

Čiastočne užitočná informácia

Bc. Matej Štubniak

prof. RNDr. Branislav Rován, PhD.

Užitočnosť informácie

Základná myšlienka:

- kedy je dodatočná informácia užitočná?
- ak pomáha zjednodušiť nejaký problém
- musí byť jednoduchšia ako daný problém

Príklad:

- je prirodzené číslo deliteľné 6?
- máme informáciu, že je deliteľné 2
- potom stačí zisťovať, či je deliteľné 3

Formalizácia

- problémy, dodatočné informácie - jazyky
- zložitosť - automaty (stavová zložitosť)
- zjednodušenie problému - prienik

Užitočná informácia

Definícia. Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. Dodatočná informácia L_{adv} je *užitočná* pre problém L_{prob} , ak existuje jazyk $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že platia nasledujúce podmienky:

- ▶ $L_{prob} = L_{adv} \cap L_{new}$
- ▶ $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob})$
- ▶ $nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob})$

(nsc = nondeterministic state complexity)

Príklad

$$L_{[n]} = \{a^{nk} \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ (platí, že } nsc(L_{[n]}) = n)$$

$$L_{adv} = L_{[2]}, L_{prob} = L_{[6]}, L_{new} = L_{[3]}$$

▶ $L_{[6]} = L_{[2]} \cap L_{[3]}$

▶ $nsc(L_{[2]}) < nsc(L_{[6]})$

▶ $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[6]})$

– $L_{[2]}$ je užitočná pre $L_{[6]}$

Čiastočne užitočná informácia

Definícia. Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. Dodatočná informácia L_{adv} je *čiastočne užitočná* pre problém L_{prob} , ak existujú nekonečné jazyky $L_{new}, L_{part} \in \mathcal{R}$ také, že platia nasledujúce podmienky:

- ▶ $L_{part} \subseteq L_{prob}$
- ▶ $L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$
- ▶ $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob})$
- ▶ $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{part})$
- ▶ $nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob})$
- ▶ $nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})$

Príklad

$$L_{adv} = L_{[4]}, L_{prob} = L_{[6]}, L_{new} = L_{[3]}$$

- ▶ $L_{part} = L_{[12]} \subseteq L_{[6]}$
 - ▶ $L_{[12]} = L_{[4]} \cap L_{[3]}$
 - ▶ $nsc(L_{[4]}) < nsc(L_{[6]})$
 - ▶ $nsc(L_{[4]}) < nsc(L_{[12]})$
 - ▶ $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[6]})$
 - ▶ $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[12]})$
 - ▶ $L_{[3]}$ aj $L_{[12]}$ sú nekonečné jazyky
- $L_{[4]}$ je čiastočná užitočná pre $L_{[6]}$

Nedeterministická stavová zložitosť

- horné odhady - NKA akceptujúci daný jazyk s daným počtom stavov
- dolné odhady - neexistuje NKA akceptujúci daný jazyk s menším ako daným počtom stavom
- $nsc(L_{[n]} \cup L_{[m]}) = n + m + 1$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla $n, m \in \mathbb{N}$ väčšie ako 1

Tvrdenia

Veta. Nech $k, l \in \mathbb{N}, k < l$. $L_{[k]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$ práve vtedy, keď existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $m < l$ a $lcm(k, m) = cl$ pre nejaké $c \in \mathbb{N}, c > 0$.

Veta. Nech $k, l \in \mathbb{N}, k < l$. Ak je $L_{[k]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$, potom existuje $k' \in \mathbb{N}$ také, že $L_{[k']}$ je (úplne) užitočná pre $L_{[l]}$, pričom $k' \leq k$.

Tvrdenia

Veta. Existuje $L_{prob} \in \mathcal{R}$ taký, že existuje L_{adv} , ktorá je čiastočne užitočná pre L_{prob} , a zároveň neexistuje L'_{adv} , ktorá by bola (úplne) užitočná pre L_{prob} .

- napríklad jazyk $L_{prob} = (L_{[4]} \cdot \{a^3\})^C$

Čiastočná užitočnosť

Definícia. Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. Čiastočnú užitočnosť informácie v nedeterministických konečných automatoch definujeme ako reláciu $P_n \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, pre ktorú platí, že $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n$, ak L_{adv} je čiastočne užitočná pre L_{prob} .

- je asymetrická (teda je ireflexívna a antisymetrická)
- nie je tranzitívna
- nie je trichotomická

Maximálna podmnožina

- $L_{adv} = L_{[3]}, L_{prob} = L_{[6]}$
- $L_{[3]} \cap L_{[4]} = L_{[12]}$
- $L_{[3]} \cap L_{[2]} = L_{[6]}$

Maximálna podmnožina

Definícia. Nech jazyky $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$ sú také, že trieda $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ je neprázdna. Zavedieme označenie $maxPart(L_{adv}, L_{prob})$ dané predpisom $maxPart(L_{adv}, L_{prob}) = \{L_{mpart} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}) \mid \nexists L_{part} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}) \text{ taká, že } L_{mpart} \subsetneq L_{part}\}$. Jazyky patriace do $maxPart(L_{adv}, L_{prob})$ budeme nazývať *maximálne podmnožiny problému L_{prob} vzhľadom na dodatočnú informáciu L_{adv}* .

Veta. Existujú jazyky $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$ také, že existujú aspoň dve rôzne maximálne podmnožiny L_{prob} vzhľadom na L_{adv} , t. j., že $|maxPart(L_{adv}, L_{prob})| > 1$.

Trieda podmnožín

$$\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}) = \{L_{part} \mid \exists L_{new} \in \mathcal{R} \text{ taký, že} \\ L_{part} = L_{adv} \cap L_{new} \text{ je nekonečný jazyk a platí } (L_{adv}, L_{prob}) \in \\ P_n \wedge L_{part} \subseteq L_{prob} \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{adv}) < \\ nsc(L_{part}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})\}$$

Trieda nie je uzavretá na:

- zjednotenie
- prienik
- zreťazenie
- iteráciu
- komplement

Trieda podmnožín

$\mathcal{P}(L_{prob}) = \{L_{part} \mid \exists L_{adv}, L_{new} \in \mathcal{R} \text{ také, že}$
 $L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$ je nekonečný jazyk a platí $(L_{adv}, L_{prob}) \in$
 $P_n \wedge L_{part} \subseteq L_{prob} \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{adv}) <$
 $nsc(L_{part}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})\}$

Trieda nie je uzavretá na:

- zreťazenie
- iteráciu
- komplement

Otvorené problémy:

- zjednotenie
- prienik

Trieda problémov

$$\mathcal{L}(L_{adv}) = \{L_{prob} \mid L_{adv} \text{ je čiastočne užitočná pre } L_{prob}\}$$

Trieda nie je uzavretá na:

- zjednotenie
- prienik
- zretáženie
- iteráciu
- komplement

Trieda dodatočných informácií

$$\mathcal{A}(L_{prob}) = \{L_{adv} \mid L_{adv} \text{ je čiastočne užitočná pre } L_{prob}\}$$

Trieda nie je uzavretá na:

- zjednotenie
- prienik
- zreťazenie
- iteráciu
- komplement

Usporiadanie tried vzhľadom na inklúziu

$$\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}), \mathcal{P}(L_{prob}), \mathcal{L}(L_{adv}), \mathcal{A}(L_{prob})$$

- nie sú usporiadané

Porovnávanie dodatočných informácií

$$L_{adv_1}, L_{adv_2} \in \mathcal{R}$$

- ▶ Ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, potom L_{adv_2} má aspoň takú veľkú informačnú silu ako L_{adv_1} .
- ▶ Ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subsetneq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, potom L_{adv_2} má väčšiu informačnú silu ako L_{adv_1} .
- ▶ Ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_1})$, potom L_{adv_1} a L_{adv_2} majú neporovnateľnú informačnú silu.

Vztah $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$

$$L_{adv_1} \subsetneq L_{adv_2}$$

	\supsetneq	\supseteq	$=$	\subseteq	\subsetneq	$\neq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	X	X	X	X	X	X
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Vztah $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$

$$(L_{adv_1}, L_{adv_2}) \in P_n$$

	\supsetneq	\supseteq	$=$	\subseteq	\subsetneq	$\not\subseteq \wedge \not\supseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	X	X	X	X	X	X
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$?	?	X	X	X	X

Vztah $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$

	\supsetneq	\supseteq	$=$	\subseteq	\subsetneq	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	X	X	X	X	X	X
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$?	✓	✓	✓	✓	✓

Vztah $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$

	\supsetneq	\supseteq	$=$	\subseteq	\subsetneq	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	X	X	X	X	X	X
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Ďakujem za pozornosť

Posudok - 1. otázka

Lema 1.2.7. $nsc((L_{[2]} \cdot \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) = 3$.

Definícia. Nech $L \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Množinu $P = \{(x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ nazývame *mätúca (klamúca) množina pre jazyk L* , ak:

- ▶ $x_i y_i \in L \forall i \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq i \leq n$
- ▶ $x_i y_j \notin L \forall i, j \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq i, j \leq n$ a $i \neq j$

Nie, neexistuje, ale rozšírená áno - $P = \{(a, a^2), (a^2, a), (\varepsilon, \varepsilon)\}$.