Obsah

Kapitola 1

Terminológia

1.1 Výpočtový model

Ako výpočtový model nám poslúži k-páskový turingov stroj.

1.2 Zložitostné triedy

Definícia 1.2.1. $DTIME(T(n))$
trieda jazykov akceptovateľných deterministickými turingovými strojmi v čase $T(n)$.

Definícia 1.2.2. $NTIME(T(n))$
trieda jazykov akceptovateľných nedeterministickými turingovými strojmi v čase $T(n)$.

Definícia 1.2.3. $DSPACE(S(n))$ trieda jazykov
akceptovateľných deterministickými T-strojmi s pamäťou $S(n)$.

Definícia 1.2.4. $NSPACE(S(n))$
trieda jazykov akceptovateľných nedeterministickými T-strojmi s pamäťou $S(n)$.

Definícia 1.2.5. $P = \bigcup_{k>0} DTIME(n^k)$

Definícia 1.2.6. $NP = \bigcup_{k>0} NTIME(n^k)$

Definícia 1.2.7. $PSPACE = \bigcup_{k>0} DSPACE(n^k)$

Definícia 1.2.8. $NPSPACE = \bigcup_{k>0} NSPACE(n^k)$

Definícia 1.2.9. $EXP = \bigcup_{k>0} DTIME(2^{n^k})$

Definícia 1.2.10. $NEXP = \bigcup_{k>0} NTIME(2^{n^k})$

Kapitola 2

Hierarchie a simulácie

2.1 Označenia

Definícia 2.1.1. Funkcia $S(n)$ je páskovo konštruovateľná, ak existuje deterministický turingov stroj ktorý na každom vstupe dĺžky n nepoužije na žiadnej pracovnej páske viac ako $S(n)$ políčok a na prvej páske použije práve $S(n)$ políčok.

Definícia 2.1.2. Nech M je deterministický turingov stroj s jednou pracovnou páskou. Kód stroja M (označujeme $\langle M \rangle$) je binárny reťazec tvaru:

$$1\,1\,1\,k\acute{o}d_1\,1\,1\,k\acute{o}d_2\,1\,1\,\cdots\,1\,1\,k\acute{o}d_h\,1\,1\,1\,,$$

kde každý $k\acute{o}d_i$ je tvaru:

$$0^j 1\, 0^k 1\, 0^l 1\, 0^m 1\, 0^r 1\, 0^s 1\, 0^t\,,$$

kódujúc tak prechodovú funkciu:

$$\delta(q_j, a_k, a_l) = (q_m, d_r, a_s, d_t)$$

$$d_i \in \{-1, 0, 1\}$$

Podobne kódujeme viacpáskové turingove stroje.

2.2 Veta o pamäťovej hierarchii

Veta [o pamäťovej hierarchii]. [1] *Nech* $\log(n) \leq S_1(n) = o(S_2(n))$, *kde* $S_2(n)$ *je páskovo konštruovateľná. Potom:*

$$DSPACE(S_1(n)) \subsetneq DSPACE(S_2(n))$$

Dôkaz.

Def. prefixový kód turingovho stroja M je reťazec tvaru $1\,1 \cdots 1 \langle M \rangle$ [2]

Nech $\overline{M}$ je deterministický turingov stroj (DTS), ktorý pracuje nasledovne:

(i) Na vstupe w dĺžky n označí na pracovných páskach pamäť rozsahu $S_2(n)$.
Ak by mal $\overline{M}$ v ďalšom priebehu výpočtu použiť väčšiu pamäť ako $S_2(n)$, potom výpočet zastaví a vstup neakceptuje.

(ii) Ak vstup w nie je prefixový kód žiadneho turingovho stroja, potom $\overline{M}$ neakceptuje w.

[1] Veta hovorí v princípe o tom, že ak máme viac pamäte, rozpoznáme zložitejšie jazyky.
[2] Tak vieme získať ľubovoľne dlhý kód, čo je výhodné z technických dôvodov.

(iii) Nech w je prefixový kód nejakého turingovho stroja M. Potom $\overline{M}$ (rešpektujúc *(i)*) simuluje $2^{S_2(n)}$ krokov výpočtu stroja M na w, a $\overline{M}$ akceptuje w iff M neakceptuje w počas $2^{S_2(n)}$ krokov.

Nech M je ľub. deterministický T-stroj s pamäťovou zložitosťou $S_1(n)$. Dokážeme $L(M) \neq L(\overline{M})$ a teda ukážeme, že žiaden stroj z $DSPACE(S_1(n))$ nie je taký, ako simulujúci stroj.

Nech M má k pások, t páskových symbolov a q stavov. Potom sa M na vstupe dĺžky n buď zastaví počas $\leq T(n) = (n+2)q[(S_1(n)+1)t^{S_1(n)}]^k$ krokov, alebo sa dostane do nekonečného cyklu z dôvodu opakovania sa nejakých konfigurácií.

Nech w je dostatočne dlhý prefixový kód stroja M, kde pre $n = |w|$ platí: $\overline{M}$ je na vstupe w schopný s pamäťou $S_2(n)$ simulovať $2^{S_2(n)}$ krokov výpočtu stroja M na vstupe w a $T(n) \leq 2^{S_2(n)}$ [3]; také w existuje, lebo $\log(n) \leq S_1(n) = o(S_2(n))$.

Z *(iii)* $\Rightarrow$ $\overline{M}$ akceptuje vstup iff M neakceptuje w.

$$\Rightarrow L(M) \neq L(\overline{M})$$

Poznámka 2.2.1. $S_2(n)$ musí byť páskovo konštruovateľná, aby sme si ju vedeli ustrážiť pri $\overline{M}$, $S_1(n)$ nemusí byť.

□

Dôsledok 2.2.1. Keďže $S(n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (umocnené n-krát) je páskovo konštruovateľná, existuje jazyk na rozpoznanie ktorého stačí pamäť $S(n)$, ale nestačí pamäť (a pochopiteľne ani čas) $S(n)/\log^* n$. [4]

2.3 Veta o časovej hierarchii

Definícia 2.3.1. Funkcia $T(n)$ je časovo konštruovateľná, ak existuje deterministický T-stroj ktorý na každom vstupe dĺžky n vykoná práve $T(n)$ krokov.

Veta [o časovej hierarchii]. *Nech $n \leq T_1(n) = o(T_2(n)/\log T_1(n))$, kde $T_2(n)$ je časovo konštruovateľná. Potom $DTIME(T_1(N)) \subsetneq DTIME(T_2(n))$.*

2.4 Savitchova veta

Veta [Savitch]. *Nech $S(n) \geq \log(n)$ je páskovo konštruovateľná, potom*

$$NSPACE(S(n)) \subseteq DSPACE(S^2(n))\,.$$

Dôkaz. Nech M je ľubovoľný nedeterministický T-stroj (s pamäťou $S(n)$) majúci k-pások, q-stavov a t-páskových symbolov.
Na vstupe dĺžky n sa M môže dostať do najviac $\leq q(n+2)[(S(n)+1)t^{S(n)}]^k \leq c^{S(n)}$ rôznych konfigurácií, pre vhodnú konštantu c (nazvime ich $S(n)$-*ohraničené*). $\Rightarrow$ ak $x \in L(M)$, potom existuje akceptačný výpočet stroja M na x majúci najviac $c^{S(n)}$ krokov.

Aby sme zistili, či sa M dostane z konfigurácie C_1 do konfigurácie C_2 počas najviac i krokov výpočtu, stačí zistiť, či sa M dostane z C_1 do nejakej konfigurácie C_3 počas $\leq \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ krokov, a z C_3 do C_2 počas $\leq \lceil \frac{i}{2} \rceil$ krokov.

[3]pre dostatočne veľké n to postačí, lebo $S_2(n)$ rastie rýchlejšie ako $S_1(n)$ a dá sa využiť $\log(n) \leq S_1(n)$ z predpoladov vety na dôkaz tejto nerovnosti pre veľké n.

[4]Teda pre ľubovoľne komplikovaný problém s obrovskou zložitosťou, už pre o trošičku jednoduchšie páskové ohraničenie existujú problémy, ktoré v pôvodnom ohraničením už nejdú riešiť.

Algoritmus pre simuláciu stroja M:

begin nech x je vstup dĺžky n a nech C_0 je príslušná počiatočná konf. stroja M.
  pre každú $S(n)$-*ohraničenú* akceptačnú konfiguráciu C_F
    if `TEST` $(C_0, C_2, c^{S(n)})$ **then** `accept`.
end.

Procedúra `TEST` (C_1, C_2, i) [5]
  if $C_1 = C_2$ **alebo** M prejde z C_1 do C_2 v jednom kroku
    then return `áno`.
  if $i > 1$ **then**
    begin pre každú $S(n)$-*ohraničenú* konf. C_3 **vykonaj**
      if `TEST` $(C_1, C_3, \lceil \frac{i}{2} \rceil)$ **and** `TEST` $(C_3, C_2, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)$
        then return `áno`.
    end.
  return `nie`.
end.

Uvedený algoritmus možno implementovať na deterministickom T-stroj M' s pamäťou $O(S^2(n))$, ktorý jednu z pások používa ako zásobník (kvôli rekurzii), ktorý je zväčšený o 1 blok rozsahu $O(S(n))$ pri každom volaní procedúry `TEST`.
Do bloku sú zapisované tieto hodnoty: C_1, C_2, C_3, i, `TEST` $(C_1, C_3, \lceil \frac{i}{2} \rceil)$, `TEST` $(C_3, C_2, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)$ a adresa návratu (t.j. pre volanie medzi „**if**" a „**and**", alebo medzi „**and**" a „**then**", alebo z hlavného programu).

Aký veľký blok teda vlastne potrebujeme? Stačí blok rozsahu $O(S(n))$ (C_i sú rádovo veľkosti $S(n)$, maximálna hodnota i je $c^{S(n)}$, čo vieme zapísať do rádovo $S(n)$ cifier).

Po vykonaní jedného volania procedúry `TEST` je príslušný blok zo zásobníka odstránený. Koľko najviac blokov na zásobníku budeme mať počas simulácie? Keďže pri volaní procedúry `TEST` je hodnota i (tretieho parametra) zmenšená zhruba na polovicu, hĺbka rekurzie (a teda aj počet blokov v zásobníku) je najviac $\leq 1 + \log_2 c^{S(n)}$, čo je rádovo $O(S(n))$.
$\Rightarrow M'$ je turingov stroj s páskovou zložitosťou $O(S^2(n))$, ktorý možno prerobiť na iný turingov stroj s páskovou zložitosťou $S^2(n)$ akceptujúci ten istý jazyk (kompresiou pásky).

$\square$

2.5 Ďalšie vety

Veta 2.5.1. (a) $DTIME(T(n)) \subseteq NTIME(T(n)) \subseteq DSPACE(T(n))$ *pre každú časovo konštruovateľnú* $T(n)$.
(b) $DSPACE(S(n)) \subseteq NSPACE(S(n)) \subseteq \bigcup_c DTIME(c^{\log n + S(n)})$ *pre každú páskovo konštruovateľnú* $S(n)$.

Dôkaz (pre $NTIME(T(n)) \subseteq DSPACE(T(n))$). Nech M je ľubovoľný nedeterministický turingov stroj s časovou zložitosťou $T(n)$. Nech d je taká konštanta, že v každom kroku výpočtu M existuje najviac d možností pre ďalší krok. Nech M' je deterministický T-stroj s pamäťovou zložitosťou $T(n)$, ktorý na vstupe x dĺžky n na jednej z pások postupne generuje (v lexikografickom poradí) všetky možné reťazce dĺžky najviac $T(n)$ nad nejakou d-písmenkovou abecedou $\{a_1, a_2, ..., a_d\}$. Vždy, keď M' vygeneruje ďalší reťazec, simuluje potom možný výpočet stroja M na vstupe x s nedeterministickými krokmi reprezentovanými vygenerovaným reťazcom, a ak M v tomto výpočte akceptoval x, potom aj M' akceptuje x. A ak M neakceptoval x v žiadnom výpočte, potom ani M' neakceptuje x. $\Longrightarrow L(M) = L(M')$. $\square$

[5] Procedúra `TEST` zistí, či M prejde z C_1 do C_2 počas $\leq i$ krokov.

Dôkaz (pre $NSPACE(S(n)) \subseteq \bigcup_c DTIME(c^{\log n+S(n)})$). Nedeterministický T-stroj M s pamäťovou zložitosťou $S(n)$, ktorý má q stavov, t páskových symbolov a k pások, sa môže dostať počas všetkých možných výpočtov na vstupe x dĺžky n do $\leq (n+2)q[(S(n)+1)t^{S(n)}]^k \leq d^{\log n+S(n)}$ pre vhodnú konštantu d.

Nech G je orientovaný graf, ktorého vrcholy sú možné konfigurácie stroja M na x, a ktorého hrany sú dvojice konfigurácií (C_i, C_j) takých, že M prejde na x z C_i do C_j v 1 kroku.
$\Longrightarrow$ M akceptuje x s pamäťou $S(|x|)$ iff v G existuje cesta z počiatočnej konfigurácie do niektorej akceptačnej konfigurácie. To sa dá zistiť v polynomiálnom čase (vzhľadom na počet vrcholov grafu G) napríklad *Dijkstrovým algoritmom*. Vhodnou implementáciou takého algoritmu na T-stroji možno zistiť uvedený grafový problém v čase $\leq (d^{\log n+S(n)})^m = c^{\log n+S(n)}$ pre $c = d^m$ a vhodné m. □

2.6 Dôsledok predchádzajúcich viet

Dôsledok 2.6.1.

$$DSPACE(\log n) \subseteq NSPACE(\log n) \subseteq P \subseteq$$

$$\subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXP \subseteq NEXP$$

Poznámka 2.6.1. $NSPACE(\log n) \subseteq P$ vyplýva z časti (b) predchádzajúcej vety.

Poznámka 2.6.2. $NP \subseteq PSPACE$ vyplýva z časti (a) predchádzajúcej vety.

Poznámka 2.6.3. $PSPACE = NPSPACE$ je dôsledkom *Savitch*ovej vety.

Poznámka 2.6.4. $NPSPACE \subseteq EXP$ vyplýva z časti (b) predchádzajúcej vety.

Poznámka 2.6.5. Nie je známe, či $DSPACE(\log n) \subsetneq NP$.

Poznámka 2.6.6. Podobne tiež nie je známe, či $P \subsetneq PSPACE$.

Poznámka 2.6.7. Naproti tomu sa vie, že $NSPACE(\log n) \subsetneq PSPACE$ a $P \subsetneq EXP$.

2.7 Translačná lema

Tvrdenie 2.7.1. *Ak $NSPACE(n^4) \subseteq NSPACE(n^3)$, potom:*

$$NSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^{15}).$$

Dôkaz. Nech L_1 je ľubovoľný jazyk z triedy $NSPACE(n^{20})$, t.j. existuje nedeterministický T-stroj M_1 akceptujúci L_1 s pamäťou n^{20}.

Nech $L_2 = \{x\#^i \mid x \in L_1 \wedge |x\#^i| = |x|^5\}$. Nech M_2 je nedeterministický T-stroj, ktorý na vstupe $x\#^i$ robí nasledovné:

- najprv overí, či $|x\#^i| = |x|^5$.
- ak „áno", potom sa na vstupe $x\#^i$ správa rovnako, ako M_1 na vstupe x.

$\Rightarrow$ M_2 akceptuje L_2 s pamäťou n^4, lebo $|x\#^i| = (|x|^5)^4 = |x|^{20}$ a M_1 akceptuje L_1 s pamäťou n^{20}.
$\Longrightarrow$ $L_2 \in NSPACE(n^4)$. Z predpokladu *Tvrdenia* $\Rightarrow$ $L_2 \in NSPACE(n^3)$, tj. $\exists$ nedeterministický T-stroj M_3 akceptujúci L_2 s pamäťou n^3.

Nech M_4 je nedeterministický T-stroj, ktorý na vstupe x:

- najprv si zostrojí (na niektorej pracovnej páske) reťazec $x\#^i$ tak, aby $|x\#^i| = |x|^5$.
- potom sa na „vstupe" $x\#^i$ správa rovnako, ako M_3 na $x\#^i$.

M_4 akceptuje L_1 s pamäťou n^{15}, lebo $|x|^{15} = (|x|^5)^3 = |x\#^i|^3$ a naviac M_3 akceptuje L_2 s pamäťou n^3.

$\Longrightarrow L_1 \in NSPACE(n^{15})$. □

Translačná lema. *Nech $S_1(n)$, $S_2(n)$ a $f(n)$ sú páskovo konštruovateľné, $S_2(n) \geq n, f(n) \geq n$.*
Potom ak $NSPACE(S_1(n)) \subseteq NSPACE(S_2(n)) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow NSPACE(S_1(f(n))) \subseteq NSPACE(S_2(f(n)))$.

Tvrdenie 2.7.2. *$NSPACE(n^3) \subsetneq NSPACE(n^4)$.*

Dôkaz. Nech by $NSPACE(n^4) \subseteq NSPACE(n^3)$. Aplikáciou translačnej lemy pre $f(n) = n^3$, $f(n) = n^4$, $f(n) = n^5$ postupne dostaneme:

$$\left.\begin{array}{r} NSPACE(n^{12}) \subseteq NSPACE(n^9) \\ NSPACE(n^{16}) \subseteq NSPACE(n^{12}) \\ NSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^{15}) \end{array}\right\} \Rightarrow NSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^9)$$

$$\left.\begin{array}{r} NSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^9) \\ \text{Savitchova veta} \Rightarrow NSPACE(n^9) \subseteq NSPACE(n^{18}) \\ \text{Veta o pamäťovej hierarchii} \Rightarrow DSPACE(n^{18}) \subsetneq DSPACE(n^{20}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NSPACE(n^{20}) \subsetneq DSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^{20}) \ \underline{\textit{spor!}}$$ □

Veta 2.7.3. *Ak $\varepsilon > 0$ a $r \geq 0$ potom*

$$NSPACE(n^r) \subsetneq NSPACE(n^{r+\varepsilon})$$

2.8 Veta o medzere

Tvrdenie 2.8.1. *Existuje rekurzívna funkcia* [6] *$S(n) \geq n$, pre ktorú:*

$$DSPACE(S(n)) = DSPACE(2^{S(n)}).$$

Dôkaz. Nech $M_1, M_2, M_3, ...$ je ľubovoľné efektívne očíslovanie všetkých deterministických T-strojov (tj. z čísla i vieme algoritmicky zostrojiť M_i).

Algoritmus pre výpočet $S(n)$: Nech $S_1 < S_2 < ... < S_p$ sú všetky rôzne veľkosti použitej pamäte v čase zastavenia alebo zacyklenia sa niektorého $M_i, i \leq n$, na niektorom $x \in \{0,1\}^n$.

Simulujeme „paralelne" výpočet všetkých $M_i, i \leq n$, na všetkých $x \in \{0,1\}^n$, aby sme postupne zisťovali hodnoty z $\{S_1, ..., S_p\}$ a aby sme našli číslo $m \geq n$ (m bude n alebo niektoré z priebežne zistených čísel z $\{S_1, ..., S_p\}$) t.ž. pre m platí:

$$(*)\ \ S_i \leq m \ \text{ alebo } \ 2^m < S_i, \ \ \forall i, 1 \leq i \leq p.$$

(T.j. neexistuje $i, 1 \leq i \leq p$ také, že $m < S_i \leq 2^m$.)
Algoritmus nájde vhodné m pomocou nasledovného testu:

Ak v simulovanom kroku t pre dané m a $\forall M_i, i \leq n$ a $\forall x \in \{0,1\}^n$ platí: M_i sa na x počas t krokov zastavil alebo zacyklil s použitou pamäťou najviac m, alebo M_i na x mal už v kroku t použitej pamäte viac ako 2^m, potom zrejme pre m platí (*); v takom prípade $S(n) = m$ a algoritmus skončí.

Keďže každý $M_i, i \leq n$, na každom $x \in \{0,1\}^n$:

[6] pričom nepredpokladáme nič o jej páskovej konštruovateľnosti.

– sa niekedy zastaví alebo zacyklí (s použitou pamäťou $\leq S_p$), alebo

– niekedy použije pamäť $> 2^{\max(n,S_p)}$.

musí existovať krok, v ktorom je splnený vyššie uvedený test pre $m = \max(n, S_p) \Rightarrow$ Algoritmus sa zastaví najneskôr pri simulovaní takéhoto kroku. $\Longrightarrow$ Funkcia $S(n)$ je rekurzívna.

Nech $L \in DSPACE(2^{S_n}) \Rightarrow \exists M_k$ akceptujúci L s pamäťou $\leq 2^{S_n}$. Nech $n \geq k, x \in \{0,1\}^n$. Keďže M_k je deterministický T-stroj s pamäťou $\leq 2^{S_n}$, musí sa na x zastaviť s použitou pamäťou $S_j \leq 2^{S(n)} = 2^m$, pre nejaké $1 \leq j \leq p$. Z (*) $\Rightarrow S_j \leq m = S(n)$. $\Rightarrow M_k$ sa zastaví na každom x dĺžky $\geq k$ s pamäťou $\leq S(n)$. $\Longrightarrow$ $L \in DSPACE(S(n))$.

$\square$

Kapitola 3

NP-úplné problémy

Definícia 3.0.1. $L \subseteq \Sigma^*$ je polynomiálne transformovateľný na $L_0 \subseteq \Sigma_0^*$, ak existuje polynóm $p(n)$ a deterministický T-stroj M s časovou zložitosťou $p(n)$, ktorý vstup $x \in \Sigma^*$ pretransformuje na vstup $y \in \Sigma_0^*$ taký, že $x \in L \Leftrightarrow y \in L_0$.

Definícia 3.0.2. L_0 je NP-úplný, ak $L_0 \in NP$ a každý $L \in NP$ je polynomiálne transformovateľný na L_0.

3.1 Cookova-Levinova veta

Definícia 3.1.1. SAT je množina kódov všetkých splniteľných booleovských výrazov (SAT je jazyk nad abecedou $\{\neg, \vee, \wedge, \Leftarrow, \Leftrightarrow, (,), 0, 1\}$).

Veta [Cook-Levin]. *SAT je NP-úplný jazyk.*

Dôkaz. Je zrejmé, že $SAT \in NP$. Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je ľubovoľný NP-úplný jazyk. Dá sa ukázať, že pre L existuje polynóm $p(n)$ a nedeterministický T-stroj $M = (\Sigma', Q, \delta, q_0, q_F)$ akceptujúci L v čase $p(n)$, pričom M nemá pracovné pásky, ale môže prepisovať symboly na vstupnej (smerom doprava nekonečnej) páske.

Ľubovoľný výpočet stroja M na vstupe $x \in \Sigma^*$ majúci $p(|x|)$ krokov možno reprezentovať reťazcom $C_0C_1 \dots C_{p(|x|)}$ (nad abecedou $\Sigma' \cup Q$), kde $|C_i| = p(|x|) + 2$ pre $\forall i$ a C_i je konfigurácia $cu_iq^iv_i$, v ktorej je M v i-tom kroku (t.j. M je v stave $q^i \in Q$, v prvých $p(|x|) + 1$ políčkach pásky je slovo cu_iv_i a hlava číta najpravejší symbol slova u_i).

Nech $x \in \Sigma^*$, $|x| = n$ a D je ľub. reťazec (nad $\Sigma' \cup Q$) dĺžky $(p(n) + 1)(p(n) + 2)$, t.j. $D = D_0D_1 \dots D_{p(n)}$, $|D_i| = p(n) + 2$ pre $\forall i$. Reťazec D reprezentuje nejaký akceptačný výpočet dĺžky $p(n)$ stroja M na x práve vtedy, keď:

(1) D_0 je počiatočná konfigurácia $q_0xB^{p(n)-|x|}$ (B je „blank" symbol).

(2) D_{i+1} je konfigurácia do ktorej M môže prejsť v jednom kroku z D_i, $i = 0, 1, \dots, p(n) - 1$.

(3) $D_{p(n)}$ je niektorá akceptačná konfigurácia.

Náš cieľ je pre dané x, M, p zostrojiť (v polynomiálnom čase vzhľadom ku $|x|$) booleovský výraz $Ex = F \wedge G \wedge H \wedge I$, ktorý bude splniteľný (t.j. $Ex \in SAT$) práve vtedy, keď existuje reťazec D spĺňajúci (1), (2), (3) (t.j. $x \in L$). Tým dokážeme, L je polynomiálne transformovateľný na SAT.

Konštrukcia Ex:

Ex bude obsahovať booleovské premenné $y_{j,s}$, $1 \leq j \leq (p(n) + 1)(p(n) + 2)$ a $s \in \Sigma' \cup Q$. Interpretácia každej premennej $y_{j,s}$ je taká, že $y_{j,s} = 1$ práve vtedy, keď j-ty symbol reťazca D je symbol s.

Zostrojíme výrazy F, G, H, I tak, aby:

(a) F bol splniteľný práve vtedy, keď pre všetky j $(1 \le j \le (p(n)+1)(p(n)+2))$ *práve jedna* premenná $y_{j,s}$ $(s \in \Sigma' \cup Q)$ má hodnotu 1 — t.j. takéto hodnoty premenných $y_{j,s}$ určujú *práve jeden* reťazec D (nad $\Sigma' \cup Q$) dĺžky $(p(n)+1)(p(n)+2)$ a obrátene.

(b) výraz G resp. H resp. I „kontroloval", či reťazec D určený hodnotami premenných $y_{j,s}$ (spĺňajúci F) má vlastnosť (1) resp. (2) resp. (3).

Konštrukcia F: $F := F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_h, \quad h = (p(n)+1)(p(n)+2)$

$$F_j := \Big(\bigvee_{s \in \Sigma' \cup Q} y_{j,s}\Big) \wedge \neg\Big(\bigvee_{\substack{s \neq r \\ s,r \in \Sigma' \cup Q}} (y_{j,s} \wedge y_{j,r})\Big), \quad j = 1, 2, \ldots, h$$

Pre dané j člen $\bigvee_{s \in \Sigma' \cup Q} y_{j,s}$ [resp. člen $\neg(\bigvee_{\substack{s \neq r \\ s,r \in \Sigma' \cup Q}} (y_{j,s} \wedge y_{j,r}))$] zabezpečuje aby aspoň [resp. najviac] jedna premenná $y_{j,t}$ $(t \in \Sigma' \cup Q)$ mala hodnotu 1.

Konštrukcia G: Nech $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, $x_i \in \Sigma$ pre $\forall i$.

$$G := y_{1,c} \wedge y_{2,q_0} \wedge y_{3,x_1} \wedge y_{4,x_2} \wedge \cdots \wedge y_{n+2,x_n} \wedge y_{n+3,B} \wedge \cdots \wedge y_{p(n)+2,B}$$

t.j. G skutočne kontroluje, či D_0 je počiatočná konfigurácia $cq_0 x_1 x_2 \ldots x_n B^{p(n)-n}$.

Konštrukcia I:

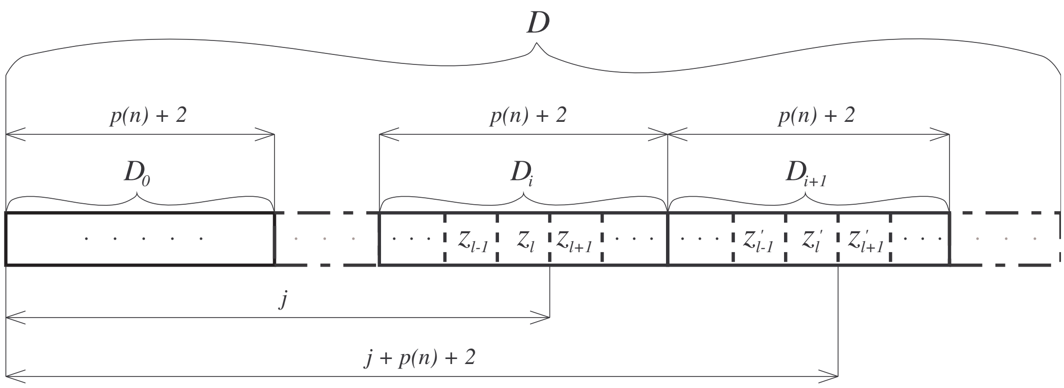
$$I := y_{t,q_F} \vee y_{t+1,q_F} \vee \cdots \vee y_{t+p(n)+1,q_F}, \quad t = p(n)(p(n)+2)+1$$

t.j. I kontroluje, či $D_{p(n)}$ obsahuje akceptačný stav q_F.

Konštrukcia H: Nech $D_i = z_1 z_2 \ldots z_{p(n)+2}$ je konf. stroja M a nech $D_{i+1} = z'_1 z'_2 \ldots z'_{p(n)+2}$ je reťazec (nad $\Sigma' \cup Q$). Reťazec D_{i+1} je konfigurácia, do ktorej sa môže M dostať v jednom kroku z konfigurácie D_i, čo je práve vtedy, keď platí (*) a (**):

(*) Ak $z_{l-1}, z_l, z_{l+1} \in \Sigma'$ (t.j. symbol z_l sa nemôže zmeniť v jednom kroku, lebo hlava je dostatočne ďaleko od neho), potom $z'_l = z_l$.

(**) Ak $z_{l-1}, z_{l+1} \in \Sigma'$ a $z_l \in Q$ (t.j. z_{l-1}, z_l, z_{l+1} sa môžu zmeniť v jednom kroku), potom $z'_{l-1} z'_l z'_{l+1}$ je taký reťazec, ktorý môže vzniknúť z reťazca $z_{l-1} z_l z_{l+1}$ v jednom kroku v súlade s prechodovou funkciou δ stroja M.



Pre každý reťazec rqs $(r, s \in \Sigma', q \in Q)$ nech:

$$K_{rqs} := \{tuv \mid t, u, v \in \Sigma' \cup Q,\ tuv \text{ môže vzniknúť z } rqs \text{ v 1 kroku v súlade s } \delta \text{ (pozri (**))}\}$$

$$\text{Nech } H_i^* = \bigwedge_{i(p(n)+2)+1 \leq j \leq (i+1)(p(n)+2)} \left(\bigwedge_{r,s,t \in \Sigma'} (y_{j-1,r} \wedge y_{j,s} \wedge y_{j+1,t} \Rightarrow y_{j+p(n)+2,s}) \right)$$

$$H_i^{**} = \bigwedge_{\cdots \leq j \leq \cdots} \left(\bigwedge_{\substack{r,s \in \Sigma' \\ q \in Q}} \left(y_{j-1,r} \wedge y_{j,q} \wedge y_{j+1,s} \Longrightarrow \bigvee_{tuv \in K_{rqs}} (y_{j+p(n)+1,t} \wedge y_{j+p(n)+2,u} \wedge y_{j+p(n)+3,v}) \right) \right)$$

$$i = 0, 1, \cdots, p(n) - 1$$

Potom $H = H_0^* \wedge H_1^* \wedge \cdots \wedge H_{p(n)-1}^* \wedge H_0^{**} \wedge H_1^{**} \wedge \cdots \wedge H_{p(n)-1)}^{**}$ je výraz, ktorý kontroluje, či $D = D_0 D_1 \cdots D_{p(n)}$ má vlastnosť (2), pretože H_i^* resp. H_i^{**} kontroluje, či pre dvojicu D_i a D_{i+1} platí (*) resp. (**).

Dokážme teraz: M akceptuje x v čase $p(|x|)$ (t.j. $x \in L$) práve vtedy, keď $Ex = F \wedge G \wedge H \wedge I$ je splniteľný (t.j. $Ex \in SAT$).

Dôkaz. Nech M akceptuje x v čase $p(n)$, $n = |x| \Longrightarrow \exists D = D_0 D_1 \cdots D_{p(n)}$ také, že platí (1), (2) a (3). Z konštrukcie výrazov F, G, H, I sa dá nahliadnuť, že hodnota každého z nich je 1 pre hodnoty $y_{j,s}$ určujúcich D (t.j. pre $y_{j,s} = 1$ iff j-ty symbol reťazca D je symbol s) a teda $Ex = F \wedge G \wedge H \wedge I$ je splniteľný.

Obrátene: Nech Ex je splniteľný. Vyberme ľubovoľné hodnoty $y_{j,s}$ také, že hodnota výrazu Ex je 1 (t.j. hodnota každého z F, G, H, I je 1). Tieto hodnoty $y_{j,s}$ určujú $D = D_0 D_1 \cdots D_{p(n)}$. Z konštrukcie F, G, H, I vyplýva, že pre D platí (1), (2) a (3) a teda M akceptuje x v čase $p(|x|)$.

Nakoniec dokážme: L je polynomiálne transformovateľný na SAT.

Dôkaz. Ex obsahuje $(p(n)+1)(p(n)+2)|\Sigma' \cup Q|$ rôznych premenných $y_{j,s}$, $(n = |x|)$, ktoré možno očíslovať binárnymi číslami dĺžky $O(\log p(n))$ a teda dĺžka kódu výrazu Ex je $O(p^2(n) \log p(n))$, t.j. $O(p^3(n))$, lebo každá $y_{j,s}$ sa v Ex vyskytuje najviac k-krát (pre ľubovoľne veľké n) (k závisí od Σ' a Q). Keďže Ex má „jednoduchú" štruktúru, možno jeho kód zostrojiť deterministickým algoritmom v polynomiálnom čase (vzhľadom ku $|x| = n$). Z toho vyplýva, že L je polynomiálne transformovateľný na SAT a teda SAT je NP-úplný jazyk.

□

3.2 Praktické NP-úplné problémy

Medzi známe NP-úplné problémy patria: SAT, $CSAT$, 3-SAT[1], Hamiltonovská kružnica, Vrcholové[2] pokrytie, Klika, Farbenie grafu k farbami, Problém obchodného cestujúceho (rozhodovacia verzia), 0-1 KNAPSACK (rozhodovacia verzia).

V tejto kapitole si ukážeme niekoľko ďalších praktických NP-úplných problémov.

3.2.1 Problém kontajnerov

Problém kontajnerov (Bin-Packing Problem): [3]

`Vstup:` $d_1, \cdots, d_n, m, C \quad (n, d_i, m, C \in N)$

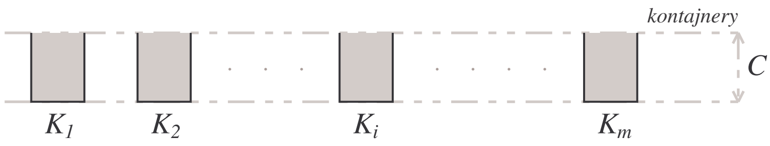
`Otázka:` Možno čísla $d_1, \cdots, d_n$ rozdeliť do m disjunktných množín tak, aby ich suma v každej množine bola najviac C?

---

[1] 2-$SAT \in P$

[2] Hranové pokrytie $\in P$

[3] Tiež **Problém hromadnej obsluhy** (Multiprocessor scheduling).



Príklad 3.2.1. Možno n objektov umiestniť do m kontajnerov s kapacitou C, kde d_i je rozsah i-teho objektu?

Príklad 3.2.2. Možno vykonať n programov na m počítačoch v čase najviac C, kde d_i je čas potrebný na vykonanie i-teho programu?

Príklad 3.2.3. Možno vyrobiť n súčiastok na m strojoch v čase najviac C, kde d_i je čas potrebný na výrobu i-tej súčiastky?

Poznámka 3.2.1. Problém kontajnerov je NP-úplný pre každé pevné $m \geq 2$.

3.2.2 Problém rozdelenia

Problém rozdelenia (Partition):

`Vstup:` $a_1, \cdots, a_n \quad (n, a_i \in N)$
`Otázka:` $\exists B \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}: \quad \sum_{i \in B} a_i = \sum_{i \in \{1,2,\cdots,n\} - B} a_i$?

Poznámka 3.2.2. Problém rozdelenia je formálny jazyk:

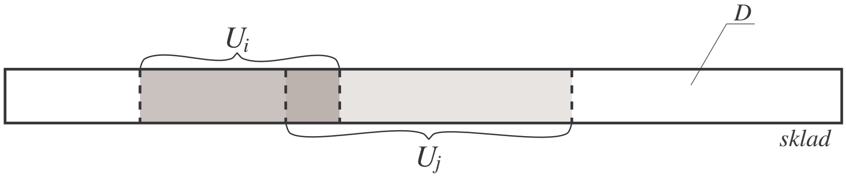
$$L = \left\{ \text{kód}(a_1)\#\text{kód}(a_2)\# \cdots \#\text{kód}(a_n) \;\middle|\; n \in N,\ a_1, \cdots, a_n \in N, \quad \exists B \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}: \sum_{i \in B} a_i = \sum_{i \in \{1,2,\cdots,n\} - B} a_i, \quad \text{kde „kód}(a_i)\text{" je binárny zápis čísla } i \right\}$$

Podobne by sme mohli formálne definovať jazyky aj pre ostatné NP-úplné problémy.

3.2.3 Riadenie skladu

Riadenie skladu (Dynamic Storage Allocation):

`Vstup:` $s_1, r_1, d_1, \cdots, s_n, r_n, d_n, D \quad (n, s_i, r_i, d_i, D \in N)$ [4]
`Otázka:` Existujú intervaly $U_1, \cdots, U_n$ (tvaru (a, b), $a, b \in N_0$) také, že $|U_i| = s_i$ a $U_i \subseteq (0, D) \forall i$, a ak $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ pričom $i \neq j$, potom buď $r_i \geq d_j$, alebo $r_j \geq d_i$? [5]



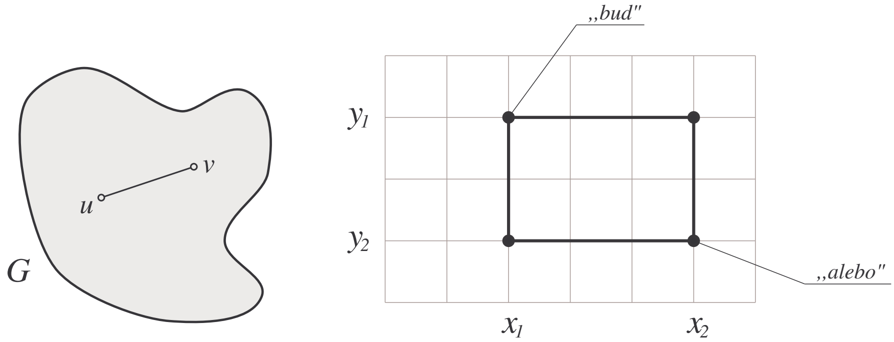
[4] kde n je počet tovarov na dočasné uskladnenie, D je kapacita skladu a s_i resp. r_i resp. d_i je veľkosť resp. čas príchodu do skladu resp. čas odchodu zo skladu i-teho tovaru.

[5] U_i vyznačuje umiestnenie i-teho tovaru.

3.2.4 Hranové vnáranie do mriežky

Hranové vnáranie do mriežky:

`Vstup:` Graf $G = (V, E)$, $m, n \in N$.
`Otázka:` Existuje injektívna funkcia $f : V \to \{1, 2, \cdots, m\} \times \{1, 2, \cdots, n\}$ taká, že ak $(u, v) \in E$, $f(u) = (x_1, y_1)$ a $f(v) = (x_2, y_2)$, potom buď $x_1 = x_2$ alebo $y_1 = y_2$?



3.2.5 Problém dostatku registrov

Problém dostatku registrov:

`Vstup:` n-členná postupnosť príkazov typu „$x \leftarrow y$" alebo „$x \leftarrow y$ `op` z", $K \in N$.
`Otázka:` Stačí K registrov na výpočet danej postupnosti príkazov?

Príklad 3.2.4. $(a * b - c)/b + a/(a * b - c) \xrightarrow{\text{kompilátor}}$

$$\left.\begin{aligned} d &\leftarrow a * b \\ e &\leftarrow d - c \\ f &\leftarrow e/b \\ g &\leftarrow a/e \\ h &\leftarrow f + g \end{aligned}\right\} \text{ 8 registrov, stačia 4?} \qquad \left.\begin{aligned} d &\leftarrow a * b \\ d &\leftarrow d - c \\ c &\leftarrow d/b \\ b &\leftarrow a/d \\ c &\leftarrow c + b \end{aligned}\right\} \text{ 4 registre}$$

3.2.6 Konštrukcia krížovky

Konštrukcia krížovky:

`Vstup:` Konečná množina slov $W \subseteq \Sigma^*$, booleovská matica $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \in N$.
`Otázka:` Nech E je množina dvojíc (i, j) taká, že $a_{ij} = 0$. Existuje funkcia $f : E \to \Sigma$ taká, že postupnosť symbolov v maximálnej súvislej nulovej časti stĺpca/riadku tvorí slovo z W ?

3.2.7 Minimálna množina testov

Minimálna množina testov:

`Vstup:` Booleovská matica $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $(m, n \in N)$, $K \in N$, $K \leq n$.
`Otázka:` Možno z matice A vynechať $n - K$ stĺpcov tak, že všetky riadky výslednej matice budú navzájom rôzne ?

Príklad 3.2.5. Opravár televízorov vie, že nastala jedna zo štyroch možných porúch. Stačia mu dva testy z troch uvedených v tabuľke ?

	T_1	T_2	T_3
p_1	1	0	1
p_2	1	1	0
p_3	0	1	1
p_4	0	0	1

Kapitola 4

NP-optimalizačné problémy

4.1 Optimalizačné versus rozhodovacie problémy

Definícia 4.1.1. **NP-optimalizačný problém** A je daný cieľom (t.j. *min* alebo *max*), polynomiálne ohraničenou reláciou $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ (t.j. pre R existuje polynóm p taký, že ak $(x, y) \in R$, potom $|y| \leq p(|x|)$) a hodnotovou funkciou $m : \Sigma^* \times \Sigma^* \to N$, pričom R aj m sú vypočítateľné deterministicky v polynomiálnom čase.

Presnejšie $\{x\#y \mid (x, y) \in R\} \in P$ a pre dvojicu $(x, y) \in R$ možno hodnotu funkcie $m(x, y)$ vypočítať deterministicky v čase $q(|x| + |y|)$, kde q je nejaký polynóm.

Príklad 4.1.1. Optimalizačný problém obchodného cestujúceho:

- cieľ je *min* (hľadáme *najlacnejšiu* Hamiltonovskú kružnicu).
- $R = \{(x, y) \mid x$ je kompletný graf s ohodnotenými hranami, y je Hamiltonovská kružnica grafu x $\}$
- $m(x, y) =$ cena Hamiltonovskej kružnice grafu x.

Pre NP-optimalizačný problém A ďalej definujeme:

Definícia 4.1.2. **Konštrukčný problém**: Pre dané x nájdi/zostroj (ak existuje) y také, že $(x, y) \in R$, pričom:

$$m(x, y) = \min_{y' \in \Sigma^*} \{m(x, y') \in R\} \text{ pre cieľ } min \text{ a podobne:}$$

$$m(x, y) = \max_{y' \in \Sigma^*} \{m(x, y') \in R\} \text{ pre cieľ } max.$$

Definícia 4.1.3. **Hodnotový problém**: Pre dané x urči (ak existuje):

$$\min_{y' \in \Sigma^*} \{m(x, y') \in R\} \text{ pre cieľ } min,$$

$$\max_{y' \in \Sigma^*} \{m(x, y') \in R\} \text{ pre cieľ } max.$$

Definícia 4.1.4. **Rozhodovací roblém**: Pre dané x a dané $k \in N$ zisti, či:

$$\exists y : (x, y) \in R \wedge m(x, y) \leq k \text{ pre cieľ } min,$$

$$\exists y : (x, y) \in R \wedge m(x, y) \geq k \text{ pre cieľ } max.$$

Poznámka 4.1.1. Rozhodovací problém možno formulovať aj ako jazyk:

$$L = \{x\#d(k) \mid x \in \Sigma^*, k \in N, \exists y : (x, y) \in R \wedge m(x, y) \leq k\} \text{ pre cieľ } min \text{ a podobne:}$$

$$L = \{x\#d(k) \mid x \in \Sigma^*, k \in N, \exists y : (x, y) \in R \wedge m(x, y) \geq k\} \text{ pre cieľ } max.$$

Lema 4.1.1. *Rozhodovací problém každého NP-optimalizačného problému patrí do NP.*

Dôkaz. Ku danému x nedeterministicky „uhádneme" y, zistíme či $(x, y) \in R$ a ak áno, vypočítame hodnotu tohto riešenia pomocou funkcie $m(x, y)$. Nakoniec overíme či je hodnota $m(x, y)$ menšia alebo nanajvýš rovná číslu k. Všetky uvedené operácie je možné vykonať (nedeterministicky) v polynomiálnom čase, ako vidno priamo z definície NP-optimalizačného problému a preto jeho rozhodovací problém patrí do NP. $\square$

Veta 4.1.2. *Nech A je ľubovoľný NP-optimalizačný problém s cieľom min*[1] *a hodnotovou funkciou m, ktorého rozhodovací problém:*

$$L = \{x\#d(k) \mid x \in \Sigma^*, k \in N, \exists y : (x, y) \in R \wedge m(x, y) \leq k\}$$

je NP-úplný. Nech možno L akceptovať deterministicky v čase $T(n)$. Potom konštrukčný problém pre A možno riešiť deterministicky v čase $r(n)T(s(n))$ pre vhodné polynómy r, s. [2] [3]

Dôkaz. (1) Pre dané x nájdeme (ak existuje) $K_x = \min_{y \in \Sigma^*}\{m(x, y) \mid (x, y) \in R\}$ takto:

Nech q je polynóm ohraničujúci čas výpočtu funkcie m. Po $q(|x| + |y|)$ krokoch výpočtu má hodnota $m(x, y)$ zapísaná v binárnom tvare najviac $q(|x|+|y|)$ číslic, t.j. $m(x, y) \leq 2^{q(|x|+|y|)} - 1 = 2^{q'(|x|)}$ pre vhodný polynóm q', nakoľko R je polynomiálne ohraničená a teda $|y| \leq p(|x|)$.

Pomocou algoritmu pre rozpoznávanie L, zisťujúc, či $x\#d(i) \in L$ pre vhodné čísla i, nájdeme $\min\{i \mid x\#d(i) \in L\} = K_x$ (ak existuje) binárnym prehľadávaním intervalu $\langle 0,\ 2^{q'(|x|)} \rangle$.

(2) Pre dané x a K_x zostrojíme (niektoré) optimálne riešenie y_x také, že $(x, y_x) \in R$ a $m(x, y_x) = K_x$ takto:

Nech $L' = \{x\#d(k)\#z | x \in \Sigma^*, k \in N, \exists y : (x, y) \in R \wedge m(x, y) \leq k$ a z je prefix reťazca $y\}$. Dá sa ľahko nahliadnuť, že $L' \in NP$ (nedeterministicky „uhádneme" y a overíme všetky podmienky). Keďže L je NP-úplný, musí byť L' polynomiálne transformovateľný na L, presnejšie každý vstup $x\#d(k)\#z$ je polynomiálne transformovateľný na nejaké w, pričom $x\#d(k)\#z \in L' \iff w \in L$.

Hľadaný reťazec y_x zostrojíme postupným predlžovaním už nájdeného prefixu z takto:

Ak $u_0 = x\#d(K_x)\#z0$ resp. $u_1 = x\#d(K_x)\#z1$ patrí do L', potom $z0$ resp. $z1$ je dlhší najdený prefix hľadaného y_x. To, či u_0 resp. u_1 patrí do L' možno zistiť tak, že u_0 resp. u_1 najprv transformujeme na w_0 resp. w_1 a potom zistíme, či w_0 resp. w_1 patrí do L. $\square$

Dôsledok 4.1.1. (a) Veta 4.1.2 platí aj keď predpoklady „L je NP-úplný" a „L možno akceptovať deterministicky v čase $T(n)$" nahradíme predpokladom „nejaký NP-úplný jazyk L_0 možno akceptovať deterministicky v čase $T(n)$".

(b) Ak $P = NP$, potom konštrukčný problém každého NP-optimalizačného problému možno riešiť deterministicky v polynomiálnom čase.

Dôkaz. (a) Dôkaz je totožný s dôkazom Vety 4.1.2, až na to, že v časti (2) jej dôkazu treba nahradiť jazyk L jazykom L_0 a overenie toho, či $x\#d(i) \in L$ (v časti (1)) sa vykoná nasledovne: Keďže $L \in NP$ (viď Lema 4.1.1) a L_0 je NP-úplný, zrejme L je polynomiálne transformovateľný na L_0, z čoho vyplýva, že $x\#d(i) \in L \iff w \in L_0$, kde w je výsledok polynomiálnej transformácie vstupu $x\#d(i)$.

(b) Nech A je ľubovoľný NP-optimalizačný problém a L_0 je ľubovoľný NP-úplný jazyk. Ak $P = NP$, potom možno L_0 akceptovať deterministicky v čase $T(n)$, kde $T(n)$ je polynóm. Z (a) vyplýva, že konštrukčný problém pre A možno riešiť deterministicky v polynomiálnom čase $r(n)T(s(n))$. $\square$

[1] pre cieľ *max* analogicky.

[2] Inak povedané, ak platia predpoklady vety, potom sa dá konštrukčný problém pre A riešiť v iba o niečo horšom čase v porovnaní s $T(n)$, pretože $T(n)$ pravdepodobne nebude polynóm.

[3] Nie je známe, či táto veta platí aj bez predpokladu NP-úplnosti jazyka L.

Príklad 4.1.2. Pre daný graf G nájdi (ak existuje) nejakú Hamiltonovskú kružnicu — formálne sa jedná o konštrukčný problém s reláciou:

$$R = \{(x, y) \mid \text{ graf } x \text{ má Hamiltonovskú kružnicu } y\},$$

$$m(x, y) = 1 \ \ \forall x, y, \ \text{ cieľ je } min \text{ alebo } max.$$

Z Vety 4.1.2 (alebo z Dôsledku 4.1.1 časť (a)) vyplýva, že zostrojiť Hamiltonovskú kružnicu grafu G je zhruba rovnako ťažké ako zistiť, či G má Hamiltonovskú kružnicu.

Veta 4.1.3. *Nech A je ľubovoľný NP-optimalizačný problém, ktorého rozhodovací problém L možno akceptovať v deterministickom čase $T(n)$ (L nemusí byť NP-úplný). Potom hodnotový problém pre A možno riešiť deterministicky v čase $r(n)T(s(n))$ pre vhodné polynómy r, s.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v časti (1) Vety 4.1.2. □

4.2 Aproximovateľnosť NP-optimalizačných problémov

Definícia 4.2.1. Nech A je NP-optimalizačný problém s cieľom *min* resp. cieľom *max*, reláciou R a hodnotovou funkciou m. Nech:

$$m^*(x) = \min_{y \in \Sigma^*} \{m(x, y) \mid (x, y) \in R\} \quad \text{pre cieľ } min,$$

$$m^*(x) = \max_{y \in \Sigma^*} \{m(x, y) \mid (x, y) \in R\} \quad \text{pre cieľ } max.$$

Hovoríme, že NP-optimalizačný problém A je *α-aproximovateľný* ($\alpha > 1$), ak existuje deterministický polynomiálny algoritmus M, ktorý pretransformuje vstup x na výstup y (t.j. $M(x) = y$) s vlastnosťou $(x, y) \in R$, pričom:

$$\alpha m^*(x) \geq m(x, M(x)) \ \ \text{(pre skoro všetky) } x) \text{ pre cieľ } min,$$

$$m^*(x) \leq \alpha m(x, M(x)) \ \ \text{(pre skoro všetky) } x) \text{ pre cieľ } max.$$

Definícia 4.2.2. Problém A je *dobre* aproximovateľný, ak je α-aproximovateľný pre každé $\alpha > 1$ ($\alpha \to 1$).

Definícia 4.2.3. Problém A je *neaproximovateľný*, ak nie je α-aproximovateľný pre žiadne $\alpha > 1$ ($\alpha \to \infty$).

Poznámka 4.2.1. Ak $P = NP$, potom konštrukčný problém každého NP-optimalizačného problému môžeme riešiť deterministicky v polynomiálnom čase[4], t.j. nemá význam uvažovať aproximovateľnosť.

Veta 4.2.1. *Ak $P \neq NP$, potom existujú NP-optimalizačné problémy A, B a C také, že:*

(i) A je dobre aproximovateľný, ale jeho rozhodovací problém nepatrí do P.

(ii) B je α-aproximovateľný (pre nejaké $\alpha > 1$), ale nie je dobre aproximovateľný.

(iii) C je neaproximovateľný.

Dôkaz. A, B a C sú rovnaké, až na hodnotovú funkciu a sú definované takto: cieľ je *max*,

$$R = \{(x, y) \mid x \text{ je graf, } y \text{ je ľub. postupnosť všetkých vrcholov grafu } x \text{ (bez opakovania)}\}$$

a hodnotová funkcia m_A resp. m_B resp. m_C pre A resp. B resp. C je definovaná takto:

[4] Pozri **Dôsledok 4.1.1 (b)**.

$$m_A(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{, ak } y \text{ je hamiltonovská kružnica grafu } x \\ |x|-1 & \text{, inak} \end{cases}$$

$$m_B(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{, ak } y \text{ je hamiltonovská kružnica grafu } x \\ 1 & \text{, inak} \end{cases}$$

$$m_C(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{, ak } y \text{ je hamiltonovská kružnica grafu } x \\ 1 & \text{, inak} \end{cases}$$

Nech $\overline{M}$ je deterministický T-stroj, ktorý v polynomiálnom čase pretransformuje graf x na postupnosť y_x vrcholov grafu x (v nejakom ľubovoľnom usporiadaní), t.j. $\overline{M}(x) = y_x$.

(i)

A je *dobre* aproximovateľný, lebo:

$$m_A^*(x) = \max_{y \in \Sigma^*}\{m_A(x,y) \mid (x,y) \in R\} \le |x| \le \alpha(|x|-1) \le \alpha m_A(x, \overline{M}(x))$$

pre každé $\alpha > 1$ a skoro všetky x.

Nech HAM je problém, či graf má hamiltonovskú kružnicu. Z definície $m_A(x,y)$ môžeme vidieť, že graf x má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď $\exists y : R(x,y) \wedge m_A(x,y) \ge |x|$, čo je práve vtedy, keď riešenie rozhodovacieho problému pre A je "áno" pre graf x a $k = |x|$.

Preto ak by sme vedeli deterministicky a v polynomiálnom čase riešiť rozhodovací problém pre A, potom by aj HAM bol riešiteľný v deterministickom polynomiálnom čase (t.j. $HAM \in P$), čo je spor s predpokladom vety $P \ne NP$, nakoľko vieme, že HAM je NP-úplný.

(ii)

B je 2-aproximovateľný, lebo:

$$m_B^*(x) = \max_{y \in \Sigma^*}\{m_B(x,y) \mid (x,y) \in R\} \le 2 \le 2m_B(x, \overline{M}(x)),$$

keďže $m_B(x,y) \in \{1,2\}$.

Predpokladajme, že problém B je *dobre* aproximovateľný a teda napríklad $\frac{3}{2}$-aproximovateľný, presnejšie:

$$2m_B(x) \le 3m_B(x, M(x)),$$

kde M je deterministický polynomiálny algoritmus z definície α-aproximovateľnosti. Pomocou algoritmu M a pomocou algoritmu m_B by sme vedeli deterministicky a v polynomiálnom čase vypočítať $m_B^*(x)$ takto:

- Ak $m_B(x, M(x)) = 1$, potom $m_B^*(x) = 1$ (pretože $m_B^*(x) \in \{1,2\}$ a teda v tomto prípade $2m_B(x) \le 3m_B(x, M(x)) = 3$).
- Ak $m_B(x, M(x)) = 2$, potom $m_B^*(x) = 2$ (pretože $2 = m_B(x, M(x)) \le m_B^*(x) \le 2$).

Z definície m_B vyplýva, že $2 = m_B^*(x) = \max_{y \in \Sigma^*}\{m_B(x,y) \mid (x,y) \in R\}$ práve vtedy, keď $\exists y : (x,y) \in R \wedge m_B(x,y) = 2$, čo je práve vtedy, keď graf x má hamiltonovskú kružnicu.

Preto ak by sme vedeli deterministicky a v polynomiálnom čase vypočítať $m_B^*(X)$, potom by $HAM \in P$, čo je spor s predpokladom $P \ne NP$.

(iii)

Predpokladajme, že C je α-aproximovateľný pre nejaké $\alpha > 1$, teda:

$$m_C^*(x) = \max_{y \in \Sigma^*}\{m_C(x,y) \mid (x,y) \in R\} \le \alpha m_C(x, M(x)),$$

kde M je deterministický polynomiálny algoritmus z definície α-aproximovateľnosti. Pomocou algoritmu M a algoritmu pre m_C by sme vedeli deterministicky v polynomiálnom čase vypočítať aj $m_C^*(x)$ pre $|x| > \alpha$ takto:

- Ak $m_C(x, M(x)) = 1$, potom $m_C^*(x) = 1$ (lebo inak by $|x| = m_C^*(x) \leq \alpha m_C(x, M(x)) = \alpha$, čiže $|x| \leq \alpha$, čo je spor s predpokladom $|x| > \alpha$).
- Ak $m_C(x, M(x)) = |x|$, potom $m_C^*(x) = |x|$ (lebo inak by $1 = m_C^*(x) \geq m_C(x, M(x)) = |x|$, čo je spor s predpokladom $|x| > \alpha > 1$).

Z definície $m_C(x,y)$ vidíme, že pre $|x| > 1$ platí: $|x| = m_C^*(x) = \max_{y \in \Sigma^*}\{m_C(x,y) \mid (x,y) \in R\}$ práve vtedy, keď $\exists y : (x,y) \in R \wedge m_C(x,y) = |x|$, čo je práve vtedy, keď x má hamiltonovskú kružnicu.

Preto ak by sme vedeli deterministicky a v polynomiálnom čase vypočítať $m_C^*(x)$, potom by $HAM \in P$, čo je spor s predpokladom $P \neq NP$.

$\square$

Veta 4.2.2. *Ak $P \neq NP$, potom NP-optimalizačný* „problém obchodného cestujúceho" (POC) *je neaproximovateľný.*

Dôkaz. Predpokladajme naopak, že POC je α-aproximovateľný pre nejaké α. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf, a nech $G' = (V, V \times V, cena)$ je kompletný graf s ohodnotenými hranami taký, že:

$$cena(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{, ak } (i,j) \in E \\ \alpha|V| + 1 & \text{, ak } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Nech M je α-aproximačný deterministický polynomiálny algoritmus, ktorý z grafu G' zostrojí jeho Hamiltonovskú kružnicu s cenou $\leq \alpha m^*(G')$, t.j. $cena(G', M(G')) \leq \alpha m^*(G')$, kde $m^*(G')$ je cena najlacnejšej hamiltonovskej kružnice v G'. Funkcia *cena* je funkcia m z definície NP-optimalizačných problémov, a relácia R pre POC je rovnaká, ako v dôkaze Vety 4.2.1.

Platí: $m^*(G') \leq cena(G', M(G')) \leq \alpha m^*(G')$ a cena *každej* hamiltonovskej kružnice grafu G' je buď $|V|$ alebo aspoň $\alpha|V| + 1$ (pretože $cena(i,j) \in \{1,\ \alpha|V| + 1\}$). Teda:

- Ak $m^*(G') = |V|$, potom $|V| = m^*(G') \leq cena(G', M(G')) \leq \alpha m^*(G') = \alpha|V|$.
- Ak $m^*(G') \geq \alpha|V| + 1$, potom $\alpha|V| + 1 \leq m^*(G') \leq cena(G', M(G'))$.

Suma sumárum, G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď $m^*(G') = |V|$, čo je práve vtedy, keď $cena(G', M(G')) \leq \alpha|V|$. Môžeme teda uzavrieť, že pomocou algoritmu M by bolo možné riešiť HAM, čo je spor s $P \neq NP$. $\square$

Veta 4.2.3. *Ak $P \neq NP$, potom:*

(1) „Maximálna klika grafu" *(jej nájdenie) a* „Najdlhšia cesta v grafe medzi dvoma danými vrcholmi" *sú neaproximovateľné NP-optimalizačné problémy.*

(2) „Bin-packing" *(problém kontajnerov) je $\frac{3}{2}$-aproximovateľný, ale nie je $(\frac{3}{2}-\varepsilon)$-aproximovateľný pre žiadne $\varepsilon > 0$ (pokiaľ $P \neq NP$).*

(3) „POC s trojuholníkovou nerovnosťou" *je $\frac{3}{2}$-aproximovateľný ale nie je dobre aproximovateľný.*

(4) „0-1 Knapsack" *(problém batoha) je dobre aproximovateľný NP-optimalizačný problém.*

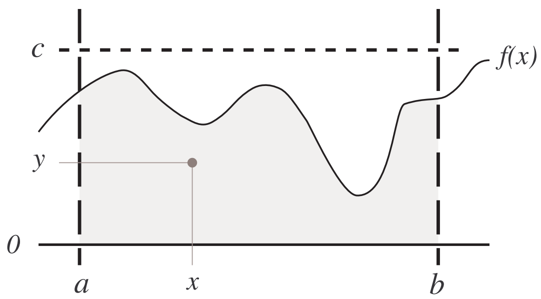
Kapitola 5

Pravdepodobnostné algoritmy

5.1 Výpočet určitého integrálu

Úvodom spomenieme snáď najznámejšiu a pritom najjednoduchšiu metódu pre výpočet určitého integrálu v tvare $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pravdepodobnostným *Monte-Carlo* algoritmom.

Budeme pre jednoduchosť predpokladať, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b\rangle$ nezáporná a zhora ohraničená konštantou c, t.j. $\forall x \in \langle a, b\rangle : 0 \le f(x) \le c$. Ďalej `rand` je generátor náhodných čísel s uniformnou distribúciou na intervale $\langle a, b\rangle$.



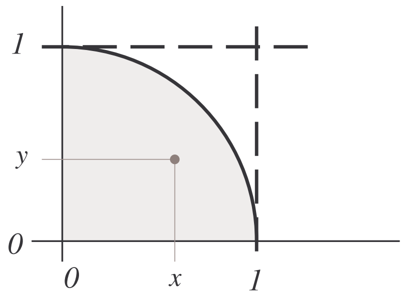
Algoritmus pre výpočet $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

$k \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  begin
    $x \leftarrow$ `rand`(a, b)
    $y \leftarrow$ `rand`$(0, c)$
    if $y \le f(x)$ **then** $k \leftarrow k + 1$
  end
integrál $\leftarrow kc(b - a)/n$.

Poznámka 5.1.1. Pre $0 < \varepsilon$, $\delta < 1$ platí: $|\mathit{integrál} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon$ s pravdepodobnosťou aspoň $(1 - \delta)$ pre $n \ge \lceil 1/(4\varepsilon^2\delta)\rceil$.

5.2 Výpočet čísla π

Spomenieme jednoduchý pravdepodobnostný algoritmus, ktorý myšlienkovo vychádza z uvedenej *Monte-Carlo* metódy pre výpočet určitého integrálu.



Algoritmus pre vyčíslenie π :

$k \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  begin
    $x \leftarrow \texttt{rand}(0,1)$
    $y \leftarrow \texttt{rand}(0,1)$
    if $x^2 + y^2 \leq 1$ **then** $k \leftarrow k+1$
  end
$\pi \leftarrow 4k/n$.

5.3 Testovanie veľkých prvočísel

Je skutočnosťou, že zatiaľ nepoznáme dostatočne rýchly deterministický algoritmus na testovanie prvočíselnosti veľkých (v zmysle dekadicky aspoň 100-ciferných) čísel. Uvedieme jeden známy praktický algoritmus, ktorý sa snaží riešiť tento problém.

Miller-Rabinov test:
`Vstup:` nepárne $b > 2$, $r \in N$.

Nech $[2^t \mid (b-1)] \wedge [2^{t+1} \nmid (b-1)]$
  for $i \leftarrow 1$ **to** r **do**
    begin
      vyber náhodne celé a $(1 \leq a \leq b-1)$
`1.`   **if** $x^2 \equiv 1 \pmod{b}$ **and** $x \not\equiv \pm 1 \pmod{b}$
          pre nejaké $x \in \{a^{(b-1)/2}, a^{(b-1)/4}, a^{(b-1)/8}, \cdots, a^{(b-1)/2^t}\}$
        then return „b `určite nie je prvočíslo`" (s absolútnou istotou)
`2.`   **if** $a^{b-1} \not\equiv 1 \pmod{b}$
        then return „b `určite nie je prvočíslo`" (s absolútnou istotou) [1]
    end
`3.` **return** „b `je prvočíslo`" (s pravdepodobnosťou omylu nanajvýš 2^{-r}).

Veta [**Miller-Rabin**]. *Ak b nie je prvočíslo, potom náhodne vybrané číslo a $(1 \leq a \leq b-1)$ spĺňa podmienku v príkaze* `1.` *alebo* `2.` *s pravdepodobnosťou aspoň $\frac{1}{2}$.*

Dôsledok 5.3.1. Tvrdenie v príkaze `3.` je pravdivé.

Dôvod. Pravdepodobnosť, že ani jedno z r náhodne vybratých čísel a nespĺňa podmienku v príkaze `1.` a ani podmienku v príkaze `2.` je nanajvýš $\frac{1}{2}^r$. ☐

[1] na základe Fermatovej vety.

Poznámka 5.3.1. Existuje implementácia *Miller-Rabinovho* testu (založená na princípe procedúry `Mod-Exp`, ktorú upresníme v kapitole *Modulárna aritmetika*) s časovou zložitosťou $O(rm^3)$, ak b je najviac m-bitové číslo.

Poznámka 5.3.2. Pre $m = 340$ (t.j. b je dekadicky 100-ciferné číslo) a $r = 50$:

$$rm^3 \approx 2.10^9, \quad 2^{-r} \approx 10^{-15}$$

5.4 Pravdepodobnostné generovanie veľkých prvočísel

Problémom, ktorým sa budeme zaoberať v tejto stati je nájdenie „efektívneho" spôsobu náhodného generovania veľkých (rádovo 100-ciferných) prvočísel. Na základe znalosti *Miller-Rabinovho* testu sa nám ponúka takýto algoritmus:

(1) Generátorom náhodných čísel vytvor náhodné 100-ciferné číslo b.

(2) Zisti, či b je prvočíslo (*Miller-Rabinov* test).

(3) Ak `nie`, opakuj (1) a (2) až do nájdenia prvočísla.

5.5 RSA šifrovací systém

Začnime stručnou charakteristikou šifrovacieho systému RSA a jeho vlastnosťami.

– Každý účastník U komunikačnej siete vlastní:
  - verejný kľúč P_U,
  - tajný kľúč S_U,

  pričom oba tieto kľúče si vytvára sám.

– Verejné kľúče sú *známe všetkým* účastníkom.

– Tajné kľúče si udržujú účastníci *v tajnosti*.

– Pre kľúče platí:
  - P_U, S_U sú jedno-jednoznačné funkcie z D do D (kde D je množina správ).
  - $S_U(P_U(M)) = M = P_U(S_U(M))$ pre ľubovoľnú správu z D.

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & B & & \\ M & \longrightarrow & \boxed{P_B} & \xrightarrow{P_B(M)} & \boxed{S_B} & \longrightarrow & S_B(P_B(M)) = M \end{array}$$

5.5.1 Vytvorenie kľúčov

V tejto stati si popíšeme spôsob vytvárania verejného resp. tajného kľúča pre účastníka komunikačnej siete U.

(1) Vyber náhodné veľké (dekadicky 100-ciferné) prvočísla p, q.

(2) Vypočítaj $n = pq$, $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.

(3) Vyber nepárne číslo e nesúdeliteľné s $\phi(n)$. Presnejšie, pomocou procedúry `Euklid` (pozri kapitolu *Modulárna aritmetika*) nájdi $e \in \{3, 5, 7, \dots\}$, a celé x, y také, že $1 = \phi(n)x + ey$.

(4) Vypočítaj $d = e^{-1} \bmod \phi(n)$, t.j. prvok inverzný k e v zvyškovej triede čísel modulo $\phi(n)$, presnejšie: [$d \leftarrow y$; **if** $y < 0$ **then** $d \leftarrow y + \phi(n)$]. Potom pre d platí $1 = (e \cdot d) \bmod \phi(n)$, $d \geq 0$.

(5) Nech $D = Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Potom:

- $P_U(M) = M^e \bmod n$,
- $S_U(M) = M^d \bmod n$,

pre všetky správy $M \in D$.

Na výpočet $P_U(M)$ a $S_U(M)$ použi procedúru `Mod-Exp` (pozri kapitolu *Modulárna aritmetika*). Platí:

$$P_U(S_U(M)) = M = S_U(P_U(M)) \quad (\forall\, M \in D)$$

5.5.2 Bezpečnosť RSA

- AKO zistiť S_U? Keďže P_U (t.j. dvojica (e, n)) je známa, stačí zistiť d – potom budeme poznať (d, n), teda S_U).
- AKO zistiť d, keď poznáme e, n? Nie je známy "lepší" spôsob, než z čísla n zistiť p, q, následne $\phi(n)$ a na záver d (z čísel $\phi(n)$ a e).
- AKO zistiť p, q z čísla n ? *Ťažko!* (aspoň podľa doterajších skúseností, a na tom je založená bezpečnosť RSA).

Kapitola 6

Modulárna aritmetika

Lema 6.0.1. *Nech a, b, n sú najviac m-bitové čísla.* Jednoduché *algoritmy pre výpočet $a \cdot b$, $\lfloor a/b \rfloor$, $a \bmod n = a - \lfloor a/n \rfloor n$ vyžadujú $O(m^2)$ bitových operácií.*

6.1 Výpočet $a^b \bmod n$

procedure `Mod-Exp` (a, b, n):

Nech $b_m b_{m-1} \dots b_0$ je bin. reprezentácia čísla b.
$d \leftarrow 1$
for $i \leftarrow m$ **to** 0 **do**
  begin
1. $d \leftarrow (d \cdot d) \bmod n$
2.   **if** $b_i = 1$ **then** $d \leftarrow (d \cdot a) \bmod n$
  end
return d.

Lema 6.1.1. *Procedúra* `Mod-Exp` *vráti $d = a^b \bmod n$ v čase $O(m^3)$, ak a, b, n sú najviac m-bitové čísla.*

Dôkaz. Nech $b = \sum_{i=0}^{m} b_i 2^i$, $b_i \in \{0, 1\}$ $\forall i$. Potom:

$$\begin{aligned} \lfloor b/2^i \rfloor &= b_m 2^{m-i} + b_{m-1} 2^{m-i-1} + \dots + b_i 2^0 \\ \lfloor b/2^{i-1} \rfloor &= b_m 2^{m-i+1} + b_{m-1} 2^{m-i} + \dots + b_i 2^1 + b_{i-1} 2^0 = 2\lfloor b/2^i \rfloor + b_{i-1} \end{aligned}$$

z čoho vyplýva:

$$a^{\lfloor b/2^{i-1} \rfloor} = a^{2\lfloor b/2^i \rfloor + b_{i-1}} = a^{\lfloor b/2^i \rfloor} \cdot a^{\lfloor b/2^i \rfloor} \cdot a^{b_{i-1}} \qquad (*)$$

Ak po vykonaní riadkov `1.` a `2.` s parametrom i platí $d = a^{\lfloor b/2^i \rfloor} \bmod n$, potom po vykonaní týchto riadkov s parametrom $i-1$ platí $d = a^{\lfloor b/2^{i-1} \rfloor} \bmod n$, lebo:

$$\begin{aligned} (p \cdot q) \bmod n &= ((p \bmod n) \cdot (q \bmod n)) \bmod n, \\ (p \cdot q) \bmod n &= ((p \bmod n) \cdot q) \quad \bmod n, \end{aligned}$$

pre všetky p, q, n. Navyše z `(*)` vyplýva:

$$a^{\lfloor b/2^{i-1} \rfloor} \bmod n = \underbrace{(\overbrace{(((\underbrace{a^{\lfloor b/2^i \rfloor} \bmod n}_{d}) \cdot (\underbrace{a^{\lfloor b/2^i \rfloor} \bmod n}_{d})) \bmod n}^{\text{riadok 1.}}) \cdot a^{b_{i-1}}) \bmod n}_{\text{riadok 2.}}$$

Teda $d = a^{\lfloor b/2^0 \rfloor} \bmod n = a^b \bmod n$ po vykonaní `Mod-Exp` (a, b, n). □

6.2 Najväčší spoločný deliteľ – nsd(a, b)

Z Euklidovho algoritmu vieme, že $\text{nsd}(a, b) = \text{nsd}(b, a \bmod b)$.

Veta 6.2.1. $(\forall a \in N)(\forall b \in N_0)$ *existujú celé* x, y *také, že* $\text{nsd}(a, b) = ax + by$, $|x| \leq b$, $y \leq a$.

Výpočet $d = \text{nsd}(a, b)$; x; y:

<u>**procedure**</u> `Euklid` $(\overbrace{a}^{r_i}, \overbrace{b}^{s_i})$:

  if $b = 0$ **then return** $(a, 1, 0)$

  $(d, z, x) \leftarrow$ `Euklid` $(\underbrace{b}_{r_{i+1}}, \underbrace{\overbrace{a}^{r_i} \bmod \overbrace{b}^{s_i}}_{s_{i+1}})$

  $y \leftarrow z - \lfloor a/b \rfloor x$

  return (d, x, y)

end

Lema 6.2.2. *Procedúra* `Euklid` *vráti* (d, x, y) *také, že* $d = \text{nsd}(a, b) = ax + by$, $|x| \leq b$, $|y| \leq a$, *v čase* $O(m^3)$, *ak* a, b *sú najviac* m*-bitové čísla* ($a > 0$, $b \geq 0$).

Dôkaz. Dôkaz korektnosti tohto algoritmu vyplýva z algebry, a tak sa budeme zaoberať výlučne jeho časovou zložitosťou.

Nech r_i resp. s_i je hodnota prvého resp. druhého vstupného parametra procedúry `Euklid` v i-tom rekurzívnom volaní. Nech je procedúra `Euklid` volaná k-krát ($k \geq 4$). Potom platí:

(a) $1 \leq s_i < r_i$ pre $2 \leq i \leq k - 1$,

(b) $r_i/2 > r_{i+2}$ pre $2 \leq i \leq k - 2$.

Dôvod pre (a) : Keďže je procedúra volaná k-krát, musí platiť $s_k = 0$ a $s_i \geq 1$ pre $i < k$. Zrejme platí: $s_{i+1} = r_i \bmod s_i < s_i = r_{i+1}$.

Dôvod pre (b) : Uvažujme dva prípady:

(1) $s_i \leq r_i/2 \implies r_{i+2} = s_{i+1} = r_i \bmod s_i < s_i \leq r_i/2$.

(2) $s_i > r_i/2 \implies 2 > r_i/s_i > 1$ (lebo $r_i > s_i \geq 1$, pozri (a)) $\implies \lfloor r_i/s_i \rfloor = 1 \implies r_{i+2} = s_{i+1} = r_i \bmod s_i = r_i - \lfloor r_i/s_i \rfloor s_i = r_i - s_i < r_i/2$.

Z (b) vyplýva, že $k = O(\log r_2) = O(m)$, lebo a, b (a teda aj $r_2 = b$) sú najviac m-bitové čísla a počas každých dvoch volaní (počnúc druhým) sa hodnota prvého vstupného parametra zmenší aspoň na polovicu.

Teda celkový čas výpočtu je $O(m^3)$, lebo (možno dokázať, že) hodnoty vstupných aj výstupných parametrov sú v každom rekurzívnom volaní procedúry `Euklid` najviac m-bitové čísla.

□

Kapitola 7

Kolmogorovská zložitosť

Nech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ je *efektívne očíslovanie* všetkých programov (napr. v *C++* alebo T-stroje), t.j. z čísla i vieme algoritmicky zostrojiť A_i a obrátene, a nech $A_i : B^* \to B^*$ pre všetky i.

Problém: Aké (minimálne) množstvo informácie postačí na *algoritmickú* konštrukciu daného objektu (reťazca) x?

Príklad 7.0.1. Ak x je rozvoj čísla π na n miest, stačí poznať n a algoritmus generujúci π na ľubovoľný počet miest.

Riešenie problému: Nájdi „najkratšiu" dvojicu (m,p) takú, že $A_m(p) = x$, kde $m \in N$ a $p \in B^*$; dĺžka kódu dvojice (m,p) je množstvo postačujúcej informácie.

Definícia 7.0.1. Nech $m \in N$, $p \in B^*$. Kód dvojice (m,p) je reťazec $\langle m,p\rangle := 1^{|\overline{m}|}\, 0\, \overline{m}\, p$, kde $\overline{m} \in B^*$ je číslo m v binárnom tvare.

Príklad 7.0.2. $\langle 6, 1001\rangle = 1^{|110|}\, 0\, 110\, 1001 = 111\, 0\, 110\, 1001$, naznačujúc jednoznačnú spätnú rekonštruovateľnosť dvojice.

Fakt 1. (a) $|\langle m,p\rangle| = |1^{|\overline{m}|}\, 0\, \overline{m}\, p| = 2|\overline{m}|+1+|p| \leq 2\log_2 m+3+|p|$, pretože platí $|\overline{m}| \leq 1+\log_2 m$.
(b) $(m,p) \neq (l,q) \iff \langle m,p\rangle \neq \langle p,q\rangle$

Definícia [Kolmogorovská zložitosť]. Kolmogorovská zložitosť reťazca $x \in B^*$:

$$C(x) := \min\left\{|\langle m,p\rangle| : m \in N,\, p \in B^*,\, A_m(p) = x\right\}.$$

Príklad 7.0.3. $C(\pi_n) \leq \log(n) + O(1)$, kde π_n je binárny rozvoj čísla π na n miest.

Dôvod. $\exists A_l \forall n : A_l(\overline{n}) = \pi_n \Longrightarrow C(\pi_n) \leq |\langle l,\overline{n}\rangle| \leq 2\log l + 3 + |\overline{n}| \leq \underbrace{2\log l + 4}_{O(1)} + \log n.$ □

Príklad 7.0.4. $C(y_n) \leq \log\log\log\log|y_n| + O(1)$, kde $y_n = \overbrace{11\ldots1}^{2^{2^{2^n}}}$.

Dôvod. $\exists A_m \forall n : A_m(\overline{n}) = y_n$, potom:

$$\begin{aligned} C(y_n) &\leq |\langle m,\overline{n}\rangle| \\ &\leq 2\log m + 3 + \overline{n} \\ &\leq 2\log m + 4 + \log n \\ &= \log n + O(1) \\ &= \log\log\log\log 2^{2^{2^n}} + O(1) \\ &= \log\log\log\log|y_n| + O(1) \end{aligned}$$

□

Fakt 2. Existuje $c \geq 0$ také, že $C(x) \leq |x| + c$ pre ľubovoľný reťazec $x \in B^*$.

Dôkaz. $\exists A_m : A_m(x) = x, \forall x \in B^* \implies C(x) \leq |\langle m, x \rangle| \leq |x| + \underbrace{\log m + 3}_{c}$.

□

Definícia [c-nestlačiteľnosť]. Reťazec $x \in B^*$ je c-nestlačiteľný ($c \geq 0$), ak $C(x) \geq |x| - c$.

Lema 7.0.3. *Aspoň $2^n(1 - 2^{-c}) + 1$ reťazcov dĺžky n je c-nestlačiteľných.* [1]

Dôkaz. Nech M je množina všetkých c-nestlačiteľných reťazcov dĺžky n, a ďalej nech $M' = \{0,1\}^n - M$.

Pre ľubovoľný reťazec $x \in M'$ (t.j. stlačiteľný aspoň o $c + 1$ bitov) existuje dvojica (m_x, p_x), taká, že $A_{m_x}(p_x) = x$, pričom $C(x) = |\langle m_x, p_x \rangle| < |x| - c = n - c$, teda existuje vzor kratší ako $n - c$.

Počet reťazcov tvaru $\langle m_x, p_x \rangle$ kde $x \in M'$ je najviac $2^{n-c} - 1$ (počet úplne všetkých reťazcov dĺžky menšej ako $n - c$).

Ak $x, y \in M'$, $x \neq y$, potom $\langle m_x, p_x \rangle \neq \langle m_y, p_y \rangle$, lebo $x \neq y \Rightarrow A_{m_x}(p_x) \neq A_{m_y}(p_y) \Rightarrow (m_x, p_x) \neq (m_y, p_y) \Longrightarrow_{\text{Fakt 1 (b)}} \langle m_x, p_x \rangle \neq \langle m_y, p_y \rangle$.

Nakoniec môžeme povedať, že mohutnosť množiny M' je menšia ako počet reťazcov tvaru $\langle m_x, p_x \rangle$, teda ako $2^{n-c} - 1$, čiže $|M| = |\{0,1\}^n| - |M'| \geq 2^n - (2^{n-c} - 1) = 2^n(1 - 2^{-c}) + 1$. □

Dôsledok 7.0.1. Pre každý kompresný program A a pre každú konštantu $c \geq 0$ existuje $c' \geq 0$ také, že $|A(x)| \geq |x| - c'$ pre každý c-nestlačiteľný reťazec $x \in B^*$. [2]

Dôvod. Nech A_j je „dekompresný" program ku A, t.j. $A_j(A(x)) = x$ pre ľubovoľný reťazec $x \in B^*$. Preto pre každé c-nestlačiteľné $x \in B^*$ platí:

$$|x| - c \leq C(x) \leq |\langle j, A(x) \rangle| \leq 2 \log j + 3 + |A(x)|,$$

t.j. $c' = c + 2 \log j + 3$. □

Veta 7.0.4. *Funkcia $C(x)$ je totálna, ale nie je rekurzívna.*

Dôkaz. Totálnosť vyplýva z dôkazu Faktu 2. Pre všetky n nech x_n je prvý (v lexikografickom usporiadaní) binárny reťazec, taký, že $n \leq C(x_n)$. Nech by $C(x)$ bola rekurzívna. To by znamenalo, že existuje algoritmus A_k, taký, že $A_k(\overline{n}) = x_n$ pre všetky n, kde $\overline{n}$ je číslo n v binárnom tvare. Teda:

$$C(x_n) \leq |\langle k, \overline{n} \rangle| \leq 2 \log k + 3 + |\overline{n}| \leq 2 \log k + 4 + \log n$$

lebo $|\overline{n}| \leq 1 + \log n$, čo je v spore s $n \leq C(x_n)$ pre dosť veľké n. □

Veta 7.0.5. *Existuje totálna rekurzívna funkcia $g(t, x)$ (monotónne nerastúca v t), taká, že:*

$$\lim_{t \to \infty} g(t, x) = C(x).$$

Dôkaz. Nech $A_m(x) = x$ pre všetky $x \in B^*$, t.j. $C(x) \leq |\langle m, x \rangle|$ pre všetky $x \in B^*$. Potom:

$$g(t, x) = \min\Big(\{ |\langle j, p \rangle| : A_j(p) = x \text{ počas } \leq t \text{ krokov; } |\langle j, p \rangle| < |\langle m, x \rangle| \} \cup \{ |\langle m, x \rangle| \} \Big).$$

□

[1] Ako dôsledok, aspoň jeden reťazec dĺžky n je nestlačiteľný.

[2] Teda c-nestlačiteľné reťazce sa nedajú veľmi stlačiť žiadnym kompresným programom.

Veta 7.0.6. *Ak A'_1, A'_2, A'_3, … je iné efektívne očíslovanie všetkých programov a C' je príslušná Kolmogorovská zložitosť, potom existuje konštanta c, taká, že:*

$$|C(x) - C'(x)| \le c\,, \quad \forall x \in B^*$$

Dôkaz. Nech A je program, ktorý zo vstupu $\langle l, q\rangle$ urobí výstup $A_l(q)$ pre všetky $l \in N$, $q \in B^*$.[3] Keďže $A = A'_k$ pre nejaké k, platí: $A'_k(\langle l, q\rangle) = A_l(q)$. Nech $C(x) = |\langle m, p\rangle|$, kde $A_m(p) = x$. Nakoľko $A'_k(\langle m, p\rangle) = A_m(p) = x$, potom:

$$C'(x) \le |\langle k, \langle m, p\rangle\rangle| = |1^{|\overline{k}|}\, 0\, \overline{k}\, \langle m, p\rangle| = 2|\overline{k}| + 1 + |\langle m, p\rangle| = 2|\overline{k}| + 1 + C(x).$$

a podobne $C(x) \le 2|\overline{k'}| + 1 + C'(x)$ pre nejaké k'. □

[3]Program A je univerzálny stroj: na vstupe $\langle l, q\rangle$ simuluje A_l na vstupe q.