Čiastočne užitočná informácia

Bc. Matej Štubniak

prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.

Užitočnosť informácie

Základná myšlienka:

- kedy je dodatočná informácia užitočná?
- ak pomáha zjednodušiť nejaký problém
- musí byť jednoduchšia ako daný problém

Formalizácia:

- problémy, dodatočné informácie - jazyky
- zložitosť - automaty (stavová zložitosť)
- zjednodušenie problému - prienik

Užitočná informácia

Definícia. Nech $L_{prob} \in \mathcal{R}$. Dodatočná informácia $L_{adv} \in \mathcal{R}$ je *užitočná* pre problém L_{prob}, ak existuje jazyk $L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že platia nasledujúce podmienky:

- $L_{prob} = L_{adv} \cap L_{new}$
- $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob})$
- $nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob})$

(nsc = nondeterministic state complexity)

Príklad

$L_{[n]} = \{a^{nk} \mid k \in \mathbb{N}\}$ (platí, že $nsc(L_{[n]}) = n$)

$L_{prob} = L_{[6]}, L_{adv} = L_{[2]}, L_{new} = L_{[3]}$

- $L_{[6]} = L_{[2]} \cap L_{[3]}$
- $nsc(L_{[2]}) < nsc(L_{[6]})$
- $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[6]})$

– $L_{[2]}$ je užitočná pre $L_{[6]}$

– $L_{[4]}$ nie je užitočná pre $L_{[6]}$, pretože $a^6 \notin L_{[4]}$, teda neexistuje L_{new} taký, že $L_{[6]} = L_{[4]} \cap L_{new}$

Čiastočne užitočná informácia

Definícia. Nech $L_{prob} \in \mathcal{R}$. Dodatočná informácia $L_{adv} \in \mathcal{R}$ je *čiastočne užitočná* pre problém L_{prob}, ak existujú nekonečné jazyky $L_{new}, L_{part} \in \mathcal{R}$ také, že platia nasledujúce podmienky:

- $L_{part} \subseteq L_{prob}$
- $L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$
- $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob})$
- $nsc(L_{adv}) < nsc(L_{part})$
- $nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob})$
- $nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})$

Príklad

$L_{prob} = L_{[6]}, L_{adv} = L_{[4]}, L_{new} = L_{[3]}$

- $L_{part} = L_{[12]} \subseteq L_{[6]}$
- $L_{[12]} = L_{[4]} \cap L_{[3]}$
- $nsc(L_{[4]}) < nsc(L_{[6]})$
- $nsc(L_{[4]}) < nsc(L_{[12]})$
- $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[6]})$
- $nsc(L_{[3]}) < nsc(L_{[12]})$
- $L_{[3]}$ aj $L_{[12]}$ sú nekonečné jazyky

– $L_{[4]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[6]}$

Nedeterministická stavová zložitosť

- horné odhady - NKA akceptujúci daný jazyk s daným počtom stavov
- dolné odhady - neexistuje NKA akceptujúci daný jazyk s menším ako daným počtom stavom
- $nsc(L_{[n]} \cup L_{[m]}) = n + m + 1$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla $n, m \in \mathbb{N}$ väčšie ako 1

Tvrdenia

Veta. Nech $k, l \in \mathbb{N}, k < l$. $L_{[k]}$ je čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$ práve vtedy, keď existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $m < l$ a $lcm(k, m) = cl$ pre nejaké $c \in \mathbb{N}, c > 0$.

Veta. Nech $k, l \in \mathbb{N}, k < l$. Ak je $L_{[k]}$ čiastočne užitočná pre $L_{[l]}$, potom existuje $k' \in \mathbb{N}$ také, že $L_{[k']}$ je (úplne) užitočná pre $L_{[l]}$, pričom $k' \leq k$.

Tvrdenia

Veta. Existuje $L_{prob} \in \mathcal{R}$ taký, že existuje L_{adv}, ktorá je čiastočne užitočná pre L_{prob}, a zároveň neexistuje L'_{adv}, ktorá by bola (úplne) užitočná pre L_{prob}.

- napríklad jazyk $L_{prob} = (L_{[4]} \, . \, \{a^3\})^C$
- $L_{[2]} \cap (L_{[1]} - \{\varepsilon\}) = L_{[2]} - \{\varepsilon\} \subseteq (L_{[4]} \, . \, \{a^3\})^C$
- sporom, nech L'_{adv} je (úplne) užitočná pre $(L_{[4]} \, . \, \{a^3\})^C$
- $nsc(L'_{adv}) < nsc((L_{[4]} \, . \, \{a^3\})^C) = 4$
- L'_{adv} musí obsahovať slová ε, a, a^2 a môže/nemusí obsahovať a^3
- ak obsahuje a^3, potom $L'_{adv} = L_{[1]}$
- ak neobsahuje a^3, potom $L'_{adv} = \{\varepsilon, a, a^2\}$

Čiastočná užitočnosť

Definícia. Nech $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$. Čiastočnú užitočnosť informácie v nedeterministických konečných automatoch definujeme ako reláciu $P_n \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, pre ktorú platí, že $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n$, ak L_{adv} je čiastočne užitočná pre L_{prob}.

- je asymetrická (teda je ireflexívna a antisymetrická)
- nie je tranzitívna
- nie je trichotomická

Maximálna podmnožina

- $L_{adv} = L_{[3]}, L_{prob} = L_{[6]}$
- $L_{[3]} \cap L_{[4]} = L_{[12]}$
- $\boldsymbol{L_{[3]} \cap L_{[2]} = L_{[6]}}$

Definícia. Nech jazyky $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$ sú také, že trieda $\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ je neprázdna. Zavedieme označenie $maxPart(L_{adv}, L_{prob})$ dané predpisom $maxPart(L_{adv}, L_{prob}) = \{L_{mpart} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}) \mid \nexists L_{part} \in \mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob})$ taká, že $L_{mpart} \subsetneq L_{part}\}$. Jazyky patriace do $maxPart(L_{adv}, L_{prob})$ budeme nazývať *maximálne podmnožiny problému* L_{prob} *vzhľadom na dodatočnú informáciu* L_{adv}.

Maximálna podmnožina

Veta. Existujú jazyky $L_{adv}, L_{prob} \in \mathcal{R}$ také, že existujú aspoň dve rôzne maximálne podmnožiny L_{prob} vzhľadom na L_{adv}, t. j., že $|maxPart(L_{adv}, L_{prob})| > 1$.

- $L_{prob} = (L_{[6]} \, . \, \{a^5\})^C$, $L_{adv} = L_{[1]} - \{\varepsilon\}$
- $L_{part_1} = L_{[2]} - \{\varepsilon\} = (L_{[1]} - \{\varepsilon\}) \cap L_{[2]}$
- $L_{part_2} = (L_{[3]} \, . \, \{a^2\})^C - \{\varepsilon\} = (L_{[1]} - \{\varepsilon\}) \cap (L_{[3]} \, . \, \{a^2\})^C$
- ukázali sme, že L_{part_1} a L_{part_2} nepatria do rovnakej maximálnej podmnožiny, teda existuje nejaká $L_{mpart_1} \supseteq L_{part_1}$ a nejaká $L_{mpart_2} \supseteq L_{part_2}$, pričom $L_{mpart_1} \neq L_{mpart_2}$

Trieda podmnožín

$\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}) = \{L_{part} \mid \exists L_{new} \in \mathcal{R}$ taký, že
$L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$ je nekonečný jazyk a platí $(L_{adv}, L_{prob}) \in$
$P_n \wedge L_{part} \subseteq L_{prob} \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{adv}) <$
$nsc(L_{part}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})\}$

Trieda nie je uzavretá na:

- zjednotenie
- prienik
- zreťazenie
- iteráciu
- komplement

Trieda podmnožín

$\mathcal{P}(L_{prob}) = \{L_{part} \mid \exists L_{adv}, L_{new} \in \mathcal{R}$ také, že $L_{part} = L_{adv} \cap L_{new}$ je nekonečný jazyk a platí $(L_{adv}, L_{prob}) \in P_n \wedge L_{part} \subseteq L_{prob} \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{adv}) < nsc(L_{part}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{prob}) \wedge nsc(L_{new}) < nsc(L_{part})\}$

Trieda nie je uzavretá na:

- zreťazenie
- iteráciu
- komplement

Otvorené problémy:

- zjednotenie
- prienik

Trieda problémov

$\mathcal{L}(L_{adv}) = \{L_{prob} \mid L_{adv} \text{ je čiastočne užitočná pre } L_{prob}\}$

Trieda nie je uzavretá na:

- zjednotenie
- prienik
- zreťazenie
- iteráciu
- komplement

Trieda dodatočných informácií

$\mathcal{A}(L_{prob}) = \{L_{adv} \mid L_{adv} \text{ je čiastočne užitočná pre } L_{prob}\}$

Trieda nie je uzavretá na:

- zjednotenie
- prienik
- zreťazenie
- iteráciu
- komplement

Usporiadanie tried vzhľadom na inklúziu

$\mathcal{P}(L_{adv}, L_{prob}), \mathcal{P}(L_{prob}), \mathcal{L}(L_{adv}), \mathcal{A}(L_{prob})$

- nie sú usporiadané

Porovnávanie dodatočných informácií

$$\mathcal{L}(L_{adv}) = \{L_{prob} \mid L_{adv} \text{ je čiastočne užitočná pre } L_{prob}\}$$

- ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) = \mathcal{L}(L_{adv_2})$, potom L_{adv_1} a L_{adv_2} majú rovnakú informačnú silu
- ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, potom L_{adv_2} má aspoň takú veľkú informačnú silu ako L_{adv_1}
- ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \subsetneq \mathcal{L}(L_{adv_2})$, potom L_{adv_2} má väčšiu informačnú silu ako L_{adv_1}
- ak $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \nsubseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2}) \nsubseteq \mathcal{L}(L_{adv_1})$, potom L_{adv_1} a L_{adv_2} majú neporovnateľnú informačnú silu

Vzťah $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$

$$L_{adv_1} \subsetneq L_{adv_2}$$

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

- neplatí, že $\forall L_{adv_1}, L_{adv_2} : \mathcal{L}(L_{adv_1}) \supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$
- platí, že
  $\exists L_{adv_1}, L_{adv_2} : \mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\supseteq \mathcal{L}(L_{adv_2}) \wedge \mathcal{L}(L_{adv_1}) \not\subseteq \mathcal{L}(L_{adv_2})$

Vzťah $\mathcal{L}(L_{adv_1})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_2})$

$$(L_{adv_1}, L_{adv_2}) \in P_n$$

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	?	?	✗	✗	✗	✓

Vzťah $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cup L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cup \mathcal{L}(L_{adv_2})$

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	?	✓	✓	✓	✓	✓

Vzťah $\mathcal{L}(L_{adv_1} \cap L_{adv_2})$ a $\mathcal{L}(L_{adv_1}) \cap \mathcal{L}(L_{adv_2})$

	$\supsetneq$	$\supseteq$	$=$	$\subseteq$	$\subsetneq$	$\not\supseteq \wedge \not\subseteq$
$\forall L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\exists L_{adv_1}, L_{adv_2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Ďakujem za pozornosť

Posudok - 1. otázka

Lema 1.2.7. $nsc((L_{[2]} \,.\, \{a\}) \cup \{\varepsilon\}) = 3$.

Definícia. Nech $L \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Množinu $P = \{(x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ nazývame *mätúca (klamúca) množina pre jazyk* L, ak:

- $x_i y_i \in L \; \forall i \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq i \leq n$
- $x_i y_j \notin L \; \forall i, j \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq i, j \leq n$ a $i \neq j$

Nie, neexistuje, ale rozšírená áno - $P = \{(a, a^2), (a^2, a), (\varepsilon, \varepsilon)\}$.

Posudok - 1. otázka

Prípustné typy dvojíc:

- 1. $(\varepsilon, \varepsilon)$
- 2. (a^n, a^p), kde $n + p \geq 1$ je nepárne
- 3. (a^p, a^n), kde $p + n \geq 1$ je nepárne