Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Párenia v súčinoch grafov

Diplomová práca

2014
Bc. Dominik Zajíček

Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Párenia v súčinoch grafov

Diplomová práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	2805 Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra Informatiky FMFI
Školiteľ:	Mgr. Michal Kotrbčík Ph. D.

2014
Bc. Dominik Zajíček

87656252

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Dominik Zajíček
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.1. informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Párenia v súčinoch grafov.

Cieľ: Cieľom práce je priniesť nové výsledky v oblasti veľkosti a štruktúry najväčšieho párenia v súčinoch grafov.

Vedúci: Mgr. Michal Kotrbčík
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.

Dátum zadania: 16.10.2012

Dátum schválenia: 18.10.2012 prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Abstrakt

Predložená práca sa zaoberá vlastnosťami najväčších párení grafov, konkrétne equimatchable grafmi. Hlavným cieľom práce je klasifikácia všetkých equimatchable grafov v dvoch konkrétnych triedach a to regulárnych grafov a tenzorových súčinov.

V oblasti regulárnych equimatchable grafov sme ukázali, že ak G je k-regulárny equimatchable graf pre k nepárne, tak je izomorfný s K_{k+1}, alebo $K_{k,k}$. Ďalej sme ukázali, že ak je stupeň regularity k párny, tak graf G je izomorfný s K_{k+1}, $K_{k,k}$, alebo je faktorovo-kritický. Naviac dokazujeme, že k-regulárnych equimatchable grafov pre pevne zvolené k je iba konečne veľa. Práca sa ďalej zameriava na 4-regulárne equimatchable grafy, kde sa nám podarilo charakterizovať všetky 3-súvislé 4-regulárne equimatchable grafy okrem prípadu, keď má 11, alebo 13 vrcholov a neobsahuje netriviálny 4-rez.

V prípade tenzorových súčinov sme ukázali, že neexistuje netriviálny súvislý tenzorový súčin s obvodom aspoň 5. Na druhej strane, existuje nekonečne veľa netriviálnych equimatchable tenzorových súčinov.

Kľúčové slová: graf, párenie, equimatchable, tenzorový súčin grafov

Abstract

This thesis investigates properties of maximum matchings in graphs, specifically equimatchable graphs.

For regular equimatchable graphs we showed, that if G is k-connected regular equimatchable graph for odd k, then G is either isomorphic to K_{k+1}, or $K_{k,k}$. Further we show, that even degree regular graphs are either isomorphic to K_{k+1}, $K_{k,k}$, or G is factor-critical. We show, that there are finitely many k-regular equimatchable graphs for given k. We characterize 3-connected 4-regular equimatchable graphs except for cases when G has 11 or 13 vertices and does not contain a non-trivial 4-cut.

In case of tensor products we show, that there are none non-trivial tensor products with girth at least 5. On the other hand, there are infinitely many non-trivial equimatchable tensor products.

Keywords: graph, matching, equimatchable, tensor product of graphs

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne s použitím uvedených zdrojov.

Bratislava, 5.5.2014

Dominik Zajíček

Poďakovanie

Ďakujem môjmu školiteľovi Mgr. Michalovi Kotrbčíkovi Ph. D. za poskytnutú literatúru, odborné vedenie a trpezlivosť.

Obsah

Úvod

Táto diplomová práca sa zaoberá equimatchable grafmi a to konkrétne v triede regulárnych grafov a v triede tenzorových súčinov. Equimatchable grafy sú presne tie, v ktorých každé maximálne párenie je najväčšie.

Trieda equimatchable grafov bola prvýkrát uvažovaná v [Grü74], [Lew74] a [Men74]. Konkrétne [Grü74] vyslovuje problém charakterizácie všetkých equimatchable grafov. Najskôr boli charakterizované equimatchable grafy s perfektným párením [Sum79], tiež nazývané "randomly matchable", ktoré sú buď izomorfné s K_{2n}, alebo $K_{n,n}$, pre nejaké n. Equimatchable grafy, ktoré nie sú faktorovo kritické a nemajú perfektné párenie, sú presne charakterizované s využitím Edmonds-Gallaiovej dekompozície v [LPP84]. Z tejto charakterizácie vyplýva, že 2-súvislé equimatchable grafy bez perfektného párenia sú buď bipartitné, alebo faktorovo-kritické. V [Fav86] sú charakterizované equimatchable grafy s artikuláciou a 2-rezom. Existujú práve dva súvislé 3-regulárne equimatchable grafy [KPS03], konkrétne K_4 a $K_{3,3}$. Oblasť párení je spracovaná v [LP86] a monografii [LY09]. V našej práci ďalej skúmame regulárne equimatchable grafy. Charakterizujeme všetky nepárno-regulárne equimatchable grafy a pre párno-regulárne equimatchable grafy ukážeme, že buď majú perfektné párenie, alebo sú faktorovo kritické. Záverečnú časť druhej kapitoly venujeme charakterizácii 4-regulárnych equimatchable grafov.

Publikácie [AG90] a [HIK11] tvoria základ pre skúmanie párení v súčinoch. V [Kov12] je ukázané, že jediný súvislý equimatchable graf, ktorý dostaneme kartézskym súčinom je $K_2 \,\Box\, K_2$. Dôsledkom výsledku z [WYY12] je, že karteziánsky súčin dvoch faktorovo-kritických grafov je tiež faktorovo-kritický. Z [FHV10] poznáme presnú charakterizáciu všetkých equimatchable grafov s obvodom aspoň 5. V tejto práci sa venujeme tenzorovým súčinom grafov, konkrétne otázke, či existuje equimatchable tenzorový súčin grafov. Ukážeme, že neexistuje súvislý netriviálny tenzorový súčin s obvodom aspoň 5. Na druhej strane, existuje nekonečne veľa equimatchable tenzorových súčinov.

Kapitola 1

Úvod do problematiky

V celej práci pracujeme s jednoduchými grafmi bez slučiek, pokiaľ nie je povedané inak.

Definícia 1.1. Graf G je usporiadaná dvojica (V, E), kde konečná množina V je množina vrcholov a $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ je množina hrán spájajúcich rôzne vrcholy.

Používa sa označenie $V(G)$ pre množinu vrcholov a $E(G)$ pre množinu hrán grafu G. Zaviedlo sa aj použitie $|G|$ namiesto $|V(G)|$. Hranu $\{u, v\}$ označíme jednoducho uv. Množinu vrcholov incidentných s vrcholom v budeme označovať $N(v)$ a obvodom grafu G budeme nazývať veľkosť najmenšieho cyklu v grafe. Ak je G acyklický graf, definujeme odvod ako nekonečno. Navyše pod pojmom singleton graf alebo singleton komponent budeme rozumieť graf pozostávajúci z jediného vrcholu, respektíve izolovaný vrchol. Za netriviálne grafy budeme považovať grafy, ktoré obsahujú aspoň jednu hranu.

1.1 Párenia

Definícia 1.2. Množinu hrán nazveme nezávislou vtedy ak žiadne dve hrany z tejto množiny nemajú spoločný vrchol.

Definícia 1.3. Párenie (matching) je množina nezávislých hrán.

Definícia 1.4. Perfektné párenie je párenie pokrývajúce všetky vrcholy.

Z tejto definície je zrejmé, že perfektné párenie majú len grafy na párnom počte vrcholov.

Definícia 1.5. Párenie M v grafe G s vlastnosťou, že vrchol v je v grafe $G - M$ izolovaný sa nazýva *izolujúce párenie vrcholu* v.

Veta 1.6. [KPS03] Ak G je súvislý kubický equimatchable graf, tak je izomorfný buď s $K_{3,3}$, alebo K_4.

1.2 Edmonds-Gallaiova dekompozícia

Definícia 1.7. Pre graf G definujeme $D(G)$ ako množinu všetkých tých vrcholov grafu, ktoré sú nepokryté aspoň jedným najväčším párením. Ďalej, nech $A(G)$ je množina takých vrcholov z $V(G) - D(G)$, ktoré susedia aspoň s jedným vrcholom z $D(G)$. A nakoniec $C(G)$ sú zvyšné vrcholy. Takto definované množiny označujeme ako (D,A,C)-dekompozícia grafu G.

1.3 Equimatchable faktorovo kritické grafy

Nasledujú vety a lemy, ktoré sú v ďalšom texte často používané. Dávajú totiž v mnohých ohľadoch silné nutné podmienky na equimatchable faktorovo kritické grafy.

Veta 1.8. [EK13] Nech G je 2-súvislý, equimatchable faktorovo kritický graf. Nech v je vrchol G a M_v nech je najmenšie izolujúce párenie vrcholu v. Potom graf $G-(V(M_v)\cup \{v\})$ je izomorfný s K_{2n} alebo $K_{n,n}$ pre nejaké nezáporné celé číslo n.

Lema 1.9. [Eib14] Nech $k \geq 3$ a nech G je k-súvislý faktorovo kritický equimatchable graf s aspoň $2k + 3$ vrcholmi a k-rezom S. Potom $G - S$ má presne dva komponenty.

Veta 1.10. [Eib14] Nech G je k-súvislý, equimatchable faktorovo kritický graf s k-vrcholovým-rezom S, kde $k \geq 3$. Ak C je komponent $G - S$ s aspoň 3 vrcholmi, a $G - (S \cup C)$ má aspoň 3 vrcholy, potom $G - S$ má presne dva komponenty a oba sú kompletné grafy.

Lema 1.11. [Eib14] Nech G je graf s vrcholovou súvislosťou k a s k-rezom S. Nech H je komponent grafu $G - S$. Potom pre ľubovoľnú množinu vrcholov $X \subseteq S$ obsahuje graf G aspoň min($|H|$,$|X|$) nezávislých hrán medzi H a X.

Veta 1.12. [Eib14] Nech G je k-súvislý equimatchable faktorovo kritický graf s k-rezom S. Predpokladajme, že $G - S$ má nejaký komponent C veľkosti aspoň k a $G - (S \cup C)$ má nejaký komponent pozostávajúci z jediného vrhcolu. Potom $G - S$ má presne dva komponenty a existuje párenie M medzi S a C, pokrývajúce všetky vrcholy S. Navyše graf $C - V(M)$ je izomorfný s K_{2n}, alebo $K_{n,n}$ pre nejaké celé číslo n.

Veta 1.13. [Eib14] Nech G je k-súvislý, equimatchable faktorovo kritický graf s k-rezom S. Predpokladajme, že $G - S$ má komponent C s aspoň k vrcholmi a $G - (S \cup C)$ má komponent pozostávajúci presne z dvoch vrcholov. Ak S obsahuje hranu, tak C je kompletný graf. Ak S neobsahuje hranu, tak existuje nezáporné celé číslo m a množiny $\{x_1, \ldots, x_m\}$ vrcholov z C a $\{y_1, \ldots, y_m\}$ vrcholov z S takých, že $x_i y_i$ nie je hrana v G pre každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $C \cup S \cup \{x_1 y_1, \ldots, x_m y_m\}$ je izomorfný s $K_{n,n+1}$ pre nejaké n.

Kapitola 2

Equimatchable regulárne grafy

V tejto kapitole sa zaoberáme otázkou, ktoré regulárne grafy sú equimatchable. Na úvod podrobne rozoberieme charakterizáciu equimatchable grafov pomocou Edmonds-Gallaiovej dekompozície z [LPP84]. Pomocou tohto výsledku ukážeme, že súvislý k-regulárny equimatchable graf G je buď K_{k+1}, $K_{k,k}$, alebo k je párne a G je faktorovo kritický, zovšeobecňujúc tak výsledky pre $k = 3$ z [KPS03]. V poslednej časti kapitoly charakterizujeme takmer všetky 4-regulárne grafy.

2.1 (D,A,C)-dekompozícia equimatchable grafov

Nasledujúca veta charakterizuje equimatchable grafy bez perfektného párenia pomocou štruktúr v Edmonds–Gallaiovej dekompozícii grafu.

Veta 2.1. [LPP84] Nech G je súvislý equimatchable graf, ktorý neobsahuje perfektné párenie. Nech (D,A,C) je Edmonds-Gallaiova dekompozícia grafu G a nech $A \neq \emptyset$.

1. Potom pre každý komponent D_i podgrafu G indukovaného na D nastáva jedna z nasledujúcich možností:

   (i) $D_i \cong K_{2n-1}$ pre nejaké $n \geq 2$, a každý vrchol z D_i susedí s práve jedným spoločným vrcholom $a \in A$.

   (ii) D_i obsahuje artikuláciu d_i v G, pričom d_i je jediný vrchol z D_i spojený s vrcholmi z množiny A. Nech $H_i^1, \ldots, H_i^r$ pre nejaké $r \geq 1$ sú komponenty grafu $D_i - d_i$. Potom pre každé j, $1 \leq j \leq r$, buď $H_i^j \cong K_{2m}$ pre $m \geq 1$ a aspoň dve hrany spájajú H_i^j s d_i, alebo $H_i^j \cong K_{m,m}$, pre nejaké $m \geq 1$, a ak U, V je bipartícia tohto grafu, potom aspoň jedna hrana spája d_i s vrcholom z U a aspoň jedna hrana spája d_i s vrcholom s V.

(iii) Aspoň dva vrcholy z D_i sú spojené s vrcholmi z A a aspoň jeden vrchol z D_i nie je spojený zo žiadnym vrcholom z A. V tomto prípade existuje vrchol $a \in A$ taký, že oddeľuje D_i od G. Ak D_i obsahuje práve dva vrcholy y_1 a y_2 spojené s vrcholom a, potom D_i musí byť jedného z nasledujúcich troch typov:

(a) D_i je K_3;

(b) $D_i - \{y_1, y_2\}$ je kompletný bipartitný graf $K_{r,r-1}$, kde $r \geq 2$, a ak (U, V) je jeho bipartícia, kde $|U| = r$, potom y_1 a y_2 sú oba susedné s každým vrcholom v U a aj navzájom;

(c) $D_i - \{y_1, y_2\}$ je K_{2r-1}, pre $r \geq 2$, y_1 a y_2 sú spojené s každým vrcholom v $D_i - \{y_1, y_2\}$ a y_1 s y_2 môžu (ale nemusia) byť spojené. Ak D_i má aspoň 3 a najviac $|V(D_i)| - 1$ vrcholov spojených s a, potom D_i je K_{2m-1} pre nejaké $m \geq 3$.

Poslednou možnosťou (d) je ak D_i má aspoň 3 a najviac $|V(D_i)| - 1$ vrcholov spojených s a, potom D_i je K_{2m-1} pre nejaké $m \geq 3$.

Komponenty D_i, pre ktoré nastáva prípad (i), (ii), resp. (iii) nazývame komponenty typu I, II, resp. III.

2. Odoberme z grafu G všetky komponenty D_i typu II a typu III, a každý komponent typu I skontrahujme do jedného vrcholu. Potom existuje párenie vo výslednom bipartitnom grafe G'_I, ktoré pokrýva všetky vrcholy z A a graf G'_I je equimatchable.

S využitím tejto charakterizácie equimatchable grafov dokážeme nasledujúce vlastnosti regulárnych equimatchable grafov.

Tvrdenie 2.2. *Nech G je jednoduchý súvislý equimatchable graf, nech (D, A, C) je jeho dekompozícia a $c(D)$ označuje počet komponentov podgrafu indukovaného D. Potom G má všetky nasledujúce vlastnosti.*

(i) $C = \emptyset$

(ii) *A je nezávislá množina*

(iii) *Ak G nemá perfektné párenie, tak $c(D) \geq |A| + 1$*

(iv) *Ak G je k-regulárny bez perfektného párenia pre nejaké nepárne k, tak $c(D) \geq |A| + 2$*

Dôkaz. (i) Predpokladajme pre spor, že C je neprázdna, a keďže graf je súvislý, existujú vrcholy $a \in A$ a $c \in C$ také, že medzi nimi vedie hrana ac. Každé najväčšie párenie pokrýva celú množinu A hranami do rôznych komponentov D [LP86]. Párenie M, ktoré obsahuje hranu ac sa nedá rozšíriť na najväčšie, a teda G nemohol byť equimatchable.

(ii) Podobne ako v predchádzajúcom prípade predpokladajme pre spor, že A nie je nezávislá. Teda máme hranu uv medzi dvoma vrcholmi množiny A. Z podobného dôvodu ako predchádzajúci prípad toto nemôže nastať.

(iii) Z vlastností dekompozície (časť (d) [LP86]) vieme, že každé najväčšie párenie pokrýva množinu A hranami do $|A|$ rôznch komponentov množiny D. To sa dá zapísať ako $c(D) \geq |A|$. Ak v grafe platí rovnosť $c(D) = |A|$, tak má perfektné párenie, preto platí $c(D) \geq |A| + 1$.

(iv) Číslo k je nepárne, preto $|V(G)|$ je párne. Vieme, že $c(D) \geq |A| + 1$, ale ak $c(D) = |A| + 1$, tak G má nepárny počet vrcholov, čo je spor s voľbou k. Preto platí, že $c(D) \geq |A| + 2$.

□

2.2 Regulárne equimatchable grafy

V tejto sekcii dokážeme úplnú charakterizáciu k-regulárnych equimatchable grafov pre nepárne k a ukážeme, že pre párne k je k-regulárny equimatchable graf buď K_{k+1}, $K_{k,k}$, alebo je faktorovo kritický.

Pripomíname, že podľa charakterizácie kubických equimatchable grafov vo vete 1.6 [KPS03] na strane 3 sú takýmito grafmi jedine $K_{3,3}$ a K_4.

Veta 2.3. Nech G je súvislý k-regulárny equimatchable graf. Ak k je nepárne, tak G je izomorfný buď s $K_{k,k}$, alebo K_{k+1}. Ak k je párne, tak G je izomorfný buď s $K_{k,k}$, K_{k+1}, alebo je faktorovo kritický.

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že G má perfektné párenie. Podľa [Sum79] sú jediné equimatchable grafy s perfektným párením K_{2n} a $K_{n,n}$. Ak k je párne, tak existuje jediný equimatchable graf s perfektným párením a to $K_{k,k}$. Pre k, požadovaný stupeň regularity, existuje jediný equimatchable graf s perfektným párením, a to $K_{k,k}$. Ak je k nepárne, tak jedinými k-regulárnymi grafmi s perfektným párením sú K_{2n} a K_{k+1}. Vo zvyšnej časti dôkazu budeme predpokladať, že G nemá perfektné párenie a rozoberieme jednotlivé potenciálne typy komponentov grafu G na základe charakterizácie vety 2.1.

Ak je k nepárne, tak G musí mať párny počet vrcholov, teda nie je faktorovo kritický, čím spĺňa predpoklad vety 2.1, že $A \neq \emptyset$. Teraz ukážeme nasledovné pomocné tvrdenie.

($*$) V G nemôže nastať, že by pre $a \in A$, všetkých k hrán viedlo do jedného komponentu.

Pre dôkaz ($*$) pre spor predpokladajme, že všetkých k hrán z a vedie do jediného komponentu. Keďže $c(D) \geq |A| + 1$, v D je ešte aspoň jeden komponent, a keďže $C = \emptyset$ a A je nezávislá množina, tak G je nesúvislý, čo je spor. Tým je dôkaz ($*$) skončený.

Postupne overíme existenciu jednotlivých typov komponentov, ktoré sú popísané vo vete 2.1 na strane 5. Jednotlivé komponenty budeme označovať ako D_i.

- Typ I. Jedná sa o podgraf K_{2m+1} úplne pripojený na jediný vrchol $a \in A$. Označme l možný počet vrcholov hľadaného kompletného grafu. Ľahko vidieť, že ak má byť graf regulárny, musí ísť hrana z a do každého vrcholu komponentu. Možnosť, že by všetkých k hrán z vrcholu a smerovalo do jediného komponentu v D sme vylúčili ($*$). Takže $l \leq k - 1$. Nech $v \in D_i$, potom $deg(v) = l - 1 + 1 \leq k - 1$. Z toho vyplýva, že G nie je k-regulárny graf, čo je v spore s predpokladom.

- Typ II. Pojednáva o situácii, kedy D_i obsahuje artikuláciu d_i, ktorá je zároveň jediným vrcholom komponentu susediacim s vrcholmi v A. Vrchol d_i je spojený aspoň jednou hranou s A, teda počet hrán smerujúcich z d_i do D_i je najviac $k - 1$.

  (a) Na d_i je pripojený K_{2m}. Počet vrcholov kompletného podgrafu je najviac $k - 1$. Vrcholy v tomto kompletnom podgrafe nadobúdajú stupeň buď

$k-2$, alebo $k-1$, čo je v oboch prípadoch menej ako požadovaný stupeň k. Takýto typ komponentu teda tiež nevyhovuje našim požiadavkam.

(b) Na d_i je pripojený $K_{m,m}$, pričom do každej partície ide aspoň jedna hrana z d_i. To znamená, že najväčší možný počet hrán z d_i do jednej partície je $k-2$. Teraz sa pozrime na vrchol v v jednej z partícií. Susedmi vrcholu v sú d_i a všetky vrcholy druhej partície. Teda v tej druhej partícií musí byť aspoň $k-1$ vrcholov, lenže najväčší možný počet hrán do jednej partície je $k-2$, teda v tejto partícii existujú dva vrcholy rôzneho stupňa, čo je v spore s regularitou grafu.

Typ III. (a) Nie je regulárny. Z vety 2.1 v časti (iii) vieme, že v D_i sa nachádza vrchol z, ktorý nesusedí so žiadnym vrcholom z A a so súvislosti grafu sa tam nachádza aj vrchol y, ktorý susedí s vrcholom v A, a tieto dva vrcholy majú rôzny stupeň.

(b) Predpokladajme, že existuje komponent vyhovujúci tomuto popisu. Potom $deg(y_i) = 2 + |U|$, teda $|U| = k - 2$. Majme vrchol $w \in W$. A keďže $deg(w) = k - 2$, tento komponent nie je regulárny.

(c) (i) medzi y_1 a y_2 nie je hrana. $2r - 1 = k - 1$, teda k je párne. Vezmime teraz vrchol x z K_{2r-1}. $deg(x) \leq 2r - 2 + 2 \leq k$. Teda za predpokladu, že k je párne môže existovať komponent, ktorý patrí do tejto kategórie.

(ii) medzi y_1 a y_2 je hrana. Podobnými úvahami sa ukáže, že $deg(x) \leq k - 1$. Teda tento typ nevyhovuje.

(d) Celá časť (iii) hovorí o štruktúrach, kde existuje aspoň jeden vrchol x, ktorý nesusedí s A. V D_i kvôli súvislosti existuje aj vrchol v, ktorý susedí s A. Vrchol v má o jednu incidentnú hranu oproti x naviac. Komponent tohto typu nemôže byť regulárny.

Pre jednoduché k-regulárne equimatchable grafy sú teda prípustnými komponentami v D jedine singletony a komponenty typu III(c), aj to len pre párne k.

Pre nepárne k sporom ukážeme, že takýto graf neexistuje. Predpokladajme, že existuje k-regulárny súvislý equimatchable graf. Tento graf obsahuje ako komponenty D jedine singleton grafy, teda podľa časti (2) vety 2.1 musí byť bipartitný. Vieme, že $c(D) > |A|$, lenže regulárny bipartitný graf má rovnako veľké partície, čo je spor.

Teraz sporom ukážeme, že pre párne k je graf G faktorovo kritický. Predpokladajme, že G nie je faktorovo kritický, teda $A \neq \emptyset$ a označme s počet singleton komponentov v D. Premennou c označme počet komponentov typu III(c). Porovnaním počtu hrán vychádzajúcich z A a D dostaneme, že $k|A| = 2c + ks$. Okrem toho z druhej časti vety 2.1 vieme, že $|A| \leq \frac{1}{2}|V(G'_I)|$, ale keďže G'_I obsahuje len vrcholy množiny A a vrcholy prislúchajúce singleton grafom, tak $s \geq |A|$. Z toho ale vyplýva

$$k|A| = 2c + ks \geq 2c + k|A| \implies 0 \geq 2c \implies c = 0$$

Teda náš graf G neobsahuje žiadne komponenty typu III(c), čiže je bipartitný, ale $s = c(D) > |A|$, teda tento graf nemá rovnako veľké partície, čo je v spore s predpokladom, že bol regulárny.

□

Veta 2.4. Nech G je k regulárny súvislý equimatchable faktorovo kritický graf. Potom $|V(G)| \leq 4r - 1$.

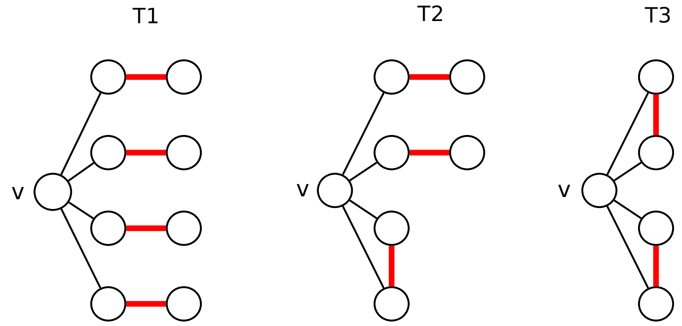
Dôkaz. Nech v je vrchol grafu G a nech M je izolujúce párenie vrcholu v. Ďalej nech nech $A = V(M) \cup \{v\}$ a nech $B = G - A$. Z vety 1.8 vieme, že B je buď K_m, alebo $K_{m,m}$. Pozrime sa najvyšší možný počet vrcholov v grafe G. Najväčší možný počet vrcholov v A je $2k + 1$ a to v situácii, kedy za M vezmeme párenie veľkosti k. Teraz ukážeme, že najväčší možný počet vrcholov v B je $2(k - 1)$. Graf je súvislý, takže potrebujeme stupne vrcholov najviac $k - 1$, pretože podgraf G indukovaný na B je regulárny a ak by mali jeho vrcholy stupeň aspoň k, tak B by tvoril komponent súvislosti. Ďalej ak B je K_m pre nejaké m, tak najväčší vyhovujúci graf je K_k s k vrcholmi. Ak B je $K_{m,m}$ pre nejaké m, tak najväčšie vyhovujúce m je $k-1$, čo zodpovedá grafu $K_{k-1,k-1}$, ktorý má $2(k - 1)$ vrcholov. Spolu teda dostávame, že G má najviac $4r - 1$ vrcholov. □

2.3 4-regulárne equimatchable faktorovo kritické grafy

S využitím tvrdení čiastočne charakterizujúcich equimatchable faktorovo kritické grafy, ktoré sú k-súvislé a majú k-rez (pozri stranu 3), charakterizujeme všetky 4-regulárne equimatchable faktorovo kritické grafy.

Lema 2.5. Nech M je maximálne párenie 4-regulárneho grafu G. Potom párenie M pozostáva aspoň z 3 hrán.

Dôkaz. Predpokladajme, že veľkosť M je najviac dva. Z toho vyplýva, že existuje nezávislá množina vrcholov $X \subseteq V(G)$, ktorá má aspoň 5 vrcholov. Je ľahko vidieť, že



Obr. 2.1: Typy najmenšieho izolujúceho párenia v 4-regulárnom grafe

z X vychádza aspoň 20 hrán, ale G má iba 18 hrán (z regularity), takže veľkosť M je aspoň tri. $\square$

Netriviálnym rezom S v nasledujúcej vete označujeme rez grafu G taký, že žiaden komponent $G - S$ nie je izolovaný vrchol.

Veta 2.6. Nech G je 3-súvislý 4-regulárny equimatchable faktorovo kritický graf. Potom G je buď jeden z grafov na obrázkoch 2.41 a 2.42, alebo 4-súvislý graf na 11, alebo 13 vrcholoch, ktorý neobsahuje netriviálny rez.

Dôkaz. Vo všeobecnosti vieme, že každý r-regulárny graf má aspoň $r + 1$ vrcholov. Z tohoto a z vety 2.4 vyplýva, že $r + 1 = 5 \leq |G| \leq 15$. Faktorovo kritické grafy majú nepárne počty vrcholov, takže budeme skúmať grafy rádu 5, 7, 9, 11, 13 a 15.

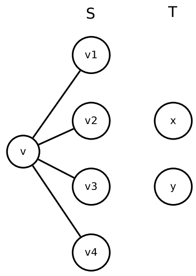
Grafy rádu 5.

Jediný 4-regulárny graf na piatich vrcholoch je K_5. Ľahko vidno, že K_5 je equimatchable a faktorovo kritický.

Vo zvyšku dôkazu budeme stále uvažovať ľubovoľný, ale pevne zvolený vrchol v taký, že jeho najmenšie izolujúce párenie ma najmenšiu veľkosť spomedzi všetkých párení izolujúcich niektorý vrchol grafu G. Symbolom M budeme označovať ľubovoľne, ale pevne zvolené minimálne izolujúce párenie vrcholu v.

Používame označenie možných typov izolúcich párení ako je na obrázku 2.1. Ďalej označme $S = N(v)$ a $T = G - S - \{v\}$.

Grafy rádu 7.



Obr. 2.2: Označenie vrcholov v prípade grafu so 7 vrcholmi

Nech v je vrchol grafu G a v_1, v_2, v_3 a v_4 sú jeho susedia v G. Susedov vrcholu v budeme označovať ako S. Zvyšné dva vrcholy označme x a y.

Zrejme graf na siedmych vrcholoch nemôže mať T1 ako minimálne izolujúce párenie, a preto nám stačí rozlíšiť nasledovné dva prípady.

Grafy rádu 7 s najmenším izolujúcim párením typu T2.

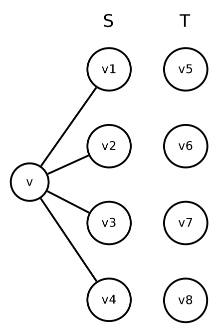
Najmenšie izolujúce párenie vrcholu v je typu T2, teda bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že G obsahuje hrany v_1x a v_2y. Predpokladajme pre spor, že vrcholy x a y nesusedia. Z celkového počtu hrán v grafe dostaneme, že počet vnútorných hrán v S je dva, okrem toho (z predpokladu, že M je typu T2) vieme, že v S nie sú dve nezávislé hrany. Preto v S existuje vrchol u, ktorý susedí s v a dvoma ďalšími vrcholmi z S. Keďže ak x a y nie sú spojené hranou, tak sú susedné so všetkými vrcholmi v S. Teda v tomto pripade x aj y sú susedné s u, ktorého stupeň je 5, čo je v spore s regularitou grafu. Takže vieme, že x a y sú spojené hranou. Z celkového počtu hrán v G, ktorý je 14, vieme, že v S sú tri hrany. Vieme, že jedna je v_3v_4. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že druhá hrana je v_2v_3. Tretia hrana môže byť buď v_2v_4 alebo v_1v_3. V prvom prípade vrchol v_1, ktorý susedí s v môže susediť už len s x a y, čo nestačí na stupeň 4. V prípade, že treťou hranou v S je v_1v_3 je už graf G jednoznačne určený (zo 4-regularity). Vo výslednom grafe je $M' = \{vv_3, xy\}$ párenie izolujúce vrchol v_4 a $G - v_4 - M'$ pozostáva z dvoch nesusedných vrcholov. Na druhej strane, podľa vety 1.8, $G - v_4 - M'$ je súvislý graf, čo je spor. Dostávame teda, že neexistuje equimatchable faktorovo kritický graf na 7 vrcholoch s najmenším izolujúcim párením typu T2.

Grafy rádu 7 s najmenším izolujúcim párením typu T3.

Z vety 1.8 vieme, že zvyšné vrcholy grafu (x a y) sú spojené hranou. Vieme, že počet hrán 4-regulárneho grafu na 7 vrcholoch je 14. Z vrcholov x a y spolu vychádza presne 6 hrán do množiny S. Z v do S vedú 4 hrany. Celkovo teda $1 + 6 + 4 = 11$ hrán neleží v S, čiže počet hrán vo vnútri S je 3. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že hrany v S sú v_1v_2, v_2v_3 a v_3v_4. Teraz je ľahko vidieť, že oba vrcholy v_1 a v_4 susedia s oboma vrcholmi x a y. Bez ujmy na všeobecnosti vrchol x susedí s v_2 a vrchol y susedí s v_3. Tento graf je 4-regulárny, faktorovo kritický, no nie je equimatchable. Nech $M' = \{vv_2, v_4y\}$. Potom ale $G - v_1 - M'$ sú vrcholy x a v_3, no tieto nie sú spojené hranou, čo je v spore s vetou 1.8.

Grafy rádu 9.

V nasledujúcej časti budeme často využívať poznatok, že každý 4-regulárny graf na 9 vrcholoch má 18 hrán, a vrcholy budeme označovať ako na obrázku 2.3.



Obr. 2.3: Označenie vrcholov v prípade grafu s 9 vrcholmi

Grafy rádu 9 s najmenším izolujúcim párením typu T1.

Párenie M je teda typu T1. Množina S je nezávislá, lebo ak by S obsahovalo hranu, tak M by nebolo najmenšie izolujúce párenie. Nech T sú vrcholy v $G-(S\cup\{v\})$. Počet hrán medzi S a T je 12, lebo každý vrchol z S susedí s tromi vrcholmi z T. Keďže G má 18 hrán, v T sú 2 hrany. Existujú teda práve dve možnosti. Buď sú v T dve incidentné hrany, alebo dve nezávislé hrany.

Na označenie prípadu (a) pre graf rádu 9 a najmenšie izolujúce párenie typu T1 budeme používať označenie (9-T1-a) a podobne pre ostatné prípady.

Prípad (9-T1-a): V T sú dve incidentné hrany.

V tomto prípade, hoci skúmame prípad, že M je typu T1, zatiaľ neurčujeme hrany párenia. Využijeme zatiaľ iba, že S je nezávislá množina. Nech hrany T sú $\{v_5v_6, v_6v_7\}$. Ľahko vidno, že vrchol v_8 susedí so všetkými vrcholmi množiny S. Okrem toho vieme, že vrcholy v_5 a v_7 susedia v G každý s troma vrcholmi z S. Pozrime sa na číslo $r = |S \cap N(v_5) \cap N(v_7)|$, t eda počet spoločných susedov vrcholov v_5 a v_7 v S. Triviálne platí $0 \leq r \leq 4$. Počet spoločných susedov nemôže byť 0 ani 1, lebo na to by muselo byť v S aspoň 5 vrcholov. Číslo r nemôže byť ani 4, lebo v_5 má v S iba troch susedov. Ak by sa r rovnalo 3, tak vrchol z S, ktorý nesusedí s v_5 má stupeň najviac 3, čo je v spore s regularitou grafu, teda $r = 2$. Teraz vieme, že v_5 a v_7 susedia s dvoma spoločnými vrchomi z S. Nech sú to bez ujmy na všeobecnosti v_1 a v_2. O vrchole v_6 tým pádom vieme, že susedí s v_3 a v_4. Do úvahy teraz pripadajú dve možnosti podľa voľby hrany z v_3 do T. Tieto dve možnosti sú však izomorfné (stačí zameniť vrcholy v_6 a v_8), a výsledný graf je zobrazený na obrázku 2.7. Nie je ťažké vidieť, že tento graf je faktorovo kritický.

Prípad (9-T1-b): V T sú dve nezávislé hrany.

V tomto prípade, rovnako ako v predchádzajúcom, ešte neurčujeme hrany párenia. Využijeme zatiaľ iba, že S je nezávislá množina. Keďže vrchol v_5 susedí s troma vrcholmi z S, bez ujmy na všeobecnosti nech sú to v_1, v_2 a v_3. Z tejto situácie je jasné, že vrchol v_4 teraz musí susediť s vrcholmi v_6, v_7 a v_8. Vrchol v_6 susedí ešte s dvoma vrcholmi z S. Bez ujmy na všeobecnosti (v_1, v_2 a v_3 sú po dvoch zameniteľné) nech sú teda susedmi vrcholu v_6 vrcholy v_1 a v_2. Teraz vrchol v_3 už má jednoznačne daných susedov v T. Sú to v_7 a v_8. Voľbou hrany z v_7 do vrcholu v S je graf jednoznačne určený. Sú dve možnosti, no sú izomorfné (stačí vymeniť vrcholy v_1 a v_2). Výsledný graf je na obrázku 2.8. Tento graf je faktorovo kritický a nie je izomorfný s grafom z prípadu (9-T1-a), pretože obsahujú rôzny počet trojuholníkov.

Grafy rádu 9 s najmenším izolujúcim párením typu T2.

Párenie M je typu T2. V tomto prípade vieme, že G neobsahuje hranu v_1v_2, inak by existovalo izolujúce párenie vrcholu v pozostávajúce iba z dvoch hrán a M by nebolo najmenšie izolujúce párenie. Tento prípad rozdelíme na podprípady podľa počtu hrán v S. Keďže M je najmenšie izolujúce párenie, tak S nemôže obsahovať dve nezávislé hrany. Je ľahké nahliadnuť (obr. 2.6), že každý graf na štyroch vrcholoch s aspoň štyrmi hranami obsahuje dve nezávislé hrany. Teda S neobsahuje viac ako tri hrany.

Prípad (9-T2-a): V S je 1 hrana.

Graf G má 18 hrán; hrán medzi $\{v\}$ a S, medzi S a T, a vnútri S je spolu 15. Z toho vyplýva, že v T musia byť presne tri hrany. Podgraf indukovaný T môže byť buď C_3 a izolovaný vrchol, alebo P_4.

(i) Podgraf indukovaný T je C_3 a izolovaný vrchol.
Presná konfigurácia hrán v T je daná voľbou izolovaného vrcholu. Keďže z vety 1.8 (použitej na vrchol v a párenie M) vieme, že vrcholy v_7 a v_8 sú spojené hranou, a teda v_7 ani v_8 nemôžu byť izolovaným vrcholom podgrafu indukovaného T. Z toho vyplýva, že v T je izolovaný jeden z vrcholov v_5 a v_6, bez ujmy na všeobecnosti nech to je v_6. Vieme teda, že v_6 susedí so všetkými vrcholmi v S. Ďalej vieme, že v_1 susedí s niektorým vrcholom z $\{v_7, v_8\}$. Tieto sú ale zameniteľné, tak nech je to v_7. Z v_8 idú dve hrany do vrcholov v S. Aspoň jedna z nich je bez ujmy na všeobecnosti hrana v_4v_8. V tejto situácii už pripojenie vrcholu v_3 do T (niektorou z troch možností v_5, v_7, alebo v_8) jednoznačne určí celý graf (obr. 2.9 - 2.11).

(ii) Podgraf indukovaný T je P_4.
Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že v T sú hrany v_5v_6, v_6v_7 a v_7v_8, a že hrany párenia M zatiaľ nie sú určené. V tejto situácii hneď vidíme, že ak by v_3 susedil s dvomi susednými vrcholmi z T, tak by sa dal izolovať párením mohutnosti dva, čo je v spore s predpokladom, že najmenšie izolujúce párenie grafu je typu T2. Existujú len tri dvojice nesusedných vrcholov v T a to v_5 a v_7, v_5 a v_8, respektíve v_6 a v_8.

Predpokladajme najprv, že v_3 je susedný s v_5 a v_7. Hneď vidno, že vrchol v_8 susedí presne s troma vrcholmi z S a to konkrétne v_1, v_2 a v_4. Pre vrchol v_1 nastáva jedna z nasledujúcich možností, podľa toho, s ktorým vrcholom z T nesusedí vrchol v_1. Buď je to prípad, že v_1 susedí s v_5 a v_6, kde voľba suseda vrcholu v_4 v T určuje celý graf. Grafy pre zvolených susedov v_5 a v_6 sú na obrázkoch 2.12, 2.13 avšak pri voľbe suseda v_7 by sme odizolovali vrchol v_4 párením veľkosti 2, teda táto možnosť nepripadá do úvahy. V prípade, že v_1 susedí s v_5 a v_7, ako aj v prípade, že v_1 susedí s v_6 a v_7 je graf jednoznačne určený a zakreslený na obrázkoch 2.14, respektíve 2.15.

Teraz predpokladajme, že v_3 susedí s v_5 a v_8. V tomto prípade si, podobne ako v predchádzúcom prípade rozdelíme problém na prípady v závislosti od toho, s ktorým vrcholom z T nesusedí vrchol v_1. Rozlíšime štyri prípady podľa toho, s ktorým vrcholom z T nesusedí vrchol v_1. Najprv predpokladajme, že v_1 nesusedí s v_5. Hneď vidno, že vrchol v_5 susedí s v_2 a v_4. Hranu v_4v_6 musíme zakázať, lebo inak by vzniklo párenie izolujúce v_4, pozostávajúce len z dvoch hrán. Teraz jediná možnosť vrcholu v_6 na susedstvo z S je v_2. Podobne hrana v_4v_8 je zakázaná, lebo bo vzniklo nevhodné izolujúce párenie vrcholu v_8. Z toho je už jednoznačné určený graf na obrázku 2.16. Teraz predpokladajme, že v_1 nesusedí s v_5. Hneď vidíme, že vrchol v_6 susedí s v_2 a v_4. Hranu v_4v_6 zakážeme (izolovanie vrcholu v_4), teda vrchol v_7 susedí s v_2. Z rovnakého dôvodu vylúčime aj hranu v_4v_6, čím je graf z obrázku 2.17 určený. Teraz predpokladajme, že v_1 nesusedí s v_6. Ľahko vidno, že vrchol v_7 susedí s v_2 a v_4. Hrany v_4v_6 a v_4v_8 zakážeme (izolovanie vrcholu v_4), teda vrchol v_4 susedí s v_5. Na doplnenie hrán ostáva už len jediná možnosť 2.18. A nakoniec predpokladajme, že v_1 nesusedí s v_8. Hneď vidíme, že vrchol v_8 susedí s v_2 a v_4. Teraz ukážeme neexistenciu tohto grafu sporom. Hrana v_4v_7 je zakázaná, lebo by viedla k vzniku malého izolujúceho párenia pre vrchol v_4. Z toho vyplýva, že vrchol v_7 musí susediť s vrcholom v_2, čo má ale za následok existenciu izolujúceho párenia veľkosti dva, čo je v spore s predpokladom.

Nakoniec predpokladajme, že v_3 susedí s v_6 a v_8. V tomto prípade máme len jeden vyhovujúci graf. Vieme, že v_5 susedí s v_1, v_2 a v_4. Keďže hranu v_4v_6 vylúčime pre veľkosť izolujúceho párenia vrcholu v_4, vrchol v_6 susedí s niektorým z vrcholov v_1, v_2. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to vrchol v_2. Ľahko vidno, že v_1 susedí s v_7 a v_8 a potom aj že hranu v_4v_8 musíme zakázať (pre izolovanie v_8). Teraz už je graf jednoznačne určený tak, ako je zakraslený na obrázku 2.19.

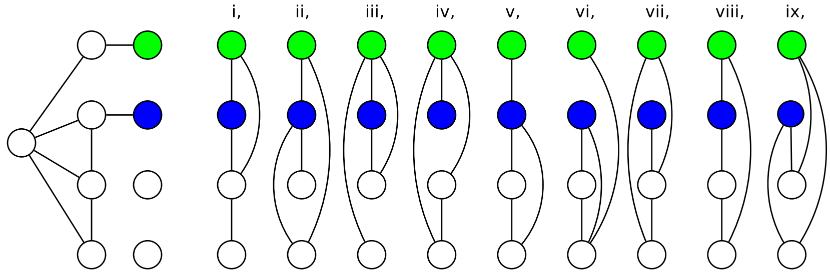
Prípad (9-T2-b): V S sú 2 hrany.

Ak S obsahuje 2 hrany, tak sú to bez ujmy na všeobecnosti v_2v_3 a v_3v_4. Hrana v_1v_2 je vylúčená voľbou M. V S teda musí byť hrana niekde medzi množinami $\{v_1, v_2\}$ a $\{v_3, v_4\}$. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to v_2v_3. V T musia byť 4 hrany, lebo $||G|| = 18$ a všetkých hrán, ktoré neležia v podgrafe indukovanom T, je spolu 14. V nasledujúcom texte rozoberieme všetky možnosti umiestnenia hrán v T aj vzhľadom na to, ktoré vrcholy sú v M.

Existujú dva grafy na štyroch vrcholoch so štyrmi hranami: C_4 a $K_{1,3}$ s jednou hranou vnútri väčšej partície. Záleží však na voľbe hrán medzi vrcholmi z T, teda nastáva jedna z deviatich možností z obrázku 2.4.

(i), Nech vrchol stupňa 3 v T je v_7.

Vrchol v_8 musí susediť s dvoma vrcholmi z S. V každom prípade musí susediť s jedným z vrcholov v_2 a v_3. Nastáva teda jedna z nasledujúcich možností. Buď prípad α, kde v_2 aj v_3 susedia s v_8, prípad β, kde $v_3 \not\sim v_8$, alebo prípad γ, kde $v_2 \not\sim v_8$.



Obr. 2.4: Možnosti usporiadania hrán v T

α, Vieme, že v_5 už môže susediť jedine s v_4. Teraz, ak v_6 susedí s v_1, tak dostávame dva grafy podľa voľby suseda pre v_1 (buď v_7, alebo v_8). (obr. 2.20 a 2.21). Ak v_6 susedí s v_4, je už len jedna možnosť (obr. 2.22).

(ii), Z vety 1.8 (použitej na vrchol v a párenie M) vieme, že $G-M-\{v\}$ je kompletný, alebo kompletný bipartitný graf. Preto sa v equimatchable faktorovo kritickom grafe nemôže stať, že vrcholy v_7 a v_8 nesusedia.

(iii), Nenastáva z rovnakého dôvodu ako v (ii).

(iv), Vrchol v_5 je stupňa 4, teda nesusedí so žiadnym vrcholom z S okrem v_1. Vrchol v_4 musí mať dvoch susedov z T. S niektorým vrcholom z T (okrem v_5) nesusedí, a tak nastáva jedna z týchto troch možností. Buď α: $v_4 \not\sim v_6$, alebo β: $v_4 \not\sim v_7$, alebo γ: $v_4 \not\sim v_8$.

V prípade α: Párenie $\{vv_3, v_7v_8\}$ izoluje vrchol v_4 a je menšie ako M, čo je v spore s voľbou M. Teda takýto graf neexistuje. V prípade β: Vieme už, že vrchol v_4 je incidentný s v_6 a v_8. Vrchol v_2 susedí okrem v_5 (má stupeň 4) a v_6 (s ním už susedí) ešte s jedným vrcholom z T. Buď (1): $v_2 \sim v_8$, alebo (2): $v_2 \sim v_7$. V prípade (1) dostaneme jediný graf 2.28. V prípade (2) dostávame tri grafy jednoznačne určené voľbou suseda vrcholu v_3 z množiny $\{v_6, v_7, v_8\}$ (obr. 2.29 - 2.31). V prípade γ: Graf G neobsahuje hranu v_3v_6, lebo inak by párenie $\{vv_4, v_2v_6\}$ bolo izolujúce párenie vrcholu v_3 s mohutnosťou menšou ako M, čo je v spore s voľbou M. Teda vrchol v_6 musí v S susediť (okrem v_2) ako s jedinou možnosťou s v_1. Voľba suseda vrcholu v_7 v S (okrem v_4, ktorý je stupňa 4) už určí celý graf. Možní susedia sú teda v_1, v_2 a v_3 (obr. 2.32 - 2.34).

(v), Vrchol v_1 susedí okrem v_5 s dvoma ďalšími vrcholmi z T. Nemôže to byť vrchol v_6, lebo ten je už z predpokladu stupňa 4. Takže v G sú hrany v_1v_7 a v_1v_8. Môže nastať jedna z troch možností (podľa toho, z ktorým vrcholom z T nesusedí v_4). Buď α: $v_4 \not\sim v_5$, alebo β: $v_4 \not\sim v_7$, alebo γ: $v_4 \not\sim v_8$.

V prípade α: Graf je v tejto časti jednoznačne určený. Vrchol v_4 susedí s v_7 a v_8 a vrchol v_5 už musí susediť s v_2 a v_3 (obr. 2.23). V prípade β, Vrchol v_4 susedí s v_5 a v_8. Teraz už voľba hrany z v_3 do množiny $\{v_5, v_7\}$ určí graf (obr. 2.24 a 2.25). V prípade γ, Vrchol v_4 susedí s v_5 a v_7. Teraz už voľba hrany z v_3 do množiny $\{v_5, v_8\}$ určí graf (obr. 2.26 a 2.27).

(vi), Ľahko sa dá vidieť, že vrchol v_4 môže byť incidentný len s nesusednými vrcholmi z T (inak by vzniklo párenie izolujúce v_4 s mohutnosťou menšou ako $|M|$). V podgrafe indukovanom T sú však len dve dvojice nesusedných vrcholov (v_5, v_6) a (v_5, v_7). Takže preskúmame dva prípady α, kde v_4 susedí s v_5 a v_6 a prípad β, kde v_4 susedí s v_5 a v_7.

V prípade α ďalej vieme, že v_1 susedí okrem v_5ešte s dvomi vrcholmi z T. Ľahko vidieť, že to musia byť v_7 a v_8. Potom hranu v_2v_7 nemôžme použiť, lebo by vzniklo menšie izolujúce párenie vrcholu v_2, teda ostáva jediná možnosť a teda, že v_2 susedí s v_5 čím je graf jednoznačne určený (obr. 2.35).

V prípade β určíme susednosť vrcholu v_1 voľbou vrcholu z T, s ktorým v_1 nesusedí. Nastáva jedna z troch možností: prípad (1): $v_1 \not\sim v_6$, prípad (2): $v_1 \not\sim v_7$, alebo prípad (3): $v_1 \not\sim v_8$.

V prípade (1) taký graf neexistuje, lebo v_3 musí susediť s v_5 (inak by vzniklo menšie izolujúce párenie vrcholu v_3) aj v_2 musí susediť s v_5, lebo s v_6 už susedí a chýba mu ešte jedna hrana. Teda vrchol v_5 má stupeň 5, čiže graf nie je 4-regulárny. V prípade (2) vidíme, že v_2 nesusedí s v_7, lebo by vzniklo izolujúce párenie v_2 menšie ako M, teda v G je hrana v_2v_5. Tým je už graf jednoznačne určený (obr. 2.36) V prípade (3) zase v grafe nemôže byť hrana v_2v_8 (kvôli veľkosti najmenšieho izolujúceho párenia v_2), teda je tam hrana v_2v_5, a tým je už graf určený (obr. 2.37).

(vii), Pripustením hrany v_3v_6 by sme dostali menšie izolujúce párenie vrcholu v_6, preto ju vylúčime. Z toho vyplýva, že v_6 susedí s vrcholmi v_1 a v_4. Teraz vylúčime aj hrany v_7v_1, v_7v_2 a v_7v_4 (izolovanie v_7) a ostáva jediná možnosť pre hranu z v_7 do vrcholu v S a to v_7v_3. Jedinou možnosťou na doplnenie stupňa vrcholu v_1 je hrana do vrcholu v_4, čím sa dostávame do situácie, kedy je graf jednoznačne určený voľbou hrany z v_2 do v_5 alebo v_8 (obrázky 2.38, 2.39).

(viii), Situáciu preskúmame rozdelením na dva prípady podľa susednosti vrcholu v_4

s vrcholmi z S. Najprv však zredukujeme počet možností. Vieme, že v_4 susedí s v a v_3, ktoré sú navzájom susedné. Teda ak by v_4 susedil s ďalšími dvoma susednými vrcholmi, bolo by to v spore s voľbou M. Takže kandidáti na susedov vrcholu v_4 sú (α) v_5 a v_7, alebo (β) v_6 a v_8. V prípade (α) hneď vidíme, že hrany v_2v_5 a v_2v_7 sú neprípustné z dôvodu veľkosti minimálneho izolujúceho párenia vrcholu v_2. Podobne pre vrchol v_3 je nevyhovujúca hrana v_3v_7. Z toho vieme, že jedinou možnosťou pre vrchol v_2 ostáva v_8. Ďalej kvôli izolovaniu vrcholu v_3 vylúčime hrany v_3v_5, v_3v_6 a v_3v_7. Takže vrchol v_3 nemôže susediť so žiadnym vrcholom z T, teda je stupňa tri, čo je v spore s regularitou grafu. Takýto graf neexistuje. V prípade (β) sa tiež rýchlo dostaneme do sporu. V grafe sú určite hrany v_1v_7 a v_1v_8, lebo vrchol v_1 nemá inú možnosť. Teraz sú už vrcholy v_6 a v_7 stupňa 4, takže s nimi už nemôže susediť žiaden vrchol z S. Z pohľadu vrcholu v_2 však musíme vylúčiť hranu v_2v_5 a hranu v_2v_7 (kvôli veľkosti izolujúceho párenia), čo boli jediné možnosti vrcholu v_2 ako mať stupeň štyri. Teda takýto graf neexistuje.

(ix), Táto situácia nenastáva z rovnakého dôvodu ako v časti (ii).

<u>Prípad (9-T2-c): V S sú 3 hrany.</u>

V podgrafe indukovanom T ostáva 5 hrán. Jediný graf s piatimi hranami a štyrmi vrcholmi je K_4 bez jednej hrany. Vrcholy v T v tejto časti nebudeme označovať v_5 až v_8, ale a_1, a_2 budú vrcholy stupňa dva a b_1, b_2 budú vrcholy stupňa tri v podgrafe indukovanom T, pričom príslušnosť do M zatiaľ neurčujeme.

Sú dve možnosti ako umiestniť do S tri hrany tak, aby sa zachovala voľba M ako najmenšieho izolujúceho párenia v grafe (obr. 2.6).

Najprv preskúmame možnosť, že v podgrafe indukovanom S vrchol v_1 je izolovaný a zvyšné tvoria K_3. Vrchol a_1 musí susediť s vrcholom v_1, lebo ak by s ním nesusedil, susedil by s niektorými dvoma vrcholmi z $\{v_2, v_3, v_4\}$, čím by vzniklo párenie izolujúce a_1 mohutnosti 2, čo je v spore s voľbou M. Podobne aj pre a_2, z čoho vyplýva, že v G sú hrany v_1a_1 a v_1a_2. Bez ujmy na všeobecnosti zvoľme za ďalšieho suseda vrcholu a_1 vrchol v_2. Tak isto bez ujmy na všeobecnosti nech v_4 je sused vrcholu a_2. Teraz vieme, že niektorý z vrcholov b_1, b_2 susedí s v_1. Nech je to bez ujmy na všeobecnosti vrchol b_1. Teraz $\{v_1a_1, b_2a_2\}$ tvoria párenie, ktoré izoluje vrchol b_1 a je menšie ako M. To je v spore s voľbou M, teda takýto graf neexistuje.

Teraz preskúmame možnosť, že podgraf indukovaný S je $K_{3,1}$. Konkrétne (ako vidno z obrázku 2.6) v_3 tvorí jednu partíciu a ostatné vrcholy z S druhú. Vrchol a_1 musí susediť s dvojicou nesusedných vrcholov. Inak by vzniklo párenie mohutnosti 2 izolujúce vrchol a_1. V S sú práve tri dvojice nesusedných vrcholov. Rozlíšime teda tri prípady podľa toho, s ktorou dvojicou susedí vrchol a_1. Prípad (1), kedy máme hrany a_1v_1 a a_1v_2 vylučuje hranu v_1b_1, kvôli veľkosti najmenšieho izolujúceho párenia vrcholu b_1. Tiež vylúčime hranu v_1b_2 z rovnakého dôvodu pre vrchol v_1. Keďže teraz vrchol v_1 nemôže susediť s b_1, a_1 a ani b_2, tak musí susediť s a_2. Ďalej vidíme, že hrany v_2b_1 a v_2b_2 sú neprípustné, lebo spôsobujú vznik izolujúceho párenia vrcholu v_2 mohutnosti dva. Z toho vyplýva, že v_2 susedí s a_2. Ostáva jediná možnosť, že v_4 susedí s b_1 aj s b_2. Hrany b_1b_2 a vv_3 tvoria izolujúce párenie vrcholu v_4, čo je v spore s voľbou M. V prípade (2), kedy a_1 susedí s vrcholmi v_1 a v_4, sú neprípustné hrany v_1b_1 a v_1b_2. Pre vrchol v_1 ostáva jediná možnosť, totiž susednosť s vrcholom a_2. Ďalej z pohľadu vrcholu b_2 a jeho izolujúceho párenia vylúčime hrany b_2v_3 a b_2v_4. Z toho vyplýva, že G obsahuje hranu v_2b_2. Vrchol v_2 už má jedinú možnosť, susednosť s vrcholom a_2, ktorá ale vyústi do sporu s veľkosťou najmenšieho izolujúceho párenia pre vrchol v_2. V prípade (3), kedy a_1 susedí s vrcholmi v_2 a v_4 môžme vylúčiť hrany v_2b_1 a v_2b_2. Teda v_2 susedí s a_2, a s touto vedomosťou môžme vylúčiť ďalšie hrany: v_4b_1 a v_4b_2, kvôli veľkosti najmenšieho izolujúceho párenia vrcholu v_4. Teraz vieme, že v_4 susedí s a_2, čo je spor s minimalitou M.

Grafy rádu 9 s najmenším izolujúcim párením typu T3.

Majme vrcholy grafu G označené ako na obrázku 2.3. Podľa vety 1.8 aplikovanej na vrchol v a párenie ako na obrázku 2.1-T3 vieme, že T tvorí kompletný graf K_4, alebo kompletný bipartitný graf $K_{2,2}$.

Najprv predpokladajme, že podgraf T indukovaný na G je izomorfný s K_4. Môžu nastať dve možnosti podľa toho s koľkými vrcholmi z T susedia vrcholy z S. Ak každý vrchol z T susedí s rôznym vrcholom z S, tak vieme, že v S musia byť 4 hrany. Každému vrcholu však chýba práve jedna incidentná hrana, z čoho ľahko vidno, že jediný spôsob ako doplniť hrany množiny S je pridanie hrán v_1v_4 a v_2v_3. Teraz dostávame niekoľko grafov podľa spárovania S a T, ktoré sú však navzájom izomorfné. Jediný vyhovujúci výsledný graf je zobrazený na obrázku 2.40. Druhou možnosťou je, že niektorý vrchol z S, bez ujmy na všeobecnosti nech je to v_1, susedí s dvoma vrcholmi T. Za tie bez ujmy na všeobecnosti zvolíme vrcholy v_5 a v_6. Teraz nech $M' = \{v_1v_6, v_7v_8\}$. Z vety 1.8 aplikovanej na vrchol v_5 a párenie M' vidno, že podgraf indukovaný na $\{v, v_2, v_3, v_4\}$ musí byť K_4, lebo obsahuje trojuholník. Doplnenie hrán tohto grafu už má len dve možnosti, ale tie sú izomorfné. Výsledný graf je zobrazený na obrázku 2.41.

Teraz predpokladajme, že podgraf T indukovaný na G je izomorfný s $K_{2,2} \cong C_4$. Nech vrcholy T sú pospájané do cyklu v poradí v_5, v_6, v_7 a v_8. Ďalej vieme, že okrem hrán v_1v_2 a v_3v_4 už žiadne iné hrany S neobsahuje. Z toho, že graf G je faktorovo kritický vieme, že najväčšie párenie má veľkosť štyri.

Ak v G je množina nezávislých vrcholov N taká, že dva vrcholy sú v T a jeden v S, tak potom jediným prípustným grafom je faktorovo kritický graf z obrázku 2.42. Všimnime si najprv, že množiny $N' = \{v, v_5, v_7\}$ a $N'' = \{v, v_6, v_8\}$ sú nezávislé pre ľubovoľné doplnenie hrán. Ak by graf indukovaný na vrcholovom doplnku niektorej z týchto množín obsahoval perfektné párenie, tak toto párenie by bolo zjavne veľkosti 3 a nerozšíriteľné, teda v spore s predpokladom, že graf je equimatchable faktorovo kritický. Hranu, ktorá by spôsobila existenciu perfektného párenia na množine $\overline{N}$, $\overline{N'}$, alebo $\overline{N''}$ nazveme zakázanou. Bez ujmy na všeobecnosti nech $N = \{v_2, v_5, v_7\}$. Ľahko vidno, že vrchol v_2 susedí s v_6 a v_8. Z toho vidíme, že hrany v_1v_6 a v_1v_8 sú zakázané. Teraz zjavne v_1 musí susediť s v_5 a v_7. Vrchol v_7 nesusedí s v_2, lebo sú spolu v nezávislej množine N, teda v_7 susedí s niektorým z vrcholov v_3, v_4, ale tie sú zameniteľné, tak bez ujmy na všeobecnosti nech je to v_4. Teraz ale vieme, že hrana v_3v_5 je zakázaná, teda v_3 susedí s vrcholmi v_6 a v_8. Týmto je graf z obrázku 2.42 jednoznačne určený.

Predpokladajme teraz, že v G nie je taká množina nezávislých vrcholov, že dva vrcholy sú v T a jeden v S. To znamená, že pre trojicu vrcholov v_1, v_5 a v_7 musí susediť v_1 s niektorým z v_5, v_7. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je to v_5. Podobne pre trojicu v_1, v_6 a v_8 musí v_1 susediť s niektorým z v_6, v_8. Tieto vrcholy sú však v danej situácii zameniteľné, preto nech je v grafe hrana v_1v_6. Teraz ale párenie $M' = \{v_1v_6v_7v_8\}$ izoluje vrchol v_5, ale vrcholy v, v_2, v_3 a v_4 obsahujú trojuholník a nedajú sa doplniť na K_4, čím porušujú nutnú podmienku z vety 1.8, takýto graf neexistuje.

Ďalej sa budeme zaoberať stupňom vrcholovej súvislosti grafu. Graf G je súvislý, teda triviálne je 1-súvislý. Grafy, ktoré sú 2-súvislé, majú buď artikuláciu, alebo 2-rez. Oba prípady sú charakterizované v [Fav86]. Ak G nie je 1- ani 2-súvislý, tak je buď 3-súvislý s 3-rezom, alebo 4-súvislý so 4-rezom.

Prípad 1, G má vrcholovú súvislosť 3.

Predpokladajme, že G je 3-súvislý graf s 3-rezom S. Prípady, kedy má menej ako 11 vrcholov, sú pokryté v predchádzajúcej časti dôkazu.

Z lemy 1.9 (pozri stranu 3) vyplýva, že ak má 3-súvislý graf G' s 3-rezom S aspoň 9 vrcholov, tak $G' - S$ má práve dva komponenty. Teda $G - S$ má práve dva komponenty.

V časti venovanej 3-súvislým grafom budeme teda predpokladať, že $G - S$ má práve dva komponenty a budeme sa na ne odvolávať ako na A a B.

Nech trojsúvislý graf G má 11 vrcholov a 3-rez S. Potom vzhľadom na veľkosti A a B nastáva jedna z nasledujúcich možností. (Veľkosti A a B uvádzame bez ujmy na všeobecnosti usporiadané podľa veľkosti v zátvorke ($|A|$,$|B|$).)

11(1,7), $|A| = 1$ a $|B| = 7$: Táto situácia nemôže nastať, lebo vrchol v komponente veľkosti 1 môže susediť len s vrcholmi rezu. Tie sú len tri, teda takýto graf by nebol 4-regulárny.

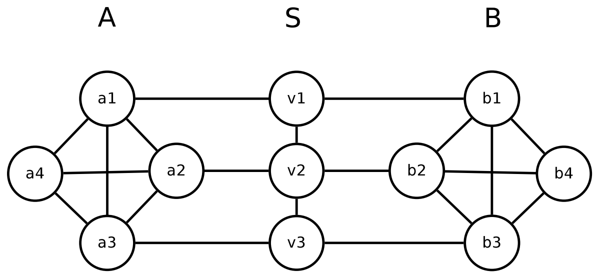
11(2,6), Z regularity grafu vieme, že $||G|| = 22$ a podľa vety 1.13 vieme, že ak S obsahuje hranu, tak B je kompletný graf. To je v spore s regularitou grafu, teda S neobsahuje hranu. Ďalej (z tej istej vety) vieme, že podgraf G indukovaný na $S \cup B$ je $K_{5,4}$ bez hrán nejakého párenia medzi S a B. V podgrafe indukovanom na $S \cup B$ je však veľkosť najväčšieho takého párenia 3, teda takýto graf neexistuje, lebo rozdiel v počte hrán je až 5.

11(3,5), $|A| = 3$ a $|B| = 5$: Nenastane. Graf G spĺňa predpoklady vety 1.10, teda $B = K_5$, čo je v spore s tým, že G je súvislý.

11(4,4), $|A| = 4$ a $|B| = 4$: Graf G spĺňa predpoklady vety 1.10, teda $A = B = K_4$. Celkový počet hrán v G je 22. V A a B je po 6 hrán, 8 hrán prepojí rez a partície. To je spolu 20 hrán, čiže v S sú presne 2 hrany. Kedže jediný jednoduchý graf na troch vrcholoch s dvomi hranami je P3, bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že dve hrany v S sú $v1v2$ a $v2v3$.

Podľa lemy 1.11 vieme, že existujú párenia medzi S a A, respektíve S a B, ktoré pokrývajú všetky tri vrcholy S. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že hrany týchto párení sú a_1v_1, a_2v_2, a_3v_3, respektíve b_1v_1, b_2v_2, b_3v_3 (obr. 2.5).

Teraz ukážeme, že pre vrchol v_1 existuje izolujúce párenie, ktoré nespĺňa nutnú podmienku z vety 1.8, z čoho vyplýva, že tento graf na 11 vrcholoch nie je equimatchable faktorovo kritický. Graf G je 4-regulárny, preto v_1 okrem a_1, b_1 a v_2 susedí s práve jedným ďalším vrcholom x. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $x \in A$. Vrcholy a_1, a_2 a a_3 už majú stupeň 4, takže ostáva iba $x = a_4$. Nech $M = \{a_1a_4, v_2v_3, b_1b_2\}$. Potom M je zjavne párenie grafu G, ktoré izoluje vrchol v_1. Keďže $G - M - \{v_1\}$ je nesúvislý graf, nie je splnená nutná podmienka z vety 1.8, a teda takýto graf naozaj neexistuje.



Obr. 2.5: 3-rez na grafe s 11 vrcholmi rozdeľuje graf na časti veľkosti 4

Nech má G 13 vrcholov. Rez S može rozdeliť graf $G - S$ na dva komponenty nasledovných veľkostí (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6) a (5, 5) (bez ujmy na všeobecnosti usporiadané podľa veľkosti) .

13(1,9), Táto situácia nemôže nastať, lebo vrchol v komponente veľkosti 1 môže susediť len s vrcholmi rezu. Tie sú len tri, teda takýto graf by nebol 4-regulárny.

13:(2,8), Podľa vety 1.13 rozlíšime, či S obsahuje hranu alebo nie. Ak S obsahuje hranu, tak A aj B tvoria kompletné podgrafy, teda každý vrchol v B má stupeň aspoň 7, čo je spor s tým, že G je 4-regulárny. Množina S teda neobsahuje hranu. Ďalej vieme (z vety 1.13), že $S \cup B$ s niekoľkými pridanými nezávislými hranami medzi S a B tvorí $K_{5,6}$. Keďže G je 4-regulárny a podgraf G indukovaný na A obsahuje práve jednu hranu, tak práve 7 hrán grafu G je incidentných s vrcholmi v A. To znamená, že podgraf G indukovaný na $S \cup B$ obsahuje práve 19 hrán (keďže G má práve 26 hrán). Na doplnenie $S \cup B$ na $K_{5,6}$ je teda potrebných 11 hrán, čo zjavne nie je možné, keďže hrany majú byť nezávislé.

13(3,7), Táto situácia nemôže nastať, lebo táto konfigurácia spĺňa podmienky vety 1.10 a kompletný komponent veľkosti 7 má všetky vrcholy stupňa aspoň 6, takže nemôže byť 4-regulárny.

13(4,6), Komponenty A a B sú oba veľkosti aspoň 3, teda z vety 1.10 vyplýva, že A aj B sú kompletné komponenty $G - S$. Z toho vyplýva, že každý vrchol komponentu B má stupeň aspoň 5, čo je v spore s tým, že G je 4-regulárny.

13(5,5), Komponenty A a B sú oba veľkosti aspoň 3, teda z vety 1.10 vyplýva, že A aj B sú kompletné komponenty $G - S$. Z toho vyplýva, že každý vrchol komponentu B má stupeň aspoň 5 a navyše, keďže G je súvislý, niektorý vrchol z B musí byť spojený s niektorým vrcholom v S, teda má stupeň 6. To je v spore s tým, že G je 4-regulárny.

Nech má G 15 vrcholov. Rez S može rozdeliť graf $G - S$ na dva komponenty nasledovných veľkostí (1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7) a (6, 6) (bez ujmy na všeobecnosti usporiadané podľa veľkosti) .

15:(1,11), Táto situácia nemôže nastať, lebo vrchol v komponente veľkosti 1 môže susediť len s vrcholmi rezu. Tie sú len tri, teda takýto graf by nebol 4-regulárny.

15:(2,10), Podľa vety 1.13 rozlíšime, či S obsahuje hranu alebo nie. Ak S obsahuje hranu, tak A aj B tvoria kompletné podgrafy, teda každý vrchol v B má stupeň aspoň 9, čo je spor s tým, že G je 4-regulárny. Množina S teda neobsahuje hranu. Ďalej vieme (z vety 1.13), že $S \cup B$ s niekoľkými pridanými nezávislými hranami medzi S a B tvorí $K_{6,7}$. Keďže G je 4-regulárny a podgraf G indukovaný na A obsahuje práve jednu hranu, tak práve 7 hrán grafu G je incidentných s vrcholmi v A. To znamená, že podgraf G indukovaný na $S \cup B$ obsahuje práve 23 hrán (keďže G má práve 30 hrán). Na doplnenie $S \cup B$ na $K_{6,7}$ je teda potrebných 19 hrán, čo zjavne nie je možné, keďže hrany majú byť nezávislé.

V ostatných prípadoch (3, 9), (4, 8), (5, 7) a (6, 6) vieme (z vety 1.10), že komponenty $G - S$ sú práve dva, a že sú kompletné. Teda stupeň vrcholu v B je aspoň 5, čo je v spore s tým, že G je 4-regulárny. Teda každý equimatchable faktorovo kritický graf na 15 vrcholoch je 4-súvislý.

Prípad 2, G má vrcholovú súvislosť 4.

Graf G má teda aj 4-rez S. Prípady, kedy má menej ako 11 vrcholov sú pokryté v predchádzajúcom texte a teraz sa budeme zaoberať grafmi na 11, 13 a 15 vrcholoch.

Grafy rádu 11.

Podľa veľkostí komponentov po odstránení rezu odlíšime nasledovné prípady (bez ujmy na všeobecnosti usporiadané podľa veľkosti): (1,6), (2,5) a (3,4).

11(2,5) Analogicky ako v časti pre 3-súvislé grafy s 3-rezom 11(2,6). Z podobných úvah dostaneme, že potrebujeme medzi množinami S a B získať 5 (ak vrcholy v A nesusedia) respektíve 6 (ak susedia) nezávislých hrán, čo je úplne vylúčené už len celkovým počtom vrcholov. Takýto graf neexistuje.

11(3,4) Počet vrcholov je väčší ako 9, takže z vety 1.10 okrem toho, že komponenty A a B sú súvislé, vyplýva aj, že A a B sú kompletné podgrafy G. Označme vrcholy komponentu A ako a_1, a_2 a a_4, vrcholy B ako b_1 až b_4 a podobne vrcholy S ako v_1 až v_4. V S sú presne 3 hrany, lebo v A, v B, medzi A a S a medzi B a S je spolu 19 hrán a celkovo má graf 22 hrán.

Existujú práve dva grafy na štyroch vrcholoch obsahujúce tri hrany. Je to graf P_4 (i) a graf K_3 s jedným izolovaným vrcholom navyše (ii). Predpokladáme, že G nemá 3-rez, takže každý vrchol rezu S susedí aj s vrcholom z A aj s vrcholom z B. Na spôsobe prepojenia S a B nezáleží, pretože všetky možné prepojenia sú navzájom izomorfné. Teraz si rozoberme prípad (1): nech koncové vrcholy cesty v T sú v_1 a v_4. Vieme, že v_1 a v_4 susedia s jedným spoločným vrcholom a_1 z A. Ak je to ich jediný spoločný vrchol, tak nastáva situácia z obrázku 2.43, no tento graf nie je equimatchable. Bez ujmy na všeobecnosti nech v_1 susedí s b_1. Vezmime si párenie $M' = \{a_1a_2, v_2v_3, b_1b_2\}$, ktoré izoluje vrchol v_1. Graf $G - M' - v_1$ na štyroch vrcholoch má vrchol stupňa 1, čiže graf G nespĺňa nutnú podmienku z vety 1.8, a teda takýto graf nemôže byť equimatchable faktorovo kritický. Teraz preskúmame prípad (2): Vrcholy v_1 a v_4 susedia s dvoma rovnakými vrcholmi (a_1 a a_2). Tým je celý graf určený ako je zakreslený na obrázku 2.44. Ani tento však nie je equimatchable faktorovo kritický, ako vidno na obrázku 2.45, kde odstránením červeného vrcholu a červeného párenia dostávame graf so štyrmi vrcholmi, ale len troma hranami, takže nespĺňa nutnú podmienku z vety 1.8. Teda nie je equimatchable faktorovo kritický.

Grafy rádu 13.

13(2,7) Analogicky ako v časti pre 3-súvislé grafy s 3-rezom 13(2,8). Z podobných úvah dostaneme, že potrebujeme medzi množinami S a B získať 11 (ak vrcholy v A nesusedia) respektíve 12 (ak susedia) nezávislých hrán, čo je úplne vylúčené už len celkovým počtom vrcholov. Takýto graf neexistuje.

Prípady 13(3,6) a 13(4,5) podľa vety 1.10 majú kompletné podgrafy A a B, teda v prvom prípade sú v B vrcholy stupňa aspoň 5, čo je priveľa. V druhom prípade zo súvislosti dostaneme, že niektorý vrchol z B je stupňa 5. V oboch prípadoch, teda graf nie je regulárny, teda graf takýchto typov neexistuje.

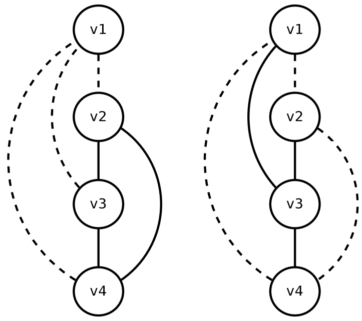
Grafy rádu 15.

15(1,10) Z vety 1.12 vyplýva, že v $G-S$ sú práve dva komponenty. Jeden pozostáva z jediného vrcholu v. Ten druhý komponent označme C. Ďalej vieme, že existuje párenie M medzi S a C pokrývajúce S. Teraz nech množina $X = C \cap M$ a množina $Y = C - X$. Podľa vety 1.12 je podgraf induovaný na Y izomorfný s $K_{3,3}$ (lebo K_6 má priveľké stupne). Ak by X bol 4-rez v grafe G, tak dostávame prípad 15(5,6), ale ten nespadá do tohto prípadu a vyriešime ho neskôr. Predpokladajme teda, že X nie je rezom grafu G. Z toho vyplýva, že existuje hrana sy medzi nejakým vrcholom množiny S a nejakým vrcholom množiny Y. Teraz nech M' je párenie, ktoré dostaneme tak, že v M nahradíme hranu incidentnú s vrcholom s hranou sy. Označme vrchol X nepokrytý párením M' ako vrchol x. Ľahko vidno, že M' je izolujúce párenie vrcholu v, preto z vety 1.8 vyplýva, že podgraf G indukovaný na $Y' = (Y - \{y\}) \cup \{x\}$ je izomorfný s $K_{3,3}$. Je zrejmé, že x susedí v Y' s rovnakými vrcholmi ako y v Y. Z toho vyplýva, že v Y' existujú dva vrcholy u, v, ktoré sú v spoločnej partícii s x, a ktoré susedia s niektorými dvoma vrcholmi z $S \cup X$. Teraz už ľahko nahliadneme, že $\{u, v, s\}$ je 3-rez, ale predpokladali sme, že G je 4-súvislý, čo je spor. Takže takýto equimatchable graf neexistuje.

15(2,9) Analogicky ako v časti pre 3-súvislé grafy s 3-rezom 15(2,10). Z podobných úvah dostaneme, že potrebujeme medzi množinami S a B získať 19 (ak vrcholy v A nesusedia) respektíve 20 (ak susedia) nezávislých hrán, čo je úplne vylúčené už len celkovým počtom vrcholov. Takýto graf neexistuje.

V prípadoch 15(3,8), 15(4,7) a 15(5,6) sú v komponente B všetky vrcholy stupňa aspoň 5, čo je v spore s regularitou grafu, teda žiaden graf týchto typov nie je equimatchable faktorovo kritický.

Tým sme charakterizovali všetky možnosti okrem prípadov, kedy graf je 4-súvislý má 11, alebo 13 vrcholov a 4-rez, ktorý rozdeľuje graf na partície veľkotí (1, 6), respektíve (1, 8).



Obr. 2.6: Najväčší možný počet hrán v S pre prípad 9v-t2 (čiarkované hrany sú zakázané)

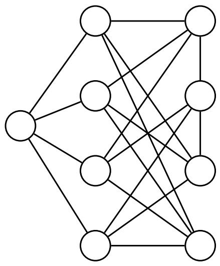
Všimnime si, že až na prípady, ktoré sme necharakterizovali, prešli výberom iba grafy rádu 9. Teraz je potrebné overiť, či sú tieto grafy, ktoré splnili vybrané nutné podmienky naozaj equimatchable. Najprv však ešte vylúčime tie, ktoré nie sú equimatchable priamo z definície. Z lemy 2.5 vieme, že všetky 4-regulárne grafy na 9 vrcholoch majú všetky maximálne párenia veľkosti aspoň 3. Ak by sme v grafe našli trojicu nezávislých vrcholov N, pre ktorú $G - N$ má perfektné párenie M', tak M' by bolo maximálne párenie veľkosti 3, čo ale znamená, že graf nie je equimatchable. Ak by bol, tak nutne musel byť aj faktorovo kritický (veta 2.3), teda pre každý vrchol u by existovalo párenie veľkosti 4 vynechávajúce jedine u. Ale v equimatchable grafoch musia byť všetky maximálne párenia rovnakej veľkosti, čo je spor. Každú takúto množinu N v grafe G nazveme svedkom nerozšíriteľného párenia.

Grafy na obrázkoch	svedok
2.9 a 2.10	$\{v, v_5, v_6\}$
2.11	$\{v_1, v_2, v_8\}$
2.12 – 2.19	$\{v, v_5, v_7\}$
2.20 – 2.27	$\{v, v_5, v_8\}$
2.28 – 2.32	$\{v, v_6, v_7\}$
2.33 – 2.34	$\{v, v_6, v_8\}$
2.35 – 2.36	$\{v, v_5, v_7\}$
2.37	$\{v_2, v_4, v_8\}$
2.38	$\{v_2, v_4, v_7\}$
2.39	$\{v_1, v_4, v_7\}$
2.40	$\{v_2, v_4, v_5\}$

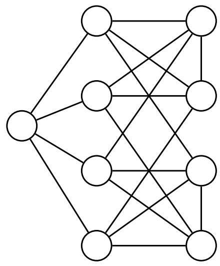
Z tabuľky vidno, že do úvahy už pripadajú jedine grafy z obrázkov 2.7, 2.8, 2.41, 2.42.

Okrem toho, vylúčime ešte aj 2.7, 2.8, lebo tieto obsahujú trojuholníky, čo znamená, že najmenšie iozolujúce párenie v grafe určite nie je typu T1, teda tieto grafy sú pokryté v inom prípade.

□

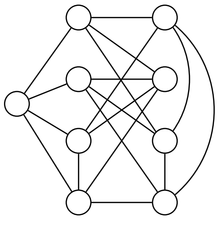


Obr. 2.7: 9-T1-a.

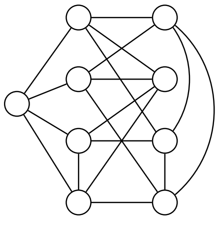


Obr. 2.8: 9-T1-b.

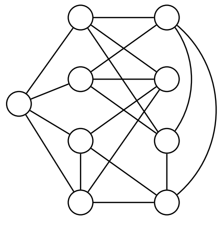
Graf na 9 vrcholoch s najmenším izolujúcim párením typu T1.



Obr. 2.9

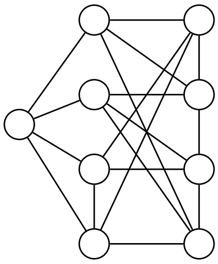


Obr. 2.10

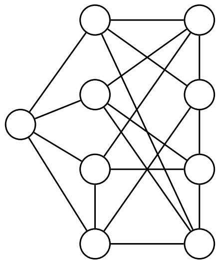


Obr. 2.11

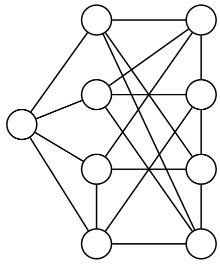
Tri možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-a-i-α



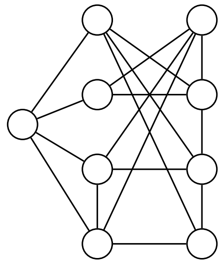
Obr. 2.12



Obr. 2.13

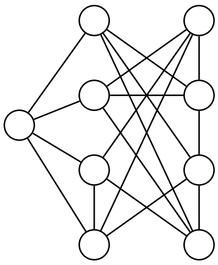


Obr. 2.14

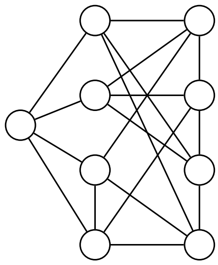


Obr. 2.15

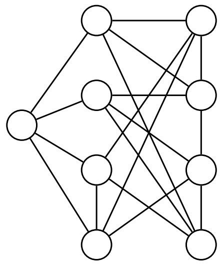
Možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-a-ii-α



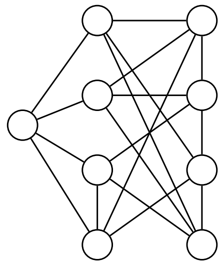
Obr. 2.16



Obr. 2.17

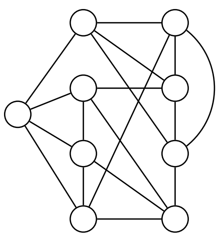


Obr. 2.18

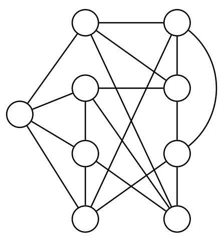


Obr. 2.19

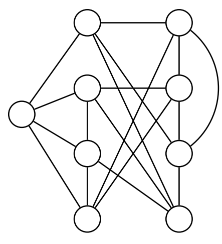
Možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-a-ii prípady β a γ



Obr. 2.20

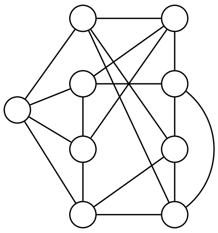


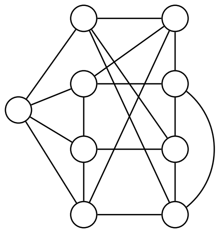
Obr. 2.21

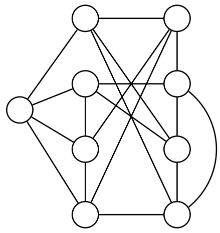


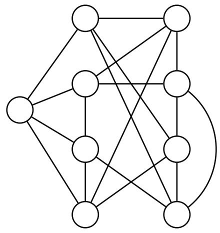
Obr. 2.22

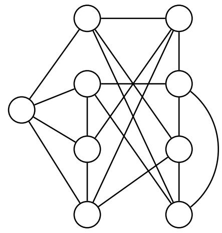
Tri možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-b-i


Obr. 2.23

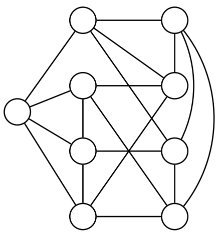

Obr. 2.24

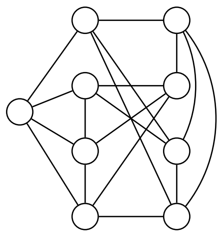

Obr. 2.25

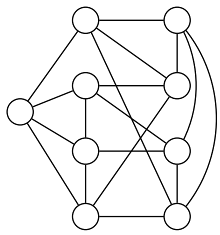

Obr. 2.26

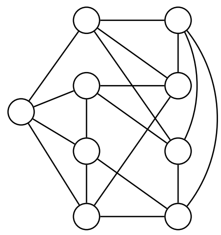

Obr. 2.27

Päť možností na doplnenie grafu v prípade 9-T2-b-v

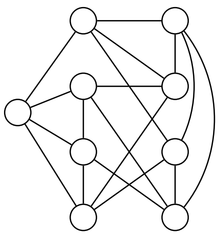

Obr. 2.28

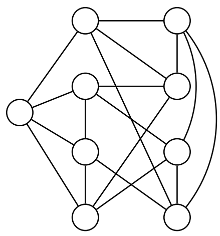

Obr. 2.29

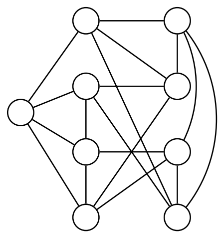

Obr. 2.30


Obr. 2.31

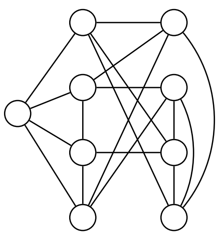
Možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-b-iv

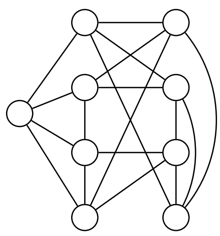

Obr. 2.32

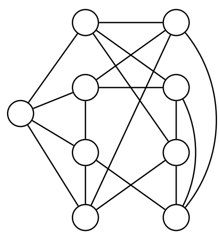

Obr. 2.33


Obr. 2.34

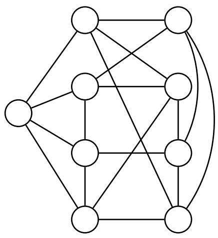
Možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-b-iv


Obr. 2.35

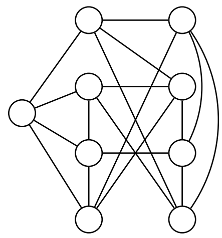

Obr. 2.36


Obr. 2.37

Možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-b-vi

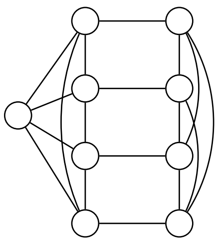


Obr. 2.38

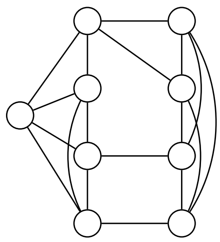


Obr. 2.39

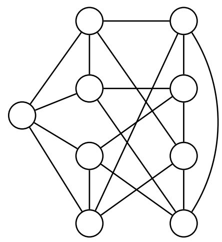
Možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T2-b-vii



Obr. 2.40

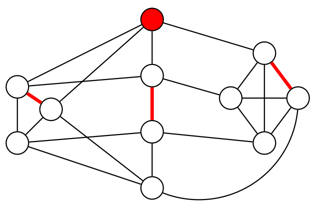


Obr. 2.41

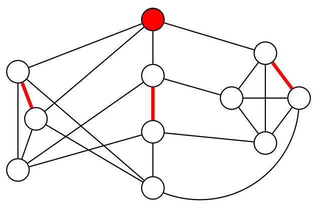


Obr. 2.42

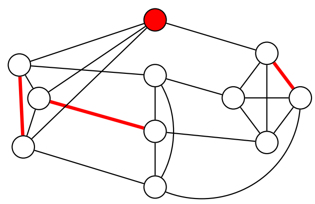
Možnosti na doplnenie grafu v prípade 9-T3



Obr. 2.43



Obr. 2.44



Obr. 2.45

Izolujúce párenia (červenou), ktoré ukazujú, že neexistuje equimatchable faktorovo kritický graf s 11 vrcholmi a 4-rezom.

Kapitola 3

Equimatchable tenzorové súčiny

V práci [Kov12] ukázali, že ak G a H sú súvislé grafy s aspoň dvomi vrcholmi, tak karteziánsky súčin G a H je equimatchable práve vtedy, keď G aj H sú izomorfné s K_2. My sa v tejto kapitole sa zaoberáme otázkou, ktoré tenzorové súčiny sú equimatchable. Začneme ukázaním vlastností, ktoré hovoria o páreniach, súvislosti, biparticite a obvodoch týchto grafov. Nakoniec ukážeme, že neexistuje súvislý equimatchable graf s obvodom aspoň 5, ktorý by bol tenzorovým súčinom.

3.1 Základné vlastnosti tenzorových súčinov

Tenzorový súčin, niekedy aj priamy súčin grafov je binárna operácia na grafoch.

Definícia 3.1. Tenzorový súčin označujeme $G \times H$ a jeho množina vrcholov je $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, čiže vrchol súčinu je prvkom karteziánskeho súčinu množín vrcholov. Dva vrcholy (g_1, h_1) a (g_2, h_2) sú v $G \times H$ spojené hranou práve vtedy, keď $g_1 \sim_G g_2$ a súčasne $h_1 \sim_H h_2$.

Pri tenzorovom súčine nezáleží na poradí v akom grafy násobíme, teda je komutatívny. Tenzorový súčin jednoduchého grafu G s jednovrcholovým grafom bez hrán je izomorfný s grafom G bez hrán.

$$G \times (a, \emptyset) \cong (V(G), \emptyset)$$

Neutrálnym prvkom pre tenzorový súčin je graf $N = (\{a\}, \{(a, a)\})$, teda graf s jedným vrcholom so slučkou. Inak povedané, že pre všetky jednoduché grafy G platí, že $G \times N \cong$

G. Tenzorový súčin budeme nazývať **netriviálnym**, akonáhle oba činitele obsahujú aspoň jednu hranu. Špeciálne súčin $G \times K_2$ sa nazýva "bipartite double cover" grafu G.

3.2 Párenia v tenzorových súčinoch

Na úvod treba poznamenať, že tenzorový súčin sa vzhľadom na existenciu hrán v súčine správa monotónne, teda že ak pridáme hrany do činiteľov (a žiadne neodoberieme), tak zo súčinu žiadne hrany neubudnú. Dôkaz je ľahkým cvičením a dá sa priamo vidieť z definície tenzorového súčinu.

Tvrdenie 3.2. *Ak G a H sú grafy s perfektným párením, tak aj $G \times H$ má perfektné párenie.*

Dôkaz. Uvažujme niektoré perfektné párenie grafu G a označme M_G graf pozostávajúci iba z hrán párenia. Rovnako uvažujme niektoré perfektné párenie grafu H a označme M_H graf pozostávajúci iba z hrán párenia. Ak nájdeme perfektné párenie v grafe $M_G \times M_H$, tak z monotonicity tenzorového súčinu vyplýva, že aj $G \times H$ má perfektné párenie.

Vezmime si množinu hrán $E = E(M_G \times M_H)$. Ukážeme, že je perfektným párením na grafe $G \times H$. Najprv sa presvedčíme, že E pokrýva všetky vrcholy. Pre každý vrchol (g_1, h_1) grafu $M_G \times M_H$ existuje vrchol (g_2, h_2), pre ktorý platí, že $g_1 g_2 \in M_G$ a $h_1 h_2 \in M_H$, lebo M_G a M_H sú perfektné párenia. Z toho vyplýva, že vrcholy (g_1, h_1) a (g_2, h_2) sú v grafe $M_G \times M_H$ susedné. Teraz sa presvedčíme o tom, že graf $M_G \times M_H$ neobsahuje závislé hrany. Ak ľubovoľný vrchol (g_1, h_1) susedí s dvoma rôznymi vrcholmi (g_2, h_2) a (g_3, h_3), tak potom buď $g_2 \neq g_3$, alebo $h_2 \neq h_3$. Zvyšok dôkazu ukážmeme pre prípad $g_2 \neq g_3$, lebo druhý prípad je analogický. V grafe M_G sú teraz dve závislé hrany $g_1 g_1$ a $g_1 g_3$, čo je v spore s nezávislosťou hrán v M_G. Teraz vieme, že E je perfektným párením $M_G \times M_H$, z toho však vyplýva, že E je perfektným párením grafu $G \times H$. $\square$

Na predchádzajúci dôkaz sa pozerať aj tak, že v súčine perfektných párení sa opakuje vzor $K_2 \times K_2$ ako podgraf. Tento má perfektné párenie a pokrýva celý súčin $M_G \times M_H$.

Nie je ťažké vidieť, že na existenciu perfektného párenia v tenzorovom súčine nestačí aby mal jeden z činiteľov perfektné párenie. Príkladom je súčin $P_4 \times P_3$, ktorý perfektné párenie nemá, aj keď jeden z činiteľov perfektné párenie má. Ako však ukazuje nasledujúca veta, pre regulárne činitele je existencia perfektného párenia v jednom z činiteľov postačujúca.

Veta 3.3. ([?]) Nech G a H sú regulárne grafy s nenulovým stupňom. Ak aspoň jeden z nich má perfektné párenie, tak potom $G \times H$ má perfektné párenie.

Z nasledujúvej vety zase vidno akú úlohu zohrávajú bipartitné grafy ako činitele v tenzorovom súčine.

Veta 3.4. (Veta 5.9 [HIK11]) Tenzorový súčin grafov je súvislý práve vtedy, ak sú oba činitele súvislé a aspoň jeden nie je bipartitný.

3.3 Tenzorové súčiny s obvodom aspoň 5

V tejto sekcii charakterizujeme všetky súvislé equimatchable tenzorové súčiny s obvodom aspoň 5. Využijeme na to charakterizaciu všetkých equimatchable grafov s obvodom aspoň 5, na ktorej vyslovenie budeme potrebovah nasledujúcu definíciu.

Definícia 3.5. Bipartitný graf s partíciami V_1 a V_2 takými, že všetky vrcholy V_1 susedia s vrcholom stupňa 1 a zároveň sú všetky stupňa aspoň 2 budeme nazývať grafom **typu E**.

Veta 3.6. ([FHV10]) Graf s obvodom aspoň 5 je equimatchable práve vtedy, ak je to K_2, C_5, C_7, alebo graf typu E.

Najprv si všimnime, že žiaden z grafov K_2, C_5, C_7 sa nedá dostať ako tenzorový súčin jednoduchých grafov. Zrejme K_2 sa dá získať iba ako súčin K_2 a jednovrcholového grafu so slučkou, ktoré ale neuvažujeme.

Taktiež je zrejmé, že žiadny graf s prvočíselným počtom vrcholov a aspoň jednou hranou sa nedá získať ako tenzorový súčin dvoch jednoduchých grafov. Naozaj, aby tenzorový súčin mal p vrcholov, kde p je prvočíslo, tak jeden z činiteľov musí mať práve 1 vrchol a druhý práve p vrcholov. Keďže však uvažujeme iba jednoduché grafy, jednovrcholový činiteľ neobsahuje žiadne hrany a preto taktiež výsledný súčin neobsahuje žiadne hrany.

Lema 3.7. Nech G a H sú jednoduché grafy. Potom $G \times H$ obsahuje cyklus dĺžky n práve vtedy, keď existujú uzavreté sledy s, t v G, respektíve H s vrcholmi s_i, respektíve t_i, kde $\forall i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ platí, že $(s_i, t_i) \neq (s_j, t_j)$.

Dôkaz. Najprv dokážeme jednu implikáciu ($\Rightarrow$): Predpokladajme, že $G \times H$ obsahuje C_n ako podgraf. Teda existuje postupnosť n rôznych vrcholov $(s_1, t_1)(s_2, t_2) \dots (s_n, t_n)$, kde platí, že $(s_n, t_n) \sim (s_1, t_1)$ a pre každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$, kde platí $(s_i, t_i) \sim (s_{i+1}, t_{i+1})$ pre každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Z toho už vidno existenciu požadovaných sledov.

Teraz dokážeme druhú implikáciu ($\Leftarrow$): Predpokladajme, že existujú uzavreté sledy s a t s vlastnosťou podľa znenia vety. Vieme, že v grafe $G \times H$ existuje vrchol (s_i, t_i) pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ďalej z definície tenzorového súčinu vieme, že máme v grafe vzťahy $(s_i, t_i) \sim (s_{i+1}, t_{i+1})$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ a ešte aj $(s_n, t_n) \sim (s_1, t_1)$. Keďže máme zaručenú vlastnosť, že zodpovedajúce dvojice vrcholov sú vždy po dvoch rôzne, tak v grafe $G \times H$ máme C_n ako podgraf, čím je lema dokázaná. □

Lema 3.8. Nech G a H sú jednoduché grafy. Ak G a H obsahujú cykly dĺžky m, respektíve n, tak potom $G \times H$ obsahuje cyklus dĺžky $nsn(m, n)$.

Dôkaz. Z lemy 3.7 vieme, že na dôkaz existencie $C_{nsn(m,n)}$ stačí nájsť dva uzavreté sledy s, t dĺžky $nsn(m, n)$ v ktorých sa neopakujú dvojice (s_i, t_i). Pokúsime sa teda využiť informáciu o sledoch v G a H a skonštruovať nový sled v ktorom sa nebudú opakovať dvojice (až na prvú s poslednou). Cykly sú uzavreté sledy, v ktorých sa neopakujú vrcholy. Sled s získame niekoľkonásobným zopakovaním sledu získaného z cyklu C_m, bez posledného vrcholu (ten je totožný s prvým). Takisto t získame niekoľkonásobným zopakovaním sledu z C_n bez posledného vrcholu. Pokiaľ dĺžky oboch sledov sú $nsn(m, n)$, tak sa určite nezopakujú zodpovedajúce dvojice (s_i, t_i). Ak by sa zopakovala dvojica na miestach i a j, tak môžme vynechať celý blok $i+1$ až j, čo by bolo v spore s tým, že dĺžka sledov bola najmenším spoločným násobkom, alebo sa museli zopakovať vrcholy v sledoch z cyklov, ale to zjavne nemohlo nastať. Na koniec sledov s a t teraz pridáme ešte s_1, respektíve t_1, čím ich uzatvoríme a získame v grafe $G \times H$ cyklus $C_{nsn(m,n)}$ ako podgraf. □

Lema 3.9. Nech G a H sú jednoduché grafy. Potom$G \times H$ je bipartitný práve vtedy, keď aspoň jeden z G, H je bipartitný.

Dôkaz. Ukážeme najprv smer ($\Rightarrow$): Dokážeme obmenenú implikáciu. Nech ani G, ani H nie sú bipartitné. To znamená, že obsahujú cyklus nepárnej dĺžky, ale podľa lemy 3.8 ich tenzorový súčin obsahuje cyklus dĺžky $nsn(2k+1, 2l+1) = 2a+1$ pre nejaké $a \geq 1$, teda ani $G \times H$ nie je bipartitný.

Bez ujmy na všeobecnosti nech G je bipartitný graf s partíciami A_G a B_G. Pre dokázanie smeru ($\Leftarrow$) stačí zobrať množiny A, A^c, kde $A = \{(x,y) \in V(G \times H), x \in A_G\}$. Je ľahko vidno, že tieto tvoria partície grafu $G \times H$. $\square$

Lema 3.10. Nech G a H sú jednoduché grafy. Potom $G \times H$ obsahuje K_3 práve vtedy, keď G aj H obsahujú K_3.

Dôkaz. Spätná implikácia ($\Leftarrow$) vyplýva z lemy 3.8. V dôkaze implikácie ($\Rightarrow$) sa pozrieme na trojuholník v súčine a pokúsime sa ho faktorizovať. Tento trojuholník sa skladá z vrcholov ax, by a cz kde $a, b, c \in V(G)$ a $x, y, z \in V(H)$. Vrcholy a, b, c sú rôzne, lebo pre každú dvojicu vrcholov existuje hrana, ktorá ich spája a v G nemáme slučky. To ale znamená, že a, b a c tvoria trojuholník v G. Existencia trojuholníka v H sa ukáže analogicky. $\square$

Lema 3.11. Tenzorový súčin jednoduchých grafov G a H obsahuje C_4 ako podgraf práve vtedy, keď oba činitele obsahujú P_3 ako podgraf, alebo keď jeden z nich obsahuje C_4 ako podgraf a druhý obsahuje aspoň jednu hranu.

Dôkaz. Spätná implikácia je zjavná. Stačí si zobrať jednotlivé súčiny a overiť, že sa v nich nachádza C_4 ako podgraf. Teraz vychádzame z predpokladu, že v grafe $G \times H$ je C_4 ako podgraf. Z definície tenzorového súčinu vieme, že hrana $(ax)(by)$ sa v G nachádza práve vtedy, keď $a \sim_G b$ a súčasne $x \sim_H y$. Povedzme, že vrcholy, ktoré tvoria C_4 v $G \times H$ sú $(a, x), (b, y), (c, z)$ a (d, w). V každom z grafov G a H je aspoň jedna hrana. Z tabuľky na obrázku 3.1 totiž vidno (a tiež preto, že pracujeme s grafmi bez slučiek), že $a \neq b$ a tiež, že $x \neq y$.

G	H
$a \sim b$	$x \sim y$
$b \sim c$	$y \sim z$
$c \sim d$	$z \sim w$
$d \sim a$	$w \sim x$

Obr. 3.1: Vlastnosti G a H

Premenné a, b, c a d označujú nie nutne rôzne vrcholy. Preto sa pozrime na štyri prípady čo môžu nastať. V prípade, kedy $|\{a, b, c, d\}| = 4$, teda každý vrchol je iný dostávame, že v G je C_4 ako podgraf. Ak $|\{a, b, c, d\}| = 3$, dostávame ako jedinú možnosť, že $b = d$, teda graf P_3 ako podgraf. Ak $|\{a, b, c, d\}| = 2$, tak $a = c$ a súčasne $b = d$, čo značí, že v G je K_2 ako podgraf. Posledný prípad, kedy $|\{a, b, c, d\}| = 1$ nenastáva, lebo $a \neq b$.

Z toho vidno, že G teraz musí obsahovať niektorý z grafov C_4, P_3, alebo K_2. Tieto vlastnosti rovnako platia aj pre H a dôkaz je totožný až na pomenovanie vrcholov. Ľahko vidno, že $K_2 \times K_2$ ani $K_2 \times P_3$ neobsahujú C_4. $K_2 \times C_4$ už ale C_4 obsahuje. Pri súčine $P_3 \times P_3$ už tiež dostávame C_4 ako podgraf, čím je lema dokázaná. □

Dôsledkom tejto vety je, že akonáhle oba činitele obsahujú dve susedné hrany, už ich súčin obsahuje C_4 ako podgraf. V časti, kde sa zaoberáme výlučne grafmi s obvodom aspoň 5 táto vlastnosť vylúčila veľkú časť možností. Konkrétne, ak chceme získať súčin s obvodom aspoň 5 na viac ako 4 vrcholoch, jedným z činiteľov bude musieť byť K_2.

Lema 3.12. Ak jednoduché grafy G a H obsahujú k, respektíve l komponentov, tak potom $G \times H$ pozostáva z najmenej $k.l$ komponentov. Ostrá nerovnosť nastáva, ak G aj H obsahujú bipartitný komponent.

Dôkaz. Definujeme nasledovnú reláciu.

$$ax \sim bz \iff (\exists\ a\text{-}b\text{-cesta v } G) \wedge (\exists\ x\text{-}z\text{-cesta v } H)$$

Je to relácia ekvivalencie, ktorá vytvorí $k.l$ tried ekvivalencie, ktoré zodpovedajú dvojiciam pôvodých komponentov. Každá trieda je množina vrcholov nezávislá od ostatných tried, teda buď tvorí jeden komponent, alebo dva ak prislúchajúce komponenty z G a H boli bipartitné (Lema 3.4). □

Veta 3.13. Nech T je netriviálny súvislý graf s obvodom aspoň 5, ktorý je tenzorovým súčinom dvoch jednoduchých grafov. Potom graf T nie je equimatchable.

Dôkaz. Ak má byť graf $T = G \times H$ obvodu aspoň 5, tak z lemy 3.11 vieme, že nesmú oba činitele súčasne obsahovať P_3 ako podgraf, lebo súčin by obsahoval C_4 ako podgraf. Po zvyšok dôkazu budeme predpokladať, že činitele sú súvislé grafy, lebo z lemy 3.12 vieme, že ak čo i len jeden z činiteľov nie je súvislý, tak ani súčin nie je súvislý. Súčin s počtom vrcholov 2 neexistuje. Najprv treba pripomenúť, že uvažujeme iba jednoduché grafy. Preto ak jeden z činiteľov má iba jeden vrchol, tento činiteľ neobsahuje hrany a neexistuje súvislý súčin na menej ako 4 vrcholoch. Súčin s počtom vrcholov 4 je len jeden a to $K_2 \times K_2$ a ten nie je súvislý. Ak chceme súčin s väčším počtom vrcholov, taký, čo bude mať obvod aspoň 5, tak nesmú oba grafy obsahovať dve susedné hrany. Ak má byť G súvislý a neobsahovať dve susedné hrany, tak má najviac jednu hranu. Bez ujmy na všeobecnosti, nech teda $G = K_2$. Ďalej vieme, že hľadaný graf je súvislý, to znamená že keď už G je K_2, tak H nemôže byť bipartitný (z lemy 3.4). Pripomíname, že $T = K_2 \times H$ je bipartitný graf (lema 3.9). Cieľom je získať graf typu E, teda nás zaujímajú listy, ktoré dostaneme v takomto súčine. Partícia listu v tenzorovom súčine je určená partíciou listu z K_2. Preto je listov v oboch partíciách súčinu rovnako veľa, a tak nevieme nikdy dostať graf typu E, lebo ten v jednej partícii nemá žiadne listy. □

Nasledujúce tvrdenie je zrejmé.

Tvrdenie 3.14. *Nech G je bipartitný graf. Potom $K_2 \times G$ pozostáva z dvoch disjunktných kópií grafu G.*

Tvrdenie 3.15. *Existuje nekonečne veľa equimatchable grafov, ktoré sú netriviálnym tenzorovým súčinom dvoch jednoduchých grafov.*

Dôkaz. Grafov typu E je nekonečne veľa. Nech E je graf typu E. Z predchádzajúceho tvrdenia 3.15 vidíme, že $K_2 \times E$ je nesúvislý graf, ktorý pozostáva z dvoch kópií grafu E, a ktorý je tým pádom podľa vety 3.6 equimatchable. Keďže súčin "kopíruje" graf E, tak máme zaručené, že aj súčinov bude nekonečne veľa. □

Záver

Predložená práca sa zaoberá vlastnosťami najväčších párení grafov, konkrétne otázkou, v ktorých grafoch je každé párenie obsiahnuté v niektorom najväčšom párení - takéto grafy sa nazývajú equimatchable. Hlavným cieľom práce je klasifikácia všetkých equimatchable grafov v dvoch konkrétnych triedach a to regulárnych grafov a tenzorových súčinov.

V oblasti regulárnych equimatchable grafov nadviažeme na charakterizáciu 3-regulárnych equimatchable grafov z [KPS03], kde je ukázané, že takéto grafu sú iba K_4 a $K_{3,3}$. V tejto práci sme ukázali, že ak G je k-regulárny equimatchable graf pre k nepárne, tak je izomorfný s K_{k+1}, alebo $K_{k,k}$. Ďalej sme ukázali, že ak je stupeň regularity k párny, tak graf G je izomorfný s K_{k+1}, $K_{k,k}$, alebo je faktorovo-kritický. Na základe toho sa nám podarilo dokázať, že k-regulárnych equimatchable grafov pre pevne zvolené k je iba konečne veľa. Na záver tejto časti sme sa zamerali na 4-regulárne equimatchable grafy, kde sa nám podarilo charakterizovať všetky 3-súvislé 4-regulárne equimatchable grafy okrem prípadu, keď má 11, alebo 13 vrcholov a neobsahuje netriviálny 4-rez.

V prípade tenzorových súčinov sme ukázali, že neexistuje netriviálny súvislý tenzorový súčin s obvodom aspoň 5. Na druhej strane, existuje nekonečne veľa netriviálnych equimatchable tenzorových súčinov.

Otvorenými ostávajú otázky charakterizácie 4-regulárnych equimatchable grafov aj v zostávajúcich prípadoch, prípadne všetkých párno-regulárnych equimatchable grafov.

Ďalším otvoreným problémom je charakterizácia všetkých equimatchable tenzorových súčinov, ktorá sa v súčasnosti zdá byť za rámcom možností existujúcich techník.

Literatúra

[AG90] B. Alspach and J. C. George. One-factorizations of tensor products of graphs. In *Topics in Combinatorics and Graph Theory*, pages 41–46. Springer, 1990.

[BWYY10] B. Bai, Z. Wu, X. Yang, and Q. Yu. Lexicographic product of extendable graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 33(2):197–204, 2010.

[Die00] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg, second edition, 2000.

[Eib14] E. Eiben. Equimatchable graphs on surfaces. Master's thesis, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2014.

[EK13] E. Eiben and M. Kotrbčík. *2-connected equimatchable graphs on surfaces*, 2013. http://arxiv.org/abs/1312.3423.

[Fav86] O. Favaron. Equimatchable factor-critical graphs. *Journal of graph theory*, 10(4):439–448, 1986.

[FHV10] A. Frendrup, B. Hartnell, and P. D. Vestergaard. A note on equimatchable graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 46:185–190, 2010.

[Grü74] B. Grünbaum. Matchings in polytopal graphs. *Networks*, 4(2):175–190, 1974.

[HIK11] R. Hammack, W. Imrich, and S. Klavžar. *Handbook of Product Graphs, Second Edition*. Discrete Mathematics and Its Applications. Taylor & Francis, 2011.

[IKR08] W. Imrich, S. Klavžar, and D. Rall. *Topics in Graph Theory - Graphs and Their Cartesian Product*. IEEE, 2008.

[Kov12] J. Kováč. *Rozšíriteľnosť párení na grafoch, Diplomová práca.* Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2012.

[KPS03] K. Kawarabayashi, M. D. Plummer, and A. Saito. On two equimatchable graph classes. *Discrete Math.*, 266(1-3):263–274, May 2003.

[Lew74] Mordechai Lewin. Matching-perfect and cover-perfect graphs. *Israel Journal of Mathematics*, 18(4):345–347, 1974.

[LP86] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory.* Number 121 in Annals of discrete mathematics. Elsevier Science, 1986.

[LPP84] M. Lesk, M. D. Plummer, and W. R. Pulleyblank. Equi-matchable graphs. *Graph theory and combinatorics*, pp. 239–254, 1984.

[LY09] G. Liu and Q. Yu. *Graph factors and matching extensions.* Higher Education Press Beijing, 2009.

[Men74] Daniel Huang-Chao Meng. *Matchings and coverings for graphs.* PhD thesis, Michigan State University. Department of Mathematics, 1974.

[MV80] S. Miscali and V. V. Vazirani. *An $O(\sqrt{|V|}E)$ Algorithm For Finding Maximum Matching in General Graphs.* University of California, Berkeley, 1980. Proceedings of 21st Annual Symposium of Foundations of Computer Science.

[Plu80] M. D. Plummer. *On n-Extendable Graphs.* Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN 37235, USA, 1980. Technical report.

[Sum79] D. P. Sumner. Randomly matchable graphs. *Journal of Graph Theory*, 3(2):183–186, 1979.

[WYY12] Z. Wu, X. Yang, and Q. Yu. On cartesian product of factor-critical graphs. *Graphs and Combinatorics*, 28:723–736, 2012.