

# Popisná zložitost' na zásobníkových automatech

Bc. Lukáš Kiss

Univerzita Komenského

21.2.2020

**Vedúci práce:** prof. RNDr. Branislav Rován, PhD.

# Popisná zložitosť

- ▶ Stručný popis jazykov.
- ▶ Najznámejšie - stavová, časová, priestorová.
- ▶ horné/dolné odhady.

## Zameranie

Zameriame sa hlavne na miery popisnej zložitosti ako počet stavov a počet zásobníkových symbolov

# Konečné automaty

- ▶ Najpreskumanejšia oblasť z automatov.
- ▶ Horné aj dolné odhady aj pre niektoré jazykové operácie ako  $\cup, \cap$

## Príklad

Postupnosť jazykov:

$$L_n = \{a^m \mid m \geq 0, n \text{ delí } m\}$$

- ▶ Minimálny konečný automat pre  $L_n$  - aspoň  $n$  stavov.
- ▶ Každý stav predstavuje zvyšok po delení  $n$ .

## Zásobníkové automaty

- ▶ Problém s popisnou zložitostí na stavoch a na zásobníkových symboloch.
- ▶ Môžeme mať dva rôzne minimálne automaty pre rovnaký jazyk, ktoré nevieme porovnať
- ▶ Neexistuje funkcia, ktorá by minimálnym automatom pre daný jazyk priradila rovnaké hodnoty (Simplifying DPDA Using Supplementary Information, Pavel Labath and Branislav Rován)

### Príklad

Postupnosť jazykov:

$$L_n = \{a^m \mid m \geq 0, n \text{ delí } m\}$$

Existuje automat s 2 stavmi a 1 zásobníkovým symbolom a automat s 1 stavom a 2 zásobníkovými symbolmi.

# Riešenie zložitosti na PDA

- ▶ Skúmajú sa 2 podtriedy, ktoré sú ekvivaletné triede zásobníkových automatov.
- ▶
  1. 1 stav, miera v počte zásobníkových symbolov. (Dá sa vidieť, že ľubovolný automat musí akceptovať ľubovolný jazyk okrem  $\Sigma^*$ , len prázdny zásobník.)
  2. 2 zásobníkové symboly - miera v počte stavov.

## Pozn.

Dajú sa skúmať triedy s viacerými zásobníkovými symbolmi alebo stavmi.

# Zásobníkové automaty na regulárných jazykoch

- ▶ Umožníme na regulárných jazykoch použiť zásobníkové automaty.
- ▶ Ako sa zmenia horné a dolné odhady?

# Zásobníkové automaty na regulárnych automatoch

## Teoréma

K ľubovlnému nedeterministickému konečnému automatu  $A_1$  s  $n$  stavmi vieme zostrojiť zásobníkový automat  $A_2$  s  $\lceil \frac{n}{p} \rceil$  stavmi a  $p$  zásobníkovými symbolmi.

- ▶ Horný odhad.
- ▶ Vrchný zásobníkový symbol sa použije ako ďalší možný stav.
- ▶ Akceptácia pomocou prázdneho zásobníka.
- ▶ Stav  $q$  z  $A_1$  sa zmení na  $p \times Z$  z  $A_2$ .
- ▶ Ak je stav  $q$  z  $A_1$  akceptačný, tak  $A_2$  môže vyhodit' v stave  $p$  symbol  $Z$  zo zásobníka.

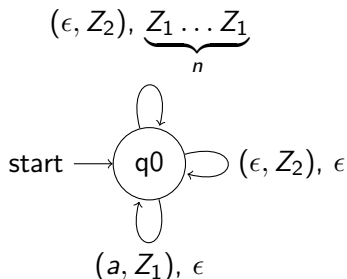
# Dolný odhad na reg. jazykoch

## Reg Jazyk

Postupnosť jazykov:

$$L_n = \{a^m \mid m \geq 0, n \text{ delí } m\}$$

- ▶ (Iba stavy) Automat je minimálny pre jazyk  $L_n$ , ak vyžadujeme práve 2 zásobníkové symboly.
- ▶ (Iba zásobníkové symboly) Je minimálny s dvoma zásobníkovými symbolmi?





# Dolný odhad na reg. jazykoch

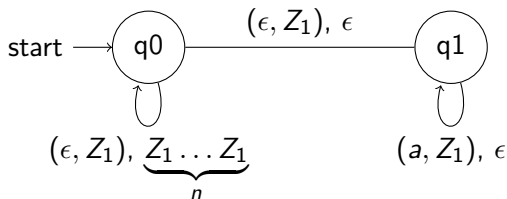
## Lemma

Žiadny zásobníkový automat s 1 stavom a 1 zásobníkovým symbolom nedokáže akceptovať jazyk  $L_n$ , pre  $n \geq 2$

- ▶ Dôkaz sporom.
- ▶ Automat musí vyberať zo zásobníka na  $a$  alebo  $\epsilon$ .
- ▶ Dá sa potom ukázať, že automat akceptuje  $a \notin L_n$ , pre  $n \geq 2$ .

## Dolný odhad na reg. jazykoch

- ▶ Iba jeden zásobníkový symbol?
- ▶ Je to možné pomocou dvoch stavov.
- ▶ Spodný odhad pomocou predchádzajúcej lemy.



- ▶ Akceptuje prázdny zásobník.
- ▶ V prvom stave natipuje počet blokov.
- ▶ V druhom stave už len kontroluje počet áčok.

# Horné odhady pre zásobníkové automaty

## Deterministické

Pre každý zásobníkový automat  $M$  s  $n$  stavmi a  $k$  zásobníkovými symbolmi a pre každé  $p \in \mathbb{N}, 2 \leq p \leq k$ , existuje ekvivalentný zásobníkový automat  $N$  s  $p$  zásobníkovými symbolmi a  $O(\frac{nk}{p})$  stavmi.

## Nedeterministické

Pre každý zásobníkový automat  $M$  s  $n$  stavmi a  $k$  zásobníkovými symbolmi a pre každé  $p \in \mathbb{N}, 2 \leq p \leq k$ , existuje ekvivalentný zásobníkový automat  $N$  s  $p$  zásobníkovými symbolmi a  $O(n\sqrt{\frac{k}{p}})$  stavmi.

*On Reducing the Number of Stack Symbols in a PDA, (Jonathan Goldstine, John K. Price and Detlef Wotschke)*

## Bezkontextové jazyky, 1 stav

- ▶  $h(a_i) = b_i, \forall a_i \in \Sigma$
- ▶  $L_p = \{wh(w)^R \mid w \in a_1, \dots, a_p^*\}$
- ▶ Ukážeme, že každý automat s 1 stavom potrebuje aspoň  $p + 1$  zásobníkových symbolov na akceptovanie jazyka  $L_p$ .

### Horný odhad - konštrukcia automatu

- ▶ Automat začína so symbolom  $Z_{p+1}$  na zásobníku a drží si ho na vrchu, čo mu určuje, že pracuje iba s áčkami.
- ▶ Automat na každom  $a_i$ , nahradí na zásobníku  $Z_{p+1}$  za  $Z_i Z_{p+1}$ .
- ▶ Pri nejakom  $a_i$  si automat tipne, že je koniec áčok a prepíše  $Z_{p+1}$  na  $Z_i$ .
- ▶ Na každom  $b_i$  automat vyťahuje zo zásobníka  $Z_i$ .
- ▶ Akceptuje prázdny zásobníkom.

## Bezkontextové jazyky, 1 stav

- ▶ Dôkaz rozdelíme na niekoľko častí.
  - ▶ Ukážeme, ako automat musí pracovať so zásobníkom, aby akceptoval  $L_p$ .
1. Dokazujeme sporom pre automat s  $p$  zásobníkovými symbolmi.
  2. Ukážeme, že na každom vstupe, automat musí meniť zásobník.
  3. Ukážeme, že automat musí vedieť vyberať zo zásobníka na vstupom symbole  $b_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}$
  4. Následne ukážeme, že každý  $b_i$ , musí mať svoj vlastný zásobníkový symbol.
  5. Potom ukážeme, že automat akceptuje  $b_k \notin L_p$ , kde  $Z_k$  je začiatkový zásobníkový symbol.

## Bezkontextové jazyky, 2 zás. symboly

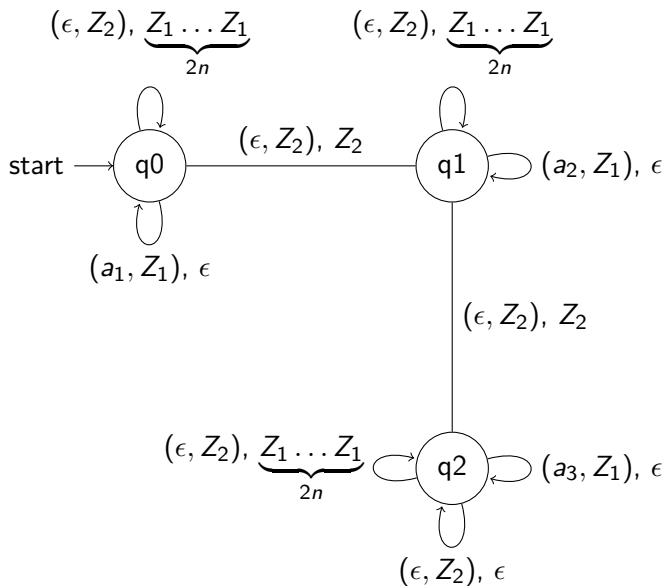
- ▶  $L_n = \{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n} \mid \forall m_i : 2n \text{ devides } m_i\}$
- ▶ Dokážeme, že ľubovoľný automat s 2 zásobníkóvými symbolmi bude potrebovať aspoň  $n$  stavov.

### Bezkontextové jazyky, 2 zás. symboly

- ▶ Každý stav bude spracovávať bloky zo svojich  $a_i$ , pomocou symbolu  $Z_1$ .
- ▶  $Z_2$  bude vždy na začiatku zásobníka udávať koniec bloku.
- ▶ Na  $Z_2$  a v patatričnom stave  $q_i$ , si automat tipne, či ide spracovávať ďalšie bloky z  $a_{i+1}$ .
- ▶ Akceptuje prázdny zásobník.

## Bezkontextové jazyky, 2 zás. symboly

- ▶ Automat pre  $L_3$ .



## Dolný odhad - pre $L_n$

- ▶ V stave riešenia.
  
- ▶ Dôkaz sporom pre automat s  $n - 1$  stavmi.
- ▶ Dôkaz sa tiež rodelí na pár častí.
- ▶ Nejaký stav sa zopakuje na rôznych dvoch  $a_i$  a  $a_j$ .
- ▶ Daný stav môže mať rôzny vrchný zásobníkový symbol.



Ďakujem za pozornosť.