Počet zafarbení kubického grafu

Bc. Matúš Zubčák,

doc. RNDr. Edita Mačajová, PhD.

Obsah diplomovej práce

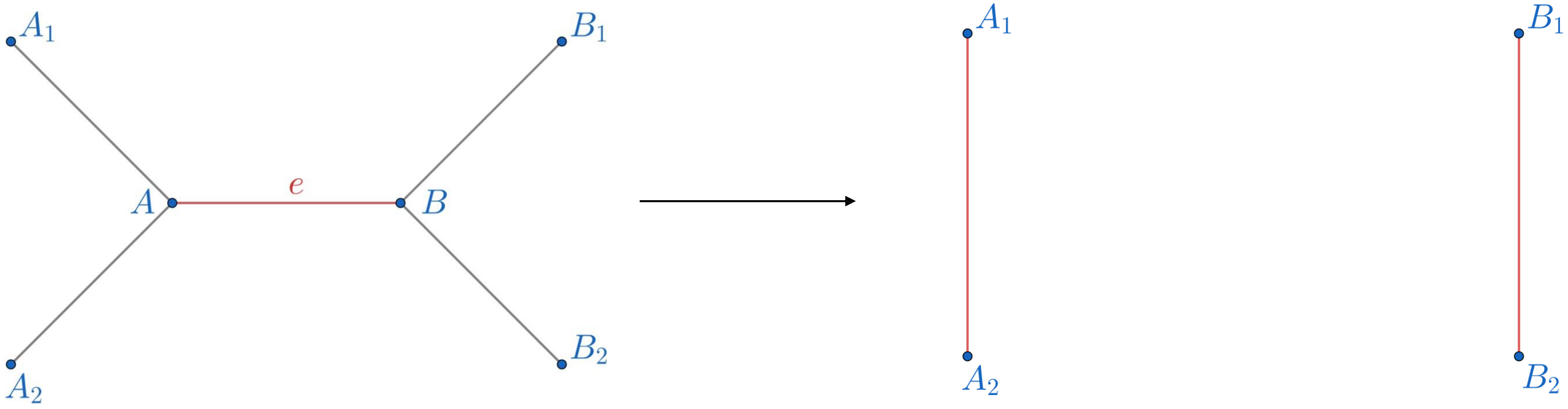
- Čiastočne nadväzujeme na výskum v bakalárskej práci
  - Rozšírime program na výpočet Kászonyiho funkcie
  - Určíme hodnoty Kászonyiho funkcie pre rotačné binárne snarky
- Nadväzujeme na článok *Enumerating the edge-colourings and total colourings of a regular graph* (S. Bessy, F. Havet)
  - Skúmame maximálne počty hranových 4-farbení na 4-regulárnych grafoch v závislosti od počtu vrcholov
  - Skonštruujeme nekonečnú triedu 4-regulárnych grafov, ktorá je dolným odhadom počtu hranových 4-farbení

Úvod do problematiky

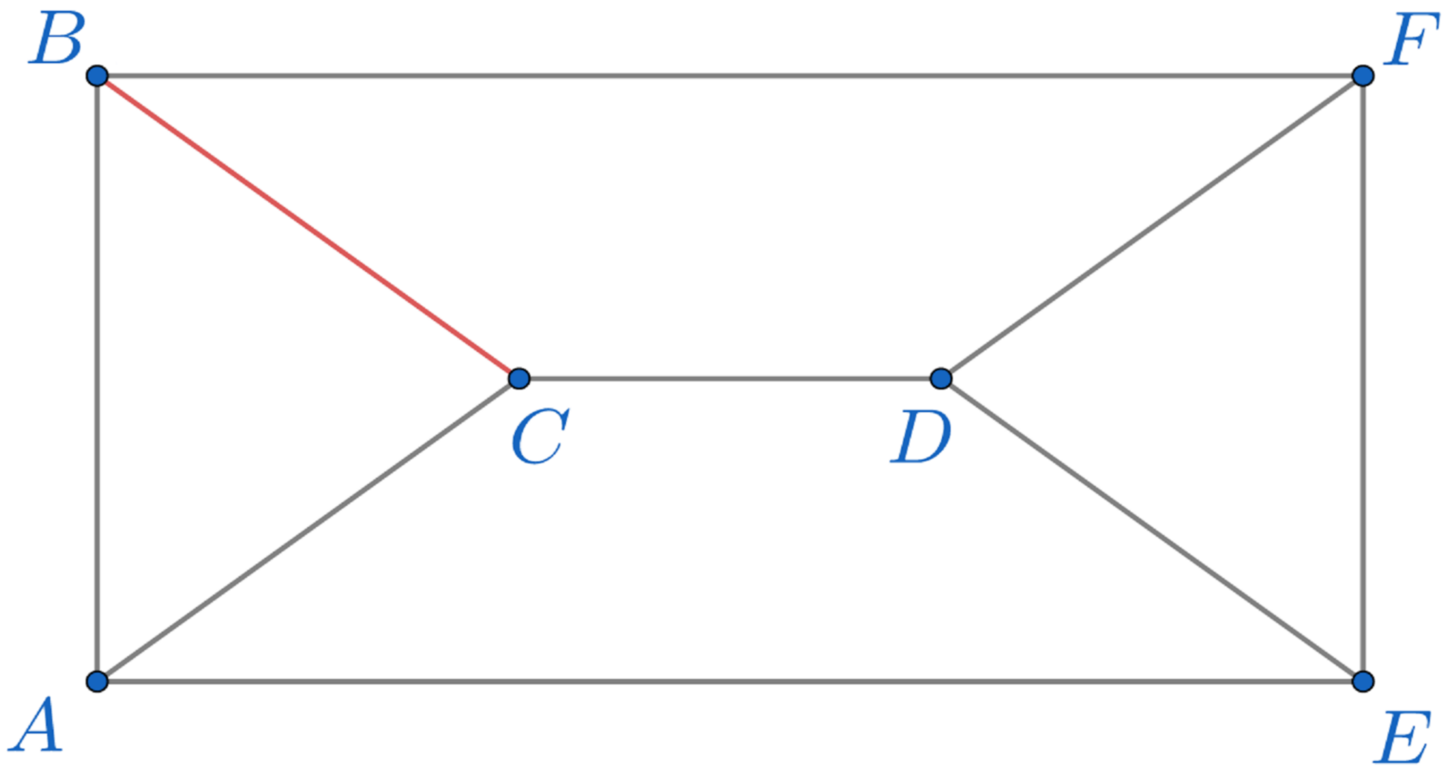
- Mnohé otvorené hypotézy z teórie grafov je možné zredukovať na kubické grafy
- Hypotézy sú otvorené pre hranovo 3-nezafarbiteľné kubické grafy
- Hľadajú sa vhodné miery „nezafarbiteľnosti“ kubického grafu, na základe ktorých by sme vedeli rozdeliť kubické grafy do tried
- Jednou z možných mier je takzvaná Kászonyiho funkcia, ktorú v našej práci skúmame

Potlačenie hrany *e* v kubickom grafe

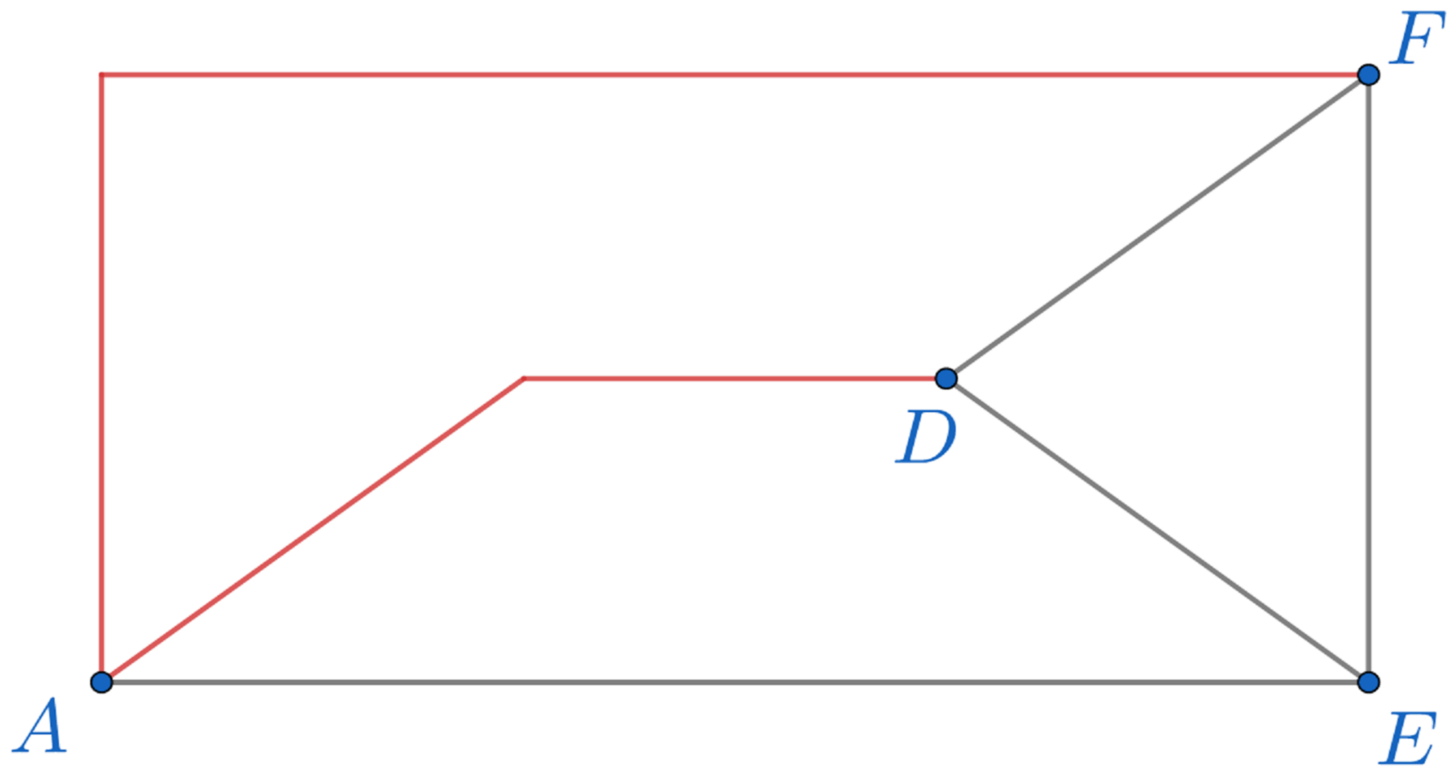
- Potlačenie hrany *e* v kubickom grafe je odobratie hrany *e* a následné vyhladenie vrcholov stupňa 2



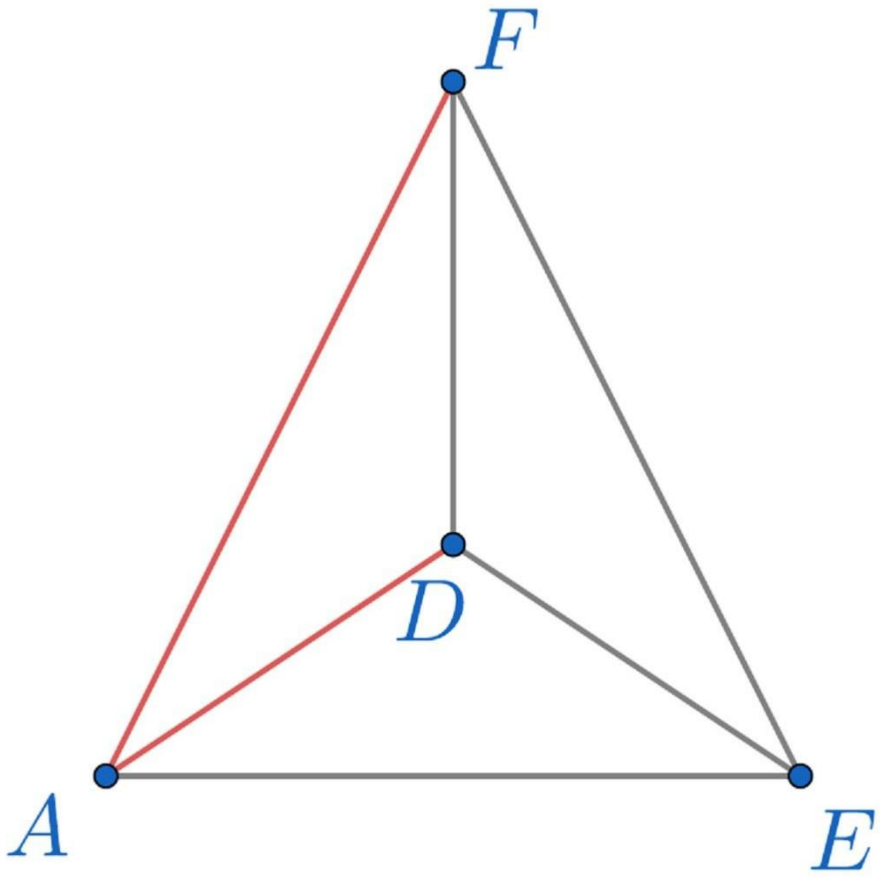
Príklad hranového potlačenia – graf prizma



Príklad hranového potlačenia – po potlačení



Príklad hranového potlačenia – výsledný graf



Kászonyiho funkcia

- Kászonyiho funkcia $\psi(e)$ vyjadruje počet rôznych hranových 3-farbení grafu G po potlačení hrany e

Program na výpočet Kászonyiho funkcie

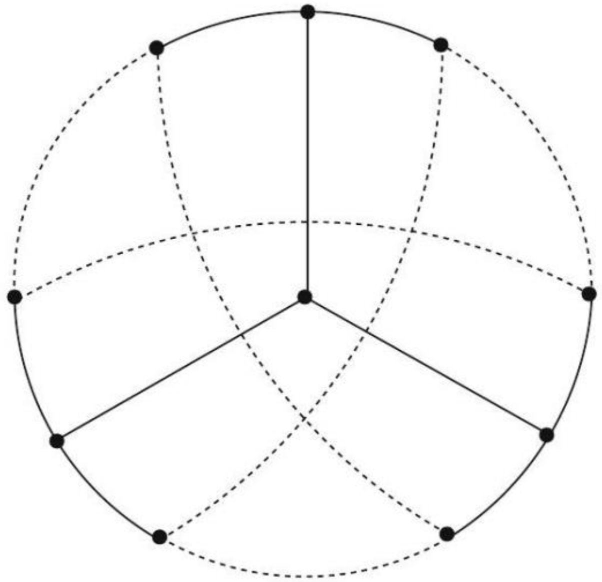
- Akceptácia všeobecnejších štandardizovaných vstupných súborov

Program na výpočet Kászonyiho funkcie

- Akceptácia všeobecnejších štandardizovaných vstupných súborov
- Výpočtová časť – algoritmus založený na metóde „Path decomposition“
  - Idea algoritmu spočíva na postupnom pridávaní minimálnych kružníc a pamätaní si možných farbení pre už vybrané hrany
  - Pre mnohé kubické grafy „so štruktúrou“ sa algoritmus správa ako keby mal polynomiálnu časovú zložitosť
  - S jeho pomocou sme určili hodnotu Kászonyiho funkcie pre rotačné binárne snarky až do 1500 vrcholov
  - Pre porovnanie: SAT solver – rádovo 100 vrcholov

Kászonyiho funkcia a rotačné binárne snarky

- Binárny snark *T* sa skladá z troch izomorfných binárnych stromov, ktorých korene sú napojené na centrálny vrchol *r*

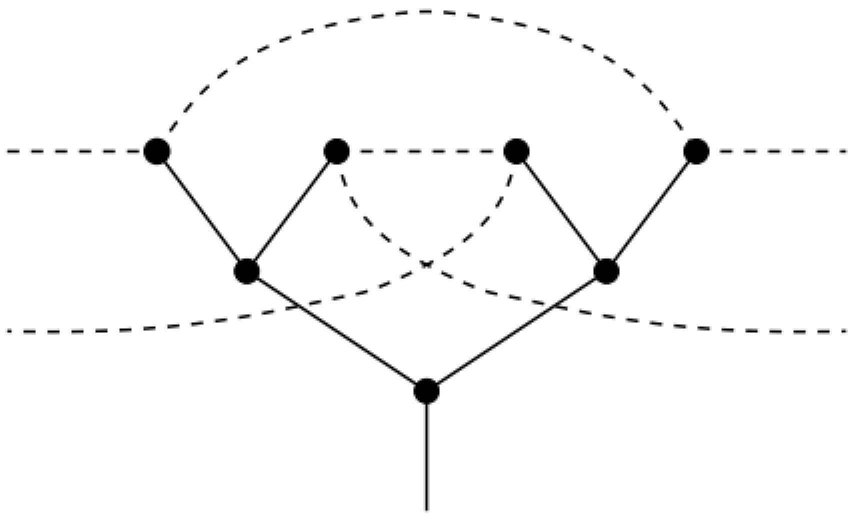


Konštrukcia rotačných binárnach snarkov

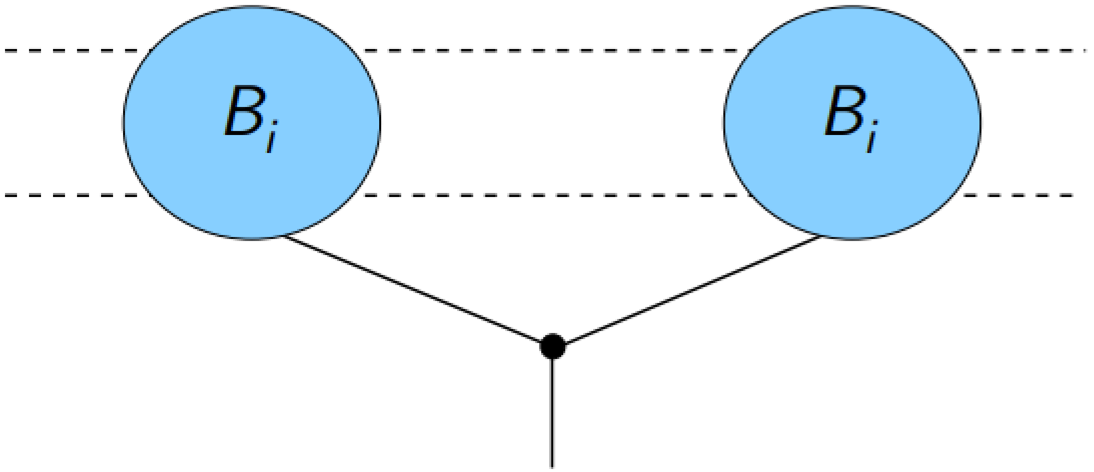
- Prevzatá z práce *Superposition of snarks* (M. Škoviera, E. Máčajová)
- Vo svojej práci autori tiež dokazujú, že ľubovoľný graf skonštruovaný daným spôsobom je snark

Konštrukcia rotačných binárnach snarkov

- B_1 je takzvaný Petersenov negátor
- Graf B_{i+1} získame rekurzívnym spojením dvoch grafov B_i



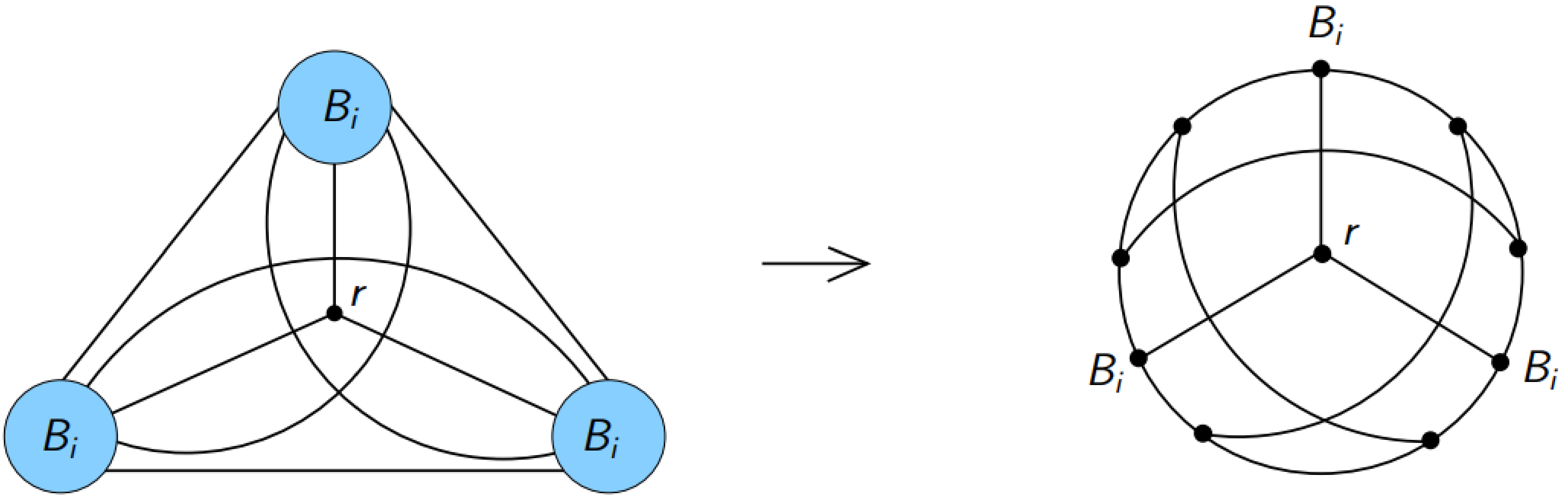
B_1



B_{i+1}

Konštrukcia rotačných binárnach snarkov

- Výsledný rotačný binárny snark T_i skonštruujeme z troch grafov B_i nasledovným spôsobom:



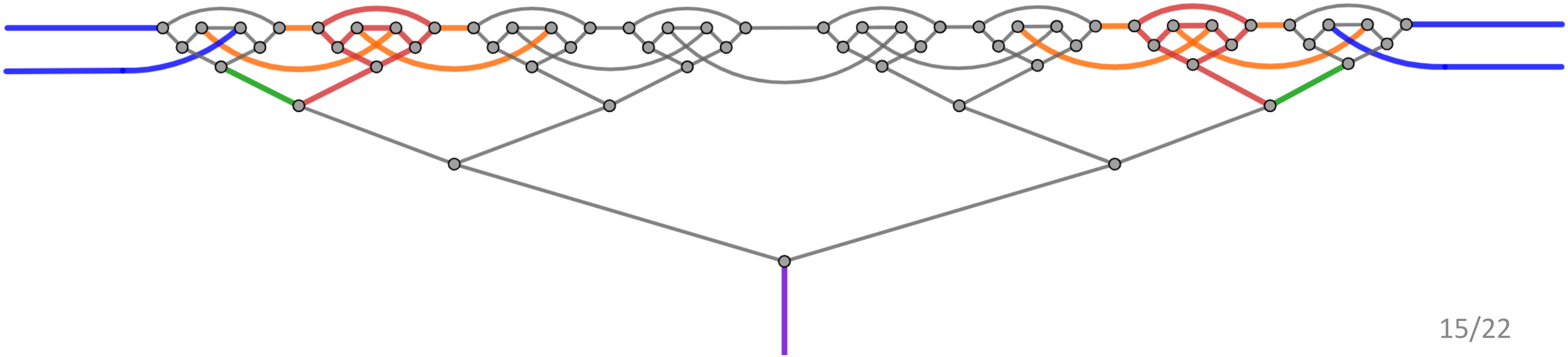
Kászonyiho funkcia pre rotačné binárne snarky

- Pre $k \leq 3$ Kászonyiho funkcia na rotačných binárnych snarkoch T_k nenadobúda zovšeobecniteľný vzor
- Pre $k \geq 4$ vieme hrany každého rotačného binárneho snarku T_k rozdeliť do 6 tried, a pre každú triedu vieme hodnotu Kászonyiho funkcie určiť parametricky – v závislosti od k

- Sivé hrany: $\psi(e_k) = 0$
- Hodnota Kászonyiho funkcie pre ostatné typy hrán je tvaru:

  $\psi(e_k) = 2^{f(k)} \cdot 3^{g(k)}$

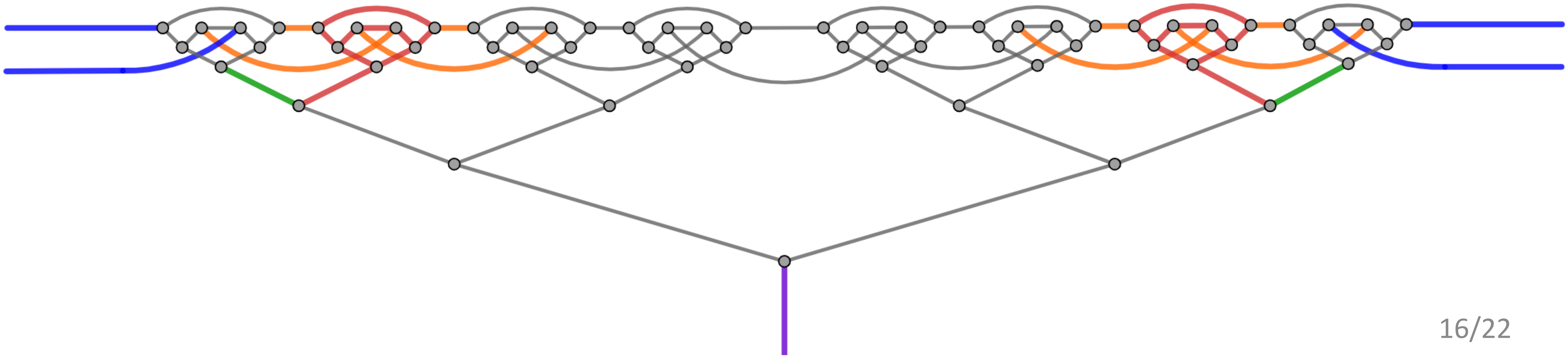
- Modré hrany: $f(k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 1,$ $g(k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 2$
- Zelené hrany: $f(k) = 3 \cdot 2^{k-2} + k - 3,$ $g(k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$



- Hodnota Kászonyiho funkcie je tvaru:

$$\psi(e_k) = 2^{f(k)} \cdot 3^{g(k)}$$

- Oranžové hrany: $f(k) = 3 \cdot 2^{k-2} + k - 4,\qquad g(k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$
- Červené hrany: $f(k) = 3 \cdot 2^{k-2} + k - 5,\qquad g(k) = 3 \cdot 2^{k-2}$
- Fialové hrany: $f(k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 2,\qquad g(k) = 3 \cdot 2^{k-2}$



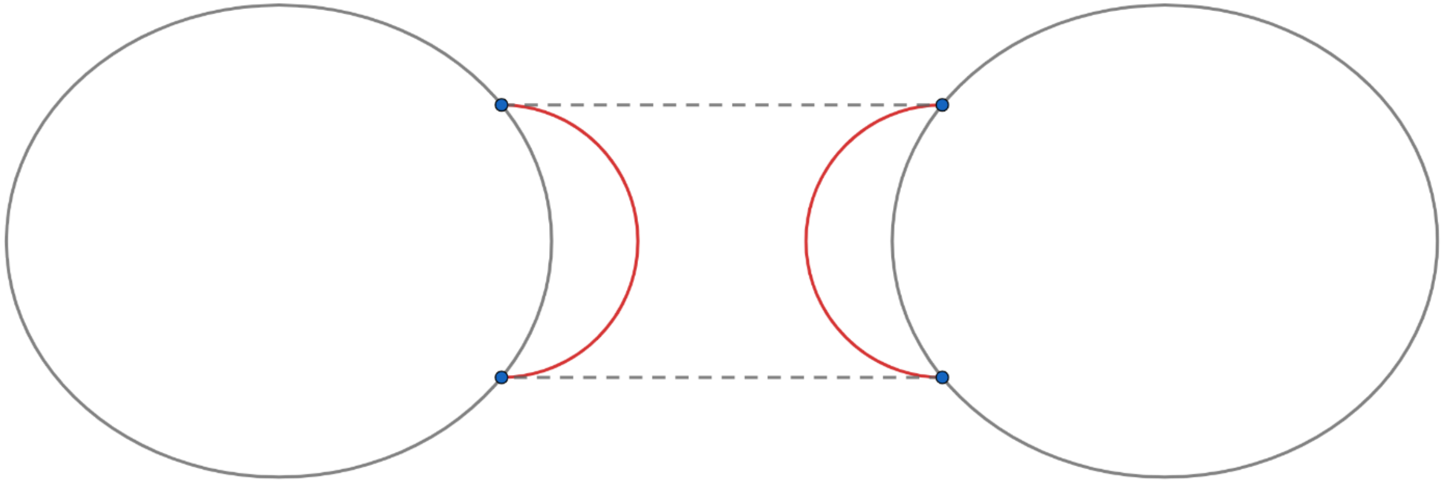
Maximálne farbenia na 4-regulárnych grafoch

- Vychádzame z článku *Enumerating the edge-colourings and total colourings of a regular graph* (S. Bessy, F. Havet)
- Autori v ňom vyslovia hypotézu:
  „koľko najviac rôznych hranových 3-farbení môže mať jednoduchý kubický graf vzhľadom na počet vrcholov“
- Autori tiež skonštruujú nekonečnú triedu grafov, ktorá nadobúda toto maximum

- My sa zaoberáme analogickým problémom na 4-regulárnych grafoch

2-join dvoch 4-regulárnych grafov

- 2-join grafov G a F je odobratie hrán $u \in G, v \in F$ a následné spojenie incidentných vrcholov
- Nech 4-regulárne grafy G a F mali $\chi(G)$ a $\chi(F)$ rôznych hranových farbení
- Potom výsledný graf má $\chi(G) \cdot \chi(F) / 4$ hranových 4-farbení

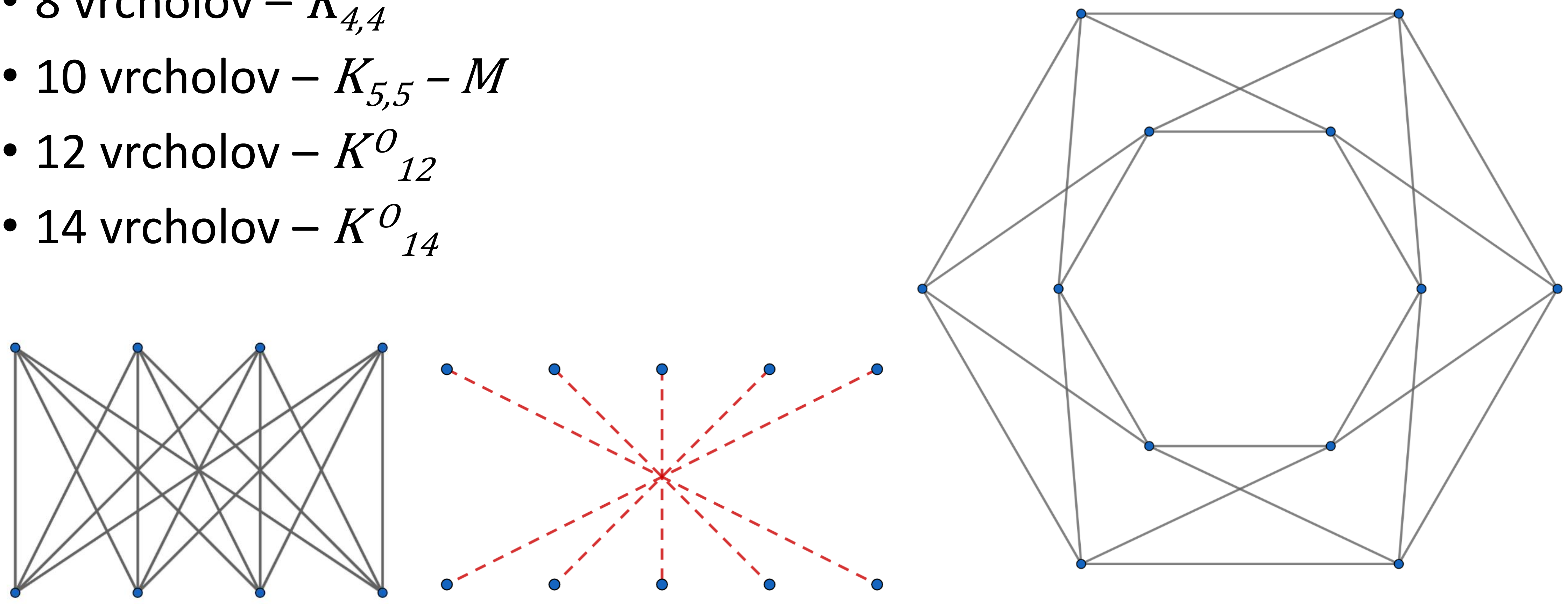


Skúmanie malých grafov pomocou programu

- Prehľadali sme 4-regulárne grafy (bez trojuholníkov) do 18 vrcholov
- Po analýze výsledkov sme skonštruovali nekonečnú triedu 4-regulárnych grafov, ktorá ponúka najlepší známy dolný odhad na problém maximálneho počtu hranových 4-farbení na 4-regulárnych
- Výsledkom skúmania je aj pozorovanie, že nájsť triedu grafov, ktorá by intuitívne mohla byť tesným dolným odhadom je náročné

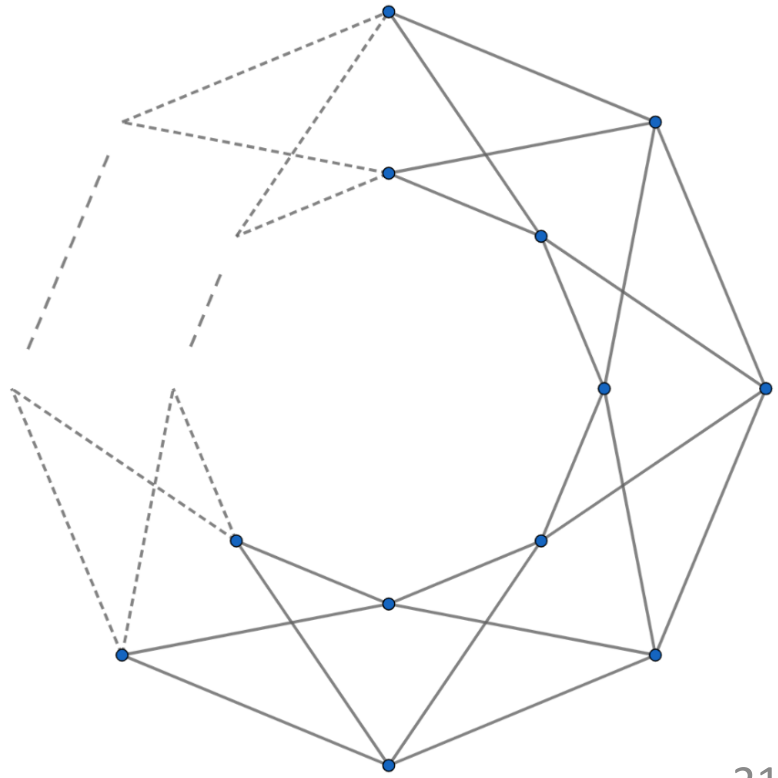
Malé grafy, na ktorých sa nadobúda maximum

- 8 vrcholov – $K_{4,4}$
- 10 vrcholov – $K_{5,5} - M$
- 12 vrcholov – $K^{O}{}_{12}$
- 14 vrcholov – $K^{O}{}_{14}$



Malé grafy, na ktorých sa nadobúda maximum

- 16 vrcholov – 2-join dvoch grafov $K_{4,4}$ ($K^{O}{}_{16}$ je druhý najlepší)
- 18 vrcholov – 2-join $K_{4,4}$ a $K_{5,5}$ - M s dvojnásobnou hranou
  ($K^{O}{}_{18}$ je druhý najlepší)



Generovanie triedy grafov ako dolného odhadu

- Pomocou dynamického programovania sme vygenerovali množinu potenciálnych kandidátov na maximálne grafy pre väčšie n
- Každý graf veľkosti n vznikne ako maximum z 2-joinov predošlých grafov a $K^{O}{}_{n}$
- Výsledkom je, že pre $n > 18$ je najlepším kandidátom graf $K^{O}{}_{n}$
- Trieda $K^{O}{}_{n}$ ponúka najlepší doteraz známy dolný odhad problému
- Súčasťou výsledkov výskumu je aj teoretický dôkaz počtu farbení grafu $K^{O}{}_{n}$ v závislosti od n

Ďakujem za pozornosť