Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Čiastočne užitočná informácia

Diplomová práca

2021

Bc. Matej Štubniak

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Čiastočne užitočná informácia

Diplomová práca

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.

Bratislava, 2021
Bc. Matej Štubniak

59013585

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Matej Štubniak
Študijný program:	informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	informatika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Čiastočne užitočná informácia
Partially useful information

Anotácia: Práca nadväzuje na doterajší výskum pojmu užitočnosti informácie. Jej cieľom je zaviesť zovšeobecnenú definíciu užitočnosti informácie - čiastočne užitočnú informáciu - a preskúmať jej vlastnosti. Ako formálny model pre reprezentáciu problémov a reprezentáciu dodatočnej informácie sa využijú nedeterministické konečné automaty.

Cieľ: Práca nadväzuje na doterajší výskum pojmu užitočnosti informácie. Jej cieľom je zaviesť zovšeobecnenú definíciu užitočnosti informácie - čiastočne užitočnú informáciu - a preskúmať jej vlastnosti. Ako formálny model pre reprezentáciu problémov a reprezentáciu dodatočnej informácie sa využijú nedeterministické konečné automaty.

Vedúci:	prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
Katedra:	FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:
bez obmedzenia

Dátum zadania: 01.09.2020

Dátum schválenia: 08.02.2021

prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Poďakovanie: V prvom rade sa chcem poďakovať môjmu školiteľovi, pánovi profesorovi Branislavovi Rovanovi, za túto tému, návrhy, usmernenia a čas mne venovaný aj napriek neštandardnému dištančnému režimu. Som tiež vďačný doktorovi Šimonovi Sádovskému za užitočné pripomienky v istej fáze prípravy tejto práce.

Abstrakt

Práca rozširuje výskum pojmu užitočnosť informácie o nový pojem - čiastočne užitočná informácia. Jedná sa o dodatočnú informáciu, ktorá nemusí nutne pomáhať riešiť celý zadaný problém, ale nejakú jeho časť, respektíve podmnožinu. Dodatočné informácie a problémy formalizujeme ako jazyky, presnejšie regulárne jazyky. Dôležitou súčasťou skúmania je ich zložitosť, ktorú meriame pomocou nedeterministických konečných automatov a ich stavovej zložitosti. Pozeráme sa na vzťah užitočnej a čiastočne užitočnej informácie či na čiastočnú užitočnosť informácie ako na reláciu. Ďalej, zameriavame sa na vlastnosti tried jazykov obsahujúcich dodatočné informácie, problémy alebo ich podmnožiny, definovaných čiastočnou užitočnosťou. Jednu z týchto tried používame na porovnávanie informačnej sily dodatočných informácií. Nevyhnutnou súčasťou práce sú tvrdenia o nedeterministickej stavovej zložitosti niektorých regulárnych jazykov.

Kľúčové slová: čiastočne užitočná informácia, regulárny jazyk, nedeterministický konečný automat, stavová zložitosť, trieda jazykov definovaná čiastočnou užitočnosťou

Abstract

The thesis extends research of the concept of usefulness of information by a new concept - partially useful information. That is supplementary information that does not necessarily help to solve the whole given problem, but some part or a subset of it. We formalize supplementary information and problems as languages, more precisely regular languages. An important part of the study is their complexity, which we measure by nondeterministic finite automata and their state complexity. We look at the relationship of useful and partially useful information, at the partial usefulness of information as a relation too. Furthermore, we focus on properties of language families containing supplementary information, problems or their subsets, defined by partial usefulness. We use one of these families to compare informational power of supplementary information. Assertions about nondeterministic state complexity of some regular languages are a necessary part of the thesis.

Keywords: partially useful information, regular language, nondeterministic finite automaton, state complexity, language family defined by partial usefulness

Obsah

Úvod

Informácia je pojem, ktorému intuitívne ľahko rozumieme. Z formálneho hľadiska ho však nevieme zadefinovať ideálnym spôsobom, čiže dostatočne všeobecne a zároveň presne. Napriek tomu je vynakladané veľké úsilie na skúmanie informácie z rôznych uhlov pohľadu. Naším uhlom pohľadu je jej užitočnosť, alebo presnejšie, čiastočná užitočnosť. Otázka je, ako to definovať?

V prvom rade treba mať nejako definovanú samotnú informáciu. Na to využívame teóriu formálnych jazykov a automatov - informácia sa pre nás rovná jazyku nad nejakou abecedou.

Ďalej, čo s užitočnosťou? V tejto práci vychádzame z už zaužívaného konceptu na Katedre informatiky FMFI UK v Bratislave, ktorého myšlienka je nasledovná:

Dodatočná informácia L_{adv} je užitočná pre problém L_{prob}, ak existuje jednoduchší problém L_{new}, ktorý spolu s dodatočnou informáciou pôvodný problém vyrieši - teda $L_{prob} = L_{adv} \cap L_{new}$. Je tu však jedna dôležitá podmienka - vyžadujeme, aby nielen L_{new}, ale aj L_{adv} bola jednoduchšia ako L_{prob}. To je prirodzené, pretože nemalo by zmysel riešiť problém zložitejším problémom.

Ako meriame zložitosť jazykov? K dispozícii sú viaceré výpočtové modely. My budeme využívať nedeterministické konečné automaty a ich stavovú zložitosť. V našej práci teda predpokladáme, že L_{prob}, L_{adv} a L_{new} sú regulárne jazyky. Pre mieru ich zložitosti používame pojem nedeterministická stavová zložitosť regulárneho jazyka.

Naša práca sa zaoberá mierne pozmenenou definíciou spomenutého konceptu. Tento nový koncept nazývame čiastočne užitočná informácia. Myšlienka tejto zmeny je, že nemusí byť nutné, prípadne možné, aby dodatočná informácia pomáhala riešiť celý problém. Preto pripúšťame, že stačí, aby táto informácia pomáhala riešiť nejakú podmnožinu L_{part} nášho problému. Musí to byť neprázdna podmnožina a takisto nám nebude nestačiť, ak je konečná. Tiež budeme vyžadovať, aby dodatočná informácia L_{adv} a nový problém L_{new} boli jednoduchšie ako pôvodný problém L_{prob}. Takisto ale chceme, aby boli jednoduchšie ako podmnožina problému L_{part}, ktorú pomáhajú riešiť, pretože opäť, nedávalo by zmysel riešiť nejaký podproblém zložitejším problémom.

V práci teda v prvom rade definujeme čiastočne užitočnú informáciu. Z nej odvodzujeme čiastočnú užitočnosť informácie ako reláciu na regulárnych jazykoch, u ktorej dokazujeme určité vlastnosti. Vyslovujeme niektoré tvrdenia analogické k tým, ktoré pracujú s užitočnosťou (v práci [5]), a aj iným spôsobom skúmame vzťah týchto dvoch definícií. Skúmame niektoré nové aspekty, ktoré naša definícia prináša, napríklad maximálnu podmnožinu problému vzhľadom na dodatočnú informáciu. Dokazujeme tiež uzáverové vlastnosti určitých tried jazykov definovaných čiastočnou užitočnosťou a ďalšie vlastnosti, napríklad vlastnosti týkajúce sa informačnej sily dodatočnej informácie. Okrem toho dokazujeme tvrdenia o nedeterministickej stavovej zložitosti používaných jazykov.

Na záver tohto úvodu by sme ešte chceli dodať, že aj keď to nie je cieľom práce, vyslovené tvrdenia dokážeme používaním spravidla iba jazykov nad unárnou abecedou.

Kapitola 1

Čiastočne užitočná informácia

V tejto kapitole uvádzame najskôr základné definície, predpoklady či výsledky, z ktorých vychádzame pri skúmaní pojmu čiastočne užitočná informácia. Prezentujeme závery tohto skúmania pre niektoré konkrétne jazyky, prípadne skupiny jazykov. Predtým však dokazujeme niekoľko tvrdení o nedeterministickej stavovej zložitosti jazykov, ktoré potrebujeme v dôkazoch ďalších tvrdení tejto práce. Určitým spôsobom tu vykonávame porovnanie týkajúce sa čiastočne užitočnej informácie a už skúmanej užitočnej informácie. Pozeráme sa tiež na čiastočnú užitočnosť ako na reláciu a napokon sa zamýšľame nad pojmom maximálna podmnožina problému vzhľadom na dodatočnú informáciu.

1.1 Definície a predpoklady

Predpokladáme znalosť štandardných definícií pojmov z oblasti formálnych jazykov ako sú abeceda, jazyk, trieda jazykov či trieda regulárnych jazykov ($\mathcal{R}$). Taktiež si dovolíme opomenúť definície bežných operácií na jazykoch ako sú zreťazenie, iterácia, komplement a podobne.

Najprv najmä kvôli uvedeniu použitého označenia definujeme nedeterministický konečný automat - výpočtový model, ktorý akceptuje práve jazyky patriace do triedy regulárnych jazykov.

Definícia 1.1.1. *Nedeterministický konečný automat* (NKA) je pätica $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K \neq \emptyset$ je konečná množina stavov, Σ je abeceda vstupných symbolov, funkcia $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^K$ definuje prechody medzi stavmi, $q_0 \in K$ je počiatočný stav a $F \subseteq K$ je množina akceptačných stavov.

Definícia 1.1.2. *Konfigurácia* nedeterministického konečného automatu A je dvojica (q, w), kde $q \in K$ je stav a $w \in \Sigma^*$ je nedočítaná časť vstupného slova.

Definícia 1.1.3. *Krok výpočtu* nedeterministického konečného automatu A je relácia $\vdash_A$ na jeho konfiguráciách taká, že pre každé $p, q \in K$, $c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $w \in \Sigma^*$ platí, že

$(p, cw) \vdash_A (q, w)$ práve vtedy, keď $q \in \delta(p, c)$. Spravidla budeme používať $\vdash$ namiesto $\vdash_A$, pretože NKA A bude zrejmý z kontextu.

Definícia 1.1.4. *Jazyk* akceptovaný nedeterministickým konečným automatom A definujeme ako $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)\}$.

V nasledujúcich riadkoch vyslovujeme definíciu jedného z kľúčových pojmov tejto práce - nedeterministická stavová zložitosť regulárneho jazyka.

Definícia 1.1.5. *Stavovou zložitosťou* konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ (deterministického aj nedeterministického) rozumieme počet jeho stavov. Označujeme ju ako $sc(A)$ (z angl. *state complexity*), pričom platí, že $sc(A) = |K|$.

Definícia 1.1.6. Nech $L \in \mathcal{R}$. *Nedeterministickú stavovú zložitosť* jazyka L definujeme ako $nsc(L) = min\{sc(A) \mid A$ je NKA taký, že $L(A) = L\}$.

Pri dokazovaní nedeterministickej stavovej zložitosti nejakého regulárneho jazyka sa nám hodí, ak môžeme predpokladať, že NKA akceptujúci daný jazyk s určitou stavovou zložitosťou nepoužíva prechody na prázdne slovo ε. V tom prípade potrebujeme dokázať, že NKA nepoužívajúci prechody na ε dokáže akceptovať jazyky s rovnakým počtom stavov ako NKA, ktorý ich používať môže. O tom hovorí nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 1.1.7. *Nech A je NKA. Potom existuje NKA $A' = (K', \Sigma', \delta', q'_0, F')$ nepoužívajúci prechody na ε (t. j. $\forall q' \in K' : (q', \varepsilon) = \emptyset$) taký, že $L(A') = L(A)$ a $sc(A') = sc(A)$.*

Dôkaz tohto tvrdenia neuvádzame, pretože vyplýva zo štandardnej konštrukcie "bezepsilonového" NKA k ľubovoľnému NKA (viď napríklad skriptá [1] - Veta 2.3.1 a Poznámka 2.3.1). O každom uvažovanom NKA v tejto práci teda môžeme predpokladať a aj predpokladáme, že nepoužíva prechody na ε.

Blížime sa k definícii hlavného pojmu, ktorým sa zaoberáme v tejto práci. Najskôr však pripomíname definíciu užitočnej informácie (Definícia 1.0.3 v práci [5]) - s mierne pozmenenou formuláciou -, na ktorú naša nová definícia nadväzuje.

Definícia 1.1.8. Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. Dodatočná informácia L_{adv} je *užitočná* pre problém L_{prob}, ak existuje jazyk $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že platia nasledujúce podmienky:

- $L_{prob} = L_{adv} \cap L_{new}$
- $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob})$
- $nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob})$

Poznámka. Ak budeme ďalej písať o nejakej užitočnej informácii L_{adv}, pridáme ku nej do zátvorky slovo "úplne" - (úplne) užitočná -, aby sme zvýraznili rozdiel medzi touto a nasledujúcou definíciou.

Definícia 1.1.9 (čiastočne užitočná informácia)**.** Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. Dodatočná informácia L_{adv} je *čiastočne užitočná* pre problém L_{prob}, ak existujú nekonečné jazyky $L_{new}, L_{part} \in \mathcal{R}$ také, že platia nasledujúce podmienky:

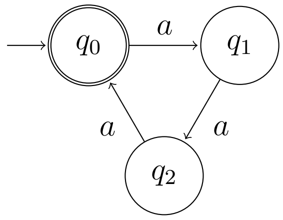
- $L_{part} \subseteq L_{prob}$
- $L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$
- $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob})$
- $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{part})$
- $nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob})$
- $nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})$

Poznámka. Ako aj naznačuje slovo "čiastočne", hlavný rozdiel medzi touto a predchádzajúcou definíciou je v tom, že nevyžadujeme, aby dodatočná informácia (rada - z angl. *advice*) L_{adv} pomáhala riešiť celý problém L_{prob}, ale stačí nejakú jeho nekonečnú podmnožinu L_{part} - tá je prienikom L_{adv} a nejakého nového jazyka L_{new}. Ide teda o zovšeobecnenie definície (úplne) užitočnej informácie - ak je L_{adv} (úplne) užitočná pre L_{prob}, potom je L_{adv} aj čiastočne užitočná pre L_{prob} (platí to pre $L_{part} = L_{prob}$).

Veľmi dôležitými v tejto definícii sú podmienky týkajúce sa nedeterministickej stavovej zložitosti jazykov - vyžadujeme aby L_{adv} a L_{new} mali túto zložitosť menšiu ako L_{prob} a tiež ako L_{part}. Pomáhame teda riešiť problémy problémami, ktoré sú menej zložité. Na tieto podmienky budeme v práci často odkazovať ako na podmienky ohľadom (týkajúce sa) nedeterministickej stavovej zložitosti.

Definícia sa zmieňuje aj o tom, že jazyky L_{new} a L_{part} musia byť nekonečné. Naším zámerom bolo, aby bola nekonečná podmnožina L_{part} - aby sme sa vyhli situácii, že máme nekonečný problém L_{prob} a môžeme uvažovať jeho konečné podmnožiny L_{part} (to by celkom očividne viedlo k triviálnym výsledkom). Čiže ak určujeme, že L_{part} musí byť nekonečná, potom jej nadmnožina L_{prob} je nutne tiež nekonečná a takisto aj jazyky L_{adv} a L_{new}, keďže L_{part} je ich prienikom (preto sme v definícii neoddeľovali L_{new} a L_{part}, čo sa týka nekonečnosti). V podstate teda pracujeme len s nekonečnými jazykmi - konečná dodatočná informácia nie je čiastočne užitočná pre žiadny problém, ani pre konečný problém neexistuje žiadna čiastočne užitočná dodatočná informácia (v zmysle našej definície).

Podobne ako v prípade (úplne) užitočnej informácie, ak L_{adv} je čiastočne užitočná pre L_{prob}, teda $L_{adv} \cap L_{new}$ sa rovná nejakej nekonečnej podmnožine L_{prob} a sú splnené podmienky ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti, potom zjavne aj L_{new} je čiastočne užitočná pre L_{prob}.



Obr. 1.1: NKA pre $L_{[3]}$

Pomerne ľahko vidno, že jazyk všetkých slov Σ^* nad príslušnou abecedou nie je čiastočne užitočný pre žiadny problém. Sporom, ak by bol, potom $L_{part} = \Sigma^* \cap L_{new} = L_{new}$, čiže $nsc(L_{new}) = nsc(L_{part})$, čo je v rozpore s definíciou.

Predtým, ako uvádzame názorný príklad čiastočne užitočnej informácie, definujeme označenie istej skupiny jazykov nad unárnou abecedou, ktoré v tejto práci veľmi často spomíname a vyslovujeme tvrdenie ohľadom ich nedeterministickej stavovej zložitosti.

Definícia 1.1.10. Nech $k \in \mathbb{N}$. Regulárny jazyk $\{a^{kn} \mid n \in \mathbb{N}\}$ budeme označovať ako $L_{[k]}$.

Tvrdenie 1.1.11. *Nech* $n \in \mathbb{N}, n > 0$. *Potom* $nsc(L_{[n]}) = n$.

Toto tvrdenie už bolo dokázané v práci [5] ako Lema 2.1.2. Napriek tomu pripomíname štandardnú konštrukciu NKA $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takého, že $L(A) = L_{[n]}$ a $sc(A) = n$:

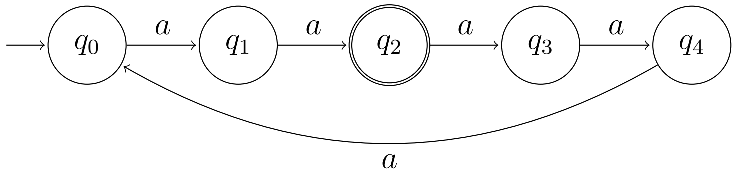
$K = \{q_i \mid i \in \mathbb{N}, 0 \le i < n\}$, $\Sigma = \{a\}$, $F = \{q_0\}$ a $\forall i \in \mathbb{N}$ také, že $0 \le i < n$ platí $\delta(q_i, a) = q_j$, kde $j = (i + 1) \ \texttt{mod}\ n$. Prechodový diagram takéhoto NKA pre $n = 3$ uvádzame na Obrázku 1.1.

Príklad 1.1.12. Nech $L_{adv} = L_{[4]}$ a $L_{prob} = L_{[6]}$. Ak zvolíme $L_{new} = L_{[3]}$, dostaneme $L_{part} = L_{[4]} \cap L_{[3]} = L_{[12]}$. Potom ľahko vidno, že $L_{[4]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$, pretože $L_{[3]}$ a $L_{[12]}$ sú nekonečné jazyky a aj ostatné podmienky z definície sú splnené:

- $L_{[12]} \subseteq L_{[6]}$
- $L_{[12]} = L_{[4]} \cap L_{[3]}$
- $nsc(L_{[4]}) < nsc(L_{[6]})$
- $nsc(L_{[4]}) < nsc(L_{[12]})$
- $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[6]})$
- $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[12]})$

Poznámka. $L_{[4]}$ je teda čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$, ale nie je (úplne) užitočná pre $L_{[6]}$, pretože $L_{[4]} \not\subseteq L_{[6]}$.

V nasledujúcich častiach práce budeme väčšinou vynechávať zmienky ohľadom podmienky nekonečnosti, keďže jej splnenie býva na pohľad zrejmé.



Obr. 1.2: NKA pre $L_{[5]}\ .\ \{a^2\}$

1.2 Nedeterministická stavová zložitosť

Z definície čiastočne užitočnej informácie je zrejmé, že súčasťou našej argumentácie ohľadom dotknutých jazykov musia byť tvrdenia o ich nedeterministickej stavovej zložitosti. V tejto časti vyslovíme a dokážeme viacero takýchto pomocných tvrdení o konkrétnych jazykoch a aj všeobecnejšie tvrdenia. Na tie budeme odkazovať v ďalších častiach práce.

Pre jednotlivé hodnoty nedeterministickej stavovej zložitosti jazykov budeme robiť horné a dolné odhady. Ako to už býva, tou jednoduchšou záležitosťou budú horné odhady - bude stačiť nájsť NKA s danou stavovou zložitosťou akceptujúci daný jazyk. Pokiaľ ide o dolné odhady, existuje viacero metód na ich dokazovanie. Pre niektoré jazyky sú veľmi dobre použiteľné *Technika mätúcich množín* a *Technika rozšírených mätúcich množín* demonštrované napríklad v práci [3]. Určitým ich zovšeobecnením je trochu zložitejšia *Technika hranového pokrytia biklikami* prezentovaná v [2].

My budeme využívať a rozvíjať hlavne myšlienku so známej *Pumpovacej lemy*, používanú napríklad v práci [5] (viď už spomenuté Tvrdenie 1.1.11).

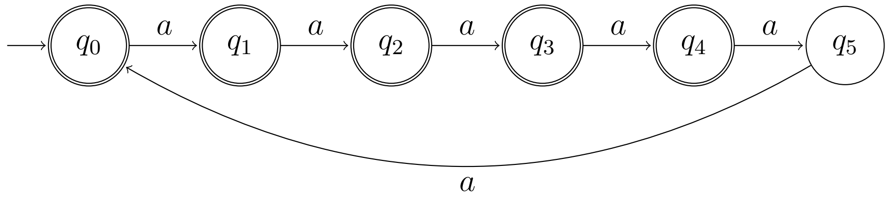
Tvrdenie 1.2.1. *Nech $n \in \mathbb{N}, n > 0$ a $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < n$. Potom $nsc(L_{[n]}\ .\ \{a^i\}) = n$.*

Dôkaz. Konštrukcia NKA akceptujúceho $L_{[n]}\ .\ \{a^i\}$ s n stavmi je rovnaká ako v prípade $L_{[n]}$ až na voľbu akceptačného stavu - bude ním práve i-ty stav.

Formálne, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{[n]}$ a $sc(A) = n$ podľa štandardnej konštrukcie uvedenej pri Tvrdení 1.1.11. Potom NKA A' taký, že $L(A') = L_{[n]}\ .\ \{a^i\}$ a $sc(A') = n$ bude $A' = (K, \Sigma, \delta, q_0, F')$, kde $F' = \{q_i\}$. Prechodový diagram takejto konštrukcie uvádzame na Obrázku 1.2 pre $n = 5$ a $i = 2$.

Tým sme ukázali, že $nsc(L_{[n]}\ .\ \{a^i\}) \leq n$. Ďalej ukážeme, že $nsc(L_{[n]}\ .\ \{a^i\}) \geq n$. Podobne, ako je to v spomínanom dôkaze pre $nsc(L_{[n]})$, budeme predpokladať, že $n > 1$, pretože každý NKA má aspoň jeden stav, teda pre $n = 1$ je to jasné. Okrem toho prípad $L_{[n]} = L_{[n]}\ .\ \{a^0\} = L_{[n]}\ .\ \{\varepsilon\}$ je už dokázaný, takže predpokladajme tiež, že $i > 0$.

Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{[n]}\ .\ \{a^i\}$ a $sc(A) < n$. Nech $(q_0, a^{n+i}) \vdash (q_1, a^{n+i-1}) \vdash \dots \vdash (q_{n+i}, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet NKA A na slove $a^{n+i} \in L(A)$, kde $q_0, q_1, \dots, q_{n+i} \in K$. Keďže $sc(A) < n$, existujú $j, k \in \mathbb{N}$ také, že $q_j = q_k, j < k, 1 \leq k - j < n$. Ak vo výpočte vynecháme konfigurácie stavov q_{j+1}



Obr. 1.3: NKA pre $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$

až q_k, dostávame akceptačný výpočet pre slovo $a^{n+i-(k-j)}$. Pozrime sa bližšie na výraz $n+i-(k-j)$, označme $z := n+i-(k-j)$, teda $a^z \in L(A)$.

Ak $(k-j) < i$, tak platí $n < z < n+i$. Ak $(k-j) = i$, tak platí $z = n$. A ak $(k-j) > i$, tak platí $i < z < n$. Akceptačný výpočet na slove a^z teda každopádne vedie k sporu, takže $nsc(L_{[n]} \,.\, \{a^i\}) \geq n$. □

Poznámka. Zmienka o vynechaní konfigurácií vo výpočte je mierne nepresná. Je ňou myslené to, že ak by na vstupe daného NKA bolo slovo kratšie o počet vynechaných konfigurácií, potom existuje akceptačný výpočet na tomto kratšom slove, ktorý vyzerá rovnako ako ten na pôvodnom slove, až na vynechané konfigurácie a pravú stranu ostávajúcich konfigurácií - tam je postupne čítané pôvodné slovo nahradené postupne čítaným spomínaným kratším slovom.

Túto myšlienku budeme využívať aj v ďalších dôkazoch a nielen pokiaľ ide o vynechávanie konfigurácií, ale aj čo sa týka ich pumpovania, kde to funguje veľmi analogicky.

Tvrdenie 1.2.2. *Nech $n \in \mathbb{N}, n > 0$ a $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < n$. Potom $nsc((L_{[n]} \,.\, \{a^i\})^C) \leq n$.*

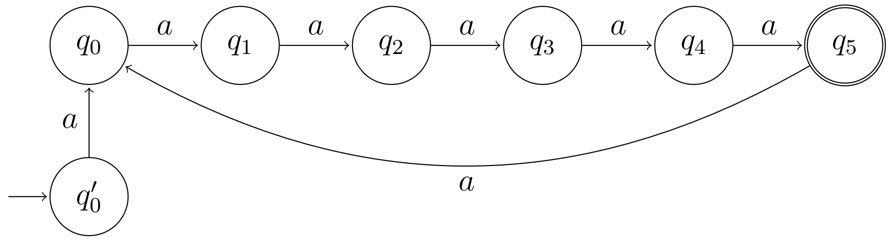
Dôkaz. Zostrojíme NKA $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = (L_{[n]} \,.\, \{a^i\})^C$ a $sc(A) = n$ nasledovným spôsobom:

$K = \{q_j \mid j \in \mathbb{N}, 0 \leq j < n\}$, $\Sigma = \{a\}$, $F = \{q_j \mid q_j \in K$ také, že $j \neq i\}$ a $\forall j \in \mathbb{N}$ také, že $0 \leq j < n$ platí $\delta(q_j, a) = q_k$, kde $k = (j+1) \texttt{ mod } n$. Prechodový diagram takéhoto NKA pre $n = 6$ a $i = 5$ môžeme vidieť na Obrázku 1.3. Vidíme, že je to opäť v podstate rovnaká konštrukcia ako pre jazyk $L_{[n]}$ až na voľbu akceptačných stavov.

Ľahko vidno, že pre takto zostrojený NKA A skutočne platí $L(A) = (L_{[n]} \,.\, \{a^i\})^C$. Tým sme ukázali, že $nsc((L_{[n]} \,.\, \{a^i\})^C) \leq n$. □

Lema 1.2.3. *Nech $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Potom $nsc(L_{[n]} - \{\varepsilon\}) = n + 1$.*

Dôkaz. Konštrukcia NKA so stavovou zložitosťou $n+1$ akceptujúceho jazyk $L_{[n]} - \{\varepsilon\}$ je znovu veľmi podobná konštrukcii pre $L_{[n]}$. Rozdiel bude v tom, že pridáme nový počiatočný neakceptačný stav, ktorý bude mať prechod do počiatočného stavu automatu pre $L_{[n]}$, v ktorom už nebude akceptačný jeho počiatočný stav, ale jeho posledný stav.



Obr. 1.4: NKA pre $L_{[6]} - \{\varepsilon\}$

Formálne, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{[n]}$ a $sc(A) = n$ podľa štandardnej konštrukcie. Potom zostrojíme NKA $A' = (K', \Sigma', \delta \cup \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L_{[n]} - \{\varepsilon\}$ a $sc(A') = n + 1$ nasledovne:

$K' = K \cup \{q_0'\}$, $\Sigma' = \Sigma = \{a\}$, $F' = \{q_{n-1}\}$ a $\delta'(q_0', a) = q_0$. Na Obrázku 1.4 vidno prechodový diagram takéhoto NKA pre $n = 6$.

Je zrejmé, že A' skutočne akceptuje $L_{[n]} - \{\varepsilon\}$. Platí teda $nsc(L_{[n]} - \{\varepsilon\}) \leq n + 1$. Teraz ukážeme, že $nsc(L_{[n]} - \{\varepsilon\}) \geq n + 1$. Ukážeme to zvlášť pre prípady $n = 1$ a $n > 1$.

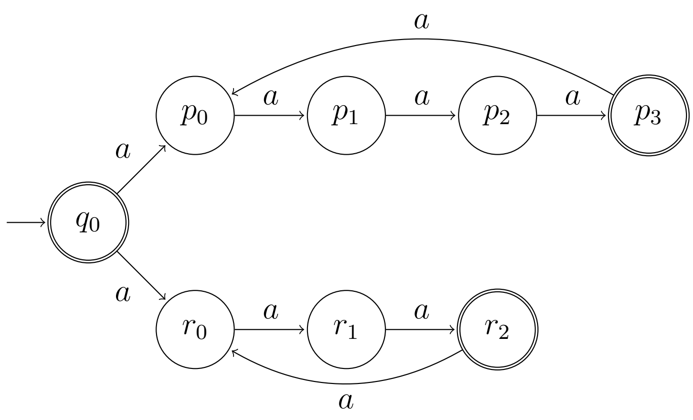
Nech $n = 1$. Sporom, majme NKA A taký, že $L(A) = L_{[1]} - \{\varepsilon\}$ a $sc(A) = 1$. A má teda iba počiatočný stav. Zároveň tento stav nie je akceptačný, pretože A neakceptuje ε. Potom ale A nemá nijaký akceptačný stav, teda akceptuje len prázdny jazyk, čo je spor.

Nech $n > 1$. Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{[n]} - \{\varepsilon\}$ a $sc(A) \leq n$. Nech $(q_0, a^n) \vdash (q_1, a^{n-1}) \vdash ... \vdash (q_n, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet NKA A na slove $a^n \in L(A)$, kde $q_0, q_1, ..., q_n \in K$. Keďže $sc(A) \leq n$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, 1 \leq j - i \leq n$. Rovnosť $j - i = n$ by mohla platiť len pre $i = 0$ a $j = n$. Stav q_0 ale nie je akceptačný, pretože A neakceptuje ε, zatiaľ čo q_n je akceptačný, takže $q_0 \neq q_n$. Preto tiež platí, že $1 \leq j - i < n$. Ďalej, ak vo výpočte vynecháme konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j, dostávame akceptačný výpočet pre slovo $a^{n-(j-i)}$. To je ale spor, pretože a^n je najkratšie slovo, ktoré akceptuje automat A taký, že $L(A) = L_{[n]} - \{\varepsilon\}$. Teda $nsc(L_{[n]} - \{\varepsilon\}) \geq n + 1$. □

Veta 1.2.4. *Nech čísla $n, m \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné, pričom $m > 1$ a $n > m$. Potom $nsc(L_{[n]} \cup L_{[m]}) = n + m + 1$.*

Dôkaz. Konštrukcia NKA s $n + m + 1$ stavmi pre jazyk $L_{[n]} \cup L_{[m]}$ je nasledovná - využijeme tu nedeterminizmus tak, že z počiatočného akceptačného stavu idú prechody na písmeno a do počiatočného stavu automatov jednotlivo pre $L_{[n]}$ a $L_{[m]}$ s tým rozdielom, že v týchto automatoch dáme ako akceptačný stav nie ten pôvodný (tým bol ich počiatočný stav), ale ich posledný stav.

Formálne, nech $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, p_0, F_1)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{[n]}$ a $sc(A_1) = n$ a $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, r_0, F_2)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{[m]}$ a $sc(A_2) = m$, oba podľa



Obr. 1.5: NKA pre $L_{[4]} \cup L_{[3]}$

štandardnej konštrukcie (nastalo akurát premenovanie stavov z $q\_$ na $p\_$ resp. $r\_$). NKA $A = (K, \Sigma, \delta \cup \delta_1 \cup \delta_2, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L_{[n]} \cup L_{[m]}$ a $sc(A) = n + m + 1$ skonštruujeme nasledovne:

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_0\}$, $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \{a\}$, $F = \{q_0, p_{n-1}, r_{m-1}\}$ a $\delta(q_0, a) = \{p_0, r_0\}$. Prechodový diagram NKA A pre $n = 4$ a $m = 3$ možno vidieť na Obrázku 1.5. Takto skonštruovaný NKA očividne akceptuje $L_{[n]} \cup L_{[m]}$, takže $nsc(L_{[n]} \cup L_{[m]}) \leq n + m + 1$.

Potrebujeme ešte ukázať, že $nsc(L_{[n]} \cup L_{[m]}) \geq n + m + 1$.

Sporom, majme NKA $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L_{[n]} \cup L_{[m]}$ a $sc(A) \leq n + m$. Nech $(q_0, a^{2n}) \vdash (q_1, a^{2n-1}) \vdash ... \vdash (q_{2n}, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet NKA A na slove $a^{2n} \in L(A)$, kde $q_0, q_1, ..., q_{2n} \in K$. Keďže $sc(A) \leq n + m$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, 1 \leq j - i \leq n + m$. Nech sú to i a j také, že hodnota $j - i$ je minimálna - vďaka tomu sú stavy $q_{i+1}, ..., q_j$ po dvoch rôzne. Ak vo výpočte vynecháme konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j, dostávame akceptačný výpočet pre slovo $a^{2n-(j-i)}$. Tým pádom výraz $2n - (j - i)$ musí byť rovný buď n (ε to nemôže byť, pretože $j - i \leq n + m < 2n$) alebo km pre nejaké $k \in \mathbb{N}, k > 0$. Najprv sa pozrieme na prípad, že je rovný n.

Ak $2n - (j - i) = n$, potom $j - i = n$. Máme teda konfigurácie stavov $q_{i+1}, q_{i+2}, ..., q_j = q_i = q_{i+n}$, ktoré môžeme vo výpočte nielen vynechať, ale aj pumpovať. Je zrejmé, že tieto stavy tvoria v NKA A cyklus dĺžky n. Naviac, ak chceme tento cyklus pumpovať, nemusíme začínať len v q_{i+1}, ale v ktoromkoľvek z týchto n stavov.

Pozrime sa teraz na akceptačný výpočet automatu A na slove $a^m \in L(A)$ - nech je to $(p_0, a^m) \vdash (p_1, a^{m-1}) \vdash ... \vdash (p_m, \varepsilon)$, kde $p_0, p_1, ..., p_m \in K$. Ak by sa niektorý z týchto stavov rovnal niektorému zo stavov $q_{i+1}, q_{i+2}, ..., q_{i+n}$, mohli by sme týchto n stavov napumpovať do výpočtu, takže A by akceptoval slovo a^{m+n}. To by však bol spor, keďže n a m sú nesúdeliteľné. Preto, keďže automat A má maximálne $n + m$ stavov, výpočet $(p_0, a^m) \vdash (p_1, a^{m-1}) \vdash ... \vdash (p_m, \varepsilon)$ môže obsahovať maximálne m navzájom rôznych stavov. Teda existujú $k, l \in \mathbb{N}$ také, že $p_k = p_l, k < l, 1 \leq l - k \leq m$. Opäť, máme konfigurácie stavov p_{k+1} až p_l, ktoré môžeme vynechať či pumpovať, ktorých je najviac m. Presnejšie, musí ich byť práve m, inak by vďaka ich možnému vynechaniu A akceptoval slovo a^z pre nejaké $z \in \mathbb{N}, 0 < z < m$, čo by bol spor.

Zoberme ďalší akceptačný výpočet, a to na slove a^n - nech je to $(r_0, a^n) \vdash (r_1, a^{n-1}) \vdash ... \vdash (r_n, \varepsilon)$, kde $r_0, r_1, ..., r_n \in K$. Znova, ak by sa niektorý z týchto stavov rovnal niektorému zo stavov $p_1, p_2, ..., p_m = p_0$ (ktoré tvoria v NKA A cyklus podobne ako spomínané stavy $q_{i+1}, q_{i+2}, ..., q_{i+n}$, akurát teraz je jeho dĺžka m), mohli by sme ich napumpovať do výpočtu a tým pádom by A akceptoval slovo a^{n+m}, čím by sme sa dostali k sporu. Výpočet $(r_0, a^n) \vdash (r_1, a^{n-1}) \vdash ... \vdash (r_n, \varepsilon)$ sa preto skladá len z takých stavov, ktoré sú rozdielne od stavov vo výpočte $(p_0, a^m) \vdash (p_1, a^{m-1}) \vdash ... \vdash (p_m, \varepsilon)$. Máme teda dva výpočty automatu A, o ktorých sme ukázali, že nemajú žiadny spoločný stav. To je však spor, pretože musia mať spoločný aspoň počiatočný stav. Teda výraz $2n - (j - i)$ nemôže byť rovný n a do úvahy už prichádza len možnosť, že je rovný km.

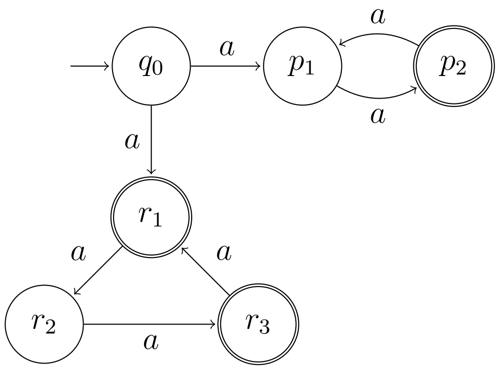
Nech $2n - (j - i) = km$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}, k > 0$, čiže $j - i = 2n - km$. Automat A musí akceptovať aj slovo $a^{2n+(j-i)}$ (pumpovanie q_{i+1} až q_j). Keďže $1 \leq j - i \leq n + m$ a $j - i \neq n$ (pretože $2n - (j - i) \neq n$), výraz $2n + (j - i) = 4n - km$ tiež musí byť nejakým násobkom m. Z toho dostávame, že aj $4n$ je násobkom m, teda $m \mid 4n$. Ďalej, keďže n a m sú nesúdeliteľné, musí platiť, že $m \mid 4$, čiže $m = 2$ alebo $m = 4$.

Nech $(s_0, a^{3n}) \vdash (s_1, a^{3n-1}) \vdash ... \vdash (s_{3n}, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu na slove $a^{3n} \in L(A)$, kde $s_0, s_1, ..., s_{3n} \in K$. Keďže $sc(A) \leq n + m$, existujú $f, g \in \mathbb{N}$ také, že $s_f = s_g, f < g, 1 \leq g - f \leq n + m$, pričom hodnota $g - f$ je minimálna. Máme teda konfigurácie stavov s_{f+1} až s_g, ktoré môžeme vo výpočte vynechať alebo pumpovať. Potom A akceptuje aj slovo $a^{3n-(g-f)}$. Podobne ako v prípade výrazu $2n-(j-i)$, výraz $3n - (g - f)$ musí byť rovný tentoraz buď $2n$ alebo lm pre nejaké $l \in \mathbb{N}, l > 0$. Ak $3n - (g - f) = 2n$, potom $g - f = n$ a sme vlastne v rovnakej situácii, ako keď sme mali $2n - (j - i) = n$ (teda $j - i = n$), o čom sme už ale dokázali, že to vedie k sporu.

Ostáva teda možnosť, že $3n - (g - f) = lm$ pre nejaké $l \in \mathbb{N}, l > 0$. Teraz ale pracujeme len s $m \in \{2, 4\}$. Z toho vieme, že číslo n je nepárne a teda aj $3n$ je nepárne. Naopak, lm je určite párne. Preto hodnota $g - f$ je nepárna. Ďalej, pozrime sa na slovo $a^{3n+2(g-f)} \in L(A)$ (dvakrát napumpované s_{f+1} až s_g). Keďže $3n$ je nepárne, hodnota výrazu $3n + 2(g - f)$ je tiež nepárna, teda môže byť len nejakým násobkom čísla n, a to nepárnym. Keďže $g - f \neq n$, nemôže to byť $5n$. Nemôže to ale byť ani $7n$, pretože $g - f \leq n + m < 2n$ a teda $2(g - f) \leq 2(n + m) < 4n$. Nemôže to byť ani nič iné, takže dostávame spor.

Tu sme vlastne dokázali vyslovené tvrdenie pre prípad, kedy $m = 2$ alebo $m = 4$ (v podstate by to bolo platné pre akékoľvek párne m). Každopádne, ukázali sme, že vetva dôkazu, kde $2n - (j - i) = km$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}, k > 0$, tiež vedie k sporu. Žiadna ďalšia možnosť už nie je, teda $nsc(L_{[n]} \cup L_{[m]}) \geq n + m + 1$. □

Lema 1.2.5. $nsc((L_{[4]} \; . \; \{a^3\})^C) = 4.$



Obr. 1.6: NKA pre $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 1.2.2 platí $nsc(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C \leq 4$. Potrebujeme ešte dokázať, že $nsc(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C \geq 4$.

Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = (L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$ a $sc(A) < 4$. Nech $(q_0, a^5) \vdash (q_1, a^4) \vdash ... \vdash (q_5, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet NKA A na slove $a^5 \in L(A)$, kde $q_0, q_1, ..., q_5 \in K$. Keďže $sc(A) < 4$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, 1 \leq j - i < 4$. Konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j môžeme ľubovoľne veľakrát napumpovať a výpočet bude stále akceptačný. Pozrime sa, k čomu to bude viesť pre jednotlivé možné hodnoty $j - i$:

- ak $j - i = 3$, potom $a^{5+2*3} = a^{11} \in L(A)$, čo je spor;

- ak $j - i = 2$, potom $a^{5+1*2} = a^7 \in L(A)$, čo je spor;

- ak $j - i = 1$, potom $a^{5+2*1} = a^7 \in L(A)$, čo je spor.

Taký NKA teda nemôže existovať, čiže $nsc(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C \geq 4$. □

Lema 1.2.6. $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C) = nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}) = 6.$

Dôkaz. Z Tvrdenia 1.2.2 vyplýva, že $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C) \leq 6$ (na Obrázku 1.3 je prechodový diagram NKA akceptujúceho tento jazyk so šiestimi stavmi).

Prechodový diagram NKA pre $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$ so šiestimi stavmi je na Obrázku 1.6. To, že tento jazyk skutočne akceptuje, vidno z toho, že stavom p_2 akceptuje práve $L_{[2]} - \{\varepsilon\}$, stavom r_1 akceptuje práve $L_{[3]} \,.\, \{a\}$ a stavom r_3 akceptuje práve $L_{[3]} - \{\varepsilon\}$, pretože $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\} = (L_{[2]} - \{\varepsilon\}) \cup (L_{[3]} - \{\varepsilon\}) \cup (L_{[3]} \,.\, \{a\})$, čo teraz aj ukážeme (presnejšie, ukážeme $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C = L_{[2]} \cup L_{[3]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a\})$, čo ale jasne korešponduje s bezepsilonovou verziou týchto jazykov).

Jazyk $L_{[2]} \cup L_{[3]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a\})$ vieme ekvivalentne zapísať ako $\{a^n \mid n \equiv 0 \pmod 2 \vee n \equiv 0 \pmod 3 \vee n \equiv 1 \pmod 3\}$. Podobne, $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C = \{a^n \mid n \not\equiv 5 \pmod 6\}$. Majme potom nejaké $n \in \mathbb{N}$. Vzťah $n \equiv 0 \pmod 2$ platí práve vtedy, keď $n \equiv 0 \pmod 6$ alebo $n \equiv 2 \pmod 6$ alebo $n \equiv 4 \pmod 6$. Podobne, $n \equiv 0 \pmod 3$ platí práve vtedy, keď $n \equiv 0 \pmod 6$ alebo $n \equiv 3 \pmod 6$. A napokon $n \equiv 1 \pmod 3$ platí práve vtedy, keď $n \equiv 1 \pmod 6$ alebo $n \equiv 4 \pmod 6$. To sú všetky zvyškové triedy v rámci modulo 6 okrem $5 \pmod 6$, teda spomenuté jazyky sú naozaj rovnaké.

Platí teda aj $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}) \leq 6$. Potrebujeme ešte ukázať $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C) \geq 6$ a $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}) \geq 6$. Vzhľadom na príbuznosť týchto jazykov urobíme simultánny dôkaz, kde bude od začiatku zrejmá pravdivosť odôvodnení pre oba jazyky, až na záver, kde dôkaz rozvetvíme.

Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$ (resp. $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$) a $sc(A) < 6$. Nech $(q_0, a^7) \vdash (q_1, a^6) \vdash \ldots \vdash (q_7, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet NKA A na slove $a^7 \in L(A)$, kde $q_0, q_1, \ldots, q_7 \in K$. Keďže $sc(A) < 6$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, 1 \leq j - i < 6$. Nech sú to i a j také, že hodnota $j - i$ je minimálna. Konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j môžeme ľubovoľne veľakrát napumpovať a výpočet bude stále akceptačný. Pozrime sa, k čomu to bude viesť:

- ak $j - i = 5$, potom $a^{7+2*5} = a^{17} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 4$, potom $a^{7+1*4} = a^{11} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 2$, potom $a^{7+2*2} = a^{11} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 1$, potom $a^{7+4*1} = a^{11} \in L(A)$, čo je spor.

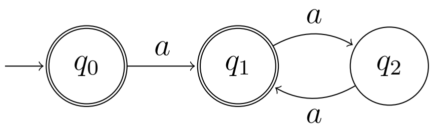
Ostáva len jedna možnosť - $j - i = 3$. Máme teda nejaké 3 navzájom rôzne stavy $q_{i+1}, q_{i+2}, q_i = q_j = q_{i+3}$, ktoré v NKA A vytvárajú cyklus.

Teraz nech $(p_0, a^2) \vdash (p_1, a) \vdash (p_2, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na slove $a^2 \in L(A)$, kde $p_0, p_1, p_2 \in K$. Ak je niektorý z týchto stavov rovný niektorému zo stavov $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}$, potom môžeme do výpočtu napumpovať napríklad jeden cyklus pozostávajúci z týchto stavov, teda dĺžky 3. Potom by ale A akceptoval slovo $a^5 \notin L(A)$, čo by bol spor, takže stavy p_0, p_1, p_2 sú všetky rozdielne od stavov $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}$. To znamená, že postupnosť p_0, p_1, p_2 sa skladá z najviac 2 navzájom rôznych stavov. Potom sa tam nejaký stav musí zopakovať. V tomto momente rozvetvujeme dôkaz samostatne pre $L(A) = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$ a $L(A) = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$.

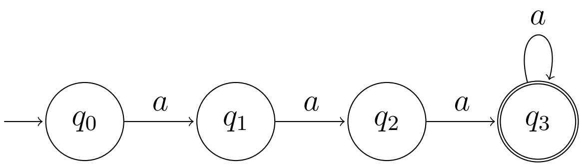
$L(A) = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$: Ak $p_0 = p_1$ alebo $p_1 = p_2$, môžeme do výpočtu pumpovať cykly dĺžky 1, takže A akceptuje $a^{2+3*1} = a^5$, čo je spor. Ostáva prípad, že $p_0 = p_2$, ktorý zase umožňuje pumpovať cykly dĺžky 2.

Vráťme sa k postupnosti $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_7$. Triviálne musí platiť, že $p_0 = q_0$. Potom je zrejmé, že aj v tomto výpočte môžeme pumpovať cykly dĺžky 2, takže A akceptuje $a^{7+2*2} = a^{11}$, čo je opäť spor.

$L(A) = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$: Stav p_0 je neakceptačný, pretože A neakceptuje ε. Keďže stav p_2 je akceptačný, $p_0 \neq p_2$. Potom platí buď $p_0 = p_1$ alebo $p_1 = p_2$, takže znovu, môžeme do výpočtu pumpovať cykly dĺžky 1, tým pádom A akceptuje $a^{2+3*1} = a^5$, čo je spor.



Obr. 1.7: NKA pre $(L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$



Obr. 1.8: NKA pre $L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}$

Ukázali sme, že $nsc((L_{[6]} \, . \, \{a^5\})^C) \geq 6$ a $nsc((L_{[6]} \, . \, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}) \geq 6$. $\square$

Lema 1.2.7. $nsc((L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) = 3$.

Dôkaz. Prechodový diagram NKA akceptujúceho jazyk $(L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$ s troma stavmi uvádzame na Obrázku 1.7. Zjavne naozaj akceptuje $(L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$, takže $nsc((L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) \leq 3$. Teraz ukážeme, že $nsc((L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) \geq 3$.

Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = (L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$ a $sc(A) < 3$. Nech $(q_0, a) \vdash (q_1, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na slove $a \in L(A)$, kde $q_0, q_1 \in K$. Zrejme oba tieto stavy sú akceptačné - q_0 preto, že A akceptuje ε, a q_1 preto, že je posledným stavom akceptačného výpočtu. Zároveň musí platiť $q_0 \neq q_1$, ináč by q_0 obsahoval slučku a A by akceptoval $L_{[1]}$, čo by bol spor.

Zatiaľ sme ukázali, že NKA A má dva rôzne akceptačné stavy q_0 a q_1, pričom $q_1 \in \delta(q_0, a)$. Potom ostávajú dve možnosti. Prvá je, že A má prechod z q_1 do q_0 alebo do q_1, čiže akceptuje aj slovo $a^2 \notin L(A)$, čo je spor. Druhá je, že nemá žiadny prechod z q_1, a teda akceptuje iba jazyk $\{\varepsilon, a\}$, čo je tiež spor.

Taký NKA teda neexistuje a $nsc((L_{[2]} \, . \, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) \geq 3$. $\square$

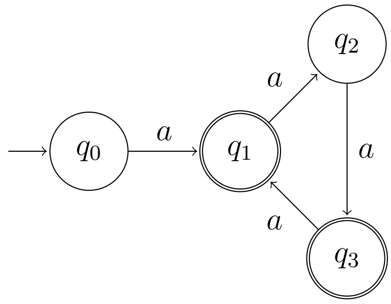
Lema 1.2.8. $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}) = 4$.

Dôkaz. Prechodový diagram NKA akceptujúceho jazyk $L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}$ so štyrmi stavmi vidno na Obrázku 1.8. Ľahko vidno, že skutočne akceptuje $L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}$, takže $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}) \leq 4$. Teraz ešte dokážeme, že $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}) \geq 4$.

Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}$ a $sc(A) < 4$. Nech $(q_0, a^3) \vdash (q_1, a^2) \vdash (q_2, a) \vdash (q_3, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na slove $a^3 \in L(A)$, kde $q_0, q_1, q_2, q_3 \in K$. Pozrime sa teraz na jednotlivé stavy tohto výpočtu:

- q_3 je akceptačný stav;

- q_2 nemôže byť akceptačný stav, inak by A akceptoval slovo a^2. Očividne ale má prechod do akceptačného stavu (q_3);



Obr. 1.9: NKA pre $(L_{[3]} \,.\, \{a^2\}) - \{\varepsilon\}$

- q_1 nemôže byť akceptačný stav, inak by A akceptoval slovo a. Nemôže mať ani prechod do akceptačného stavu, inak by A akceptoval a^2, teda $q_1 \neq q_2$. Na dva kroky výpočtu sa ale z q_1 môžeme dostať do akceptačného stavu, konkrétne cez q_2 do q_3;

- q_0 nemôže byť akceptačný stav, inak by A akceptoval slovo ε. Nemôže mať ani prechod do akceptačného stavu, inak by A akceptoval a. Z q_0 sa nevieme do akceptačného stavu dostať ani na dva kroky výpočtu, inak by A akceptoval a^2. Teda $q_0 \neq q_1$ a $q_0 \neq q_2$.

Ukázali sme, že automat A má minimálne jeden akceptačný stav a tri rôzne neakceptačné stavy, čo je samozrejme spor s predpokladom, že $sc(A) < 4$. Teda platí $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}) \geq 4$. □

Lema 1.2.9. *$nsc((L_{[3]} \,.\, \{a^2\}) - \{\varepsilon\}) = 4$.*

Dôkaz. Prechodový diagram NKA akceptujúceho $(L_{[3]} \,.\, \{a^2\}) - \{\varepsilon\}$ so štyrmi stavmi vidno na Obrázku 1.9. Platí teda $nsc((L_{[3]} \,.\, \{a^2\}) - \{\varepsilon\}) \leq 4$ a ešte dokážeme nerovnosť $nsc((L_{[3]} \,.\, \{a^2\}) - \{\varepsilon\}) \geq 4$.

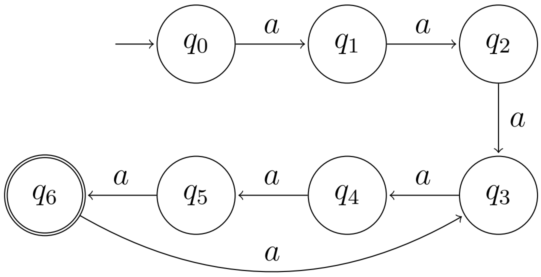
Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = (L_{[3]} \,.\, \{a^2\}) - \{\varepsilon\}$ a $sc(A) < 4$. Nech $(q_0, a^3) \vdash (q_1, a^2) \vdash (q_2, a) \vdash (q_3, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na slove $a^3 \in L(A)$, kde $q_0, q_1, q_2, q_3 \in K$. Keďže $sc(A) < 4$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, 1 \leq j - i < 4$. Pozrime sa na možnosti, ktoré z toho vyplývajú, s využitím schopnosti pumpovať a vynechať konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j vo výpočte:

- ak $j - i = 3$, potom platí $q_0 = q_3$, čo je spor, keďže stav q_0 je neakceptačný $(\varepsilon \notin L(A))$ a stav q_3 je akceptačný;

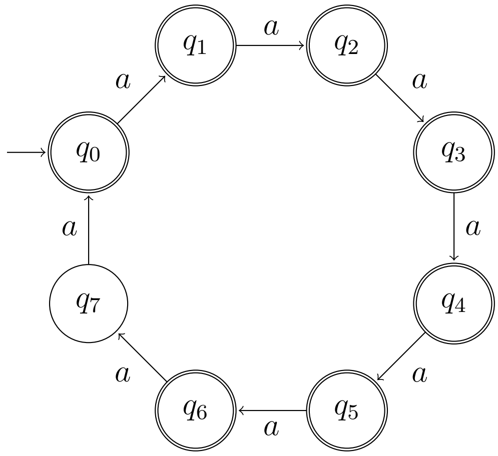
- ak $j - i = 2$, potom A akceptuje $a^{3+2} = a^5 \notin L(A)$, čo je spor;

- ak $j - i = 1$, potom A akceptuje $a^{3-1} = a^2 \notin L(A)$, čo je spor.

Každá možnosť vedie k sporu, teda taký NKA neexistuje. Potom $nsc((L_{[3]} \,.\, \{a^2\}) - \{\varepsilon\}) \geq 4$. □



Obr. 1.10: NKA pre $(L_{[4]} \; . \; \{a^2\}) - \{a^2\}$



Obr. 1.11: NKA pre $(L_{[8]} \; . \; \{a^7\})^C$

Lema 1.2.10. *$nsc((L_{[4]} \; . \; \{a^2\}) - \{a^2\}) = 7$.*

Dôkaz. Prechodový diagram NKA akceptujúceho jazyk $(L_{[4]} \; . \; \{a^2\}) - \{a^2\}$ so siedmimi stavmi vidno na Obrázku 1.10. Teda $nsc((L_{[4]} \; . \; \{a^2\}) - \{a^2\}) \leq 7$ a potrebujeme ešte ukázať, že $nsc((L_{[4]} \; . \; \{a^2\}) - \{a^2\}) \geq 7$.

Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = (L_{[4]} \; . \; \{a^2\}) - \{a^2\}$ a $sc(A) < 7$. Nech $(q_0, a^6) \vdash (q_1, a^5) \vdash ... \vdash (q_6, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na slove $a^6 \in L(A)$, kde $q_0, q_1, ..., q_6 \in K$. Keďže $sc(A) < 7$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, 1 \leq j - i < 7$. Ďalej, konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j môžeme vo výpočte vynechať a ten bude stále akceptačný. Teda A akceptuje aj slovo $a^{6-(j-i)}$. To je však spor, pretože najkratšie slovo, ktoré A môže akceptovať, je práve a^6.

Teda platí $nsc((L_{[4]} \; . \; \{a^2\}) - \{a^2\}) \geq 7$. □

Lema 1.2.11. *$nsc((L_{[8]} \; . \; \{a^7\})^C) = 8$.*

Dôkaz. Prechodový diagram NKA akceptujúceho jazyk $(L_{[8]} \; . \; \{a^7\})^C$ s ôsmimi stavmi môžeme vidieť na Obrázku 1.11. Teda platí $nsc((L_{[8]} \; . \; \{a^7\})^C) \leq 8$ a ideme dokázať $nsc((L_{[8]} \; . \; \{a^7\})^C) \geq 8$.

Sporom, nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = (L_{[8]} \; . \; \{a^7\})^C$ a $sc(A) < 8$. Nech $(q_0, a^9) \vdash (q_1, a^8) \vdash ... \vdash (q_9, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na slove

$a^9 \in L(A)$, kde $q_0, q_1, ..., q_9 \in K$. Keďže $sc(A) < 8$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, 1 \leq j - i < 8$. Nech sú to i a j také, že hodnota $j - i$ je minimálna. Ďalej, konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j môžeme ľubovoľne veľakrát napumpovať do výpočtu a ten bude stále akceptačný. Preto sa teraz pozrieme na možnosti, ktoré z toho vyplývajú:

- ak $j - i = 7$, potom $a^{9+2*7} = a^{23} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 6$, potom $a^{9+1*6} = a^{15} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 5$, potom $a^{9+6*5} = a^{39} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 3$, potom $a^{9+2*3} = a^{15} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 2$, potom $a^{9+3*2} = a^{15} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 1$, potom $a^{9+6*1} = a^{15} \in L(A)$, čo je spor.

Ostáva len jedna možnosť - $j - i = 4$. Máme teda nejaké štyri navzájom rôzne stavy $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}, q_i = q_j = q_{i+4}$, ktoré v A vytvárajú cyklus. Pozrime sa na ďalší výpočet automatu A.

Nech $(p_0, a^3) \vdash (p_1, a^2) \vdash (p_2, a) \vdash (p_3, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na slove $a^3 \in L(A)$, kde $p_0, p_1, p_2, p_3 \in K$. Je jasné, že každý zo stavov p_0, p_1, p_2, p_3 musí byť rozdielny od stavov $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}, q_{i+4}$, inak by sme do tohto výpočtu mohli napumpovať napríklad jeden cyklus dĺžky 4 (pozostávajúci zo stavov $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}, q_{i+4}$), čo by viedlo k akceptácii slova $a^7 \notin L(A)$. Čiže postupnosť p_0, p_1, p_2, p_3 sa skladá z maximálne troch navzájom rôznych stavov. Potom existujú $k, l \in \mathbb{N}$ také, že $p_k = p_l, k < l, 1 \leq l - k \leq 3$. Opäť sa pozrieme na možnosti pumpovania konfigurácií stavov p_{k+1} až p_l vo výpočte:

- ak $j - i = 3$, potom $a^{3+4*3} = a^{15} \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 2$, potom $a^{3+2*2} = a^7 \in L(A)$, čo je spor;
- ak $j - i = 1$, potom $a^{3+4*1} = a^7 \in L(A)$, čo je spor.

Iné možnosti už nie sú, teda na akceptáciu jazyka $(L_{[8]} \,.\, \{a^7\})^C$ nejakým NKA potrebujeme aspoň osem stavov, t. j. $nsc((L_{[8]} \,.\, \{a^7\})^C) \geq 8$. $\square$

1.3 Čiastočne užitočná verzus (úplne) užitočná informácia

V tejto časti najprv dokážeme jedno pomocné tvrdenie, ktoré využijeme v dôkaze následnej vety, ktorou formálne dokážeme vzťah medzi jazykmi typu $L_{[n]}$ vzhľadom na definíciu čiastočne užitočnej informácie.

Lema 1.3.1. *Nech $m, n, p \in \mathbb{N}$, kde $m, n, p > 0$. $m \mid p$ a $n \mid p$ práve vtedy, keď $lcm(m, n) \mid p$.* [1]

Dôkaz. $\Leftarrow$: Nech $lcm(m, n) \mid p$. Vieme, že $lcm(m, n) = am = bn$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{N}$ také, že $a, b > 0$. Teda $am \mid p$ a $bn \mid p$, z čoho jasne vyplýva $m \mid p$ a $n \mid p$.

$\Rightarrow$: Nech $m \mid p$ a $n \mid p$. Najmenšie prirodzené číslo okrem nuly deliteľné m aj n je $lcm(m, n)$. Preto $p \geq lcm(m, n)$, takže p vieme vyjadriť ako $p = a^*lcm(m, n) + b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $0 \leq b < lcm(m, n)$. Ďalej, keďže $m \mid p$, $n \mid p$, $m \mid (a^*lcm(m, n))$ a $n \mid (a^*lcm(m, n))$, tak aj $m \mid b$ a $n \mid b$. Tým pádom b môže byť jedine 0. Teda $p = a^*lcm(m, n)$, čo znamená, že $lcm(m, n) \mid p$. □

Veta 1.3.2. *Nech $k, l \in \mathbb{N}, k < l$. $L_{[k]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$ práve vtedy, keď existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $m < l$ a $lcm(k, m) = cl$ pre nejaké $c \in \mathbb{N}, c > 0$.*

Dôkaz. $\Leftarrow$: Majme $m \in \mathbb{N}$ také, že $m < l$ a $lcm(k, m) = cl$ pre nejaké $c \in \mathbb{N}, c > 0$. Z Lemy 1.3.1 vyplýva, že $L_{[k]} \cap L_{[m]} = L_{[cl]}$. Zjavne platí, že $L_{[cl]} \subseteq L_{[l]}$. Na základe použitia Tvrdenia 1.1.11 vidno, že podmienky týkajúce sa nedeterministickej stavovej zložitosti sú splnené. Teda $L_{[k]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$.

$\Rightarrow$: Nech $L_{[k]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$. Potom podľa Definície 1.1.9 existuje $L_{part} \in \mathcal{R}$ taký, že $L_{part} \subseteq L_{[l]}$ a $L_{part} = L_{[k]} \cap L_{new}$ pre nejaký $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že okrem iného $nsc(L_{new}) < nsc(L_{[l]})$, teda $nsc(L_{new}) < l$ podľa Tvrdenia 1.1.11. Majme NKA $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L_{new}$ a $sc(A) = nsc(L_{new}) < l$. Slovo a^{dl} pre nejaké $d \in \mathbb{N}, d > 0$ musí patriť do L_{part}, pretože L_{part} je nekonečná podmnožina $L_{[l]}$. Potom tiež $a^{dl} \in L_{new}$ a $a^{dl} \in L_{[k]}$. Nech $(q_0, a^{dl}) \vdash (q_1, a^{dl-1}) \vdash ... \vdash (q_{dl}, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet NKA A na $a^{dl} \in L(A)$, kde $q_0, q_1, ..., q_{dl} \in K$. Keďže $sc(A) < l$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, j - i < l$. Konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j môžeme vo výpočte pumpovať ľubovoľne veľakrát, pričom výpočet bude stále akceptačný. Počet týchto konfigurácií označme $r := j - i$. Nech $x = lcm(k, r)$. Potom $a^{dl+x} \in L_{new}$ a tiež $a^{dl+x} \in L_{[k]}$, z čoho vyplýva, že $a^{dl+x} \in L_{part}$ a teda aj $a^{dl+x} \in L_{[l]}$. Keďže $a^{dl+x} \in L_{[l]}$, musí platiť, že $l \mid x$, teda $x = cl$ pre nejaké $c \in \mathbb{N}, c > 0$. Ďalej, keďže $cl = x = lcm(k, r)$, platí tiež $k \mid cl$.

Zoberme teraz najmenšie m také, že $lcm(k, m) = cl$. Také m bude vyzerať nasledovne: Nech $p_1, p_2, ..., p_n$ sú všetky prvočísla menšie alebo rovné cl, $n \in \mathbb{N}$. Potom $k = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$ a $r = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, kde $k_i, r_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, ..., n\}$. Keďže $x = p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_n^{x_n} = lcm(k, r)$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ platí $x_i = max(k_i, r_i)$. Vieme tiež, že $x = cl$. Pre $m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_n^{m_n}$ teda bude platiť:

$$m_i = \begin{cases} x_i & \text{ak } k_i < x_i \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

[1] lcm - najmenší spoločný násobok, z angl. *least common multiple*

Ostáva nám dokázať, že $m < l$. Pozrime sa na jednotlivé m_i. Vieme, že k delí cl resp. x, takže $k_i \leq x_i$. Ak $k_i = x_i$, potom $m_i = 0 \leq r_i$. Ak $k_i < x_i$, potom $m_i = x_i = r_i \leq r_i$. Preto $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ $m_i \leq r_i$, takže m delí r a teda $m \leq r < l$. □

Poznámka. Táto veta je analógiou Lemy 2.1.3 z [5], ktorá je vlastne špeciálnym prípadom našej vety - c sa tam musí rovnať 1. Teda ak $c = 1$, vtedy je $L_{[k]}$ nielen čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$, ale aj (úplne) užitočná pre $L_{[l]}$.

Teraz dokážeme vetu, hovoriacu v podstate o tom, že neexistuje jazyk typu $L_{[n]}$, pre ktorý existuje nejaká čiastočne užitočná informácia a neexistuje žiadna (úplne) užitočná informácia.

Veta 1.3.3. *Nech $k, l \in \mathbb{N}, k < l$. Ak je $L_{[k]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$, potom existuje $k' \in \mathbb{N}$ také, že $L_{[k']}$ je (úplne) užitočná pre $L_{[l]}$, pričom $k' \leq k$.*

Dôkaz. Nech $L_{[k]}$ je čiastočne užitočný pre $L_{[l]}$, potom existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $m < l$ a $lcm(k, m) = cl$ pre nejaké $c \in \mathbb{N}, c > 0$. Potrebujeme dokázať, že existuje spomenuté k' a tiež $m' \in \mathbb{N}$ také, že $m' < l$ a $lcm(k', m') = l$, pretože podľa poznámky k predchádzajúcej vete je potom $L_{[k']}$ (úplne) užitočná pre $L_{[l]}$.

Ak $c = 1$, potom stačí zvoliť $k' := k$ a $m' := m$.

Teraz nech $c > 1$. Podobne ako v dôkaze Lemy 1, nech $p_1, p_2, ..., p_n$ sú všetky prvočísla menšie alebo rovné cl, $n \in \mathbb{N}$. Potom pre nejaké $c_i, k_i, l_i, m_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, ..., n\}$ platia nasledujúce rovnosti:

- $c = p_1^{c_1} p_2^{c_2} ... p_n^{c_n}$;
- $k = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$;
- $l = p_1^{l_1} p_2^{l_2} ... p_n^{l_n}$;
- $m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_n^{m_n}$;
- $cl = p_1^{c_1+l_1} p_2^{c_2+l_2} ... p_n^{c_n+l_n}$.

Keďže $lcm(k, m) = cl$, musí platiť, že $c_i + l_i = max(k_i, m_i)$. Jednotlivé k'_i a m'_i pre $k' = p_1^{k'_1} p_2^{k'_2} ... p_n^{k'_n}$ a $m' = p_1^{m'_1} p_2^{m'_2} ... p_n^{m'_n}$ budeme voliť tak, že $k'_i = max(k_i - c_i, 0)$ a $m'_i = max(m_i - c_i, 0)$. Preto ak $k_i > m_i$, tak $k'_i = k_i - c_i = c_i + l_i - c_i = l_i$, inak $m'_i = m_i - c_i = c_i + l_i - c_i = l_i$. Teda $l_i = max(k'_i, m'_i) \implies lcm(k', m') = l$. Zjavne tiež $m' \leq m < l$ a $k' \leq k$. □

Po tejto vete prirodzene vzniká otázka, či podobný vzťah neplatí aj vo všeobecnosti. V nasledujúcej vete dokážeme, že nie.

Veta 1.3.4. *Existuje $L_{prob} \in \mathcal{R}$ taký, že existuje L_{adv}, ktorá je čiastočne užitočná pre L_{prob}, a zároveň neexistuje L'_{adv}, ktorá by bola (úplne) užitočná pre L_{prob}.*

Dôkaz. Príkladom takého problému je $(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$. Nech teda $L_{prob} = (L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$. Najprv dokážeme existenciu dodatočnej informácie čiastočne užitočnej pre tento jazyk.

Nech $L_{adv} = L_{[2]}$ a $L_{new} = L_{[1]} - \{\varepsilon\}$. Potom $L_{part} = L_{[2]} \cap (L_{[1]} - \{\varepsilon\}) = L_{[2]} - \{\varepsilon\}$. Ľahko vidno, že jazyk $(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$ obsahuje okrem iného všetky slová párnej dĺžky nad danou abecedou, teda naozaj $L_{part} \subseteq L_{prob}$. Splnené sú tiež podmienky ohľadom stavovej zložitosti - podľa Lemy 1.2.5 $nsc((L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C) = 4$, podľa Lemy 1.2.3 $nsc(L_{[2]} - \{\varepsilon\}) = 3$ a $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon\}) = 2$ a podľa Tvrdenia 1.1.11 $nsc(L_{[2]}) = 2$ -, takže našli sme dodatočnú informáciu čiastočne užitočnú pre tento problém.

Druhú časť tvrdenia dokážeme sporom. Nech teda jazyk L'_{adv} je dodatočná informácia taká, že je (úplne) užitočná pre daný problém. O L'_{adv} sú zrejmé dva fakty. Po prvé, nemôže byť rovná jazyku $L_{[1]} = \{a\}^*$, pretože v tom prípade je jazyk L_{new} v rovnosti $L_{prob} = L'_{adv} \cap L_{new}$ jednoznačne určený - musí sa rovnať L_{prob}. To je však problém, keďže $nsc(L_{prob}) = nsc(L_{prob})$. Po druhé, L'_{adv} musí obsahovať každé slovo patriace do L_{prob}, inými slovami $L_{prob} \subseteq L'_{adv}$.

Nech teraz A je NKA taký, že $L(A) = L'_{adv}$ a $sc(A) = nsc(L'_{adv})$. Keďže $nsc(L_{prob}) = 4$, A musí mať menej ako 4 stavy. Pozrieme sa na konštrukciu takého automatu.

Začnime počiatočným stavom q_0. Keďže L_{prob} obsahuje ε, stav q_0 musí byť akceptačný. q_0 nemôže obsahovať slučku (prechod do toho istého stavu) na písmeno a, inak $L(A) = L_{[1]}$. Je tiež zrejmé, že q_0 nemôže byť jediným (dosiahnuteľným) stavom tohto automatu, takže má prechod na písmeno a do ďalšieho stavu.

Nech q_1 je týmto ďalším stavom. Opäť, keďže L_{prob} obsahuje slovo a, stav q_1 musí byť akceptačný. Potom nemôže obsahovať slučku, inak $L(A) = L_{[1]}$. Takisto nemôže obsahovať prechod naspäť do počiatočného stavu, inak znovu $L(A) = L_{[1]}$. Keďže potrebujeme akceptovať aj slovo a^2, q_1 musí mať prechod na písmeno a, a to do nejakého ďalšieho (nového) stavu.

Označme taký stav q_2. Tým pádom sme dosiahli maximálny možný počet stavov automatu A. Z analogického dôvodu ako pri predchádzajúcich stavoch, stav q_2 musí byť akceptačný. Dostali sme sa ale do bodu, kedy nasledujúce slovo - slovo a^3 - môže, ale nemusí patriť do L'_{adv}, teda A ho môže, ale nemusí akceptovať. V situácii, ak by ho akceptoval, by musel mať q_2 prechod na písmeno a do niektorého akceptačného stavu - q_0, q_1 alebo q_2. To by ale viedlo k tomu, že $L(A) = L_{[1]}$. Ostáva prípad, že A slovo a^3 neakceptuje. Jedna možnosť je, že by mal q_2 prechod do nejakého neakceptačného stavu - taký ale nemá k dispozícii. Ostáva možnosť, že sa v tomto stave automat A zasekne. Potom A akceptuje jazyk $\{\varepsilon, a, a^2\}$, čo ale tiež vedie k sporu.

Čiže taký NKA neexistuje, teda neexistuje ani L'_{adv} taká, že je (úplne) užitočná pre $L_{prob} = (L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$. □

1.4 Čiastočná užitočnosť informácie ako relácia

Definícia čiastočne užitočnej informácie v podstate hovorí o vzťahu dvoch regulárnych jazykov. Celkom prirodzene teda definuje reláciu na triede regulárnych jazykov. Budeme ju nazývať čiastočná užitočnosť informácie a označovať P_n.

Definícia 1.4.1. Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. *Čiastočnú užitočnosť informácie* definujeme ako reláciu $P_n \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, pre ktorú platí, že $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n$, ak L_{adv} je čiastočne užitočná pre L_{prob}.

V nasledujúcich troch tvrdeniach dokážeme niektoré základné vlastnosti tejto relácie.

Tvrdenie 1.4.2. *Relácia P_n je asymetrická.* [2]

Dôkaz. Sporom, nech $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n$ aj $(L_{prob}, L_{adv}) \in P_n$. Potom podľa Definície 1.1.9 platí $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob})$ aj $nsc(L_{prob}) < nsc(L_{adv})$, čo je spor. □

Tvrdenie 1.4.3. *Relácia P_n nie je tranzitívna.*

Dôkaz. Zoberme jazyky $L_{[2]}, L_{[6]}$ a $L_{[12]}$. Podľa Vety 1.3.2 platí $(L_{[2]}, L_{[6]}) \in P_n$ $(L_{new} = L_{[3]})$ a $(L_{[6]}, L_{[12]}) \in P_n$ $(L_{new} = L_{[4]})$. Z tej istej vety tiež vyplýva, že $(L_{[2]}, L_{[12]}) \notin P_n$. Našli sme teda príklad, kde relácia P_n nie je tranzitívna. □

Tvrdenie 1.4.4. *Relácia P_n nie je trichotomická.*

Dôkaz. Nech p a q sú nejaké prvočísla také, že $p < q$. Sporom, nech existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $m < q$ a $lcm(p, m) = cq$ pre nejaké $c \in \mathbb{N}, c > 0$. Keďže $lcm(p, m) = cq$, $p \mid cq$. Potom keďže $p \nmid q$, $p \mid c$, teda aj $p \leq c$. Tým pádom platí $pq \leq cq = lcm(p, m)$. Zároveň ale musí platiť $pq \leq lcm(p, m) \leq pm$, čo je spor s tým, že $m < q$. Také m teda neexistuje, čiže podľa Vety 1.3.2 $L_{[p]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[q]}$ a samozrejme ani obrátene.

Máme $L_{[p]} \neq L_{[q]}$, $(L_{[p]}, L_{[q]}) \notin P_n$ a $(L_{[q]}, L_{[p]}) \notin P_n$, takže relácia P_n nie je trichotomická. □

1.5 Maximálna podmnožina

Čiastočná užitočnosť prináša oproti (úplnej) užitočnosti nový objekt na pozorovanie - nekonečné podmnožiny L_{part}. Ak máme nejakú dodatočnú informáciu L_{adv} čiastočne užitočnú pre problém L_{prob}, môžu existovať viaceré L_{part} spĺňajúce definíciu. Zoberme napríklad $L_{adv} = L_{[3]}$ a $L_{prob} = L_{[6]}$. Prirodzenou voľbou pre jazyk L_{new} je $L_{[2]}$, keďže

[2] Teda je ireflexívna a antisymetrická.

potom $L_{part} = L_{[3]} \cap L_{[2]} = L_{[6]} = L_{prob}$. Do úvahy ale prichádza aj $L_{new} = L_{[4]}$, kedy $L_{part} = L_{[3]} \cap L_{[4]} = L_{[12]} \subseteq L_{[6]} = L_{prob}$. Je to síce zjavne horšia voľba, ale je v súlade s definíciou.

V tejto časti preto definujeme pojem maximálna podmnožina problému vzhľadom na dodatočnú informáciu, ktorým by sme chceli (neformálne povedané) zachytiť takú podmnožinu, kde je daná dodatočná informácia najlepšie (maximálne) využitá. Vzniká však otázka, či je takáto podmnožina pre danú L_{adv} a L_{prob} určená jednoznačne, alebo ich môže byť aj viacero. Aj tým sa teraz budeme zaoberať, ešte predtým ale formálne definujeme triedu jazykov pozostávajúcu z možných L_{part} pre danú L_{adv} a L_{prob}.

Definícia 1.5.1. Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. Definujeme triedu jazykov $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ danú predpisom $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}) = \{L_{part} \mid \exists L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že $L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$ je nekonečný jazyk a platí $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n \wedge L_{part} \subseteq L_{prob} \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{part}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})\}$.

Poznámka. Trieda $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ môže byť aj prázdna - zjavne práve vtedy, ak L_{adv} nie je čiastočne užitočná pre L_{prob}.

Definícia 1.5.2. Nech jazyky $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$ sú také, že trieda $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ je neprázdna. Zavedieme označenie $maxPart(L_{adv}, L_{prob})$ dané predpisom $maxPart(L_{adv}, L_{prob}) = \{L_{mpart} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}) \mid \nexists L_{part} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ taká, že $L_{mpart} \subsetneq L_{part}\}$. Jazyky patriace do $maxPart(L_{adv}, L_{prob})$ budeme nazývať *maximálne podmnožiny problému L_{prob} vzhľadom na dodatočnú informáciu L_{adv}*.

Ak sa vrátime k spomenutému príkladu s $L_{adv} = L_{[3]}$ a $L_{prob} = L_{[6]}$, vidíme, že $L_{part} = L_{[6]}$ je maximálna podmnožina, pretože je dokonca nadmnožinou všetkých jazykov z triedy $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$, zatiaľ čo $L_{part} = L_{[12]}$ maximálnou podmnožinou nie je ($L_{[12]} \subsetneq L_{[6]}$). Z toho vidno, že v tomto prípade je maximálna podmnožina určená jednoznačne a je ňou $L_{[6]}$.

Teraz ale nasleduje veta, v ktorej dokážeme existenciu takého prípadu, kde maximálna podmnožina nie je určená jednoznačne.

Veta 1.5.3. *Existujú jazyky $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$ také, že existujú aspoň dve rôzne maximálne podmnožiny L_{prob} vzhľadom na L_{adv}, t. j., že $|maxPart(L_{adv}, L_{prob})| > 1$.*

Dôkaz. Nech $L_{adv} = L_{[1]} - \{\varepsilon\}$ a $L_{prob} = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$. Najprv ukážeme, že $L_{[1]} - \{\varepsilon\}$ je čiastočne užitočná pre $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$ využitím dvoch rôznych L_{new}.

Nech $L_{new_1} = L_{[2]}$ a $L_{new_2} = (L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C$. Prislúchajúce podmnožiny sú nasledovné - $L_{part_1} = (L_{[1]} - \{\varepsilon\}) \cap L_{[2]} = L_{[2]} - \{\varepsilon\}$, $L_{part_2} = (L_{[1]} - \{\varepsilon\}) \cap (L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C = (L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C - \{\varepsilon\}$. To, že to naozaj sú podmnožiny L_{prob}, vidno z rovnosti $L_{[2]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$, o ktorej ešte pohovoríme neskôr. Podmienky ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti - podľa Tvrdenia 1.2.1 $nsc(L_{[2]}) = 2$, podľa Lemy

1.2.6 $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C) = 6$, podľa Lemy 1.2.3 $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon\}) = 2$ a $nsc(L_{[2]} - \{\varepsilon\}) = 3$, podľa Tvrdenia 1.2.2 $nsc(L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C) \leq 3$ a podľa Lemy 1.2.9 $nsc((L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C - \{\varepsilon\}) = 4$ - sú splnené. Takže $L_{[1]} - \{\varepsilon\}$ je čiastočne užitočná pre $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$, pričom máme $L_{part_1}, L_{part_2} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$.

Teraz by sme chceli ukázať, že neexistuje jazyk L'_{new} taký, že $L'_{part} = L_{adv} \cap L'_{new}$, kde $L'_{part} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ a zároveň $L'_{part} \supseteq L_{part_1}$ a $L'_{part} \supseteq L_{part_2}$, pretože z toho bude zrejmé, že existujú aspoň dve rôzne maximálne podmnožiny L_{prob} vzhľadom na L_{adv}, a to nejaká $L_{mpart_1} \supseteq L_{part_1}$ a nejaká $L_{mpart_2} \supseteq L_{part_2}$.

Sporom, majme taký jazyk L'_{new}. Keďže $L'_{part} \supseteq L_{part_1}$ a $L'_{part} \supseteq L_{part_2}$, platí $L'_{part} \supseteq L_{part_1} \cup L_{part_2} = (L_{[2]} - \{\varepsilon\}) \cup ((L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C - \{\varepsilon\}) = (L_{[2]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C) - \{\varepsilon\}$. Tu znova využijeme rovnosť $L_{[2]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$. Teda $L'_{part} \supseteq (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$, ale keďže tiež musí platiť $L'_{part} \subseteq L_{prob}$, potom $L'_{part} = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$ (nemôže to byť $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$, pretože $L_{adv} = L_{[1]} - \{\varepsilon\}$). Tým pádom máme dve možnosti pre L'_{new}, a to $L'_{new} = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$ alebo $L'_{new} = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}$. Prvá možnosť neprichádza do úvahy, pretože by bola narušená podmienka $nsc(L'_{new}) < nsc(L_{prob})$. Podobne aj druhá možnosť, pretože neplatí $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}) < nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C)$ (využívame tu Lemu 1.2.6, podľa ktorej $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C) = nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C - \{\varepsilon\}) = 6$). Ostáva nám teda dokázať, že skutočne $L_{[2]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$.

Tu si stačí uvedomiť, že $(L_{[3]} \,.\, \{a^2\})^C$ je vlastne ten istý jazyk ako $L_{[3]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a\})$. O rovnosti $(L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C = L_{[2]} \cup L_{[3]} \cup (L_{[3]} \,.\, \{a\})$ sme už hovorili v dôkaze Lemy 1.2.6. $\square$

Kapitola 2

Triedy definované čiastočnou užitočnosťou

V predchádzajúcej kapitole sme pomocou čiastočnej užitočnosti informácie definovali triedu jazykov obsahujúcu podmnožiny problému vzhľadom na dodatočnú informáciu. Podobným spôsobom vieme definovať triedy problémov, pre ktoré je čiastočne užitočná daná dodatočná informácia, alebo naopak, triedy dodatočných informácií čiastočne užitočných pre daný problém.

To sú triedy, ktorých vlastnosťami sa budeme zaoberať v tejto kapitole. Budú nás zaujímať predovšetkým ich uzáverové vlastnosti na vybrané štandardné operácie. Pozrieme sa tiež na to, či sú usporiadané vzhľadom na množinovú inklúziu.

Poznámka. Hovoríme o triedach, ktoré sú určené nejakým konkrétnym jazykom prípadne dvojicou jazykov. Preto pokiaľ ide o ich uzavretosť na nejakú operáciu, zaujímajú nás buď tvrdenia typu "existuje regulárny jazyk (resp. dvojica jazykov) taký, že trieda ním určená nie je uzavretá na danú operáciu", alebo tvrdenia typu "pre každý regulárny jazyk (resp. dvojicu jazykov) platí, že trieda ním určená je uzavretá na danú operáciu".

2.1 Triedy podmnožín

Tu sa najskôr pozrieme na uzáverové vlastnosti takých tried podmnožín, kde máme daný problém L_{prob} aj dodatočnú informáciu L_{adv}. Na tento účel už máme zadefinovanú triedu $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ (Definícia 1.5.1).

Veta 2.1.1. *Existuje dvojica jazykov L_{adv}, L_{prob} (pre každú operáciu zvlášť) taká, že trieda $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ nie je uzavretá na zjednotenie, prienik, zreťazenie, iteráciu a komplement.*

Dôkaz.

($\cup$) Nech $L_{adv} = L_{[2]}$, $L_{prob} = (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C$. Pomerne ľahko vidno, že jazyky $L_{[6]}$ ($= L_{[2]} \cap L_{[3]}$) a $L_{[10]}$ ($= L_{[2]} \cap L_{[5]}$) patria do $\mathcal{P}(L_{[2]}, (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C)$ - $L_{[6]} \subseteq (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C$ aj $L_{[10]} \subseteq (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C$ a čo sa týka splnenia podmienok ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti, stačí použiť Tvrdenie 1.2.1 a Lemu 1.2.6 (podľa ktorej $nsc((L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C) = 6)$. To, čo teraz chceme dokázať, je, že neexistuje jazyk $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že $nsc(L_{new}) < nsc((L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C) = 6$ a zároveň $L_{[2]} \cap L_{new} = L_{[6]} \cup L_{[10]}$.

Sporom, majme $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že $nsc(L_{new}) < 6$ a $L_{[2]} \cap L_{new} = L_{[6]} \cup L_{[10]}$. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{new}$ a $sc(A) = nsc(L_{new})$. Automat A musí akceptovať slovo a^6 - nech $(q_0, a^6) \vdash (q_1, a^5) \vdash ... \vdash (q_6, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet NKA A na slove $a^6 \in L(A)$, kde $q_0, q_1, ..., q_6 \in K$. Keďže $sc(A) < 6$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, j - i < 6$. Nech sú to i a j také, že hodnota $j - i$ je minimálna. Konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j môžeme v ľubovoľnom počte pumpovať v rámci výpočtu a ten bude stále akceptačný. Dĺžka pumpovanej časti je $j-i$ a v závislosti od konkrétnej hodnoty automat A akceptuje aj tieto slová:

- ak $j - i = 5$, $a^{6+2*5} = a^{16} \in L(A)$;
- ak $j - i = 4$, $a^{6+2*4} = a^{14} \in L(A)$;
- ak $j - i = 2$, $a^{6+1*2} = a^{8} \in L(A)$;
- ak $j - i = 1$, $a^{6+2*1} = a^{8} \in L(A)$.

Každé z týchto slov vedie k sporu. Sú totiž párnej dĺžky a teda musia patriť aj do $L_{[2]} \cap L_{new} = L_{[6]} \cup L_{[10]}$, zároveň ale nie sú násobkami 6 ani 10.

Potom ostáva iba tá možnosť, že $j - i = 3$, teda $j = i + 3$. Platí, že stavy $q_{i+1}, q_{i+2}, q_i = q_j = q_{i+3}$ sú navzájom rôzne (inak by to bol spor s minimalitou $j - i$). Opäť tu využijeme myšlienku, ktorú sme používali pri dokazovaní dolných odhadov nedeterministickej stavovej zložitosti jazykov. V automate A zjavne existujú prechody na a z q_i do q_{i+1}, z q_{i+1} do q_{i+2} a z q_{i+2} do q_{i+3}. To znamená, že pumpovaný cyklus týchto stavov nemusí začínať len v q_{i+1} (teda $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}$), ale aj v q_{i+2} (teda $q_{i+2}, q_{i+3}, q_{i+1}$) či v q_{i+3} (teda $q_{i+3}, q_{i+1}, q_{i+2}$). Isté však je to, že jeho dĺžka je vždy 3.

Pozrime sa teraz na akceptačný výpočet automatu A na slove $a^{10} \in L(A)$ - nech je to $(p_0, a^{10}) \vdash (p_1, a^9) \vdash ... \vdash (p_{10}, \varepsilon)$, kde $p_0, p_1, p_2, ..., p_{10} \in K$. Ak tento výpočet obsahuje niektorý zo stavov $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}$, potom vieme do výpočtu pumpovať cyklus týchto stavov (dĺžky 3), takže A akceptuje napríklad aj slovo $a^{10+2*3} = a^{16}$, čo je spor. Preto, keďže A má najviac 5 stavov (menej ako 6), výpočet $(p_0, a^{10}) \vdash (p_1, a^9) \vdash ... \vdash (p_{10}, \varepsilon)$ môže obsahovať nanajvýš dva stavy. To znamená, že tento výpočet používa cykly stavov dĺžky maximálne 2. Tieto cykly samozrejme môžeme pumpovať aj naďalej a či už majú dĺžku 2 alebo 1, v každom prípade automat A akceptuje napríklad slovo $a^{14} = a^{10+2*2} = a^{10+4*1} \notin L(A)$, čo je tiež spor.

Ukázali sme, že neexistuje $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že $nsc(L_{new}) < 6$ a $L_{[2]} \cap L_{new} = L_{[6]} \cup L_{[10]}$. Preto $L_{[6]} \cup L_{[10]} \notin \mathcal{P}(L_{[2]}, (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C)$.

($\cap$) Majme opäť, ako v prípade zjednotenia, triedu $\mathcal{P}(L_{[2]}, (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C)$ a jazyky $L_{[6]}, L_{[10]} \in \mathcal{P}(L_{[2]}, (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C)$. Ich prienik je $L_{[6]} \cap L_{[10]} = L_{[30]}$. Treba dokázať, že neexistuje jazyk $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že $nsc(L_{new}) < 6$ a zároveň $L_{[2]} \cap L_{new} = L_{[30]}$.

Sporom, majme $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že $nsc(L_{new}) < 6$ a $L_{[2]} \cap L_{new} = L_{[30]}$. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NKA taký, že $L(A) = L_{new}$ a $sc(A) = nsc(L_{new})$. A musí akceptovať slovo a^{30} - nech $(q_0, a^{30}) \vdash (q_1, a^{29}) \vdash ... \vdash (q_{30}, \varepsilon)$ je akceptačný výpočet automatu A na tomto slove, kde $q_0, q_1, q_2, ..., q_{30} \in K$. Keďže $sc(A) < 6$ má menej ako 6 stavov, musia existovať $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $q_i = q_j, i < j, j-i < 6$. Ďalej, keďže konfigurácie stavov q_{i+1} až q_j môžeme v ľubovoľnom počte pumpovať v rámci výpočtu, automat A akceptuje napríklad aj slovo párnej dĺžky $a^{30+2(j-i)}$. Teda $a^{30+2(j-i)} \in L(A) = L_{new}$ a tiež $a^{30+2(j-i)} \in L_{[2]}$. Keďže $L_{[2]} \cap L_{new} = L_{[30]}$, platí aj $a^{30+2(j-i)} \in L_{[30]}$ čo je očividne spor, pretože $30 < 30 + 2(j-i) < 60$.

Taký $L_{new} \in \mathcal{R}$ teda neexistuje, čím sme dokázali, že $L_{[30]} \notin \mathcal{P}(L_{[2]}, (L_{[6]} \ . \ \{a^5\})^C)$.

(.) Zvoľme $L_{adv} = L_{[3]}$ a $L_{prob} = L_{[6]} \ . \ \{a^3\}$. Ukážeme najprv, že L_{adv} je čiastočne užitočná pre L_{prob} a $L_{prob} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$.

Jazyk $L_{[6]} \ . \ \{a^3\}$ vieme pomocou prieniku vyjadriť ako $L_{[3]} \cap (L_{[2]} \ . \ \{a\})$, teda $L_{part} = L_{[3]} \cap (L_{[2]} \ . \ \{a\}) = L_{[6]} \ . \ \{a^3\} \subseteq L_{[6]} \ . \ \{a^3\}$. Ďalej platia nasledujúce rovnosti - podľa Tvrdenia 1.2.1 $nsc(L_{[6]} \ . \ \{a^3\}) = 6$ a $nsc(L_{[2]} \ . \ \{a\}) = 2$, ďalej $nsc(L_{[3]}) = 3$. Podmienky týkajúce sa nedeterministickej stavovej zložitosti sú zjavne splnené, teda $L_{[3]}$ (a okrem nej aj $(L_{[2]} \ . \ \{a\})$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]} \ . \ \{a^3\}$ a zároveň $L_{part} = L_{[6]} \ . \ \{a^3\} \in \mathcal{P}(L_{[3]}, L_{[6]} \ . \ \{a^3\})$.

Ľahko vidno, že $L_{part} \ . \ L_{part} = (L_{[6]} \ . \ \{a^3\}) \ . \ (L_{[6]} \ . \ \{a^3\}) = L_{[6]} - \{\varepsilon\}$ - to ale nie je podmnožina $L_{[6]} \ . \ \{a^3\}$, teda $L_{part} \ . \ L_{part} \notin \mathcal{P}(L_{[3]}, L_{[6]} \ . \ \{a^3\})$.

(*,$^+$) Zoberme opäť triedu $\mathcal{P}(L_{[3]}, L_{[6]} \ . \ \{a^3\}))$. Už sme ukázali, že $L_{[6]} \ . \ \{a^3\} \in \mathcal{P}(L_{[3]}, L_{[6]} \ . \ \{a^3\})$. Ďalej, $(L_{[6]} \ . \ \{a^3\})^* = L_{[3]}$ a $(L_{[6]} \ . \ \{a^3\})^+ = L_{[3]} - \{\varepsilon\}$. To samozrejme nie sú podmnožiny jazyka $L_{[6]} \ . \ \{a^3\}$, takže $(L_{[6]} \ . \ \{a^3\})^*, (L_{[6]} \ . \ \{a^3\})^+ \notin \mathcal{P}(L_{[3]}, L_{[6]} \ . \ \{a^3\}))$.

(^{C}) Nech $L_{adv} = L_{[2]}$ a $L_{prob} = L_{[6]}$. Podľa poznámky k Vete 1.3.2 platí, že $L_{[2]}$ je (úplne) užitočná pre $L_{[6]}$, teda $L_{[6]} \in \mathcal{P}(L_{[2]}, L_{[6]})$. Ale $L_{[6]}^C \not\subseteq L_{[6]}$, takže $L_{[6]}^C \notin \mathcal{P}(L_{[2]}, L_{[6]})$. □

Takto definovaná trieda teda nie je uzavretá na žiadnu zo spomenutých operácií. Čo ak by sme ale mali takú triedu podmnožín, kde budeme fixovať už len L_{prob}? Na to sa pozrieme v nasledujúcich riadkoch.

Definícia 2.1.2. Nech $L_{prob} \in \mathcal{R}$. Definujeme triedu jazykov $\mathcal{P}(L_{prob})$ danú predpisom $\mathcal{P}(L_{prob}) = \{L_{part} \mid \exists L_{adv}, L_{new} \in \mathcal{R}$ také, že $L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$ je nekonečný jazyk a platí $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n \wedge L_{part} \subseteq L_{prob} \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{part}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})\}$.

Veta 2.1.3. *Existuje jazyk L_{prob} (pre každú operáciu zvlášť) taký, že trieda $\mathcal{P}(L_{prob})$ nie je uzavretá na zreťazenie, iteráciu a komplement.*

Formálny dôkaz tejto vety si dovoľujeme opomenúť. Stačí si uvedomiť nasledovné:

V predchádzajúcej vete sme ukázali protipríklady, pomocou ktorých sme uzavretosť na tieto operácie pre triedu $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ vyvrátili tak, že sme odvodili jazyky, ktoré neboli podmnožinou problému L_{prob}. Ak by sme tieto jazyky vedeli odvodiť aj v prípade triedy $\mathcal{P}(L_{prob})$, boli by to rovnako platné protipríklady, pretože do $\mathcal{P}(L_{prob})$ tiež môžu patriť len podmnožiny L_{prob}. A to očividne vieme, pretože jazyky patriace do $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$, z ktorých sme odvodzovali, patria aj do $\mathcal{P}(L_{prob})$ (to je zrejmé z definícií týchto tried).

Poznámka. Ako je to s uzavretosťou triedy $\mathcal{P}(L_{prob})$ na zjednotenie a prienik? Nech $L_{part_1}, L_{part_2} \in \mathcal{P}(L_{prob})$ pre nejaký $L_{prob} \in \mathcal{R}$. Keďže podľa definície $L_{part_1} \subseteq L_{prob}$ a $L_{part_2} \subseteq L_{prob}$, určite aj $L_{part_1} \cup L_{part_2} \subseteq L_{prob}$ a $L_{part_1} \cap L_{part_2} \subseteq L_{prob}$. Z toho je zrejmé, že ak by sme chceli vyvrátiť uzavretosť $\mathcal{P}(L_{prob})$ na zjednotenie a prienik, naša argumentácia sa musí opierať o nedeterministickú stavovú zložitosť.

Každopádne, vyslovujeme hypotézu, že existuje $L_{prob} \in \mathcal{R}$ taký, že trieda $\mathcal{P}(L_{prob})$ nie je uzavretá na zjednotenie a prienik. Vedie nás k tomu nasledovný príklad:

Nech $L_{prob} = L_{[10]}$, $L_{part_1} = L_{[30]} = L_{[5]} \cap L_{[6]}$ a $L_{part_2} = L_{[40]} = L_{[5]} \cap L_{[8]}$. Zjavne $L_{[30]} \subseteq L_{[10]}$ a $L_{[40]} \subseteq L_{[10]}$. Z Tvrdenia 1.2.1 vyplýva, že sú splnené aj podmienky ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti pre uvedené jazyky. Teda $L_{[30]}, L_{[40]} \in \mathcal{P}(L_{[10]})$. Pozrime sa teraz na ich zjednotenie a prienik.

Ak by sme chceli $L_{[30]} \cup L_{[40]}$ vyjadriť ako prienik dvoch jazykov, prirodzená a zdanlivo najlepšia voľba je $L_{[5]} \cap (L_{[6]} \cup L_{[8]})$. Lenže neplatí $nsc(L_{[6]} \cup L_{[8]}) < nsc(L_{[10]}) = 10$ (to je tiež hypotéza, bolo by ju treba dokázať) a tým pádom nemôžeme použiť prienik $L_{[5]} \cap (L_{[6]} \cup L_{[8]})$ na dokázanie toho, že $L_{[30]} \cup L_{[40]} \in \mathcal{P}(L_{[10]})$.

Pre $L_{[30]} \cap L_{[40]} = L_{[120]}$ by sme dokonca pomocou spomínaného špeciálneho prípadu Vety 1.3.2 (prípad, kedy $c = 1$ - (úplná) užitočnosť) vedeli dokázať, že neexistuje $n \in \mathbb{N}, n < 10$ také, že $L_{[n]}$ je (úplne) užitočná pre $L_{[120]}$.

Akokoľvek je týmto naznačené, že naša hypotéza naozaj platí, pre tento príklad potrebujeme ukázať, že neexistuje dvojica $L_{adv}, L_{new} \in \mathcal{R}$ taká, že $nsc(L_{adv}) < 10$, $nsc(L_{new}) < 10$ a $L_{adv} \cap L_{new} = L_{[30]} \cup L_{[40]}$ (resp. $L_{[120]}$).

Ďalej, ako sme sľúbili, ukážeme pre obe spomenuté triedy, či sú usporiadané vzhľadom na inklúziu ($\subseteq$). Keďže triedy jazykov sú vlastne množiny množín, prirodzene sú čiastočne usporiadané vzhľadom na inklúziu, takže ostáva nám zamerať sa na trichotomickosť.

Veta 2.1.4. *Existuje dvojica $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$ taká, že trieda $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ nie je usporiadaná vzhľadom na inklúziu.*

Dôkaz. Nech $L_{adv} = L_{[2]}$ a $L_{prob} = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$. Ukážeme najprv, že $L_{[6]}, L_{[10]} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$. Zjavne platí $L_{[6]} \subseteq (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$ a $L_{[10]} \subseteq (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$. Ďalej $L_{[6]} = L_{[2]} \cap L_{[3]}$ a $L_{[10]} = L_{[2]} \cap L_{[5]}$. Čo sa týka podmienok ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti, tiež sú očividne splnené (podľa Lemy 1.2.6 $nsc((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C) = 6$).

Máme teda $L_{[6]}, L_{[10]} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$, o ktorých platí $L_{[6]} \neq L_{[10]}$, $L_{[6]} \nsubseteq L_{[10]}$ a $L_{[10]} \nsubseteq L_{[6]}$. □

Veta 2.1.5. *Existuje $L_{prob} \in \mathcal{R}$ taký, že trieda $\mathcal{P}(L_{prob})$ nie je usporiadaná vzhľadom na inklúziu.*

Dôkaz. Využijeme dôkaz predchádzajúceho tvrdenia. Keďže $L_{[6]}, L_{[10]} \in \mathcal{P}(L_{[2]}, (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C)$, podľa definície $\mathcal{P}(L_{prob})$ platí tiež $L_{[6]}, L_{[10]} \in \mathcal{P}((L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C)$. Čiže opäť máme dva rôzne jazyky neporovnateľné vzhľadom na inklúziu, tentoraz patriace do $\mathcal{P}(L_{prob})$ pre $L_{prob} = (L_{[6]} \,.\, \{a^5\})^C$. □

2.2 Trieda problémov

V tejto sekcii sa pozrieme na triedu problémov, pre ktoré je čiastočne užitočná nejaká daná dodatočná informácia. Najskôr túto triedu zadefinujeme.

Definícia 2.2.1. Nech $L_{adv} \in \mathcal{R}$. Definujeme triedu jazykov $\mathcal{L}(L_{adv})$ danú predpisom $\mathcal{L}(L_{adv}) = \{L_{prob} \mid L_{adv}$ je čiastočne užitočná pre L_{prob} (resp. $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n)\}$.

Ďalej dokážeme tvrdenia týkajúce sa uzáverových vlastností a usporiadania vzhľadom na inklúziu tejto triedy.

Veta 2.2.2. *Existuje jazyk L_{adv} (pre každú operáciu zvlášť) taký, že trieda $\mathcal{L}(L_{adv})$ nie je uzavretá na zjednotenie, prienik, zreťazenie, iteráciu a komplement.*

Dôkaz.

($\cup$) Nech $L_{adv} = L_{[3]}$. Už sme ukázali, že $L_{[3]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]} \,.\, \{a^3\}$, takže $L_{[6]} \,.\, \{a^3\} \in \mathcal{L}(L_{[3]})$. Ďalej, podľa Vety 1.3.2 je $L_{[3]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$, takže aj $L_{[6]} \in \mathcal{L}(L_{[3]})$. Ak tieto jazyky zjednotíme, dostávame $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) \cup L_{[6]} = L_{[3]}$. Na základe ireflexívnosti čiastočnej užitočnosti ale vieme, že $L_{[3]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[3]}$, čiže $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) \cup L_{[6]} = L_{[3]} \notin \mathcal{L}(L_{[3]})$.

($\cap$) Použime opäť triedu $\mathcal{L}(L_{[3]})$ a jazyky $L_{[6]} \,.\, \{a^3\}, L_{[6]} \in \mathcal{L}(L_{[3]})$. Ich prienikom dostávame $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) \cap L_{[6]} = \emptyset$, teda prázdny jazyk. Pre prázdny jazyk ale neexistuje žiadna čiastočne užitočná dodatočná informácia (po prvé, pretože nie je nekonečný, a po druhé, pretože má najmenšiu možnú nedeterministickú stavovú zložitosť - 1), takže $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) \cup L_{[6]} = \emptyset \notin \mathcal{L}(L_{[3]})$.

(.) Nech $L_{adv} = L_{[2]} \,.\, \{a\}$. Ako už bolo ukázané, $L_{[2]} \,.\, \{a\}$ je čiastočne užitočná pre $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\})$, teda $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) \in \mathcal{L}(L_{[2]} \,.\, \{a\})$. Avšak $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) \,.\, (L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) = L_{[6]} - \{\varepsilon\}$, čo je jazyk majúci prázdny prienik s $L_{[2]} \,.\, \{a\}$, takže $L_{[2]} \,.\, \{a\}$ preň nie je čiastočne užitočná, takže $(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) \,.\, (L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) = L_{[6]} - \{\varepsilon\} \notin \mathcal{L}(L_{[2]} \,.\, \{a\})$.

(*,$^+$) Nech $L_{adv} = L_{[2]} \,.\, \{a\}$. Najprv ukážeme, že jazyk $L_{[6]} \,.\, \{a\} \in \mathcal{L}(L_{[2]} \,.\, \{a\})$.

$(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cap (L_{[3]} \,.\, \{a\}) = L_{[6]} \,.\, \{a\} \subseteq L_{[6]} \,.\, \{a\}$. Podmienky ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti sú splnené, keďže podľa Tvrdenia 1.2.1 $nsc(L_{[6]} \,.\, \{a\}) = 6$, $nsc(L_{[3]} \,.\, \{a\}) = 3$ a $nsc(L_{[2]} \,.\, \{a\}) = 2$. Potom $L_{[2]} \,.\, \{a\}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]} \,.\, \{a\}$, teda $L_{[6]} \,.\, \{a\} \in \mathcal{L}(L_{[2]} \,.\, \{a\})$.

Ľahko vidno, že $(L_{[6]} \,.\, \{a\})^* = \{a\}^* = L_{[1]}$ a $(L_{[6]} \,.\, \{a\})^+ = \{a\}^+ = L_{[1]} - \{\varepsilon\}$, pretože $(L_{[6]} \,.\, \{a\})$ obsahuje slovo a. Potom $L_{[2]} \,.\, \{a\}$ nie je čiastočne užitočná pre tieto jazyky, lebo ich nedeterministická stavová zložitosť je menšia alebo rovná ako u jazyka $L_{[2]} \,.\, \{a\}$ - $nsc(L_{[2]} \,.\, \{a\}) = 2$, $nsc(L_{[1]}) = 1$ a podľa Lemy 1.2.3 $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon\}) = 2$. Teda $(L_{[6]} \,.\, \{a\})^*, (L_{[6]} \,.\, \{a\})^+ \notin \mathcal{L}(L_{[2]} \,.\, \{a\})$.

(^{C}) Nech $L_{adv} = L_{[2]}$. Ako sme už skôr v práci ukázali, $L_{[2]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[2]} - \{\varepsilon\}$ ($L_{[2]} - \{\varepsilon\} = L_{[2]} \cap (L_{[1]} - \{\varepsilon\})$), teda $L_{[2]} - \{\varepsilon\} \in \mathcal{L}(L_{[2]})$. Pozrime sa teraz na $(L_{[2]} - \{\varepsilon\})^C$.

$(L_{[2]} - \{\varepsilon\})^C = (L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$. Jediným slovom v prieniku $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$ s $L_{[2]}$ je ε. Potom ale neexistuje jazyk L_{new} taký, že $L_{[2]} \cap L_{new}$ je nejaká nekonečná podmnožina jazyka $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$, preto $L_{[2]}$ nie je čiastočne užitočná pre $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$, teda $(L_{[2]} - \{\varepsilon\})^C = (L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\} \notin \mathcal{L}(L_{[2]})$. □

Veta 2.2.3. *Existuje $L_{adv} \in \mathcal{R}$ taká, že trieda $\mathcal{L}(L_{adv})$ nie je usporiadaná vzhľadom na inklúziu.*

Dôkaz. Nech $L_{adv} = L_{[2]}$. Potom podľa Vety 1.3.2 je čiastočne užitočná napríklad pre jazyky $L_{[6]}$ a $L_{[10]}$, teda $L_{[6]}, L_{[10]} \in \mathcal{L}(L_{adv})$. Tie sú neporovnateľné vzhľadom na inklúziu, takže inklúzia nie je trichotomická na $\mathcal{L}(L_{adv})$. □

2.3 Trieda dodatočných informácií

Napokon sa pozrieme na triedu dodatočných informácií čiastočne užitočných pre nejaký daný problém. Ako v predchádzajúcich sekciách, túto triedu zadefinujeme a preskúmame jej uzáverové vlastnosti a usporiadanosť vzhľadom na inklúziu.

Definícia 2.3.1. Nech $L_{prob} \in \mathcal{R}$. Definujeme triedu jazykov $\mathcal{A}(L_{prob})$ danú predpisom $\mathcal{A}(L_{prob}) = \{L_{adv} \mid L_{adv}$ je čiastočne užitočná pre L_{prob} (resp. $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n)\}$.

Veta 2.3.2. *Existuje jazyk* L_{prob} *(pre každú operáciu zvlášť) taký, že trieda* $\mathcal{A}(L_{prob})$ *nie je uzavretá na zjednotenie, prienik, zreťazenie, iteráciu a komplement.*

Dôkaz.

($\cup$) Nech $L_{prob} = L_{[6]}$. Podľa Vety 1.3.2 platí, že $L_{[2]}$ a $L_{[3]}$ sú čiastočne užitočné pre $L_{[6]}$, takže $L_{[2]}, L_{[3]} \in \mathcal{A}(L_{[6]})$. Podľa Vety 1.2.4 platí $nsc(L_{[2]} \cup L_{[3]}) = 6$, potom ale $L_{[2]} \cup L_{[3]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$, pretože majú rovnakú nedeterministickú stavovú zložitosť ($nsc(L_{[6]}) = 6$) - teda $L_{[2]} \cup L_{[3]} \notin \mathcal{A}(L_{[6]})$.

($\cap$) Znovu majme $L_{[2]}, L_{[3]} \in \mathcal{A}(L_{[6]})$. Keďže $L_{[2]} \cap L_{[3]} = L_{[6]}$, z ireflexívnosti čiastočnej užitočnosti vyplýva, že $L_{[6]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$, čiže $L_{[6]} = L_{[2]} \cap L_{[3]} \notin \mathcal{A}(L_{[6]})$.

(.) Nech $L_{prob} = L_{[6]} \,.\, \{a^3\}$. Ako sme už v práci ukázali, $L_{[2]} \,.\, \{a\}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]} \,.\, \{a^3\} = (L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cap L_{[3]}$, teda $L_{[2]} \,.\, \{a\} \in \mathcal{A}(L_{[6]} \,.\, \{a^3\})$. Ďalej, ľahko vidno, že $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \,.\, (L_{[2]} \,.\, \{a\}) = L_{[2]} - \{\varepsilon\}$. Toto zreťazenie jasne nie je čiastočne užitočné pre $L_{[6]} \,.\, \{a^3\}$, pretože je disjunktné s $L_{[6]} \,.\, \{a^3\}$, teda $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \,.\, (L_{[2]} \,.\, \{a\}) \notin \mathcal{A}(L_{[6]} \,.\, \{a^3\})$.

(*,$^+$) Opäť nech $L_{prob} = L_{[6]} \,.\, \{a^3\}$. Ukážeme, že $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\} \in \mathcal{A}(L_{[6]} \,.\, \{a^3\})$.

Platí $L_{[6]} \,.\, \{a^3\} = ((L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) \cap (L_{[3]} - \{\varepsilon\})$. Čo sa týka podmienok ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti, podľa Tvrdenia 1.2.1 $nsc(L_{[6]} \,.\, \{a^3\}) = 6$, podľa Lemy 1.2.3 $nsc(L_{[3]} - \{\varepsilon\}) = 4$ a podľa Lemy 1.2.7 $nsc((L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) = 3$, takže tie sú splnené. Potom $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]} \,.\, \{a^3\}$, teda $(L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\} \in \mathcal{A}(L_{[6]} \,.\, \{a^3\})$.

$((L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\})^* = ((L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\})^+ = \{a\}^* = L_{[1]}$ - to je dodatočná informácia, ktorá nie je užitočná pre žiadny problém, takže $((L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\})^*, ((L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\})^+ \notin \mathcal{A}(L_{[6]} \,.\, \{a^3\})$.

(^{C}) Už vieme, že $L_{[2]} \in \mathcal{A}(L_{[6]})$. Keďže jazyky $L_{[2]}^C = L_{[2]} \,.\, \{a\}$ a $L_{[6]}$ sú disjunktné, $L_{[2]}^C$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$, takže $L_{[2]}^C \notin \mathcal{A}(L_{[6]})$. □

Veta 2.3.3. *Existuje* $L_{prob} \in \mathcal{R}$ *taký, že trieda* $\mathcal{A}(L_{prob})$ *nie je usporiadaná vzhľadom na inklúziu.*

Dôkaz. Nech $L_{prob} = L_{[6]}$. Podľa Vety 1.3.2 sú rady $L_{[2]}$ a $L_{[3]}$ čiastočne užitočné pre $L_{[6]}$, takže $L_{[2]}, L_{[3]} \in \mathcal{A}(L_{[6]})$. O nich platí, že $L_{[2]} \neq L_{[3]}$, $L_{[2]} \nsubseteq L_{[3]}$ a $L_{[3]} \nsubseteq L_{[2]}$, teda inklúzia nie je trichotomická na $\mathcal{A}(L_{prob})$. □

Kapitola 3

Porovnávanie dodatočných informácií

V tejto kapitole sa venujeme porovnávaniu dodatočných informácií. Nadväzujeme na tretiu kapitolu práce [5], ktorá hovorí o informačnej sile dodatočnej informácie. Podobne ako v danej kapitole, využívame triedu $\mathcal{L}(L_{adv})$, tentoraz definovanú samozrejme nie (úplnou) užitočnosťou, ale čiastočnou užitočnosťou. Môžeme teda tiež pozorovať, či sa výsledky v niečom líšia.

Myšlienka tohto prístupu spočíva v tom, že informačnou silou dodatočnej informácie L_{adv} myslíme množstvo problémov, pre ktoré je L_{adv} čiastočne užitočná, a to je vlastne veľkosť množiny $\mathcal{L}(L_{adv})$. Vzhľadom na to, že môže byť nekonečná, pozeráme sa na vzťah tried tohto typu (prípadne nejakých ich kombinácií) pomocou relácií $\subseteq$, $\subsetneq$ a $\nsubseteq$.

Majme nejaké dodatočné informácie L_{adv_1} a L_{adv_2}. Potom napríklad vzťah tried $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$ pre nás intuitívne znamená nasledovné:

- Ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, potom L_{adv_2} má aspoň takú veľkú informačnú silu ako L_{adv_1}.
- Ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subsetneq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, potom L_{adv_2} má väčšiu informačnú silu ako L_{adv_1}.
- Ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \nsubseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2}) \nsubseteq \mathcal{L}(L_{adv_1})$, potom L_{adv_1} a L_{adv_2} majú neporovnateľnú informačnú silu.

V nasledujúcich dvoch sekciách sa pozeráme na vzťah tried $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$ na základe určitých predpokladov o L_{adv_1} a L_{adv_2}.

3.1 $L_{adv_1} \subsetneq L_{adv_2}$

Veta 3.1.1. *Nech $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$. Ak $L_{adv_1} \subsetneq L_{adv_2}$, potom pre triedy $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$ platí nasledujúca tabuľka:*

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO

Poznámka. Najprv uvedieme na príkladoch, čo myslíme tým, ak tvrdíme, že pre triedy $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$ platí táto tabuľka (za daných predpokladov).

Napríklad pre reláciu $\supseteq$ tabuľka hovorí, že pre všetky $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$ neplatí, že $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, ale hovorí tiež, že existujú $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$ také, že $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Alebo pre $\not\supseteq \wedge \not\subseteq$ tabuľka hovorí, že pre všetky $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$ neplatí, že $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2}) \wedge \mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, ale hovorí tiež, že existujú $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$ také, že $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2}) \wedge \mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Analogicky to bude fungovať aj v nasledujúcich tabuľkách. Teda vždy dávame prvú spomenutú triedu z tvrdenia na ľavú stranu relácie a druhú spomenutú triedu na pravú stranu relácie.

Dôkaz.

NIE $\forall(\supseteq, \subseteq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{[4]}$ a $L_{adv_2} = L_{[2]}$. Pozrime sa na jazyk $(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$. Keďže podľa Lemy 1.2.5 a Tvrdenia 1.2.1 $nsc((L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C) = nsc(L_{[4]}) = 4$, $L_{[4]}$ nie je čiastočne užitočná pre $(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$. Podľa dôkazu Vety 1.3.4 je $L_{[2]}$ čiastočne užitočná pre $(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C$. Potom $(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C \notin \mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $(L_{[4]} \,.\, \{a^3\})^C \in \mathcal{L}(L_{adv_2})$, teda neplatí $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Na druhej strane, podľa Vety 1.3.2 je $L_{[4]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[12]}$ a $L_{[2]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[12]}$. Potom $L_{[12]} \in \mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $L_{[12]} \notin \mathcal{L}(L_{adv_2})$, teda neplatí $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

NIE $\forall(\supsetneq, =, \subsetneq)$: Vyplýva to priamo z toho, že neplatí $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

ÁNO $\exists(\not\supseteq \wedge \not\subseteq)$: Taký príklad sme uviedli v časti $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

ÁNO $\exists(\supsetneq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{[2]}$ a $L_{adv_2} = L_{[1]}$. Keďže $L_{[1]}$ nie je čiastočne užitočná pre žiaden jazyk, $\mathcal{L}(L_{adv_2}) = \emptyset$. Z Vety 1.3.2 vyplýva, že $L_{[2]}$ je čiastočne užitočná pre nekonečne veľa jazykov, takže trieda $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ je neprázdna. Potom $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supsetneq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

ÁNO $\exists(\subsetneq)$: Nech L_{adv_1} je nejaký konečný jazyk (z Definície 1.1.9 vyplýva, že taký jazyk nie je čiastočne užitočný pre žiadny jazyk), ktorý je vlastnou podmnožinou $L_{[2]}$ a $L_{adv_2} = L_{[2]}$. Potom $\mathcal{L}(L_{adv_1}) = \emptyset$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2}) \neq \emptyset$, takže $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subsetneq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

ÁNO $\exists(\supseteq, =, \subseteq)$: Nech L_{adv_1}, L_{adv_2} sú nejaké konečné jazyky také, že $L_{adv_1} \subsetneq L_{adv_2}$. Z ich konečnosti vyplýva, že nie sú čiastočne užitočné pre žiadny jazyk, takže $\mathcal{L}(L_{adv_1}) = \mathcal{L}(L_{adv_2}) = \emptyset$.

NIE $\forall(\not\supseteq \wedge \not\subseteq)$: Vyplýva to priamo z $\exists(\supsetneq)$, z $\exists(\subsetneq)$ či z $\exists(\supseteq, =, \subseteq)$. $\square$

3.2 $(L_{adv_1}, L_{adv_2}) \in P_n$

Veta 3.2.1. *Nech $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$. Ak je L_{adv_1} čiastočne užitočná pre L_{adv_2} (resp. $(L_{adv_1}, L_{adv_2}) \in P_n$), potom pre triedy $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$ platí nasledujúca tabuľka:*

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	?	?	NIE	NIE	NIE	ÁNO

Dôkaz.

NIE $\forall(\supseteq, \subseteq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{[2]}$ a $L_{adv_2} = L_{[6]}$, pre ktoré podľa Vety 1.3.2 platí, že $L_{[2]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$. Podľa tejto vety tiež platí, že $L_{[2]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[12]}$ a $L_{[6]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[12]}$ ($L_{[6]} \cap L_{[4]} = L_{[12]}$). Ďalej z ireflexívnosti čiastočnej užitočnosti vyplýva, že $L_{[6]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$. Máme teda $L_{[12]} \in \mathcal{L}(L_{adv_2})$, $L_{[12]} \notin \mathcal{L}(L_{adv_1})$, $L_{[6]} \in \mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $L_{[6]} \notin L_{adv_2}$, preto neplatí $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$ ani $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

NIE $\forall(\supsetneq, =, \subsetneq)$: Vyplýva to priamo z toho, že neplatí $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

ÁNO $\exists(\not\supseteq \wedge \not\subseteq)$: Taký príklad sme uviedli v časti $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

NIE $\forall(\not\supseteq \wedge \not\subseteq)$: Vyplýva to priamo z $\exists(\supsetneq, \supseteq)$.

NIE $\exists(\subseteq)$: Nech L_{adv_1} je čiastočne užitočná pre L_{adv_2}, teda $L_{adv_2} \in \mathcal{L}(L_{adv_1})$. Opäť, kvôli ireflexívnosti čiastočnej užitočnosti L_{adv_2} nie je čiastočne užitočná pre L_{adv_2}, teda $L_{adv_2} \notin \mathcal{L}(L_{adv_2})$. Preto nikdy neplatí $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

NIE $\exists(=, \subsetneq)$: Vyplýva to priamo z NIE $\exists(\subseteq)$. $\square$

V nasledujúcich dvoch sekciách už nemáme žiadne predpoklady ohľadom L_{adv_1} a L_{adv_2} (okrem toho, že sú regulárne). Namiesto toho budeme skúmať vzťah tried, ktoré sú určitým spôsobom príbuzné, a v rámci ktorých využijeme operáciu zjednotenia, respektíve prieniku.

3.3 $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$

Veta 3.3.1. *Nech $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$. Pre vzťah medzi $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$ platí nasledujúca tabuľka:*

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	?	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO

Dôkaz.

NIE $\forall(\supseteq, \subseteq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{[4]}$ a $L_{adv_2} = L_{[4]} \cdot \{a^2\}$. Potom $L_{adv_1} \cup L_{adv_2} = L_{[2]}$. Podľa Vety 1.3.2 je $L_{[4]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[12]}$, takže $L_{[12]} \in \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$, zatiaľ čo $L_{[2]}$ nie, takže $L_{[12]} \notin \mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2})$. Ďalej, ako sme už predtým ukázali, $L_{[2]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[2]} - \{\varepsilon\}$, takže $L_{[2]} - \{\varepsilon\} \in \mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2})$, kým $L_{[4]}$ ani $L_{[4]} \cdot \{a^2\}$ nie sú čiastočne užitočné pre $L_{[2]} - \{\varepsilon\}$, pretože (podľa Tvrdenia 1.2.1 a Lemy 1.2.3) $nsc(L_{[4]}) = nsc(L_{[4]} \cdot \{a^2\}) = 4 > 3 = nsc(L_{[2]} - \{\varepsilon\})$, takže $L_{[2]} - \{\varepsilon\} \notin \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$. Tým pádom neplatí $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$ ani $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

NIE $\forall(\supsetneq, =, \subsetneq)$: Vyplýva to priamo z toho, že neplatí $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

ÁNO $\exists(\not\supseteq \wedge \not\subseteq)$: Taký príklad sme uviedli v časti $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

ÁNO $\exists(\supseteq, =, \subseteq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{adv_2}$. Potom triviálne platí, že $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2}) = \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

ÁNO $\exists(\subsetneq)$: Nech platí $L_{adv_1} \subseteq L_{adv_2}$ a zároveň $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, takže $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2}) = \mathcal{L}(L_{adv_2})$ a zároveň existuje jazyk L taký, že $L \in \mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $L \notin \mathcal{L}(L_{adv_2})$. Potom skutočne platí, že $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2}) = \mathcal{L}(L_{adv_2}) \subsetneq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$, pretože ak nejaký $L' \in \mathcal{L}(L_{adv_2})$, tak $L' \in \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$, teda $\mathcal{L}(L_{adv_2}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$ a z existencie jazyka L vyplýva $\mathcal{L}(L_{adv_2}) \neq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Takými radami sú napríklad $L_{adv_1} = L_{[4]}$ a $L_{adv_2} = L_{[2]}$, pričom spomenutým jazykom L môže byť $L_{[12]}$. □

3.4 $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$

Veta 3.4.1. *Nech $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$. Pre vzťah medzi $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$ platí nasledujúca tabuľka:*

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE	NIE
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO	ÁNO

Dôkaz.

NIE $\forall(\supseteq, \subseteq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{[2]}$ a $L_{adv_2} = L_{[3]}$, takže vlastne porovnávame triedu $\mathcal{L}(L_{[6]})$ ($= \mathcal{L}(L_{[2]} \cap L_{[3]})$, keďže $L_{[2]} \cap L_{[3]} = L_{[6]}$) a prienik tried $\mathcal{L}(L_{[2]}) \cap \mathcal{L}(L_{[3]})$. Opäť budeme vychádzať hlavne z Vety 1.3.2, podľa ktorej sú $L_{[2]}$ aj $L_{[3]}$ čiastočne užitočné pre $L_{[6]}$, teda $L_{[6]} \in \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$, $L_{[6]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[12]}$, teda $L_{[12]} \in \mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2})$ a $L_{[2]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[12]}$, teda $L_{[12]} \notin \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$. Okrem toho ako už bolo ukázané, $L_{[6]}$ nie je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$, takže $L_{[6]} \notin \mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2})$. Z týchto vzťahov jasne vyplýva, že neplatí $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$ ani $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

NIE $\forall(\supsetneq, =, \subsetneq)$: Vyplýva to priamo z toho, že neplatí $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

ÁNO $\exists(\not\supseteq \wedge \not\subseteq)$: Taký príklad sme uviedli v časti $\forall(\supseteq, \subseteq)$.

ÁNO $\exists(\supseteq, =, \subseteq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{adv_2}$. Potom triviálne platí, že $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2}) = \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

ÁNO $\exists(\supsetneq)$: Nech platí $L_{adv_1} \subseteq L_{adv_2}$ a zároveň $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, takže $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2}) = \mathcal{L}(L_{adv_1})$ a zároveň existuje jazyk L taký, že $L \in \mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $L \notin \mathcal{L}(L_{adv_2})$. Potom skutočne platí, že $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2}) = \mathcal{L}(L_{adv_1}) \supsetneq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$, pretože ak nejaký $L' \in \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$, tak $L' \in \mathcal{L}(L_{adv_1})$, teda $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$ a z existencie jazyka L vyplýva $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \neq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Takými radami sú napríklad $L_{adv_1} = L_{[4]}$ a $L_{adv_2} = L_{[2]}$, pričom spomenutým jazykom L môže byť $L_{[12]}$.

ÁNO $\exists(\subsetneq)$: Nech $L_{adv_1} = L_{[4]}$ a $L_{adv_2} = L_{[4]} \,.\, \{a^2\}$. Ich prienik je prázdny a prázdny jazyk nie je čiastočne užitočný pre žiaden jazyk, takže $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2}) = \emptyset \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$. Potrebujeme ešte ukázať, že množina $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$ je neprázdna. Dokážeme, že $(L_{[8]} \,.\, \{a^7\})^C \in \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Nech $L_{part_1} = L_{[4]} \cap (L_{[1]} - \{\varepsilon\}) = L_{[4]} - \{\varepsilon\}$ a $L_{part_2} = (L_{[4]} \,.\, \{a^2\}) \cap (L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}) = (L_{[4]} \,.\, \{a^2\}) - \{a^2\}$. Keďže jazyk $(L_{[8]} \,.\, \{a^7\})^C$ obsahuje všetky slová párnej dĺžky, platí $L_{part_1}, L_{part_2} \subseteq (L_{[8]} \,.\, \{a^7\})^C$. Čo sa týka podmienok ohľadom nedeterministickej stavovej zložitosti, platí nasledovné - podľa Lemy 1.2.3 $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon\}) = 2$ a $nsc(L_{[4]} - \{\varepsilon\}) = 4$, podľa Tvrdenia 1.2.1 $nsc(L_{[4]}) = nsc(L_{[4]} \,.\, \{a^2\}) = 4$, podľa Lemy 1.2.10 $nsc((L_{[4]} \,.\, \{a^2\}) - \{a^2\}) = 7$ a podľa Lemy 1.2.8 $nsc(L_{[1]} - \{\varepsilon, a, a^2\}) = 4$. Takže tie sú splnené.

Ukázali sme, že $L_{[4]}$ a $L_{[4]} \,.\, \{a^2\}$ sú čiastočne užitočné pre $(L_{[8]} \,.\, \{a^7\})^C$, čiže $(L_{[8]} \,.\, \{a^7\})^C \in \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

NIE $\forall(\not\supseteq \wedge \not\subseteq)$: Vyplýva to priamo z $\exists(\supseteq, =, \subseteq)$, z $\exists(\supsetneq)$ či z $\exists(\subsetneq)$. □

3.5 Čiastočná užitočnosť verzus (úplná) užitočnosť

Nevyriešenými otázkami tejto kapitoly ostáva, či existuje dvojica $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$ taká, že L_{adv_1} je čiastočne užitočná pre L_{adv_2} a zároveň $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supsetneq \mathcal{L}(L_{adv_2})$ (resp. $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$), a či existuje dvojica $L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$ taká, že $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2}) \supsetneq \mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$.

Ak porovnáme naše výsledky s výsledkami v práci [5] (jedná sa o úplne analogické tvrdenia), tak môžeme vidieť, že až na nevyriešené otázky v prípade čiastočnej užitočnosti sú rovnaké. Tiež si možno všimnúť, že tieto nevyriešené otázky sú v prípade (úplnej) užitočnosti vyriešené práve pomocou konečných jazykov.

Záver

Práca nadviazala na skúmanie pojmu informácia z pohľadu jej užitočnosti. Pokračovala v zaužívanej formalizácii tohto pohľadu, kde je informácia reprezentovaná jazykom, v našom prípade konkrétne regulárnym jazykom. Ako výpočtový model bol použitý nedeterministický konečný automat. Pomocou počtu jeho stavov sme merali nedeterministickú stavovú zložitosť regulárneho jazyka.

V prvom rade sme priniesli nový koncept užitočnosti v tejto oblasti - čiastočne užitočnú informáciu. Jeho princíp spočíva v tom, že považujeme dodatočnú informáciu za čiastočne užitočnú pre problém vtedy, ak spolu s novým jednoduchším problémom vyrieši nejakú nekonečnú podmnožinu pôvodného problému, pričom samotná dodatočná informácia musí byť tiež jednoduchšia ako pôvodný problém.

Medzi prvé výsledky práce môžeme zaradiť tvrdenia o nedeterministickej stavovej zložitosti niektorých jazykov, napríklad $nsc(L_{[n]} \cup L_{[m]})$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla n a m väčšie ako 1 je rovná $n + m + 1$. Pozreli sme sa na čiastočnú užitočnosť informácie ako na reláciu na regulárnych jazykoch a dokázali sme, že je asymetrická a nie je tranzitívna ani trichotomická. Ukázali sme, že podobne ako v prípade užitočnej informácie, otázka, či je $L_{[k]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$, súvisí s funkciou najmenšieho spoločného násobku. Ukázali sme tiež, že ak je $L_{[k]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$, potom existuje nejaká $L_{[k']}$ (úplne) užitočná pre $L_{[l]}$. Na druhej strane sme dokázali, že vo všeobecnosti takáto zákonitosť neplatí. Teda ak existuje L_{adv} čiastočne užitočná pre L_{prob}, neznamená to, že musí existovať L'_{adv} (úplne) užitočná pre L_{prob} - videli sme to na príklade jazyka $L_{prob} = L_{[4]} \cdot \{a^3\}$. Tým sa ukázalo, že relácia čiastočná užitočnosť zahŕňa viac problémov ako (úplná) užitočnosť a teda má zmysel sa ňou zaoberať. Pozreli sme sa aj na triedu $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$, v rámci ktorej sme definovali maximálnu podmnožinu problému vzhľadom na dodatočnú informáciu. Dokázali sme, že takáto maximálna podmnožina v triede $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ nie je jednoznačne určená.

Potom sme skúmali triedy jazykov definované čiastočnou užitočnosťou, konkrétne triedy podmnožín problému, pre ktorý je čiastočne užitočná fixná dodatočná informácia ($\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$), triedy podmnožín problému, pre ktorý je čiastočne užitočná ľubovoľná dodatočná informácia ($\mathcal{P}(L_{prob})$), triedy problémov, pre ktoré je čiastočne užitočná fixná dodatočná informácia ($\mathcal{L}(L_{adv})$) a triedy dodatočných informácií čiastočne užitočných pre fixný problém ($\mathcal{A}(L_{prob})$). Dokázali sme, že nie sú usporiadané vzhľadom na množinovú inklúziu a nie sú uzavreté na zjednotenie, prienik, zreťazenie, iteráciu a komplement (až na zjednotenie a prienik v prípade triedy $\mathcal{P}(L_{prob})$).

Napokon sme sa zaoberali informačnou silou dodatočnej informácie analogicky ako v práci [5], využitím triedy $\mathcal{L}(L_{adv})$. Dostali sme rovnaké výsledky ako v prípade (úplnej) užitočnosti, až na niektoré nevyriešené problémy. Je preto otázne, do akej miery čiastočná užitočnosť obohacuje tento druh pohľadu na informačnú silu dodatočnej informácie oproti (úplnej) užitočnosti.

Prirodzeným pokračovaním práce by bolo vyriešiť spomenuté nevyriešené problémy týkajúce sa informačnej sily dodatočnej informácie. Podobne, je tu možnosť potvrdiť (alebo vyvrátiť) nami uvedenú hypotézu, že trieda $\mathcal{P}(L_{prob})$ nie je uzavretá na zjednotenie a prienik. Okrem toho by bolo zaujímavé pozrieť sa na informačnú silu dodatočnej informácie pomocou triedy $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$, teda vzhľadom na nejaký daný problém.

Literatúra

[1] Branislav Rovan, Michal Forišek. Formálne jazyky a automaty (skriptá). Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave. Verzia zo dňa 30. decembra 2013.

[2] Hermann Gruber, Markus Holzer. Finding Lower Bounds for Nondeterministic State Complexity is Hard. In Oscar H. Ibarra, Zhe Dang, editor, *Developments in Language Theory*. Springer, 2006.

[3] Šimon Sádovský. Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov. Diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, 2017.

[4] Branislav Rovan, Šimon Sádovský. On Usefulness of Information: Framework and NFA Case. In H. Böckenhauer, D. Komm, W. Unger, editor, *Adventures Between Lower Bounds and Higher Altitudes*. Springer, 2018.

[5] Martin Pašen. Supplementary Information and Nondeterministic Finite Automata. Bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, 2020.