

# Edge coloring of signed cubic graphs

Bc. Bohdan Józsa

doc. RNDr. Robert Lukočka, PhD.

Katedra Informatiky  
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky  
Univerzita Komenského

- Pochádzajú z oblasti psychológie (Harary, 1953)
- Grafy s hranami ohodnotenými + alebo -
- Rôzne formálne definície v rôznych článkoch
  - $(G, \sigma); \sigma : E(G) \rightarrow \{+, -\}$
  - $(G, \Sigma); \Sigma \subseteq E(G)$
- Sú rozšírením obyčajných grafov

Prepnutie vrchola  $v$  je otočenie znamienok všetkých hrán incidentných s  $v$

Hľadáme vlastnosti konzistentné pod prepínaním (napr. znamienka kružníc)

Podľa pôvodnej definície (Zaslavsky)

$$Z_n = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$$

Máčajová et al. definovali

$$M_n = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k\} \text{ ak } n = 2k,$$

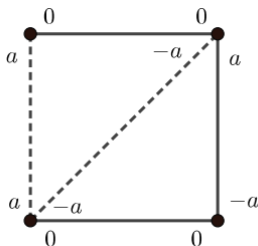
$$M_n = \{0, \pm 1, \dots, \pm k\} \text{ ak } n = 2k + 1$$

- $M_n$  sa správa pekne pri prepínaní
- $+0 = -0 \Rightarrow$  farba 0 sa správa inak ako ostatné farby.

# Hranové farbenia

Hranové farbenie grafu  $G$  je zobrazenie  $\gamma$ , kde v každom vrchole je každá farba zastúpená najviac raz a pre každú hranu  $e = uv$  platí

$$\gamma(u, e) = \sigma(e)\gamma(v, e)$$



*Behr definoval farbenie s  $\gamma(u, e) = -\sigma(e)\gamma(v, e)$ , dokázali sme, že na tom nezáleží.*

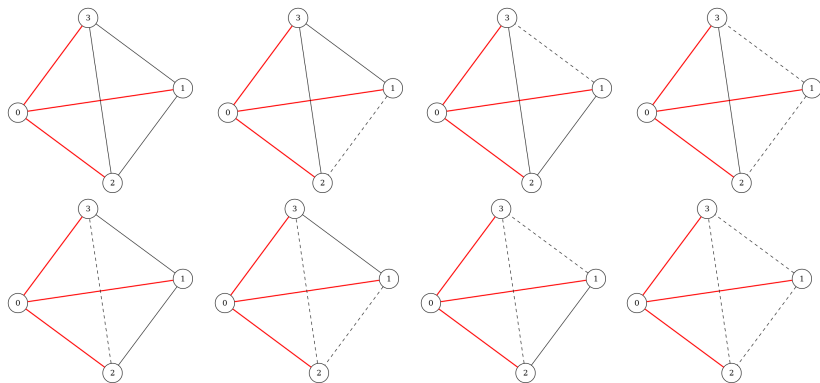
Behr (2019) *Edge coloring signed graphs*

- Vizingova veta pre signované grafy
- Ekvivalencia hranového farbenia a vrcholového farbenia hranového grafu

- 1 Nájdemu kostru podkladového grafu
- 2 Rôzne triedy ekvivalencie zodpovedajú rôznym signatúram nekostrových hrán

Každé zmysluplné prepnutie zmení signatúru aspoň jednej kostrovej hrany.

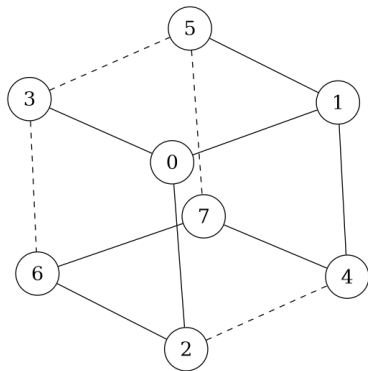
# Rôzne triedy grafu $K_4$



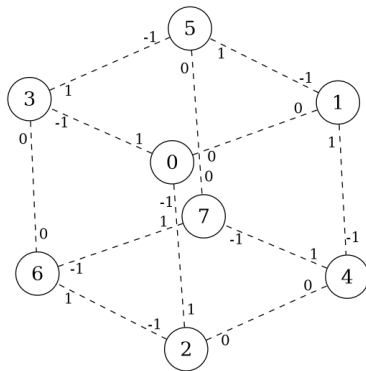


- 1 Premenné od 1 po  $6m$ , 6 premenných na hranu = 3 premenné na polhranu
- 2 Klauzuly:
  - 1  $(3i + 1, 3i + 2, 3i + 3)$  zodpovedá  $(+1, -1, 0)$  pre  $i$ -tu polhranu
  - 2 Obmedzenia pre polhrany, ktoré tvoria dokopy hranu
  - 3 Obmedzenia pre polhrany, ktoré susedia s rovnakým vrcholom
- 3  $8m + 9n = 21n$  klauzúl;  $3n$  veľkosti 3, zvyšok veľkosti 2

# Malé nezafarbitel'né grafy – príklady



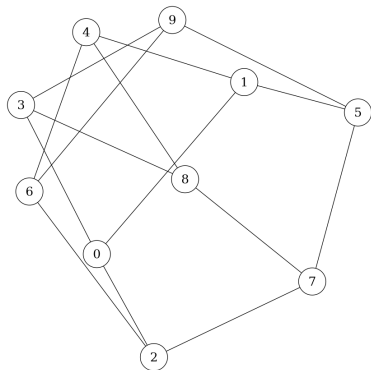
Nezafarbitel'ná signatúra



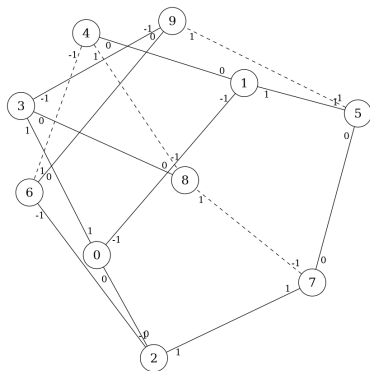
Zafarbitel'ná signatúra

Obr.: Najmenší nezafarbitel'ný graf – Kocka

# Malé nezafarbitel'né grafy – príklady



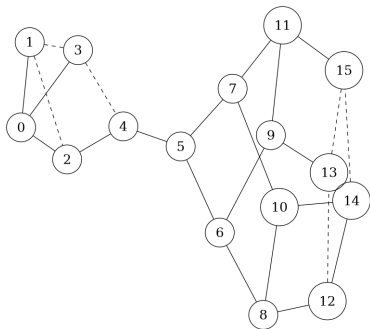
Nezafarbitel'ná signatúra  
(celokladný graf)



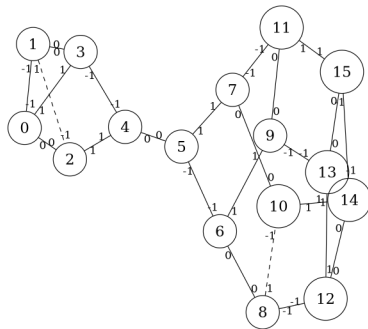
Zafarbitel'ná signatúra

Obr.: Petersenov graf

# Malé nezafarbitelné grafy – příklady



Nezafarbitelná signatúra



Zafarbitelná signatúra

Obr.: Náhodný graf so 16 vrcholmi

## Rozpracovaný výskum:

- Nájsť malé signované kubické grafy, ktoré nie sú 3-zafarbiteľné (do 24 vrcholov)
  - Ako sa mení pomer zafarbiteľných a nezafarbiteľných signatúr pri väčších grafoch?
  - Existuje graf, ktorého žiadna signatúra nie je zafarbiteľná?
- Vety charakterizujúce hranovú 3-zafarbiteľnosť
  - Dekompozičné vety

## Ďalší výskum:

- Nájsť postačujúce podmienky, kedy signované grafy nie sú zafarbiteľné
- Skúmanie aplikácie ďalších viet a problémov pre normálne grafy na signovaných grafoch