

# Analýza štruktúry snarkov

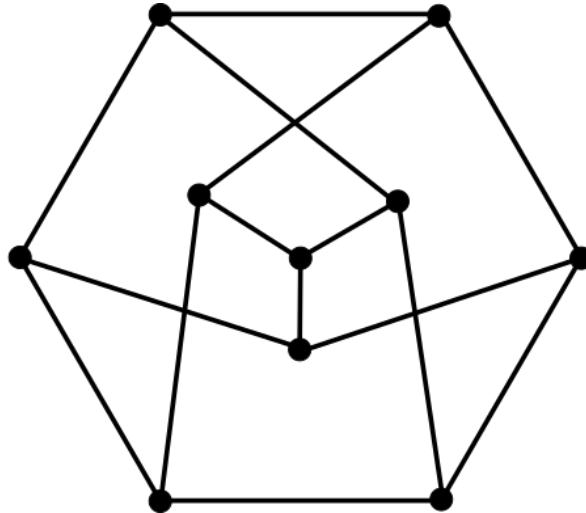
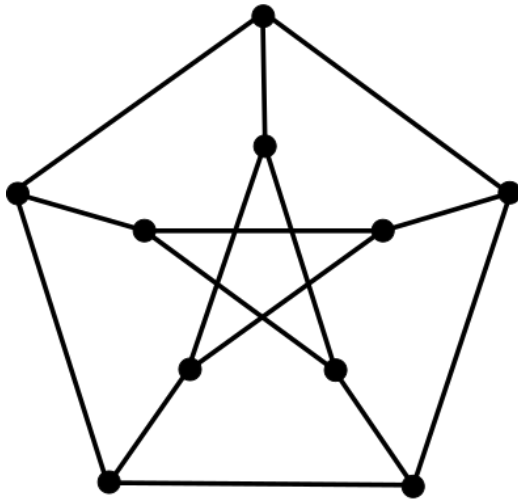
Autor: Bc. Rastislav Simeunovič

Školiteľ: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

28.8.2019

# Snarky

- Kubický, hranovo 3-nezafarbiteľný bezmostový graf
- Určenie či je graf snark je NP-úplný problém
- Redukcia problémov iba na snarky napr. 5-flow conjecture, CDC
- Najmenší snark - Petersenov graf



# Ciele

- Algoritmické overenie vlastností snarkov
  - navrhnuť algoritmy a naprogramovať
- Dôkaz úplnosti množiny klastrov 5-cyklov Petersenovho grafu
- Generovanie nových snarkov
- Analýza výsledkov

# Motivácia

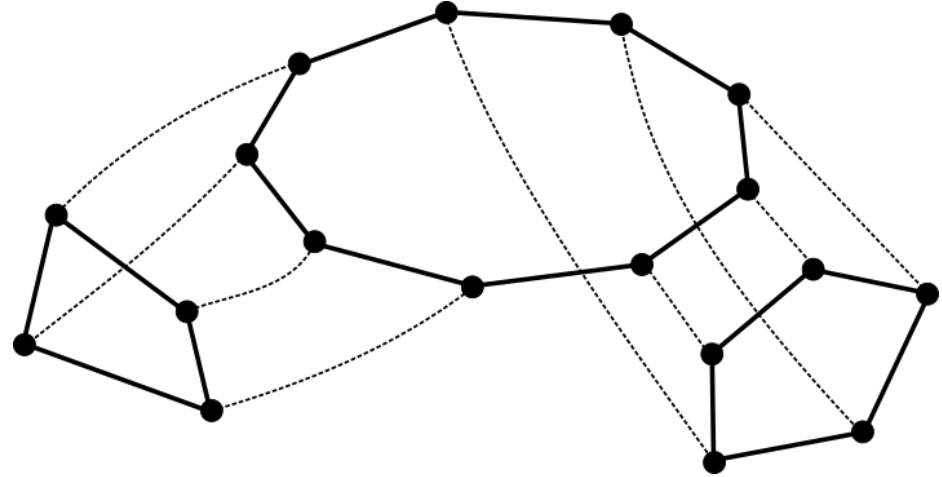
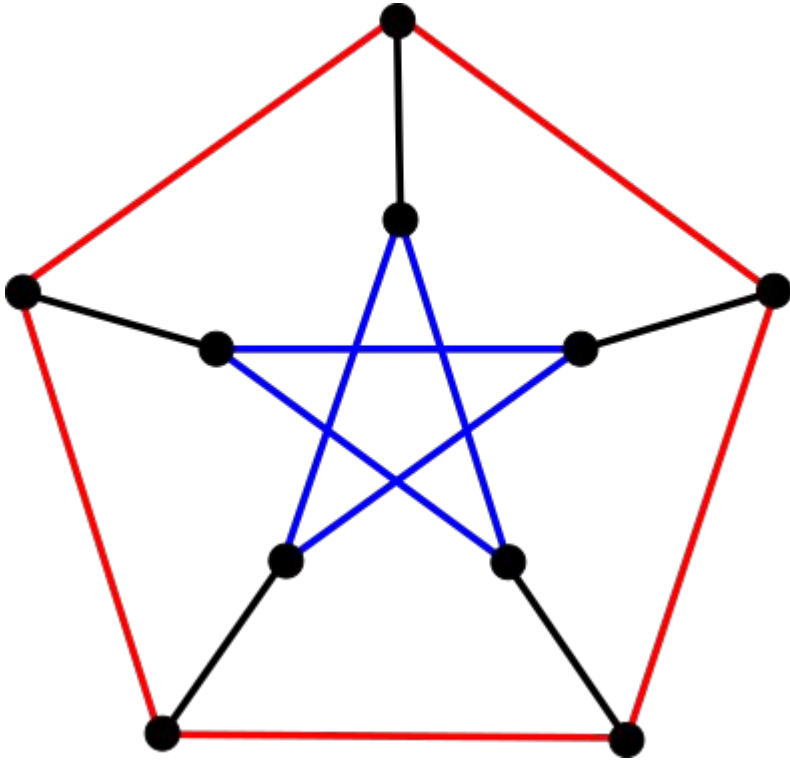
- Potreba analýzy snarkov pomocou počítača
- Výpočet daných vlastností pre doposiaľ netestované snarky a vyvodenie dôsledkov a súvislostí
- Zisťovanie nových vlastností snarkov aj pre účely nových konštrukcií
- Lepšia vizualizácia snarkov
- Pokračovanie v bakalárskej práci

Skúmané vlastnosti

# Permutačnosť

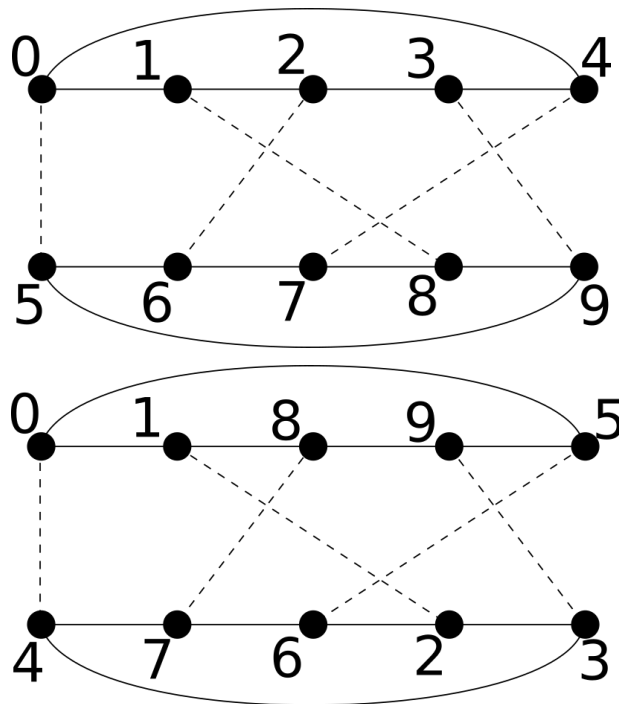
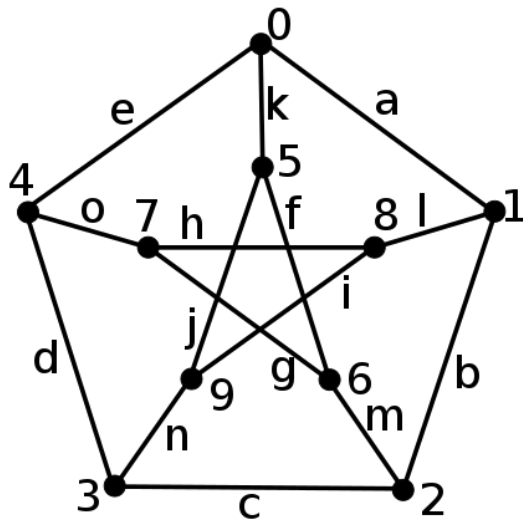
- Permutačný snark - 2-faktor skladajúci sa z dvoch indukovaných kružníc rovnakej (polovičnej) dĺžky
- Polopermutačný snark - 2-faktor, ktorý obsahuje indukovanú kružnicu polovičnej dĺžky
- Permutačné snarky  $\subseteq$  Polopermutačné snarky
- Permutačnosť - podmienka pre ďalšie vlastnosti
- Vyhľadávanie všetkých permutačných reprezentácií
- Vyhľadávanie neizomorfných permutačných reprezentácií
- $N \bmod 4 = 2$
- $N \bmod 8 = 6$  neboli doposiaľ objavené

# Permutačnost



# Neizomorfné permutačné reprezentácie

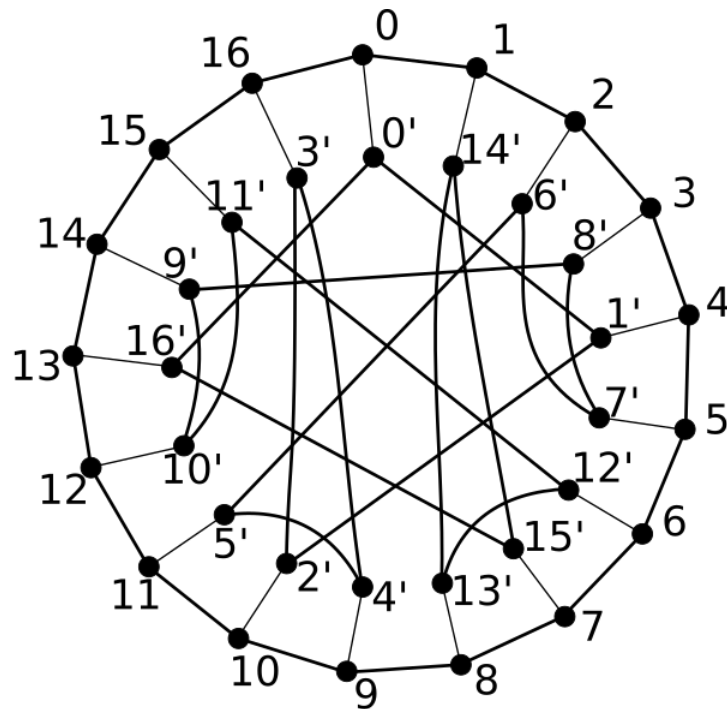
- Petersenov graf - 6 permutačných reprezentácií - všetky navzájom izomorfné





# Parita permutačných cyklov

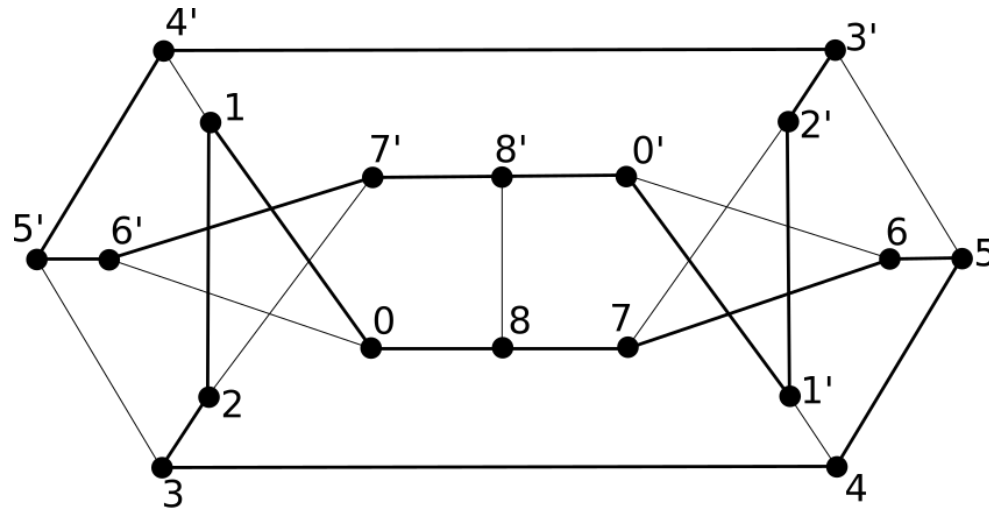
- Permutácie permutačných cyklov
- Poradie prepojenia priečok
- $(\sum(n-1)) \bmod 2$



(0) (1 14 9 4)(2 6 12 10)(3 8 13 16)(5 7 15 11)

# Involučnosť permutačného snarku

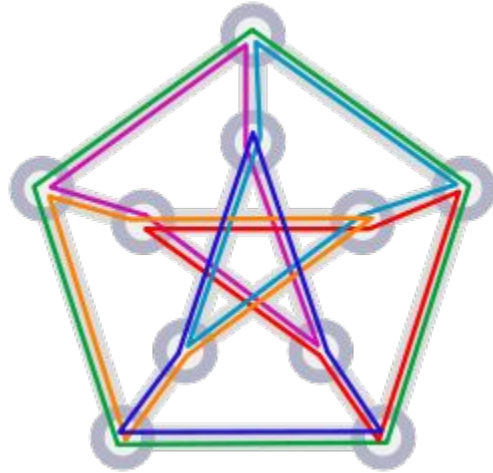
- Permutácia, kde každý cyklus má dĺžku maximálne 2
- Blanušov snark



$$(0\ 6)(1\ 4)(2\ 7)(3\ 5)(8)$$

# Permutačné CDC

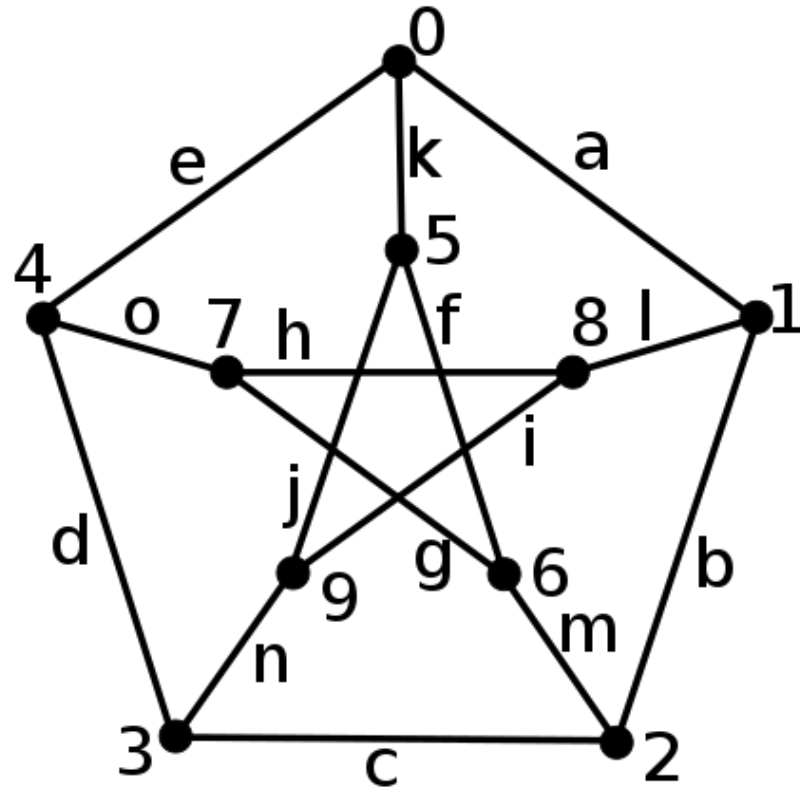
- Cyklové dvojité pokrytie
- CDC obsahujúce permutačný 2-faktor
- Predpoklad, že neexistuje



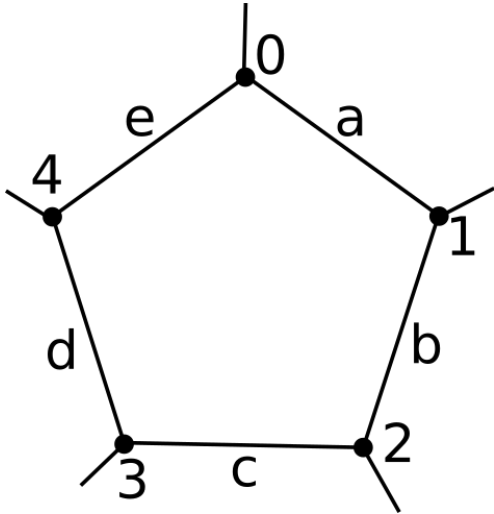
# Klastre

- Klastre 5-cyklov Petersenovho grafu
- Klastre 5-cyklov - maximálny neindukovaný súvislý podgraf, ktorého každá hrana patrí do nejakého cyklu dĺžky 5
- Také, ktoré sú obsiahnuté v Petersenovom grafe
- 9 rôznych klastrov 5-cyklov Petersenovho grafu
  - Odstránenie vrcholu
  - Prerežanie hrany
- Trojica počet vrcholov, počet hrán a počet cyklov jednoznačne určuje klaser
  - Okrem prípadu trojitého pentagónu a trojbunky
    - Trojitý pentagón obsahuje vrchol, ktorý je vo všetkých cykloch
- Nepetersenovské klastre

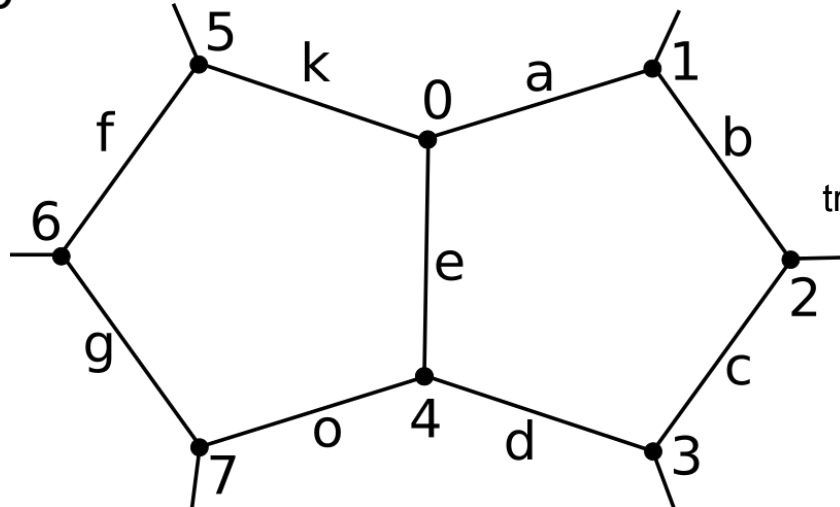
# Klastre



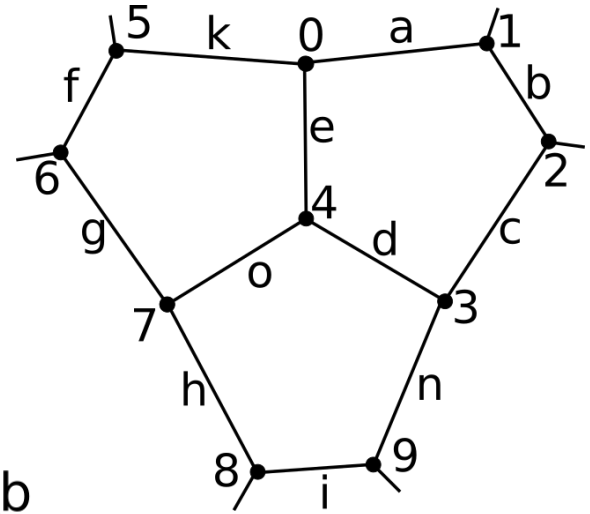
# Klastre



pentagón - V:5 E:5 C:1

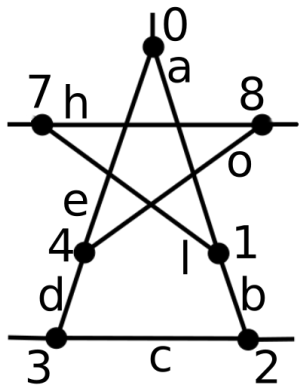


dvojitý pentagón - V:8 E:9 C:2

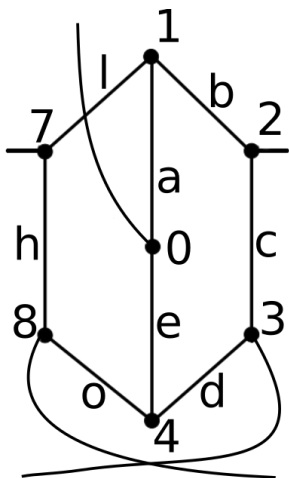


trojitý pentagón - V:10 E:12 C:3

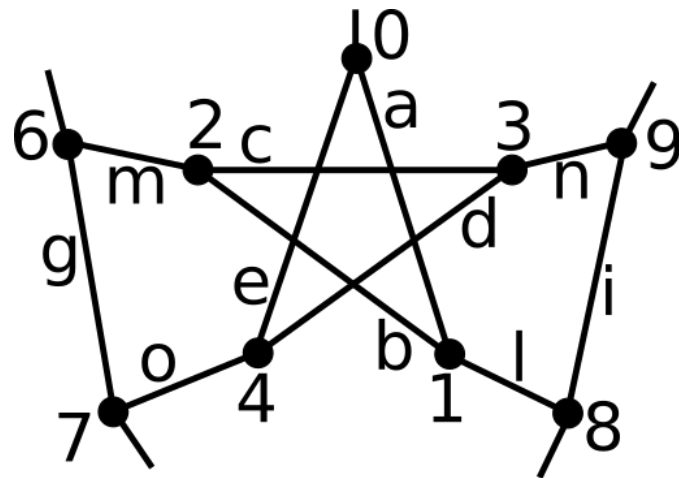
# Klastre



dyáda - V:7 E:8 C:2

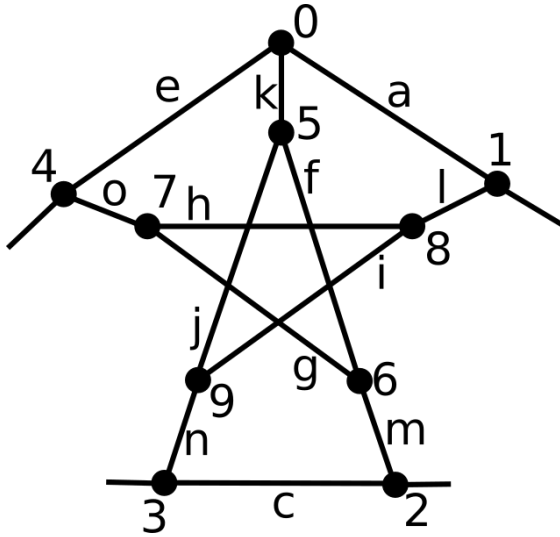


trojbunka - V:10 E:12 C:3

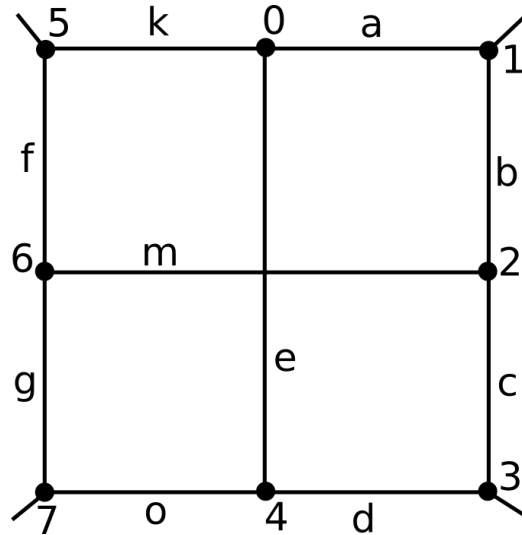


triáda - V:9 E:10 C:3

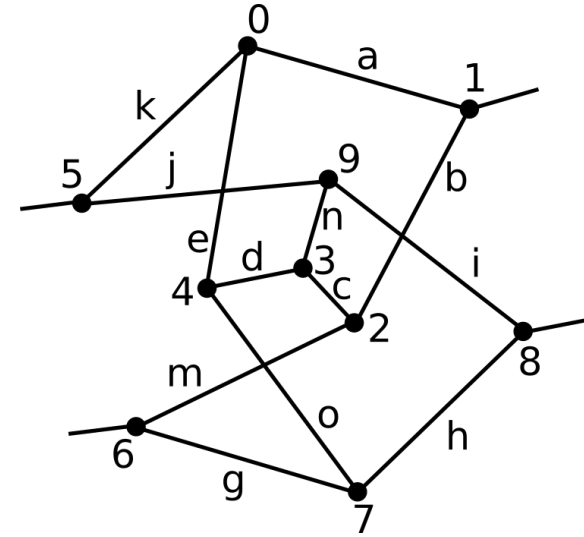
# Klastre



heterochróm 1 - V:10 E:13 C:5



isochróm - V:8 E:10 C:4

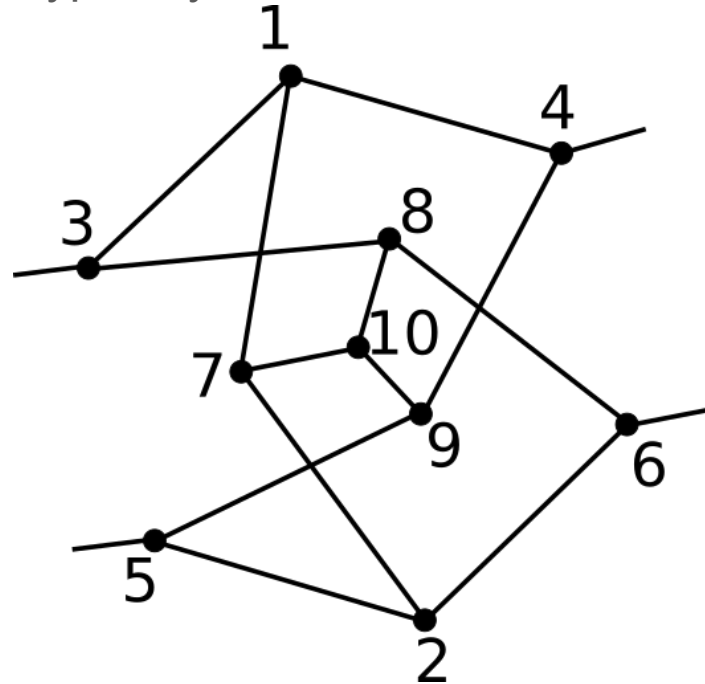
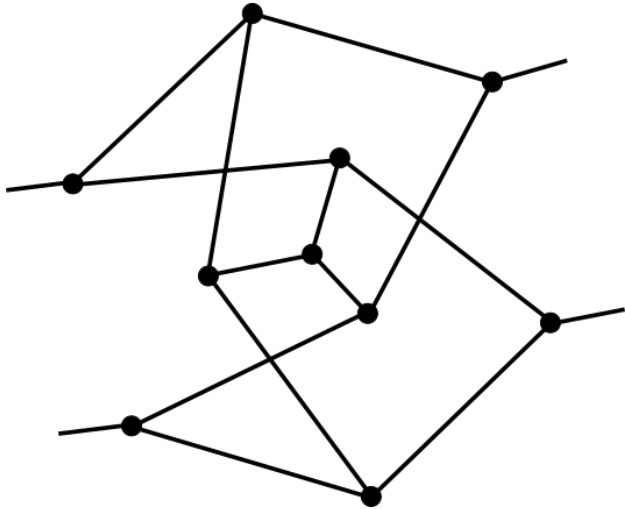


heterochróm 2 - V:10 E:13 C:4



# Jednoznačnosť výpisu klastrov

- Vieme, ako každý petersenovský klaster vyzerá
- Je jednoznačne dané ako je klaster vypísaný
- Presné poradie vrcholov
- Jednoduchšia vizualizácia

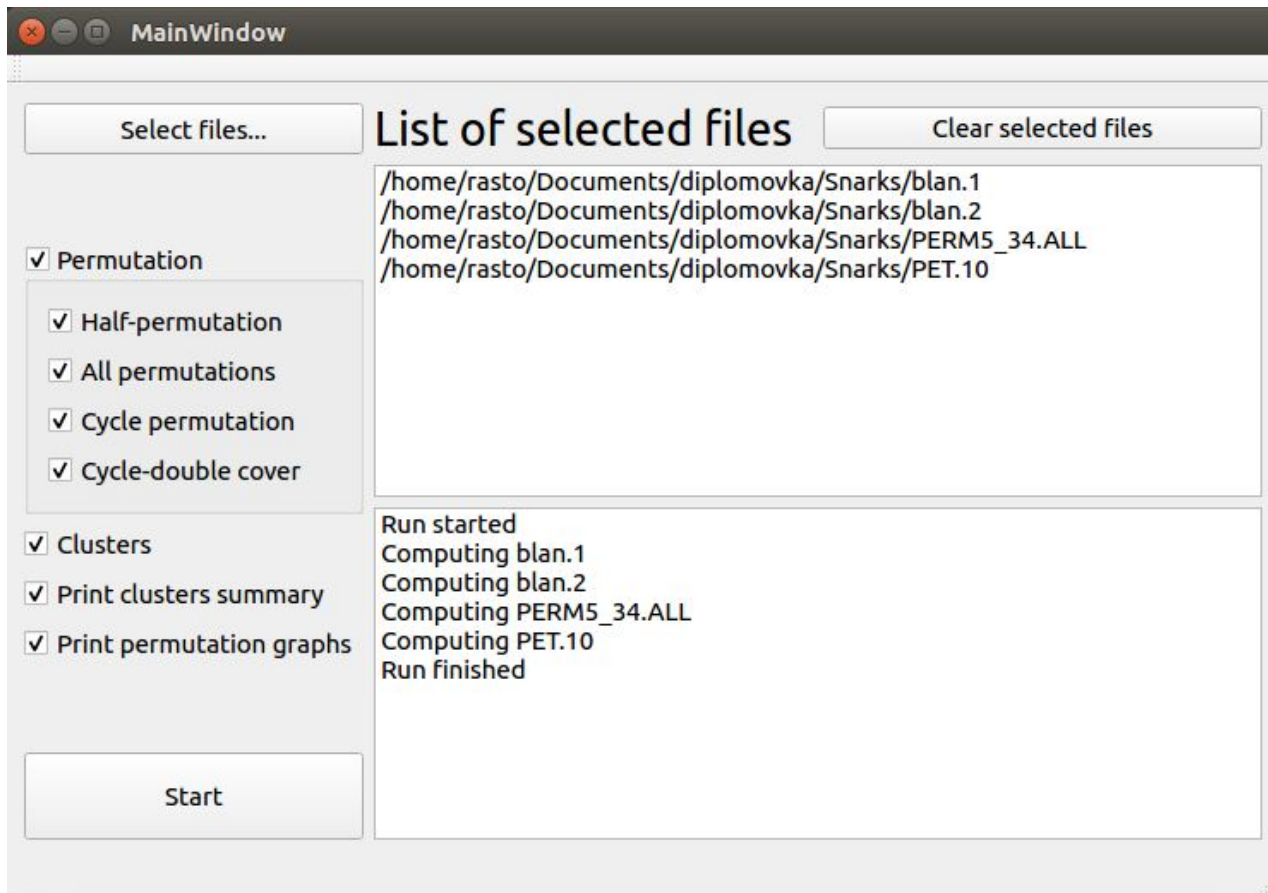


Funkcionalita

# Funkcionalita

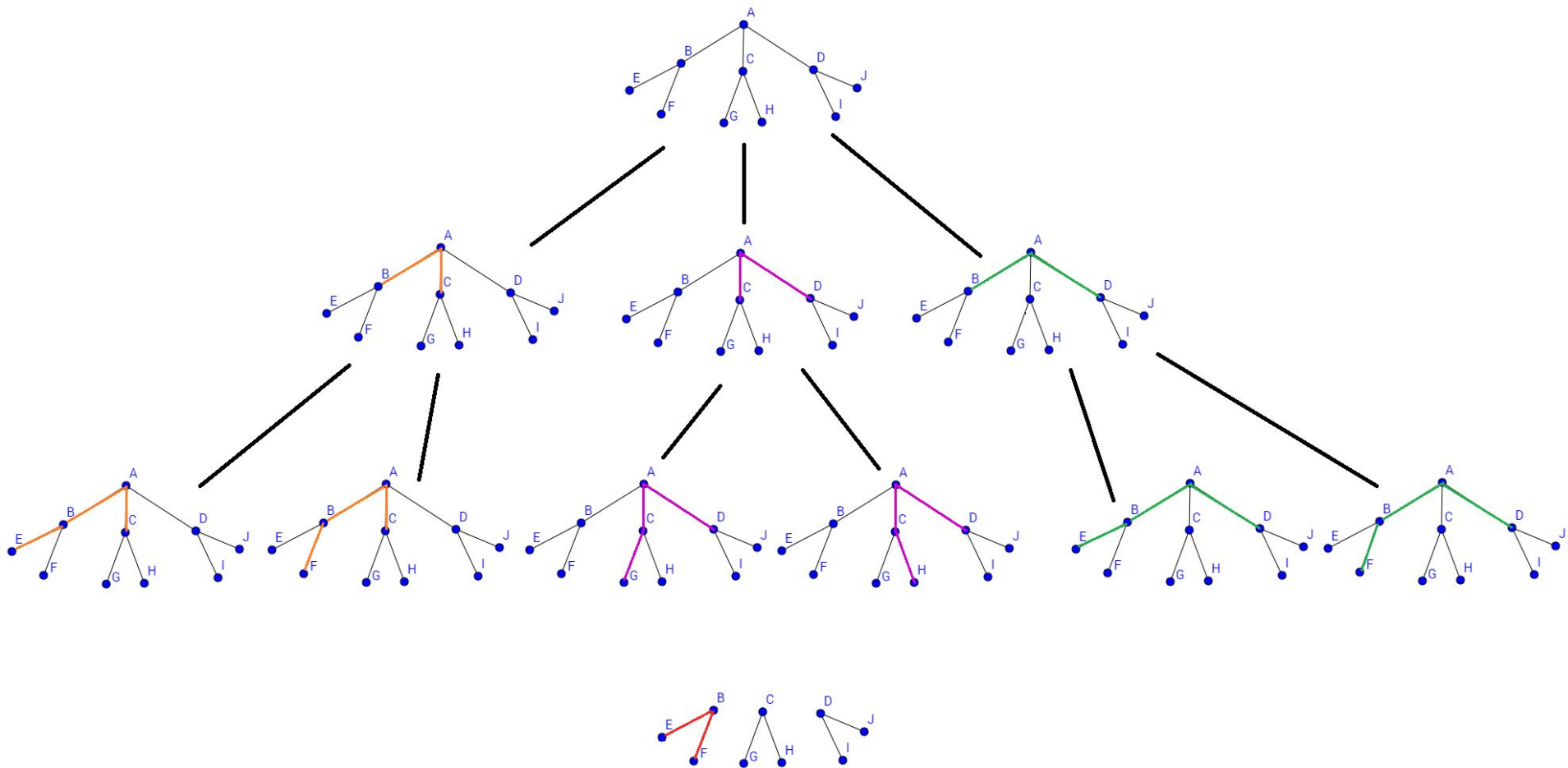
- Kód v C++
- GUI - cross-platform knižnica Qt
- SAT solver Lingeling
- Program 4 časti
  - Načítanie grafov
  - Indukované cykly
  - Výpočet vlastností a klastrov
  - Výpis

# Grafické prostredie



# Vyhľadávanie indukovaných cyklov

- Prehľadávanie do hĺbky
- Časovo najnáročnejšia časť programu
- Exponenciálne veľa cyklov
- Rozdelenie na cykly polovičnej dĺžky a cykly dĺžky 5

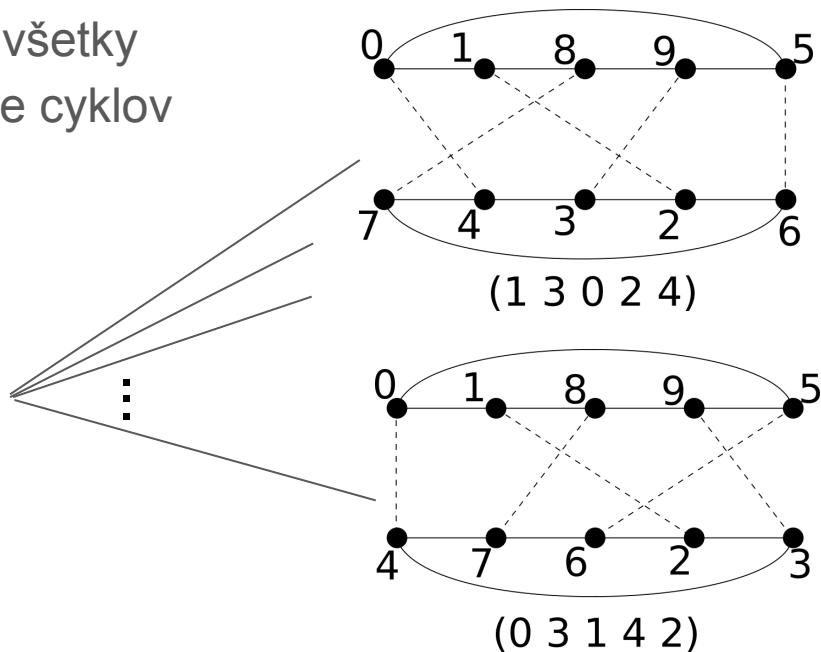
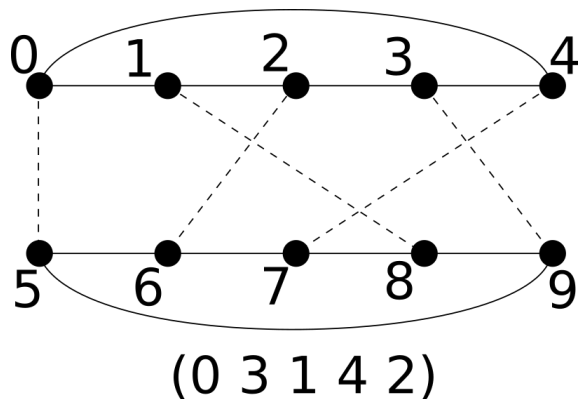


# Permutačnosť

- Prehľadávanie do šírky
- “Zahodí” cyklus a pre jeden vrchol hľadá cyklus
- Veľmi rýchle - pre veľké grafy pár milisekúnd
- Všetky permutačné reprezentácie
- Polopermutačnosť rovnako

# Permutačnosť - neizomorfné reprezentácie

- Overuje všetky dvojice permutačných reprezentácií
- Pre jednu permutačnú reprezentáciu zafixuje smer a rotáciu
- Pre druhú reprezentáciu overuje všetky možnosti smeru, rotácie a poradie cyklov
- Permutácia prepojenia priečok





# Klastre

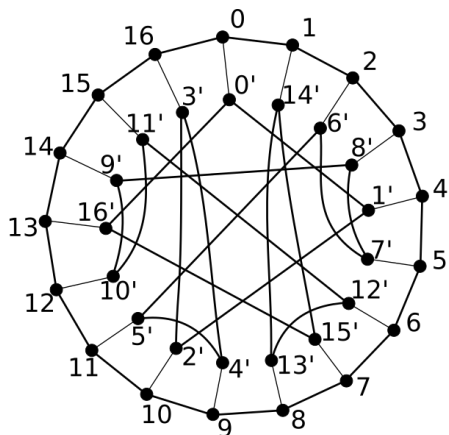
- Union-Find
- Rozdelenie cyklov dĺžky 5 na skupiny, kde žiadna skupina neobsahuje ten istý vrchol
- Z trojice počet vrcholov, počet hrán a počet cyklov určí typ klastra
- Veľmi rýchle

# Permutačné CDC

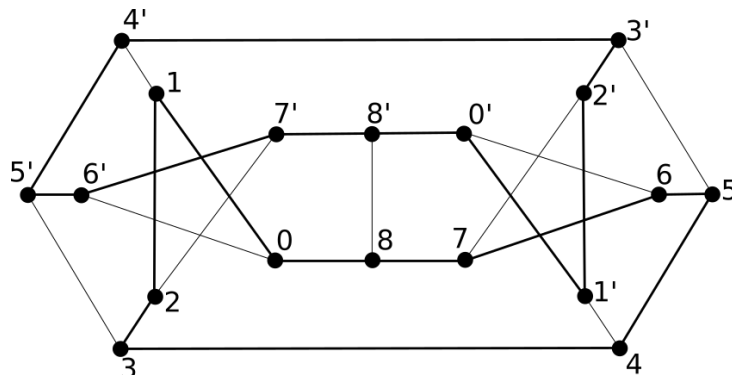
- 2 rôzne spôsoby
- Signed rotation system
  - Vrcholy a hrany majú orientáciu, hrany sú kladné alebo záporné, globálny stav prechádzania je kladný alebo záporný
  - Každú hranu treba prejsť v oboch stavoch
  - $2^{(n/2)}$  možností - pomalé
- SAT solver
  - Lingeling
  - Sada 7 podmienok
  - Formula v CNF

# Parita a involučnosť

- Pamätá si aktuálny vrchol
- Prejde na susedný vrchol v druhom cykle
- Z neho skočí na nový vrchol - dokým nedôjde na začiatok permutácie
  - Vrchol s rovnakým číslom v prvom cykle
- Involúcia overuje všetky permutačné reprezentácie a ich rotáciu



(0) (1 14 9 4)(2 6 12 10)(3 8 13 16)(5 7 15 11)



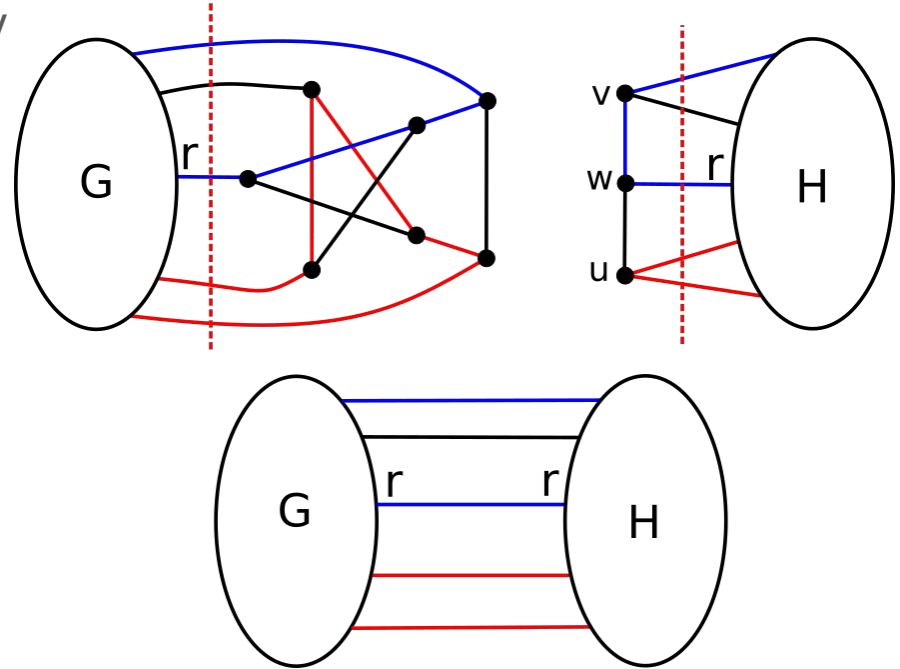
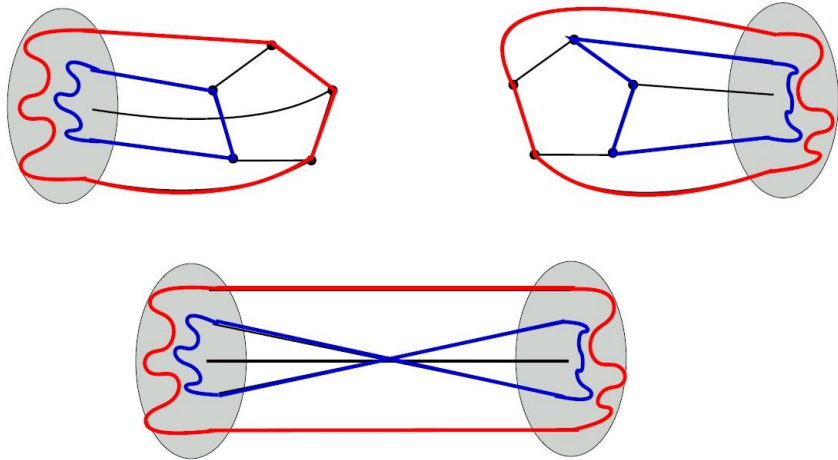
(0 6)(1 4)(2 7)(3 5)(8)

# Rýchlosť výpočtu

Počet vrcholov	Celkový čas (ms)	Indukované cykly (ms)	Výpočet vlast. (ms)	Počet cyklov	# polovičných cyklov
28	12	12	0	310	48
36	97	95	2	1202	177
40	248	243	5	2997	448
44	470	459	11	3289	520
48	1254	1238	16	8827	1212
50	1432	1411	21	13527	1451
58	7674	7641	33	51275	6702
70	49332	49238	94	309351	49386

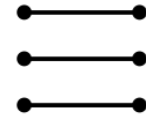
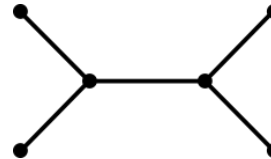
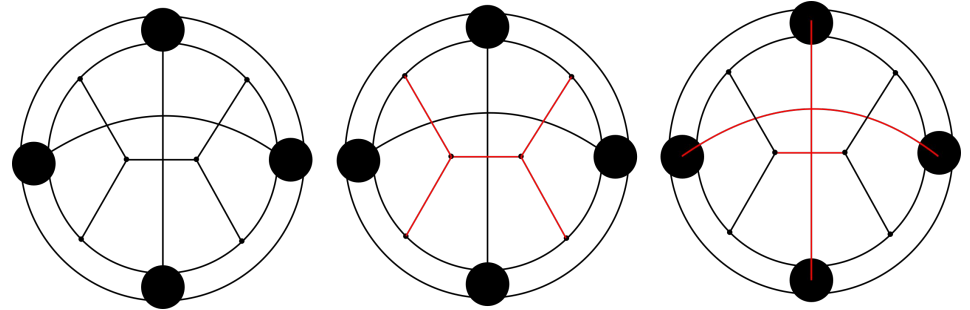
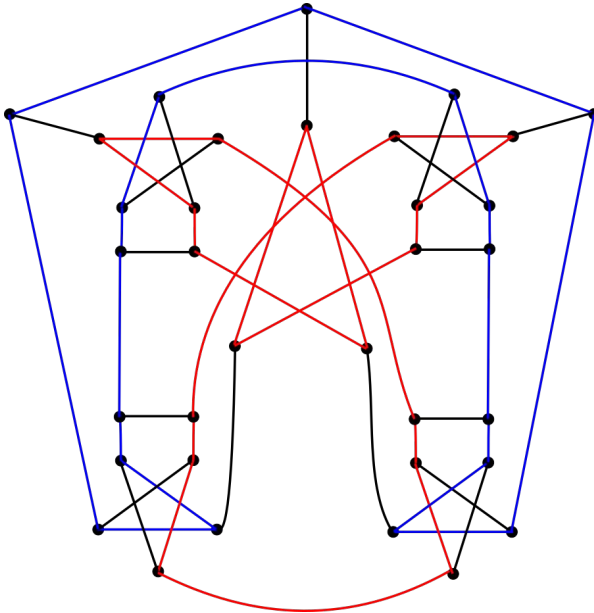
# Generovanie snarkov

- Cyklicky 5-súvislé permutačné snarky
- 5-Súčin
- Negátorová substitúcia



# Vizualizácia PERM5.34

- 12 cyklicky 5-súvislých permutačných snarkov
- Dajú sa rozdeliť do dvoch tried po 6
  - Podľa toho ako vyzerá podgraf po odstránení dyád



# Výsledky a pokračovanie

# Výsledky

- Program funguje
- Nepodarilo sa dokázať, že existuje permutačný snark  $6 \pmod{8}$
- Neobjavil sa žiaden snark s permutačným CDC
- Klastre 5-cyklov v permutačných snarkoch sú najmä isochróm a dyáda
- Trojbunka, trojitý pentagón a heterochróm výrazne menej - klastre získané prerezaním hrán
- Dôkaz úplnosti množiny Petersenovských klastrov
- Vizualizovaná trieda cyklicky 5-súvislých permutačných snarkov s 34 vrcholmi
  - Delia sa na 2 triedy podľa podgrafov
- Vygenerované tisíce nových permutačných cyklicky 5-súvislých snarkov
  - do rádu 90



# Výsledky - klastre

	#snarkov	P	DP	TP	D	T	TC	I	H1	H2	NP
Perm.	11054	3942	2563	549	9081	2496	1130	<b>11229</b>	2417	1087	4277
Half-perm.	3259	1358	219	69	1551	1635	201	<b>3806</b>	692	119	778
Ostatné (tis.)	181	68	23	6	<b>180</b>	112	11	153	26	10	33
Total (tis.)	195	73	26	7	<b>190</b>	116	13	168	29	11	38

P - pentagón, DP - dvojité pentagón, TP - trojité pentagón, D - dyáda, T - triáda, TC - trojbunka, I - isochróm, H1 - heterochróm 1, H2 - heterochróm 2, NP - nepetersenovský klaster

# Výsledky - snarky

Rád	# perm.	# poloperm.	# ostatných	involučné	CDC	total snarkov
10	1	0	0	0	0	1
18	2	0	0	1	0	2
20	0	0	6	0	0	6
22	0	2	18	0	0	20
24	0	3	35	0	0	38
26	64	16	200	0	0	280
28	0	154	2746	0	0	2900
30	0	1771	26628	0	0	28399
32	0	11283	281776	0	0	293059
34	10771	416	84558	171	0	95745

# Pokračovanie

- Nové vlastnosti
- Zrýchlenie vyhľadávania indukovaných cyklov
  - Iný algoritmus
- Prerobenie výpočtu permutačného CDC
  - Signed Rotation System - pomalé
  - SAT solver - závislé na Lingeling
- Podrobnejšie skúmanie nepetersenovských klastrov
- Generovanie nových (väčších) snarkov a ich testovanie

Ďakujem za pozornosť

Vyjadrenie k posudku

# Poradie kapitol 3,4,5

- Kapitola 3 - Permutačné snarky
- Kapitola 4 - Klastre
- Kapitola 5 - PERM5.34
- PERM5.34 sú permutačné snarky, ktoré vzniknú prepojením 4 dyád
- Intuitívnejšie mi príde najprv vedieť čo sú dyády a ako sú prepojené a aké podgrafy vzniknú ich odstránením, ako odkazovať na neskoršiu kapitolu

# Spôsob výpisu petersenovských klastrov

- Oponentov návrh uľahčuje vizualizáciu človeku, ktorý má prácu k dispozícii, avšak sťažuje tomu, kto ju k dispozícii má
- Poznáme štruktúru petersenovských klastrov
- Pri nepetersenovských klastroch dopredu o nich nič nevieme
- Ideálna by bola kombinácia
  - Zachovať poradie vrcholov ako v práci a vypísať aj susedov

Súčasný

Isochrome -> 8 : (4 8 21 9 5 11 20 10)

Oponentov návrh

Isochrome >

4: 8 10

5: 9 11

8: 4 11 21

9: 5 10 21

10: 4 9 20

11: 5 8 20

20: 10 11

21: 8 9

Kombinácia

Isochrome > 8 :

4: 8 10

8: 4 11 21

21: 8 9

9: 5 10 21

5: 9 11

11: 5 8 20

20: 10 11

10: 4 9 20

# Konfigurácia programu

- Súčasný stav
  - Dialóg na načítanie súborov otvorí vždy home folder
  - Pevne daný adresár na výsledky
- 
- Rozrobené
  - Konfiguračný súbor, kde si človek zvolí adresár na výstup
  - Dialóg na vstupné súbory otvorí predvolený adresár/posledný používaný