graf. Potom $d(G\square H) \leq d(G)$. Ak $H$ obsahuje viac ako jeden vrchol, tak $d(G\square H) = d(G)$ práve vtedy, keď buď graf $G$ má perfektné párenie, alebo $d(G) = 1$.

**Dôkaz** Nerovnosť vyplýva z tvrdenia 4.21 a z toho, že $d(H) = 1$. Druhá časť vyplýva z toho, že ak $|V(H)| > 1$ a $d(G) = d(G\square K_1) > 1$, tak podľa 4.22 vety platí, že $d(G\square H) < d(G)$. □

**Dôsledok 4.24.** Pre ľubovoľný súvislý graf $G$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre ľubovoľný faktorovo kritický graf $H$ s aspoň $n_0$ vrcholmi, platí, že $d(G\square H) < 2$.

**Dôkaz** Tento dôsledok priamo vyplýva z druhej časti vety 4.22. □

V skututočnosti vieme ukázať silnejšie tvrdenie ako predchádzajúci dôsledok.

**Veta 4.25.** Pre ľubovoľný súvislý graf $G$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každý faktorovo kritický graf $H$ s aspoň $n_0$ vrcholmi je graf $G\square H$ buď faktorovo kritický, alebo má perfektné párenie.

**Dôkaz** Ak $|V(G)|$ je párne, tak z dôsledku 4.24 vyplýva existencia požadovaného $n_0$. Ak $|V(G)|$ je nepárne, tak z dôsledku 4.24 vyplýva, že existuje $n_0$

také, že pre ľubovoľný faktorovo kritický graf $H$ s aspoň $n_0$ vrcholmi platí, že $d(G\Box H) = 1$. Potrebujeme dokázať, že pre ľubovoľný vrchol $v$ grafu $G\Box H$ platí, že $G\Box H - v$ obsahuje perfektné párenie. Pomocou matematickej indukcie vzhľadom na počet vrcholov grafu $G$ ukážeme, že pre ľubovoľný graf $H$ s aspoň $d(G) + 2$ vrcholmi je graf $G\Box H$ faktorovo kritický.

**Báza indukcie:** Nech $G$ je izomorfný s $K_1$. Je zrejmé, že pre každý faktorovo kritický graf $H$ je graf $G\Box H$ fakorovo kritický.

**Indukčný krok:** Nech $G$ je ľubovoľný súvislý graf s aspoň tromi vrcholmi a $H$ je faktorovo kritický graf s aspoň $d(G)+2$ vrcholmi. Ukážeme, že graf $G\Box H$ je faktorovo kritický. Zostrojíme perfektné párenie $M_{(G\Box H)-(g,h)}$ grafu $(G\Box H)-(g, h)$ pre ľubovoľný vrchol $(g, h) \in V(G\Box H)$. Uvažujme graf $(G - g)\Box H)$. Podľa zovšeobecnenej Tuttovej vety tento graf obsahuje najviac $d(G)+1$ nepárnych komponentov a možno niekoľko párnych komponentov. Všetky párne komponenty tohto grafu majú podľa dokázanej časti vety perfektné párenie a podľa indukčného predpokladu sú všetky nepárne komponenty faktorovo kritické, a naviac ich je párny počet (kvôli parite počtu vrcholov grafu $G$). Párenie $M_{(G\Box H)-(g,h)}$ bude obsahovať perfektné párenia všetkých párnych komponentov grafu $(G-g)\Box H$ a hrany párenia $M_{(g,H)-(g,h)}$. Pokiaľ existuje nejaký nepokrytý nepárny komponent grafu $(G-g)\Box H$, opakujme tento postup: vyberme ľubovoľné dva takéto komponenty $G_1$ a $G_2$ a nejakú hranu $(g, h_1)(g, h_2)$, ktorá je v párení $M_{(g,H)-(g,h)}$. Odoberme hranu $(g, h_1)(g, h_2)$ z párenia $M_{(G\Box H)-(g,h)}$ a pridajme hrany párení $M_{G_1-(g_1,h_1)}$ a $M_{G_2-(g_2,h_2)}$ a hrany $(g_1, h_1)(g, h_1)$ a $(g_2, h_2)(g, h_2)$, ktoré spájajú vybraté komponenty a vrcholy $(g, h_1)$ a $(g, h_2)$. Dvojíc nepárnych komponentov je najviac $d(G)/2$ a hrán v $M_{(g,H)-(g,h)}$ je podľa predpokladov aspoň $d(G)/2$, a teda párenie $M_{(G\Box H)-(g,h)}$ skutočne pokrýva všetky vrcholy grafu $G\Box H$ okrem vrchola $(g, h)$. $\Box$

Teraz sa zameriame na najmenšie nerozšíriteľné párenie faktorovo kritického grafu a ľubovoľného grafu.

**Lema 4.26.** Nech $G$ je ľubovoľný graf, ktorý je vrcholovo zafarbiteľný $n$ farbami. Ak $H$ je faktorovo kritický graf s aspoň $n$ vrcholmi, tak existuje nerozšíriteľné párenie grafu $G\Box H$ nepokrývajúce $|V(G)|$ vrcholov. Naviac ak $H$ je izomorfné s kompletným nepárnym grafom, tak toto párenie je najmenšie nerozšíriteľné.

**Dôkaz** Nech funkcia $f : V(G) \to \mathbb{N}_n$ je vrcholovým farbením grafu $G$ využívajúcim najviac $n$ farieb. Označme vrcholy grafu $H$ ako $h_1, h_2, \ldots h_m$.

Definujme nerozšíriteľné párenie $M'$ grafu $G\Box H$, ktoré nechá $V(G)$ vrcholov nepokrytých, takto: $M' = \bigcup_{g \in V(G)} M_{(g,H)-(g,h_{f(g)})}$. Párenie $M'$ zjavne spĺňa uvedené podmienky.

Druhú časť tvrdenia ukážeme sporom. Nech $H$ je izomorfné s $K_{2m+1}$ a existuje nerozšíriteľné párenie grafu $G$, ktoré nepokrýva aspoň $V(G)+1$ vrcholov. Z Dirichletovho princípu vyplýva, že existuje vrchol $g$ grafu $G$ taký, že vrcholy $(g,h_1)$ a $(g,h_2)$ sú nepokryté. Ale tieto vrcholy sú susedné, čo je spor s nerozšíriteľnosťou párenia. □

Nasledujúci dôsledok vyplýva z vety 4.25 a z lemy 4.26.

**Dôsledok 4.27.** Pre ľubovoľný graf $G$ existuje $n_0$ také, že ak $H$ je ľubovoľný faktorovo kritický graf s aspoň $n_0$ vrcholmi, tak graf $\Delta'(G\Box H) > \lceil |V(G)|/2 \rceil - 1$.

Teraz ukážeme ešte niekoľko výsledkov o $\Delta'(G\Box H)$, kde nevyžadujeme, aby jeden z grafov $G$, $H$ bol faktorovo kritický.

**Tvrdenie 4.28.** Ak $G$ a $H$ sú ľubovoľné grafy, tak $\Delta'(G\Box H) \geq \Delta'(G)D(H)$.

**Dôkaz** Nech $M_G$ resp. $M_H$ je najväčšie párenie grafu $G$ resp. $H$ a $M'_G$ resp. $M'_H$ je najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G$ resp. $H$. Potom zjavne platí, že $|V(\Box(M_G, M_H))| - |V(\Box(M'_G, M'_H))| = (|V(M_G)| - |V(M'_G)|)(|V(M_H)| - |V(M'_H)|)$. □

**Tvrdenie 4.29.** Ak $K_n$ a $K_m$ sú kompletné grafy a $2 \leq n \leq m$ a $m \geq 3$, tak graf $K_n\Box K_m$ patrí do triedy $\Delta'_k$, kde $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

**Dôkaz** Potrebujeme nájsť najväčšie a najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $K_n\Box K_m$. Je zjavné, že ak $n$ alebo $m$ je párne, tak graf $K_n\Box K_m$ má perfektné párenie. Ak $n$ aj $m$ sú nepárne, tak graf $K_n\Box K_m$ je faktorovo kritický.

Na dokázanie tvrdenia potrebujeme nájsť najmenšie nerozšíriteľné párenie $M'$ grafu $K_n\Box K_m$ a ukázať, že $M'$ nepokrýva $n$ vrcholov, ak $n$ alebo $m$ je párne, prípadne že $M'$ nepokrýva $n-1$ vrcholov, ak $n$ aj $m$ je nepárne. Rozlíšime nasledujúce prípady podľa parity $n$ a $m$.

Ak $m$ je nepárne, tak podľa lemy 4.26 najmenšie párenie nepokrýva práve $n$ vrcholov, teda v tomto prípade dokazované tvrdenie platí.

Predpokladajme, že aj $n$, aj $m$ sú párne. Nech $M'_n$ je nejaké najväčšie párenie grafu $K_n$, $g_1g_2$ je ľubovoľná hrana párenia $M'_n$ a $h_1, h_2$ sú nejaké vrcholy grafu $K_m$. Ak $n \geq 4$, tak môžeme zostrojiť najmenšie nerozšíriteľné párenie $M'$ grafu $K_n \Box K_m$ nasledovne. Označme $G' = K_n - g_1 - g_2$ a $H' = (K_m - h_1)$. Graf $G' \Box H'$ spĺňa podmienky lemy 4.26, takže jeho najmenšie párenie $M_0''$ nepokrýva práve $n-2$ vrcholov. Podľa Dirichletovho princípu existuje vrchol $h_3 \in V(K_m)$ taký, že pre každý vrchol $g_i \in V(K_n - g_1 - g_2)$ je vrchol $(h_3, g_i)$ pokrytý párením $M_0''$. Označme perfektné párenie grafu $G' \Box \{h_1\}$ ako $M_1''$. Ďalej definujme párenie $M_2''$ ako perfektné párenie grafu $\{g_1\} \Box (K_m - h_1 - h_2)$ a párenie $M_3''$ ako perfektné párenie grafu $\{g_2\} \Box (K_m - h_2 - h_3)$. Párenie $M'$ definujeme nasledovne $M' = M_0'' \cup M_1'' \cup M_2'' \cup M_3'' \cup \{(g_1, h_2)(g_2, h_2)\}$. Toto párenie je zjavne najmenšie nerozšíriteľné a nepokrýva práve $n$ vrcholov. Ak $n = 2$ a $m \geq 4$ je párne, tak najmenšie nerozšíriteľné párenie $M'$ obsahuje hranu $(g_1, h_1)(g_2, h_1)$ a najväčšie párenie $M''$ podgrafu $(g_1, K_m - h_1)$ nepokrývajúce vrchol $(g_1, h_2)$ a najväčšie párenie podgrafu $(g_2, K_m - h_1)$ nepokrývajúce vrchol $(g_2, h_3)$. Párenie $M'$ je zjavne najmenšie nerozšíriteľné a necháva nepokryté 2 vrcholy.

Predpokladajme, že $m$ je párne a $n$ nepárne. Nech $g$ je ľubovoľný vrchol grafu $K_n$. Označme symbolom $M''_{g_i,h_j}$ perfektné párenie grafu $(K_n - g_i) \Box \{h_j\}$. Nech $V'(K_m)$ je ľubovoľná podmnožina $V(K_m)$ s mohutnosťou $n-1$. Definujeme párenie $M'$ grafu $K_n \Box K_m$ nasledovne, $M'$ obsahuje párenia $M''_{g_i,h_i}$ pre každý vrchol $h_i \in V'(K_m)$, $g \neq g_i$ pre žiadne $i$ a $g_i \neq g_j$ ak $i \neq j$, a párenia $M''_{g,h_j}$ pre každý vrchol $h_j \in V(K_m) - V'(K_m)$. Párenie $M'$ nepokrýva práve $n-1$ vrcholov. Každé menšie párenie by nepokrývalo aspoň $n+1$ vrcholov, teda by nebolo nerozšíriteľné. Párenie $M'$ je najmenšie nerozšíriteľné párenie grafu $G \Box H$ a dokazované tvrdenie platí. $\square$

# Kapitola 5

# Záver

V práci sme sa venovali rozšíriteľnosti párení na grafoch. Graf $G$ sa nazýva equimatchable práve vtedy, keď každé nerozšíriteľné párenie grafu $G$ je aj najväčšie. V práci uvádzame charakterizáciu equimatchable chordálnych grafov. Skúmame tiež vzťah medzi prienikovými grafmi fundamentálnych cyklov a equimatchable chordálnymi grafmi. Charakterizujeme štruktúru grafov $G$ takých, že pre každú kostru $T$ grafu $G$ je graf $G\#T$ equimatchable. Ďalej sa venujeme equimatchable karteziánskym súčinom grafov a ukazujeme, že jediný netriviálny equimatchable karteziánsky súčin je $K_2 \Box K_2$.

Zavádzame tiež nový koncept rozšíriteľnosti párení: graf $G$ patrí do triedy $\Delta_n$ práve vtedy, keď rozdiel mohutností ľubovoľných dvoch nerozšíriteľných párení v grafe $G$ je nanajvýš $n$. Graf $G$ patrí do triedy $\Delta'_n$ práve vtedy, keď $G \in \Delta_n$ a $G \notin \Delta_{n-1}$. V práci uvádzame chrakterizáciu grafov z triedy $D_n$ pre $n \in \mathbb{N}$. Je známe, že problém nájsť pre ľubovoľný graf $G$ číslo $n$ také, že $G \in \Delta'_n$, je NP-úplný. Uvádzame deterministický polynomiálny algoritmus, ktorý pre ľubovoľný graf $G$ rozhodne, či $G \in \Delta'_1$. Taktiež pre dané $n$ a $k$ uvádzame deterministický polynomiálny algoritmus, ktorý vie rozhodnúť, či graf $G$ taký, že $d(G) = k$, patrí do triedy $\Delta_n$. Pre karteziánske súčiny grafov sme sa venovali najmä súčinom faktorovo kritických grafov so súvislými grafmi z pohľadu $\Delta_n$ tried. Ukázali sme, že ak $H$ je ľubovoľný faktorovo kritický graf, tak veľkosť najväčšieho párenia v grafoch $G \Box H$ a $G \Box K_{|V(H)|}$ je rovnaká. Tiež sme ukázali niekoľko ďalších výsledkov o $\Delta$ triedach pre karteziánske súčiny faktorovo kritických grafov a súvislých grafov.

Otvorenou otázkou zostáva, či pre dané $n$ existuje deterministický polynomiálny algoritmus rozhodujúci, či graf $G$ patrí do triedy $\Delta_n$. Ďalšie možnosti výskumu poskytuje trieda karteziánskych súčinov grafov. Zaujímavá otvorená otázka je úplnejšia charakterizácia najmenšieho nerozšíriteľného párenia karteziánskeho súčinu faktorovo kritického grafu a súvislého grafu. Predpokladáme tiež, že podobné výsledky, aké sme dosiahli pre faktorovo kritické grafy v karteziánskych súčinoch, by mohli existovať pre grafy s perfektným párením alebo pre ich podmnožinu, pre bikritické grafy.

# Literatúra


[1] T. Gallai, “Kritische Graphen II,” *Magyar ad. Akad. Mat. Kutatd Int. Kozl.*, vol. 8, pp. 373–395, 1963.

[2] J. Edmonds, “Paths, trees, and flowers,” *Canad. J. Math.*, vol. 17, pp. 449–467, 1965.

[3] D. P. Summer, “Randomly matchable graphs,” *Journal of Graph Theory*, vol. 3, no. 2, pp. 183–186, 1979.

[4] M. Lesk, M. Plummer, and W. Pulleyblank, “Equi-matchable graphs,” *Graph Theory and Combinatorics*, pp. 239–254, 1984.

[5] O. Favaron, “Extendability and factor-criticality,” *Discrete Math.*, vol. 213, pp. 115–122, 2000.

[6] M. Plummer, “Extending matchings in graphs: A survey,” *Discrete Math.*, vol. 127, no. 1-3, pp. 277 – 292, 1994.

[7] Q. Yu and G. Liu, *Graph Factors and Matching Extensions.* Springer, 2010.

[8] Q. Yu, “Characterizations of various matching extensions in graphs,” *Australas. J. Combin.*, vol. 7, pp. 54–64, 1993.

[9] Q. Yu, “A note on extendability and factor-criticality,” *Annals of Combinatorics*, vol. 6, pp. 479–481, 2002.

[10] G. Liu and Q. Yu, “Generalization of matching extensions in graphs,” *Discrete Math.*, vol. 231, pp. 311–320, March 2001.

[11] Z. Jin, H. Yan, and Q. Yu, “Generalization of matching extensions in graphs (ii),” *Discrete Appl. Math.*, vol. 155, pp. 1267–1274, 2007.

[12] B. Bai, H. Lu, and Q. Yu, "Generalization of matching extensions in graphs (iii)," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 159, no. 8, pp. 727 – 732, 2011.

[13] J. Vandenbussche and D. B. West, "Matching extendability in hypercubes," *SIAM J. Discret. Math.*, vol. 23, pp. 1539–1547, 2009.

[14] A. Frendrup, B. Hartnell, and P. D. Vestergaard, "A note on equimatchable graphs," *Australas. J. Combin.*, vol. 42, pp. 185–190, 2010.

[15] M. Yannakakis and F. Gavril, "Edge dominating sets in graphs," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 38, no. 3, pp. pp. 364–372, 1980.

[16] W. T. Tutte, "The Factorization of Linear Graphs," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. s1-22, no. 2, pp. 107–111, 1947.

[17] C. Berge, "Sur le couplage maximum d'un graphe," *C. R . Acad. Sci. Paris Sir. I Math.*, vol. 247, pp. 258–259, 1958.

[18] C. Berge, "Two theorems in graph theory," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 43, no. 9, pp. 842–844, 1957.

[19] O. Favaron, "Equimatchable factor-critical graphs," *Journal of Graph Theory*, vol. 10, pp. 439–448, 1986.

[20] F. Gavril, "The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 16, no. 1, pp. 47 – 56, 1974.

[21] L. Lovász, "On graphs not Containing Indepedent Circuits," *Mat. Lapok*, vol. 16, pp. 289–299, 1965. (in Hungarian).

[22] L. Lovász, "Subgraphs with prescribed valencies," *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 8, p. 391–416, 1970.

[23] L. Lovász and M. Plummer, *Matching Theory.* North-Holland Publishing, Amsterdam, 1986.