Obálka systému plôch

Bc. Jana Tutková
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

15.02.2024

Obsah

1. Rovinný prípad
2. Priestorový prípad
3. Pokračovanie práce

Základné definície

Jednoparametrický systém nadplôch

Nech $F\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ je funkcia v premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a v parametri t, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Definujeme jednoparametrický systém nadplôch ako systém množín

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \; F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0, \; t \in I\}.$$

Obálka systému kriviek

Obálkou systému kriviek $\mathcal{F}$ je parametrizovaná krivka $\gamma(t)\colon J \subseteq I \to \mathbb{R}^2$ taká, že

1. $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \in J$,
2. $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F\left(\gamma(t), t\right)$.

Rovnice obálky

Regulárna krivka $\gamma(t)\colon J \subseteq I \to \mathbb{R}^2$ kde $t \in J \subseteq I$ je obálkou jednoparametrického systému $\mathcal{F}$ práve vtedy, keď spĺňa:

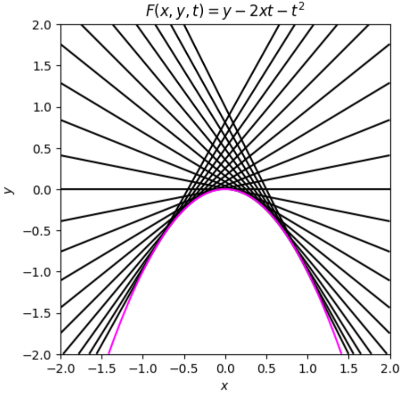
1. $F(\gamma(t), t) = 0$,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$.

Ciele práce

- študovať základné vlastnosti obálky systému plôch,
- zamerať sa na jednoparametrické systémy kvadrík v trojrozmernom priestore,
- numerické experimenty a príklady postupov,
- načrtnúť aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.

Výpočet obálky kriviek

1. Systém nelineárnych rovníc
2. ODR
3. Lokálne prieniky
4. Duálny prístup
5. Kinematický prístup



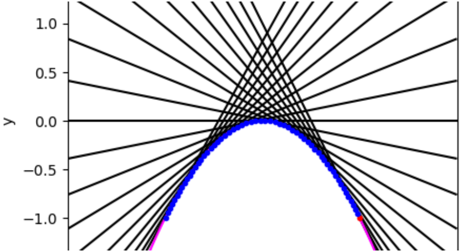
Obr. 1: Jednoparametrický systém priamok s rovnicou $F(x, y, t) = y - 2xt - t^2$.

Prispôsobenie Eulerovej metódy

Majme počiatočný bod (x_0, y_0, t_0). Odhadujeme bod na obálke $(x_{i+1}, y_{i+1}, t_{i+1})$, kým parameter $t_i \leq t_{\max}$, teda máme iteračnú metódu, kde

$$
\begin{aligned}
(x_{i+1}, y_{i+1}) &= (x_i, y_i) + h\vec{m}, \\
F(x_{i+1}, y_{i+1}, t_{i+1}) &= 0,
\end{aligned}
$$

kde i patrí do indexovej množiny $M = \{i \mid t_i \in [t_{\min}, t_{\max}]\}$ a $\vec{m} =\perp \dfrac{\nabla F(x_i, y_i, t_i)}{\|\nabla F(x_i, y_i, t_i)\|}$.



Obr. 2: Prispôsobená Eulerova metóda aplikovaná na systém $F(x, y, t) = y - 2xt - t^2$.

Jednoparametrický systém sfér

Nech $m(t)\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ je parametrizácia krivky a $r(t)\colon I \to \mathbb{R}^+$ je funkcia definovaná na tom istom intervale a $X \in \mathbb{R}^3$. Jednoparametrický systém sfér je daný rovnicou

$$\mathcal{S}\colon \langle X - m(t), X - m(t)\rangle - r^2(t) = 0.$$

Obálka systému sfér

Obálka jednoparametrického systému sfér splňa rovnice

$$\mathcal{S}\colon \langle X - m(t), X - m(t)\rangle - r^2(t) = 0,$$

$$\dot{\mathcal{S}}\colon \langle \dot{m}(t), X - m(t)\rangle + r(t)\dot{r}(t) = 0.$$

Charakteristické kružnice

Charakteristická kružnica

V prípade, že pre $t \in I$ je $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t \neq \emptyset$, sa tento prienik nazýva sa charakteristická kružnica c_t. V prípade $\mathcal{S}_t \cap \dot{\mathcal{S}}_t = \emptyset$, pre t neexistuje žiadna charakteristická kružnica.

Stred charakteristickej kružnice je

$$C_t = m(t) - \frac{r(t)\dot{r}(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle} \dot{m}(t).$$

Jej polomer je

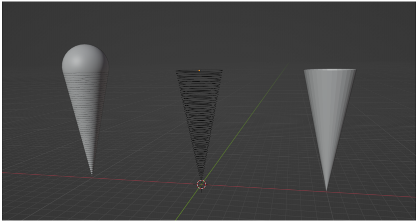
$$l_t = r(t)\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(t)}{\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle}}.$$

Lema

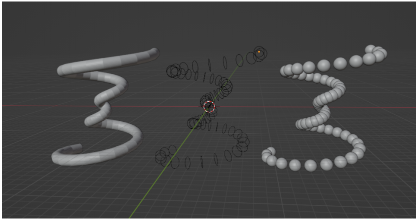
Zjednotenie všetkých charakteristických kružníc c_t jednoparametrického systému sfér $\mathcal{S}_t$ je obálka $\mathcal{E}$ tohto systému, teda platí

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in I} c_t.$$

- Blender Python API + Visual Studio Code
- Databáza vygenerovaných plôch sa nachádza na `https://github.com/tutka13/Vysledne-plochy`.



(a) $m(t) = (0, 0, t), r(t) = \frac{t}{\sqrt{26}}$

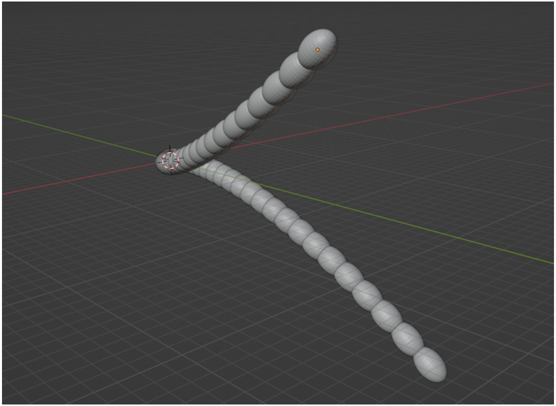


(b) $m(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), r(t) = 1$

Obr. 3: Jednoparametrický systém sfér, charakteristické kružnice, obálka systému kružníc s funkciami $m(t)$ a $r(t)$.

Identifikovať body samoprieniku obálky podľa rovníc v [2].

Aplikovať teóriu obálky sfér na obálku elipsoidov naškálovaných v smere vektorov Frenetovho súradnicového systému.



Obr. 4: Jednoparametrický systém elipsoidov so škálovaním v dotykovom smere.

Referencie

- Babušíková J., Slodička M., Weisz J. 2000. *Numerické metódy.* Univerzita Komenského v Bratislave. ISBN 80-223-1384-X. Dostupné na internete: `http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/skripta.pdf`.
- Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: `https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652`.
- Bruce, J. W., Giblin, P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: `http://www.jstor.org/stable/3617131`.
- Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics.* Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: `https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4`
- Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: `https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y`.

Ďakujem za pozornosť.