Úlohy ohľadom indukcie, dôkazov ako takých a iné.

$\boxed{1.}$ Pre $a, b, x > 0$ dokážte:

a) $x + \frac{1}{x} \geq 2$,

b) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$\boxed{2.}$ Dokážte nasledujúce tvrdenia:

a) prvočísel je nekonečne veľa,

b) $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{3.}$ Dokážte pre každé n z $\mathbb{N}$:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $k + 2k + 3k + \cdots + nk = \frac{n(k+nk)}{2}$,

c) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

$\boxed{4.}$ Dokážte pre každé n z $\mathbb{N}$:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

b) $1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$.

$\boxed{5.}$ $\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big) : \Big(n \geq 2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}\Big)$

$\boxed{6.}$ Na aký maximálny počet častí rozdelí rovinu n priamok?

$\boxed{7.}$ Dokážte, že ak $x_1 > 1$ a $x_2 < 1$ tak $x_1 + x_2 > x_1x_2 + 1$.

$\boxed{8.}$ Dokážte: $\big(\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, \infty)\big) : (x_1x_2 \cdots x_n = 1 \Rightarrow x_1 + x_1 + \cdots + x_n \geq n)$.

$\boxed{9.}$ Dokážte, že pre všetky kladné $x_1, x_2, \cdots, x_n$ platí

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n\,.$$

$\boxed{\textbf{bonus1}.}$ Dokážte, že pre každé kladné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n}$$

Nový pojem 1 Fibonacciho postupnosť *je postupnosť čísel* $F_0, F_1, \ldots$ *spĺňajúce tieto podmienky:*

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ (pochopiteľne pre } n > 1\text{)} \end{aligned}$$

Rada do života: Keď sa stretneme s nejakou novou definíciou, je dobré si ju "*vyskúšať*", že čo nám vlastne hovorí. V našom prípade to môžeme urobiť tak, že si vypíšeme prvých niekoľko členov. ♡

$\boxed{10.}$ Kleofáš má vydláždiť chodbu s rozmermi $2 \times n$ dlaždicami s rozmermi 2×1, resp. 1×2. Dlaždice pritom nesmie lámať ani ohýbať. Koľkými spôsobmi to môže spraviť?

$\boxed{11.}$ Dokážte: $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$.

$\boxed{12.}$ Dokážte: $1 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}$.

$\boxed{13.}$ Dokážte: $F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$.

$\boxed{\textbf{bonus2}.}$ Dokážte: $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

$\boxed{\textbf{bonus3}.}$ Zistite (a dokážte:) čomu sa rovná $\mathrm{NSD}(F_n, F_m)$. $\mathrm{NSD}(a, b)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel a a b.