Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov

diplomová práca

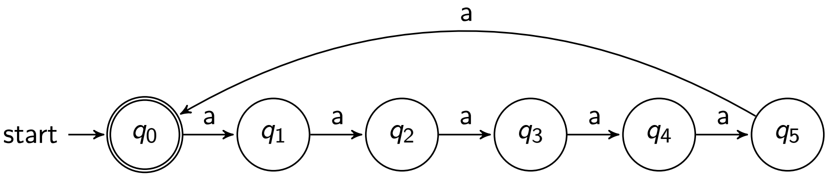
Šimon Sádovský

Školiteľ: Branislav Rovan

FMFI UK

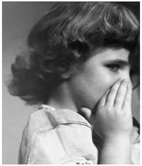
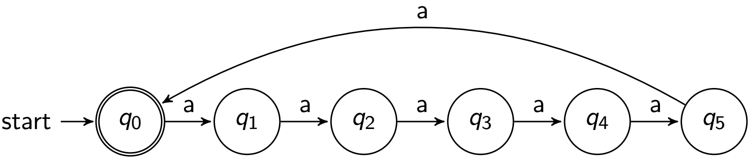
21. apríla 2017

- Chceme nedeterministickým konečným automatom akceptovať jazyk $\{w \in \{a\}^* \mid |w| \equiv 0 \ (mod\ 6)\}$. Koľko stavov potrebujeme?

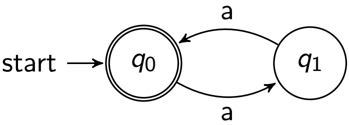


Úvod do problematiky, motivácia

- Čo ak by sme automatu niečo o vstupe „ našepkali “?

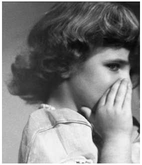



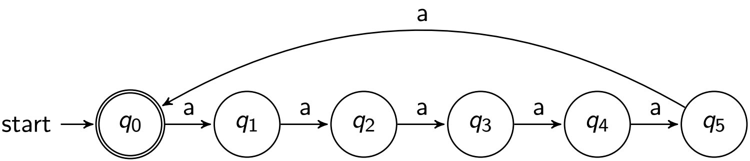
- Ak budeme šepkať, či je dĺžka slova na vstupe deliteľná tromi, tak stačí NKA s dvomi stavmi.

Úvod do problematiky, motivácia

- Ak budeme šepkať, či je slovo dĺžky aspoň 78, tak sme automatu vo všeobecnosti velmi nepomohli.





- Skúmame otázku, aké našepkávanie je zmysluplné a pomôže a aké nie.
- Ako formalizovať tento problém?

Definícia problému

Definícia

Stavovou zložitosťou *nedeterministického konečného automatu* A *(označujeme* $\#_S(A)$*) rozumieme počet jeho stavov.*

Definícia

Nedeterministickú stavovú zložitosť *jazyka* $L \in \mathscr{R}$ *(označujeme* $nsc(L)$ *- z anglického nondeterministic state complexity) definujeme* $nsc(L) = min\{\#_S(A) | L(A) = L\}$.

Definícia

Nech $L \in \mathscr{R}$. ***Minimálnym nedeterministickým konečným automatom pre jazyk L*** *rozumieme ľubovolný nedeterministický konečný automat* A *taký, že* $\#_S(A) = nsc(L)$.

Definícia problému

Definícia

Nech A je nedeterministický konečný automat. Potom dva nedeterministické konečné automaty A_1, A_2 také, že $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$ nazveme ***rozklad automatu*** *A. Ak navyše platí $\#_S(A_1) < \#_S(A)$ a $\#_S(A_2) < \#_S(A)$, nazývame tento rozklad* ***netriviálny****. Ak existuje netriviálny rozklad automatu A, tak automat A nazývame* ***rozložitelný****.*

Definícia

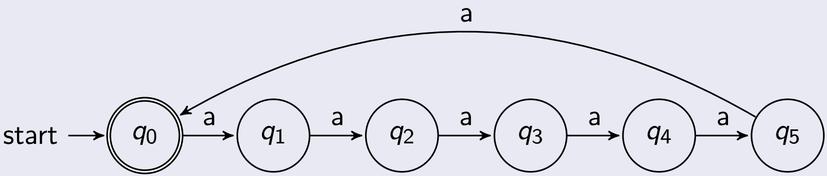
Nech $L \in \mathscr{R}$ a A je nejaký minimálny NKA pre jazyk L. ***Jazyk*** *L nazývame* ***nedeterministicky rozložitelný*** *práve vtedy, keď je automat A rozložitelný.*

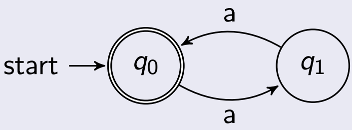
Príklad rozložiteľného

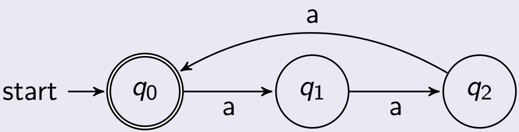
Veta

Jazyk $\{w \in \{a\}^* \mid |w| \equiv 0 \ (mod\ 6)\}$ *je rozložiteľný.*

Dôkaz.





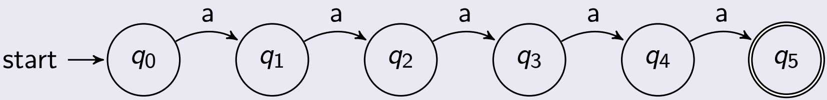


Príklad nerozložiteľného

Veta

Jazyk $\{a^5\}$ *je nerozložieľný.*

Dôkaz.



- Nech existuje rozklad, tj. NKA A_1, A_2 také, že $L(A_1) \cap L(A_2) = \{a^5\}, \#s(A_1) < \#s(A), \#s(A_1) < \#s(A)$.
- $a^5 \in L(A_1),\ a^5 \in L(A_2)$
- lebo málo stavov, tak viem pumpovať nejakú časť a^5 v A_1 aj A_2, t.j. $\exists k, l \leq 5\ \forall n : a^{5+kn} \in L(A_1), a^{5+ln} \in L(A_2)$
- $a^{5+kl} \in L(A_1) \cap L(A_2)$, spor

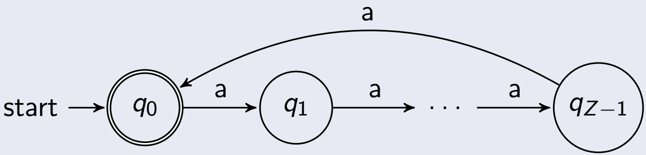
□

Jazyky založené na dĺžke slov

Veta

Nech pre $Z \in \mathbb{N}, Z > 0$ je $L_Z = \{a^{kZ} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Potom ak Z nie je mocninou prvočísla, tak jazyk L_Z je rozložiteľný.

Dôkaz.



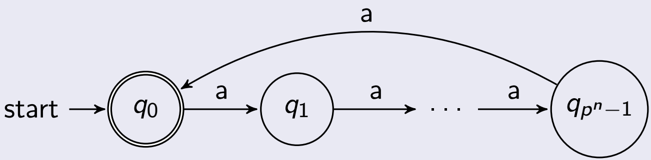
- $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ je prvočíselný rozklad čísla Z
- automaty A_1^Z, A_2^Z tvoriace rozklad akceptujú jazyky $L(A_1^Z) = \{a^{kp_1^{m_1}} | k \in \mathbb{N}\}$ a $L(A_2^Z) = \{a^{kp_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}} | k \in \mathbb{N}\}$

□

Veta

Pre $n \geq 1$ a p je prvočíslo definujeme $L_{p^n} = \{a^{kp^n} | k \in \mathbb{N}\}$. Potom je jazyk L_{p^n} nerozložiteľný.

Dôkaz.



- sporom, založený na pumpovaní časti slova a^{p^n} v automatoch v netriviálnom rozklade a algebraických vlastnostiach následne vyplývajúcich

□

Uzáverové vlastnosti tried nedeterministicky rozložiteľných a nedeterministicky nerozložteľných jazykov

- Nepekné uzáverové vlastnosti

	$\cap$	$\cup$	$.$	h	h^{-1}	$*$
R	✗	✗	✗	✗	?	✗
NR	✗	✗	✗	✗	✗	✗

- nepojali ani podozrenie, že by niektorá z tried mohla byť na niečo rozumné uzavretá

Príliš malé NKA

Veta

Nech L je jazyk, pričom $nsc(L) \leq 2$. Potom L je nerozložiteľný.

Dôkaz.

- jednostavové NKA dokážu iba $\emptyset, \{\varepsilon\}, \Sigma^*$
- $\emptyset \subset \{\varepsilon\} \subset \Sigma^*$

$\square$

Vypchávkové jazyky

Veta

Nech $L \in \mathscr{R}$ *a* $b \notin \Sigma_L$. *Definujeme homomorfizmus* $h_b : \Sigma_L \cup \{b\} \to \Sigma_L$ *nasledovne -* $h_b(b) = \varepsilon$, $\forall a \in \Sigma_L : h_b(a) = a$. *Potom* L *je rozložiteľný práve vtedy, keď* $h_b^{-1}(L)$ *je rozložiteľný*

Deterministická vs. nedeterministická rozložiteľnosť

Veta

Existuje nedeterministicky nerozložiteľný deterministicky rozložiteľný regulárny jazyk.

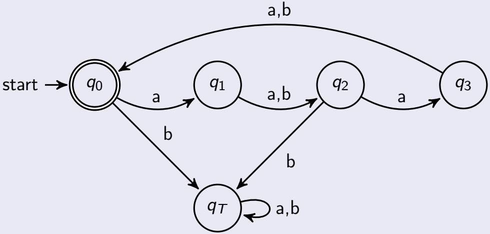
Dôkaz.

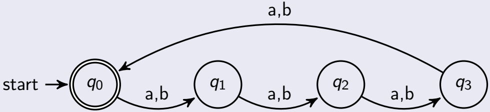
- rozdielový jazyk je $(\{a\}\{a, b\}\{a\}\{a, b\})^*$
- nedeterministicky nerozložiteľný opäť pomocou pumpovania

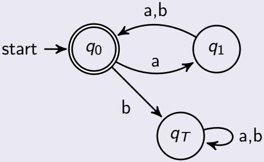
$\square$

Deterministická vs. nedeterministická rozložiteľnosť

Dôkaz.







- chyba krásy - rozložiteľnosť je spôsobená nutnosťou trash-stavu v DKA

Deterministická vs. nedeterministická rozložiteľnosť

Veta

Existuje postupnosť jazykov $(L_i)_{i=2}^{\infty}$*, taká, že platí:*

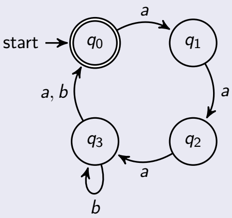
(a) *Jazyk* L_i *je nedeterministicky nerozložiteľný a súčasne deterministicky rozložiteľný pre ľubovolné* $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$.

(b) *Nech pre ľubovolné* $i \in \mathbb{N}, i \geq 3$ *je* A_i *minimálny DKA akceptujúci* L_i*. Potom existuje taký rozklad* A_i *na* A_1^i *a* A_2^i*, že platí* $\#s(A_1^i) = \#s(A_2^i) = \frac{\#s(A_i)+3}{2}$.

Deterministická vs. nedeterministická rozložiteľnosť

Dôkaz.

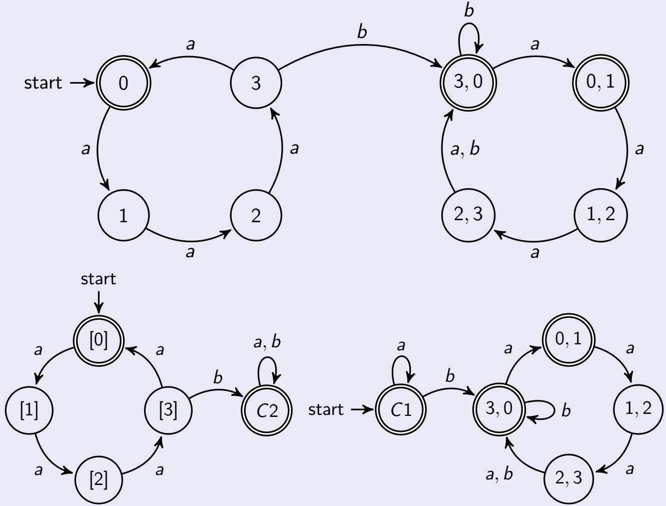
- postupnosť jazykov $(L_i)_{i=2}^{\infty}$, kde $L_i = (\{a^{i-1}\}\{b\}^*\{a, b\})^*$
- hľadanú postupnosť dostaneme z tejto postupnosti vynechaním niektorých jej členov
- L_i je nerozložiteľný ak i je mocninou prvočísla.



□

Deterministická vs. nedeterministická rozložiteľnosť

Dôkaz.



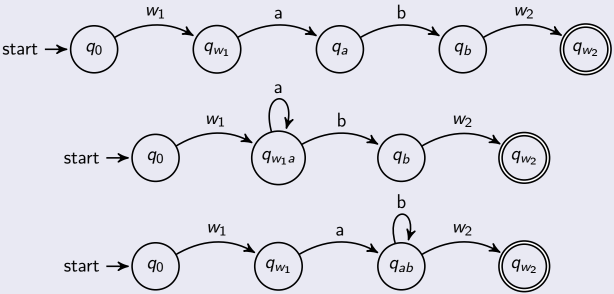
Charakterizácia singleton jazykov

Veta

Nech $w \in \Sigma^*$ je slovo a $L = \{w\}$. Potom L je rozložiteľný práve vtedy, keď $w = w_1abw_2$ pre nejaké $a, b \in \Sigma$ a $w_1, w_2 \in \Sigma^*$

Dôkaz.

- $L = \{a^n\}$ je nerozložiteľný



Predošlý výskum

- Idea skúmať užitočnosť informácie vznikla na našej katedre u profesora Rovana
- Skúmané v súvislosti s deterministickými konečnými automatmi - Gaži (2006)
- Skúmané v súvislosti s deterministickými zásobníkovými automatmi - Labath (2010)
- Náš prínos je hlavne v otvorení témy v súvislosti s nedeterminizmom

Srdečné poďakovanie

Ďakujem za vašu pozornosť!